This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

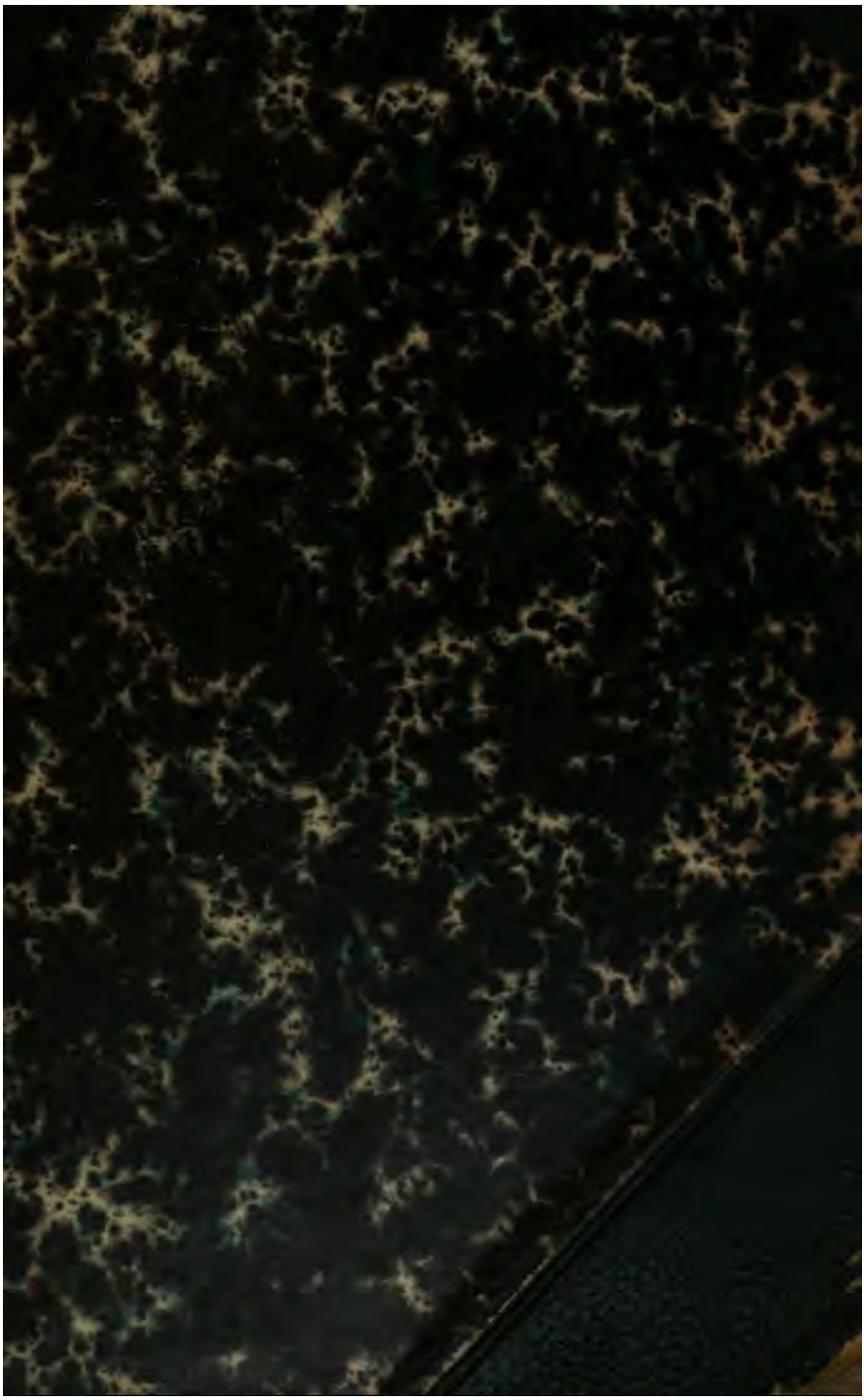
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`



LSoc386.4

31 May. 1814.

BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY."
1 - 22 Oct. 1878.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

SIEBENUNDACHTZIGSTER BAND.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1883.

SITZUNGSBERICHTE

DER

ATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN CLASSE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LXXXVII. BAND. II. ABTHEILUNG.

JAHRGANG 1883. — HEFT I BIS V.

(Mit 5 Tafeln und 29 Holzschnitten.)

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI CARL GEROLD'S SOHN,

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1883.

LSoc386.4

INHALT.

Seite

I. Sitzung vom 4. Jänner 1883: Übersicht 3

Migotti, Zur Theorie der Kreistheilungsgleichung. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 7

Ameseder, Geometrische Untersuchung der ebenen Curven vierter Ordnung, insbesondere hinsichtlich ihrer Berührungskegelschnitte. II. Mittheilung. [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] 15

Wassmuth, Über den inneren, aus der mechanischen Wärmetheorie sich ergebenden Zusammenhang einer Anzahl von elektromagnetischen Erscheinungen. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 82

Vortmann, Über die Trennung des Nickels vom Kobalt . . 98

II. Sitzung vom 11. Jänner 1883: Übersicht 107

Lieben u. *Zeisel*, Über Condensationsproducte der Aldehyde und ihre Derivate. II. Abhandlung 110

v. Obermayer, Versuche über Diffusion von Gasen. III. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 70 kr. = 1 RMk. 40 Pfg.] 188

Gegenbauer, Über algebraische Gleichungen, welche eine bestimmte Anzahl von Wurzeln besitzen 264

Anton, Bestimmung der Bahn des Planeten (114) Cassandra. [Preis: 1 fl. = 2 RMk.] 271

I. Sitzung vom 18. Jänner 1883: Übersicht 409

Haubner, Über das logarithmische Potential einer nicht isolirten elliptischen Platte. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] . . . 412

Goldschmiedt, Über die Zersetzungsproducte der Salicylsäureanhydride bei der Destillation 422

— Zur Kenntniss der Destillationsproducte des paraoxybenzoesauren Kalkes 428

Andreasch, Über die Oxydation der aus Thioharnstoffen durch Einwirkung von Halogenverbindungen entstehenden Basen 432

Freydl, Notiz über die trockene Destillation von Weinsäure und Citronensäure mit überschüssigem Kalk 450

Seite

IV. Sitzung vom 1. Februar 1883 457

Dafert, Über eine neue Bildungsweise des Amylbenzols. [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 460

Kretschy, Über die Oxydation von Kynurin und von Kynurensäure. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 463

V. Sitzung vom 15. Februar 1883: Übersicht 469

Pelz, Zur Contourbestimmung windschiefer Schraubenflächen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.] 473

Haitinger, Über die Einwirkung von Schwefel auf Phenolnatrium 484

Zeisel, Über Colchicin und Colchicein. (Vorläufige Mittheilung.) 495

VI. Sitzung vom 1. März 1883: Übersicht 501

Barth u. *Schreder*, Über das Oxyhydrochinon, das dritte isomere Trioxybenzol 505

Pastrovich, Über Reichenbach's Pikamar 511

— Über Coerulignol, Reichenbach's oxydirendes Princip 517

Jarolimek, Über die Beziehung zwischen der Spannung und Temperatur gesättigter Dämpfe 522

Mildner, Über Potenzreihen, deren Glieder mit den aufeinanderfolgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe r-ten Ranges multiplicirt oder durch letztere dividirt werden. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 532

Simony, Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. (Fortsetzung.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 556

VII. Sitzung vom 8. März 1883: Übersicht 588

Weyr, Über einen Correspondenzsatz. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 592

Le Paige, Über eine Eigenschaft der Oberflächen zweiter Ordnung 599

Hepperger, Versuch einer Bahnbestimmung des Schmidt'schen Nebels. [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] 603

Haerdtl, Bahnbestimmung des Planeten „Adria". II. Theil. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 620

Mach, Versuche und Bemerkungen über das Blitzableitersystem des Herrn Melsens. (Mit 3 Holzschnitten.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 632

Pfaundler, Über die Mantelringmaschine von Kravogl und deren Verhältniss zur Maschine von Pacinotti-Gramme nebst Vorschlägen zur Construction verbesserter dynamoelektrischer Maschinen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 640

Benedikt, Über Chlor- und Bromoxylderivate des Benzols. III. Abhandlung. (Mit 1 Holzschnitt.) 652

Goldschmiedt u. *Wegscheider*, Über Derivate des Pyrens . . 666

Wegscheider, Über einige Abkömmlinge der Opiansäure . . 691

Seite

VIII. Sitzung vom 5. April 1883: Übersicht 703
Lieben u. *Haitinger*, Untersuchungen über Chelidonsäure . . 707

IX. Sitzung vom 12. April 1883: Übersicht 710
Janovsky, Über Nitro- und Amidoderivate des Azobenzols. (Mit 6 Holzschnitten.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] . . . 714
Lippmann u. *Fleissner*, Zur Kenntniss der Azyline. (Mit 6 Holzschnitten.) 722
Goldschmiedt, Über das Pyrenchinon 747
Schwarz, Astronomische Untersuchung über eine von Archilochus und eine in einer assyrischen Inschrift erwähnte Sonnenfinsterniss. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 763
Pernter, Psychrometerstudie. [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] . . . 777
Preston, Eine dynamische Erklärung der Gravitation. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 795
Preston, Über die Möglichkeit, vergangene Wechsel im Universum durch die Wirkung der jetzt thätigen Naturgesetze — auch in Übereinstimmung mit der Existenz eines Wärmegleichgewichtes in vergrössertem Massstabe — zu erklären. [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] 806

X. Sitzung vom 19. April 1883: Übersicht 824
Lieben u. *Haitinger*, Untersuchungen über Chelidonsäure . . 827
Bauer, Über eine neue Säure der Reihe $C_nH_{2n-4}O_6$ 829
— Zur Kenntniss der Pimelinsäure 833
Weyr, Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 837
Liznar, Zur Theorie des Lamont'schen Variations-Apparates für Horizontal-Intensität. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 873

XI. Sitzung vom 4. Mai 1883: Übersicht 883
Maly u. *Andreasch*, Studien über Caffeïn und Theobromin. V. Abhandlung. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 888
Reibenschuh, Über das Methylbiguanid und seine Verbindungen 907
Emich, Über Äthylbiguanid und dessen Verbindungen. (Mit 1 Holzschnitt) 914
— Beiträge zur Kenntniss des Biguanid 928
Biermann, Zur Theorie der zu einer binomischen Irrationalität gehörigen Abel'schen Integrale. [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.] 934
Gerst, Methode zur Bahnbestimmung aus drei vollständigen Beobachtungen. [Preis 30 kr. = 60 Pfg.] 993

XII. Sitzung vom 10. Mai 1883: Übersicht 1028
Oppenheim, Über eine neue Integration der Differentialgleichungen der Planetenbewegung. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 1031

Seite

XIII. Sitzung vom 25. Mai 1883: Übersicht 1085

Skraup u. *Cobenzl*, Über α- und β-Naphtochinolin 1089

Kachler u. *Spitzer*, Bildungsweise der isomeren Bibromcampher 1133

Niederist, Über Reichenbach's Picamar 1140

Kolàček, Über Schwingungen fester Körper in Flüssigkeiten. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 1147

Ameseder, Über Configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung, erster Species. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] . . . 1179

Drasch, Axenbestimmung der Contouren von Flächen zweiter Ordnung. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] . . . 1226

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVII. BAND. I. HEFT.

Jahrgang 1883. — Jänner.

(Mit 1 Tafel und 1 Holzschnitt.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1883.

INHALT

des 1. Heftes Jänner 1883 des LXXXVII. Bandes, II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

I. Sitzung vom 4. Jänner 1883: Übersicht 3

Migotti, Zur Theorie der Kreistheilungsgleichung. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 7

Ameseder, Geometrische Untersuchung der ebenen Curven vierter Ordnung, insbesondere hinsichtlich ihrer Berührungskegelschnitte. II. Mittheilung. [Preis: 50 kr. = 1 RMk.] 15

Wassmuth, Über den inneren, aus der mechanischen Wärmetheorie sich ergebenden Zusammenhang einer Anzahl von elektromagnetischen Erscheinungen. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 15 kr. = 30 Pfg.] 82

Vortmann, Über die Trennung des Nickels vom Kobalt . . . 98

II. Sitzung vom 11. Jänner 1883: Übersicht 107

Lieben u. *Zeisel*, Über Condensationsproducte der Aldehyde und ihre Derivate. II. Abhandlung 110

v. Obermayer, Versuche über Diffusion von Gasen. III. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 70 kr. = 1 RMk. 40 Pfg.] 188

Gegenbauer, Über algebraische Gleichungen, welche eine bestimmte Anzahl von Wurzeln besitzen 264

Anton, Bestimmung der Bahn des Planeten (114) Cassandra. [Preis: 1 fl. = 2 RMk.] 271

III. Sitzung vom 18. Jänner 1883: Übersicht 409

Haubner, Über das logarithmische Potential einer nicht isolirten elliptischen Platte. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] . . . 412

Goldschmiedt, Über die Zersetzungsproducte der Salicylsäureanhydride bei der Destillation 422

— Zur Kenntniss der Destillationsproducte des paraoxybenzoesauren Kalkes 428

Andreasch, Über die Oxydation der aus Thioharnstoffen durch Einwirkung von Halogenverbindungen entstehenden Basen 432

Freydl, Notiz über die trockene Destillation von Weinsäure und Citronensäure mit überschüssigem Kalk 450

Preis des ganzen Bandes: 3 fl. = 6 RMk.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVII. Band. I. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

I. SITZUNG VOM 4. JÄNNER 1883.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 22. December v. J. erfolgten Ableben des inländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Herrn Prof. Dr. Carl Hornstein, Directors der k. k. Sternwarte zu Prag.

Die anwesenden Mitglieder erheben sich zum Zeichen des Beileides von ihren Sitzen.

Das w. M. Herr Regierungsrath Th. Ritter v. Oppolzer überreicht den ersten Band seines eben erschienenen Lehrbuches zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten.

Herr Dr. A. B. Meyer, Director des zoologischen und anthropologisch-ethnographischen Museums zu Dresden, übermittelt das von ihm mit Unterstützung der Generaldirection der königl. sächs. Sammlungen für Kunst und Wissenschaft herausgegebene Druckwerk: „Jadeit- und Nephrit-Objecte. A. Amerika und Europa."

Herr Dr. G. Haberlandt in Graz übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Zur physiologischen Anatomie der Milchröhren".

Der Secretär legt eine von Herrn Otto Schier, Bürgerschulfachlehrer in Brünn eingesendete Abhandlung: „Über perfecte Zahlen" vor.

Das w. M. Herr Prof. Wiesner überreicht eine Arbeit: „Über das Eindringen der Winterknospen kriechender Brombeersprosse in den Boden".

Herr Prof. Wiesner überreicht ferner eine von den Herren Prof. E. Ráthay und Dr. B. Haas in Klosterneuburg ausgeführte Arbeit: „Über *Phallus impudicus* (L.) und einige Coprinus-Arten".

Herr Artillerie-Major A. v. Obermayer überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Versuche über Diffusion von Gasen.“ III.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 2e série, 46e année. Tome XI, Nrs. 49 & 50. Paris, 1882; 8°.

Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique: Bulletin. 50e année, 3e série, Tome 2. Nr. 9 & 10. Bruxelles, 1881; 8°. — 51e année, 3e serie, tome 3, Nr. 6. Bruxelles, 1882; 8°. — 51e année, 3e série, tome 4, Nr. 11. Bruxelles, 1882; 8°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVIII. Nrs. 21—22. Halle a. S. 1882; 4°.

— der Wissenschaften, königliche: Öfversigt af Förhandlingar. 39: de Årg. Nr. 5 o. 6. Stockholm, 1882; 8°.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 6e série, 2e année, 11er cahier. Novembre 1882. Paris; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XX. Jahrgang, Nr. 36. Wien, 1882; 8°.

Archiv für Mathematik und Physik. LXIX. Theil, 1. Heft. Leipzig, 1882; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3e période. Tome VIII. 15. Novembre 1882. Genève, Lausanne, Paris, 1882; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Ausweise über den auswärtigen Handel der österr.-ungar. Monarchie im Jahre 1881. „Waareneinfuhr in das allgemeine österreichisch-ungarische Zollgebiet. II. Abtheilung. XLII. Jahrgang. Wien, 1882; gr. 4°.

— — zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- und historischen Denkmale. VIII. Band, 3. & 4. Heft. Wien, 1882; gr. 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VI, Nr. 72—79. Cöthen, 1882; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCV. Nos. 23—25. Paris, 1882; 4°. — Tables des comptes rendus. 1er semestre 1882. Tome XCIV. Paris, 1882; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. III. Jahrgang. 1882. Heft. XII. December. Berlin; 4°.

Gesellschaft, physikalisch-chemische: Bulletin. Tome XIV, Nr. 8. St. Petersburg, 1882; 8°.

— k. k. der Ärzte: Medizinische Jahrbücher, Jahrgang 1882, 4. Heft. Wien, 1882; 8°.

— pro Fauna et Flora fennica: Notiser af Förhandlingar. N. S. 5. Häftet. Helsingfors, 1882; 8°.

Gewerbe-Verein, niederösterr.: Wochenschrift. XLIII. Jahrgang Nr. 48—52. Wien, 1882; 4°.

Handels- und Gewerbekammer in Linz: Statistischer Bericht über die gesammten wirthschaftlichen Verhältnisse Oberösterreichs in den Jahren 1876—1880. Linz, 1882; 8°.

Heidelberg, Universität: Akademische Schriften pro 1881/82; 21 Stücke, 8° & 4°.

Hildebrand, H.-Hildebrandsson: Observations météorologiques faites par l'expédition de la Véga du Cap Nord à Yokohama par le Détroit de Behring. Stockholm, 1882; 8°.

Hydrographisches Amt, k. k.: Marine-Bibliothek: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Vol. X. Nr. 11. Jahrgang 1882. Pola, 1882; 8°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österreichischer: Wochenschrift VII. Jahrgang. Nr. 48—52. Wien, 1882; 4°.

— — Zeitschrift. XXXIV. Jahrgang. 1882. V. Heft. Wien, gr. 4°. — Bericht über den ersten österreichischen Ingenieur- und Architekten-Tag, abgehalten in Wien am 9. und 11. October 1880. Wien, 1881; 8°.

Johns Hopkins University: Seventh annual Report. Baltimore, 1882; 8°.

— — University Circulars. Nr. 3. Baltimore, 1880; 4°. — Vol. II. Nr. 19. Baltimore, 1882; 4°.

Journal, the American chemical. Vol. IV. Nr. 4. October, 1882. Baltimore; 8°.

— für praktische Chemie. 1882. Nr. 20. Leipzig, 1882; 8°.

Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1882. Heft 7. Pola, 1882; 8°.

Landbote, der steirische: Organ für Landwirthschaft und Landescultur. XV. Jahrgang. Nr. 15, 16, 18—24. Graz, 1882; 4°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrgang 1882. 10. und 11. Heft. Wien, 1882; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt, von Dr. A. Petermann. XXVIII. Band, 1882. XII. Gotha, 1882; 4°.

Nature. Vol. XXVII. Nrs. 285—287. London, 1882; 8°.

Reichsforstverein, österreichischer: Österreichische Monatschrift für Forstwesen. XXXII. Band, Aprilheft, Juli — Augustheft, September—Octoberheft, November- und Decemberheft. Wien, 1882; 8°.

Société philomatique de Paris: Bulletin. 7ᵉ série. Tome VI. Nr. 4. 1881—82. Paris, 1822; 8°.

— mathematique de France: Bulletin. Tome X, Nr. 6. Paris, 1882; 8°.

Society the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLIII. Nr. 1. November 1882. London; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. IV. Nr. 12. December, 1882. London; 8°.

Sydney, Department of Mines: Mineral Products of New South Wales. Sidney, 1882; 4°.

Verein, entomologischer in Berlin: Berliner entomologische Zeitschrift. XXVI. Band, 2. Heft. Berlin, 1882; 8°.

— für Landeskunde von Niederösterreich. Topographie von Niederösterreich. II. Band, 10. Heft. Wien, 1882; 4°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXII. Jahrgang. Nr. 49 bis 52. Wien, 1882; 4°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. IV. Jahrgang. Nr. 3. Wien, 1882; 8°.

Zur Theorie der Kreistheilungsgleichung.

Von Dr. **A. Migotti,**
Privatdocent an der technischen Hochschule in Wien.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. December 1882.)

In den Disquisitiones arithmeticae, Art. 80 und 81, hat Gauss folgende zwei Sätze bewiesen:

1. Das Product der sämmtlichen primitiven Wurzeln einer Primzahl p ist $\equiv 1 \bmod p$, mit Ausnahme des Falles $p = 3$.
2. Die Summe der sämmtlichen primitiven Wurzeln einer Primzahl p ist $\equiv 0$ oder $\equiv (-1)^\nu$, je nachdem $p-1$ einen quadratischen Factor enthält oder nicht; im letzteren Falle bedeutet ν die Anzahl der in $p-1$ enthaltenen Primzahlen.

Bei dem Versuche, für andere symmetrische Functionen der primitiven Wurzeln derartige Congruenzen aufzustellen, sieht man bald, dass im Allgemeinen die Natur der vorliegenden Primzahl in einer Weise zur Geltung gelangt, welche eine einfache Gestaltung der rechten Seiten solcher Congruenzen nicht mehr ermöglicht. Der Grund hievon wird durch die Erkenntniss klar, dass die Lösung dieser und ähnlicher Aufgaben im innigsten Zusammenhange mit der Theorie der Kreistheilung steht, ja dieser eigentlich zukommt; dieses soll nebst einigen Bemerkungen durch die folgende Betrachtung auseinandergesetzt werden.

Ist p eine Primzahl und $\Phi(y) = 0$ die Gleichung, deren Wurzeln die e f—gliedrigen Perioden sind, welche aus den imaginären Wurzeln der Gleichung $x^p - 1 = 0$ gebildet werden können, so hat — wie Kummer bewies[1] — die Congruenz $\Phi(y) \equiv 0 \bmod q$, wobei q eine Primzahl und zugleich e^{ter} Potenzrest von p ist, stets e reelle Wurzeln. Die Verallgemeinerung für den Fall, dass man die aus den primitiven Wurzeln der Gleichung

[1] Journ. f. Math. Bd. XXX und LIII.

$x^m - 1 = 0 \ldots . 1)$ gebildeten Perioden betrachtet[1], wobei m eine zusammengesetzte Zahl ist, liefert — wenn speciell die $\varphi(m)$ eingliedrigen Perioden, d. h., die primitiven Wurzeln der Gleichung 1) selbst ins Auge gefasst werden — den Satz: Ist $m = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$, und $\Phi_m(x) = 0$ die Gleichung, welche die primitiven m^{ten} Einheitswurzeln zu Lösungen besitzt, so hat die Congruenz $\Phi_m(x) \equiv 0 \bmod q \quad \varphi(m)$ reelle Wurzeln, sobald q eine Primzahl bedeutet, die den Congruenzen

$$q^{\mu_1} \equiv 1 \bmod p_1^{\alpha_1}$$
$$p^{\mu_2} \equiv 1 \bmod p_2^{\alpha_2}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$q^{\mu_r} \equiv 1 \bmod p_r^{\alpha_r}$$

genügt, wobei μ_r irgend einen Divisor von $p_r - 1$ bezeichnet.

Bedeutet nun p eine beliebige Primzahl, δ einen Theiler von $p-1$, und fasst man die Gleichung $\Phi_\delta(x) = 0 \ldots . 2)$, deren Lösungen die primitiven δ^{ten} Einheitswurzeln sind, als Congruenz nach dem Modul p auf, so folgt aus dem angeführten Satze sofort, dass dieselbe $\varphi(\delta)$ reelle Wurzeln besitzt. Diese Wurzeln sind aber modulo p sämmtlich von einander verschieden; im gegentheiligen Falle müsste nämlich die Discriminante D der in Rede stehenden Congruenz, d. h. die Discriminante der entsprechenden Kreistheilungsgleichung 2) den Factor p enthalten. Dies ist jedoch nicht möglich, weil nach einem bekannten Satze D ein Theiler der Discriminante der Gleichung $x^\delta - 1 = 0$ ist, und diese nur Factoren von δ enthält. Da ferner nach dem Kummer'schen Satze, „dass jede rationale Gleichung unter den Perioden, welche ausser diesen nur ganze Zahlen enthält, als Congruenz nach dem betreffenden Modul befriedigt wird, wenn statt der Perioden die ihnen entsprechenden Congruenzwurzeln gesetzt werden," auch hier jeder solchen Gleichung unter den primitiven δ^{ten} Einheitswurzeln eine Congruenz nach dem Modul p in der angegebenen Weise entspricht, so müssen alle Wurzeln der Congruenz $\Phi_\delta(x) \equiv 0 \bmod p \ldots . 3)$ aus irgend einer derselben

[1] Cfr. Kronecker „De unitatibus complexis". Dissertatio inauguralis arithmetica § 7.

durch Potenzirung mit allen zu δ theilerfremden Zahlen entstehen, und die δ^{ten} Potenzen derselben nach dem Modul p congruent 1 sein. Sie gehören aber geradezu zum Exponenten δ selbst; denn würde eine Wurzel α der Congruenz 3), also auch jede, zu einem Exponenten $\delta' < \delta$ gehören, so könnte dieser nur ein Theiler von δ sein, und da dann im Allgemeinen $\varphi(\delta') < \varphi(\delta)$ ist, so besässe die Congruenz 3) nicht lauter verschiedene Wurzeln; ist jedoch $\varphi(\delta') = \varphi(\delta)$, d. h. $\delta = 2\delta'$, wobei δ' ungerade sein muss, so wäre schon $\alpha^{\frac{\delta}{2}} \equiv 1 \bmod p$, was nach dem eben erwähnten Kummer'schen Satze nicht sein kann, weil die $\frac{\delta^{te}}{2}$ Potenz einer primitiven δ'^{ten} Einheitswurzel gleich -1 ist.

Ist also p eine Primzahl, δ ein Theiler von $p-1$, so besitzt die Gleichung für die primitiven δ^{ten} Einheitswurzeln, als Congruenz nach dem Modul p aufgefasst, alle modulo p zum Exponenten δ gehörigen Zahlen zu Lösungen. Speciell: Die Gleichung für die primitiven $(p-1)^{ten}$ Einheitswurzeln, als Congruenz nach dem Modul p aufgefasst, besitzt die sämmtlichen primitiven Wurzeln von p als Lösungen.

Nun ergeben sich die eingangs angeführten Sätze von Gauss unmittelbar durch Anwendung des vorhin erwähnten Kummer'schen Satzes; der erste, bezüglich des Productes aller primitiven Wurzeln, aus dem Umstande, dass das Product sämmtlicher Wurzeln der Gleichung $\Phi_p(x) = 0$ gleich 1 ist, wobei der Fall $p = 3$ desshalb eine Ausnahme bildet, weil hier allein der Grad der Gleichung für die primitiven $(p-1)^{ten}$ Einheitswurzeln ein ungerader, das Product der Wurzeln also gleich dem negativen letzten Gliede wird; der zweite, bezüglich der Summe, als specieller Fall der allgemeinen Formel für die k^{te} Potenzsumme der Wurzeln irgend einer Kreistheilungsgleichung $\Phi_m(x) = 0$, die bekanntlich folgende ist:

$$S_k = (-1)^r . m' . \varphi(Q) \quad \text{oder} \quad S_k = 0, \qquad 4)$$

je nachdem k durch m' theilbar ist oder nicht. (Hiebei ist für den ersten Fall $m = m'.P$, P das Product aller verschiedenen in m aufgehenden Primzahlen, $k = m'.K$, Q der grösste Theiler der Zahlen K und $P = Q.R$, endlich r die Anzahl der in R enthal-

tenen Primzahlen). Jede Gleichung 4) wird, wenn m irgend einen Theiler δ von $p-1$ bedeutet, als Congruenz nach dem Modul p aufgefasst, durch alle modulo p zum Exponenten δ gehörigen Zahlen befriedigt.

Man sieht, dass die beiden Sätze von Gauss gerade diejenigen Coëfficienten der Kreistheilungsgleichung $\Phi_{p-1}(x) = 0$ betreffen, welche von der Natur der Primzahl p entweder ganz unabhängig oder nur insofern abhängig sind, als das Vorhandensein von quadratischen Theilern in $p-1$, eventuell die Anzahl der verschiedenen in $p-1$ aufgehenden Primzahlen in Frage kommt.

Der Umstand jedoch, dass — wie leicht zu erkennen — irgend eine Potenzsumme der Wurzeln einer Kreistheilungsgleichung als Function des grössten Theilers der Zahlen $\frac{k}{m'}$ und P angesehen werden kann, ermöglicht es, zwischen gewissen dieser Potenzsummen selbst ziemlich einfache Relationen herzustellen.

Dazu bemerke man vorerst, dass — wenn mit (m, n) der grösste Theiler der Zahlen m und n, mit $p_1, p_2, \ldots p_\nu$ die verschiedenen in m enthaltenen Primzahlen bezeichnet werden — die Gleichung stattfindet:

$$(m, n) - \sum\left(\frac{m}{p_i}, n\right) + \sum\left(\frac{m}{p_i p_k}, n\right) - \ldots + (-1)^\nu \left(\frac{m}{p_1 p_2 \ldots p_\nu}, n\right) = \varphi(m) \text{ oder } = 0, \qquad 5)$$

je nachdem die Zahl n ein Vielfaches von m ist oder nicht; hiebei beziehen sich die Summen respective auf alle Einungen, Zweiungen, etc. der Zahlen $p_1, p_2, \ldots p_\nu$. Die erste dieser Gleichungen 5) erweist sich mit Benützung der für ihren Bestand angegebenen Bedingung sofort als richtig, da dann $\left(\frac{m}{p_i p_k}, n\right)$ in $\frac{m}{p_i p_k}$ selbst übergeht und dadurch auf der linken Seite die bekannte Form der Function $\varphi(m)$ hervorgeht. Dass die zweite Gleichung 5) eine Identität vorstellt, lässt sich genau so beweisen, wie dies für den bekannten arithmetischen Hilfssatz Dirichlet's

geschieht[1]. Man kann daher in derselben, wenn in Anlehnung an die in der ersten der Gleichungen 4) gebrauchte Bezeichnung $\frac{k}{m'}$ statt m, P statt n geschrieben wird, statt des Symbols $\left(\frac{k}{m'}, P\right)$ irgend eine Function desselben, also nach dem früher Bemerkten die k^{te} Potenzsumme der Wurzeln der Gleichung $\Phi_m(x) = 0$ selbst setzen, und es gilt somit, wenn P kein Vielfaches von $\frac{k}{m'}$ ist, die Gleichung:

$$S_k - \sum S_{\frac{k}{p_i}} + \sum S_{\frac{k}{p_i p}} - \ldots + (-1)^\nu S_{\frac{k}{p_1 p_2 \cdots p_\nu}} = 0.$$

Im anderen Falle, in welchem die entsprechende der Gleichungen 5) keine Identität vorstellt, erhält man mit Berücksichtigung eines bekannten Satzes von Gauss (D. A. art. 39) die Beziehung:

$$S_p - \sum S_{\frac{k}{p_i}} + \sum S_{\frac{k}{p_i p_k}} - \ldots + (-1)^\nu . S_{\frac{k}{p_1 p_2 \cdots p_\nu}} = (-1)^\lambda . k,$$

wobei λ die Anzahl der in $\frac{m}{k}$ aufgehenden Primzahlen bedeutet. Ist k nicht durch m' theilbar, so muss — weil dann jedes S verschwindet — die rechte Seite der letzten Gleichung auch gleich Null gesetzt werden.

Nach dem schon mehrmals angewendeten Kummer'schen Satze ergeben diese Gleichungen, wenn m irgend einem Theiler δ von $p-1$ gleichgesetzt wird, Congruenzen nach dem Modul p, welche durch die entsprechenden Potenzsummen aller modulo p zum Exponenten δ gehörigen Zahlen erfüllt werden.

Was die Coëfficienten der Kreistheilungsgleichungen selbst betrifft, deren Ermittlung weitere Congruenzen liefern würde, so hängen deren Werthe im Allgemeinen von der Natur der betrachteten Zahl m derartig ab, dass sie wohl nicht in einfacher Weise als Functionen der Elemente von m darstellbar sind; denn die

[1] Cfr. Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl., § 138; auch: Bachmann, Theorie der Kreistheilung, pag. 8.

Determinanten, mittelst welcher die Coëfficienten irgend einer algebraischen Gleichung als Functionen der Potenzsummen der Wurzeln ausgedrückt werden können, scheinen sich im Falle der Kreistheilungsgleichungen trotz der eben aufgestellten Relationen zwischen gewissen Potenzsummen doch nicht vereinfachen zu lassen. Um so bemerkenswerther ist daher der Umstand, dass — wenn p und q zwei beliebige ungerade Primzahlen vorstellen — die Coëfficienten der Gleichung für die primitiven $(p.q)^{ten}$ Einheitswurzeln nur die Werthe 0 oder ± 1 annehmen können. Da durch diese Eigenschaft zugleich eine eigenthümliche Reciprocität zwischen zwei ungeraden Primzahlen ausgedrückt wird, so dürfte die Darlegung derselben wohl nicht unstatthaft sein.

Sind α, $\alpha^2 \ldots \alpha^{p-1}$ die Wurzeln der Gleichung:

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1 = 0$$

und β, $\beta^2 \ldots \beta^{q-1}$ die primitiven q^{ten} Einheitswurzeln, so erhält man aus den ersteren die sämmtlichen primitiven $(p.q)^{ten}$ Einheitswurzeln, wenn man jede derselben mit jeder der letzteren multiplicirt; ist also:

$$\Phi_{pq}(x) = c_{(p-1)(q-1)} \cdot x^{(p-1)(q-1)} + c_{(p-1)(q-1)-1} \cdot x^{(p-1)(q-1)-1} + \\ + \ldots + c_1 x + c_0 = 0$$

die gesuchte Gleichung für die primitiven $(pq)^{ten}$ Einheitswurzeln, so besteht:

$$\Phi_{pq}(x) = \prod_{\nu=1}^{q-1} (x^{p-1} + \beta^\nu \cdot x^{p-2} + \beta^{2\nu} \cdot x^{p-3} + \ldots + \\ + \beta^{(p-2)\nu} \cdot x + \beta^{(p-1)\nu}) = \prod_{1}^{k-1} \frac{x^p - \beta^{\nu p}}{x - \beta^\nu},$$

oder:

$$\Phi_{pq}(x) = \frac{x^{p(q-1)} + x^{p(q-2)} + \ldots + x^p + 1}{x^{q-1} + x^{q-2} + \ldots + x + 1} = \frac{\Phi_q(x^p)}{\Phi_q(x)} = 0.$$

Setzt man nun in $\Phi_q(x^p) = \Phi_q(x) . \Phi_{pq}(x)$ die Coëfficienten der gleichen Potenzen von x auf beiden Seiten einander gleich, so ergeben sich Gleichungen von der Form:

$$c_g + c_{g-1} + \ldots + c_{g-q+1} = a_{q-\frac{g}{p}},$$

wenn a_μ gleich $+1$ oder Null ist je nachdem μ eine der Zahlen $1, 2, \ldots q$ bedeutet oder nicht, und c_ν gleich Null gesetzt wird, sobald $\nu > (p-1)(q-1)$ oder < 0 ist. Subtrahirt man von einer solchen Gleichung die ihr vorhergehende, welche mit c_{g-1} beginnt, dann von der mit c_{g-q} beginnenden, die dieser vorhergehende und fährt so fort, so ergeben sich die Gleichungen:

$$c_g - c_{g-q} = a_{q-\frac{g}{p}} - a_{q-\frac{g-1}{p}}$$

$$c_{g-q} - c_{g-2q} = a_{q-\frac{g-q}{p}} - a_{q-\frac{g-q-1}{p}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_{g-rq} = a_{q-\frac{g-rq}{p}} - a_{q-\frac{g-rq-1}{p}},$$

wobei r das grösste in g enthaltene Vielfache von q bedeutet. Durch Summation folgt:

$$c_g = \sum_{\nu=0}^{r} a_{q+\frac{\nu q-g}{p}} - \sum_{\nu=0}^{r} a_{q+\frac{\nu q-g+1}{p}}$$

Nach der Bedeutung von r können in diesen Summen die Indices der Grössen a höchstens einmal einer ganzen Zahl gleich werden, weil ja ν höchstens ein einziges vollständiges Restsystem modulo p durchläuft; die Coëfficienten von $\Phi_{pq}(x)$ erhalten somit nur die Werthe 0 oder ± 1.

Da nun, wie früher gezeigt, die Gleichung $\Phi_{pq}(x) = 0$ auch in der Form $\frac{\Phi_q(x^p)}{\Phi_q(x)} = 0$ geschrieben werden kann, und wie bekannt $\Phi_q(x^p) \equiv \Phi_q(x)^p \bmod p$ ist, so folgt die Congruenz:

$$\Phi_{pq}(x) \equiv \overline{\Phi_q(x)}^{p-1} \bmod p$$

und analog:

$$\Phi_{pq}(x) \equiv \overline{\Phi_p(x)}^{q-1} \bmod q.$$

Weiss man daher, wie es hier der Fall ist, dass die absoluten Beträge der Coëfficienten von $\Phi_{pq}(x)$ die Einheit nicht überschreiten, so zeigt sich, dass $\Phi_p(x)$ modulo q zur $(q-1)^{ten}$ und $\Phi_q(x)$ modulo p zur $(p-1)^{ten}$ Potenz erhoben dasselbe Resultat

— nämlich $\Phi_{pq}(x)$ — ergeben, sobald jedesmal auf die absolut kleinsten Reste modulo q, respective modulo p reducirt wird.

Nach dem Früheren kann dieses gegenseitige Verhalten zweier ungerader Primzahlen auch folgendermassen ausgedrückt werden:

Ist α eine positive ganze Zahl, welche $\gtrless(p-1)(q-1)$ ist, und bedeuten u, beziehungsweise v, die kleinsten positiven Lösungen der Congruenzen:

$$px \equiv \alpha \bmod q, \quad qx \equiv \alpha \bmod p,$$

so sind die Producte $p.u$ und $q.v$ stets gleichzeitig grösser als α.

Für mehr als zwei ungerade Primzahlen besteht im Allgemeinen ein ähnliches Verhalten nicht mehr, da schon in der Kreistheilungsgleichung für die primitiven $(3.5.7.)^{ten}$ Einheitswurzeln der Coëfficient von x^{41} — also auch von x^7 — gleich (-2) wird.

Geometrische Untersuchung der ebenen Curven vierter Ordnung, insbesondere hinsichtlich ihrer Berührungskegelschnitte.

Von **Adolf Ameseder.**

II. Mittheilung.

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. December 1882.)

II. Allgemeines über die Systeme von Berührungskegelschnitten bei den Curven mit singulären Punkten.

a) Eigentliche Berührungskegelschnitte.

1. Eine Curve vierter Ordnung, die mindestens von der vierten Classe ist, besitzt im Allgemeinen vierfach berührende Kegelschnitte. Denn ein Kegelschnitt hat mit ihr acht Punkte und ebensoviele oder mehr Tangenten gemein, und die Forderung, dass dieselben paarweise zusammenfallen, ist vier Bedingungen äquivalent und lässt somit unendlich viele Kegelschnitte als Lösungen zu.

Für die Existenz der berührenden Kegelschnitte zeugt auch jene der Doppeltangenten und der Tangenten aus den singulären Punkten, die in Paaren unter jenen Kegelschnitten die degenerirten vorstellen. In der That kann man aus einem reellen Doppeltangentenpaare ein ganzes System von Berührungskegelschnitten construiren, wie in der ersten Mittheilung[1] nachgewiesen wurde. Die Realität desselben hängt jedoch durchaus nicht von jener des Doppeltangentenpaares ab, da — wie aus dem an citirter Stelle[2] Gesagten ersichtlich ist — ganz wohl auch die sämmtlichen Doppeltangenten eines reellen Systems imaginär sein können.

---

[1] Sitzb. d. k. Akademie d. Wissensch. 86. Bd. II. Abth. pag. 398 u. f.

[2] C. l. pag. 401.

Dass auch bei den Curven mit singulären Punkten die Berührungskegelschnitte eines Systems einen Bestandtheil eines Netzes bilden, lässt sich ebenso wie für die allgemeine Curve darthun.

Man wird wie dort, gestützt auf dieselben Sätze über Schnittpunktsysteme, bloss zu zeigen haben, dass jeder Kegelschnitt, welcher ein Berührungsquadrupel enthält, die Curve noch in einem zweiten schneidet, und dass irgend zwei von den abgeleiteten Quadrupeln wieder Punkte eines Kegelschnittes sind.

Diese Kegelschnitte bilden das Netz, dem das System angehört. Jeder von ihnen, der die Curve nicht berührt, legt auf ihr zwei Quadrupel fest und ist eine „quadratische Polare."

2. Ausführlicher zu erörtern haben wir an dieser Stelle bloss die Art, in welcher sich die Tangenten aus den singulären Punkten an der Bildung von Berührungskegelschnitten betheiligen.

Wir denken uns zu dem Zwecke eine Curve C^4 vorgelegt, die in einem Punkte Δ eine einfache Singularität, einen Doppel- oder Rückkehrpunkt, aufweist, schneiden sie mit einem Kegelschnitt K in acht Punkte, zerlegen diese in zwei gleiche Gruppen P' und P'', und verbinden jede mit Δ durch einen Kegelschnitt K', beziehungsweise K''. Beide Curven fixiren auf C^4 noch zwei Punktepaare r', s' und r'', s''.

Diese Punkte, die Punktgruppen P', P'' und der singuläre Punkt Δ sind die Basispunkte eines Curvenbüschels vierter Ordnung, weil sie den vollständigen Durchschnitt zweier solcher Curven, nämlich C^4 und der Kegelschnitte K', K'', vorstellen. Jede andere Curve C_1^4, die durch 13 von diesen Punkten geht, enthält nothwendig auch die 3 weiteren, d. h. sie hat so wie C^4 und K', K'' in Δ einen Doppelpunkt.

Als ein Theil einer solcher Curve kann der Kegelschnitt K gelten. Der zweite Theil ist dann auch eine Curve zweiter Ordnung, und zwar eine solche, die in Δ einen Doppelpunkt besitzt, weil K diesen Punkt nicht enthält. Die Punkte r' und s' legen demnach mit Δ dieselben Strahlen fest, wie die Punkte r'' und s''.

Wird nun K zum vierfach berührenden Kegelschnitt, so sind die Punktgruppen benachbart, ebenso die Kegelschnitte K' und K'', und die Punktpaare r', r'' und s', s'' übergehen in die Berührungspunkte zweier Tangenten aus Δ.

Damit ist nachgewiesen, dass unter den vierfach berührenden Kegelschnitten eines Systems im allgemeinen auch ein Tangentenpaar aus jedem singulären Punkte der Curve erscheint.

3. Wir wollen nun auch erklären, wie man umgekehrt von einem solchen Tangentenpaare constructiv zu einem eigentlichen vierfach berührenden Kegelschnitte gelangen kann.

Die Punkte, welche zwei Strahlen ς und σ aus Δ auf C^4 bestimmen, bezeichnen wir wieder mit r', r'' und s', s'', verbinden r' mit s' und r'' mit s'' durch zwei gerade Linien g' und g'', die mit C^4 ferner in p', q' und p'', q'' zusammentreffen, und legen durch diese vier Punkte einen sonst beliebigen Kegelschnitt K. Derselbe hat mit C^4 noch vier Punkte gemein, die zu zwei auf zwei Strahlen α, β durch Δ liegen. Denn ς, σ und K stellen eine Curve mit einem Doppelpunkte in Δ vor, C^4 eine zweite, und es wird somit auch jene Curve des Büschels, die g' und g'' als einen Theil enthält, in Δ einen Doppelpunkt aufweisen.

Lässt man den Kegelschnitt K das Büschel mit den Basispunkten p', q', p'', q'' durchlaufen, so bilden offenbar die Strahlen α, β um Δ eine mit dem Büschel projectivische quadratische Involution.

„Daraus ersehen wir, dass eine Curve vierter Ordnung mit einem oder mehr singulären Punkten auf unendlich viele Arten durch ein Kegelschnittbüschel und eine projectivische quadratische Strahleninvolution um einen singulären Punkt als Scheitel erzeugt werden kann, und dass ein Strahlenpaar der Involution und ein Basispunkt des Büschels auf der Curve beliebig gewählt werden dürfen."

In dem speciellen Falle, in welchem ς und σ in ein Tangentenpaar aus Δ übergehen, tritt an Stelle der Geraden g', g' die Berührungssehne g und an jene der vier Punkte p', q', p'', q'' das Punktenpaar p, q, in welchem g die Curve ferner schneidet.

Das Kegelschnittbüschel besteht sonach nun aus Kegelschnitten, welche C^4 in p und q berühren. Unter ihnen kommen zwei vor, die C^4 noch an zwei Stellen berühren. Sie entsprechen einzeln den Doppelstrahlen der mit dem Büschel projectivischen Involution um Δ, und jeder von ihnen hat den betreffenden Doppelstrahl zur zweiten, zu g conjugirten Berührungssehne mit C^4.

Ein jeder von den beiden Doppelstrahlen ist somit eine feste Tangente für ein Kegelschnittbüschel, dessen fernere Basispunkte die Berührungspunkte des Tangentenpaares sind, und das auf C^4 die Berührungsquadrupel für ein ganzes System von Kegelschnitten herausschneidet.

„Hieraus folgt, dass ein Tangentenpaar aus einem singulären Punkte als Berührungskegelschnitt nicht zu einem System gehört (wie ein Doppeltangentenpaar), sondern zu zweien.

4. Nothwendig für eine eingehende Untersuchung der Systeme von Berührungskegelschnitten ist eine genaue Angabe der Art des Netzes, in dem das System enthalten ist.

Da diese Bestimmung wieder eine nähere Kenntniss der einzelnen Kegelschnittnetze fordert, so werden wir dieselben im Folgenden mit besonderer Rücksicht darauf, ob sie Netze conischer Polaren einer Curve dritter Ordnung sind, aufzählen.

Als charakteristisches Merkmal für die Eintheilung bietet sich hiebei der Umstand dar, ob im Netze eine oder mehr „doppelt zu nehmende Gerade“ H auftreten, oder nicht.

Es sind folgende Fälle möglich:

I. Es tritt keine Gerade H auf.

Das Netz besteht nach Cremona[1] aus conischen Polaren.

II. Im Netze, das aus conischen Polaren bestehen soll, kommt eine Gerade H vor.

Dies ist nur möglich, wenn das Netz noch zwei „doppelt zu nehmende Gerade“ H', H'' besitzt, die mit H ein Polardreieck für alle Kegelschnitte des Netzes constituiren. (Cremona a. c. O.)

III. Die Gerade H ist die einzige doppelt zu nehmende Gerade.

Sie bildet mit einem Kegelschnitte H^2 die Hesse'sche Curve des Netzes und ist für die Cayley'sche eine Doppeltangente[2].

IV. Es erscheint ausser H nur noch eine Gerade H'.

---

[1] Siehe pag. 274 der deutsch. Übersetzung der „Introduzione etc“. Cremona: Sur l'hypocycloide à trois rebroussements. Crelle 64. pag. 101.

Irgend ein eigentlicher Kegelschnitt K des Netzes, der noch ganz willkürlich angenommen werden kann, bestimmt im Verein mit H und H' dasselbe vollkommen. Vervollständigt man nun das Netz in bekannter Weise, so findet man leicht, dass für jeden Kegelschnitt dem Schnittpunkte von H und H' dieselbe Gerade H'' als Polare zukommt. Diese bildet — ohne desshalb eine „doppelt zu nehmende Gerade zu sein" — mit H und H' die Hesse'sche Curve. Die Cayley'sche Curve besteht aus dem Schnittpunkte von H und H' und einem Kegelschnitte, der diese Linien auf H'' berührt.

V. Jede Gerade des Netzes ist eine doppelt zu nehmende.

Das Netz besteht aus sämmtlichen Geraden der Ebene und ist in Folge dessen für unsere Untersuchung ohne Bedeutung.

Keines von den drei Netzen III, IV und V ist ein Netz conischer Polaren für eine Curve dritter Ordnung.

5. Das Netz I haben wir bereits bei der allgemeinen Curve ohne Doppelpunkte nachgewiesen, und wir werden aus dem Folgenden ersehen, dass es bei jeder Curve vierter Ordnung vorkommt, die mindestens von der sechsten Classe ist.

Das Netz II kann nur bei Curven auftreten, für welche H, H, H' ein Polardreiseit ist, und das Netz IV bei solchen, welche einen Pol (HH') und eine harmonische Polare H'' haben.

Bei dem Netze III sind bezüglich des Vorkommens der Geraden H zwei Fälle zu unterscheiden, und zwar mit Rücksicht darauf, ob diese Gerade als quadratische Polare oder als Berührungskegelschnitt auftritt.

Setzen wir das Erste voraus, so müssen die vier Punkte, in welchen H die Curve C^4 trifft, mit ihren Nachbarpunkten zwei Berührungsquadrupel bilden. Dem entsprechend existiren dann auch zwei Kegelschnitte im System, von denen jeder C^4 zweimal vierpunktig berührt. Beide haben mit C^4 die Gerade H zur Berührungssehne.

Ist H eine Doppeltangente von C^4, so wird diese Curve in jedem Berührungspunkte von einem Kegelschnitte des Netzes achtpunktig berührt.

Die Curve C^4 ist offenbar in beiden Fällen specieller Natur[1].

[1] Ihre Gleichung ist $C_1^2 . C_2^2 = H^4$, wenn wir unter $C_1^2 = o_1 C_2^2 = o$ und $H = o$ die Gl. der zwei Berührungskegelschnitte und der Geraden H ver-

Dies gilt auch dann, wenn H ein Doppelpunktsstrahl ist. Denn nun bildet der Doppelpunkt ein Quadrupel für sich. Der entsprechende Berührungskegelschnitt zerfällt folglich in zwei Gerade, von denen jede in Δ mit C^4 vier unendlich nahe Punkte gemein hat, d. h. eine Inflexionstangente ist.

Gleiches finden wir ferner, wenn H eine Tangente aus dem Doppelpunkte vorstellt.

Beidemal ist die Curve eine homolog-harmonische und das Netz von der Art IV.

Mit einer Doppelpunktstangente kann H nur dann coincidiren, wenn sie beide Zweige der Curve berührt. Letzere muss also in Δ einen Berührungsknoten besitzen.

Weil endlich ein Rückkehrpunkt kein Quadrupel vorstellen kann, da es keinen Kegelschnitt gibt, dessen sämmtliche Schnittpunkte mit C^4 in ihm vereinigt sein könnten; so ist auch einleuchtend, dass weder ein Strahl durch ihn, noch seine Tangente mit einer doppelt zu nehmenden Geraden identificirt werden darf.

Ist zweitens H ein Berührungskegelschnitt, so müssen alle seine Berührungspunkte auf jedem Kegelschnitte liegen, der einen von ihnen mit irgend einem anderen Quadrupel verbindet, und jeder von diesen Kegelschnitten darf mit C^4 keine weiteren Punkte gemein haben. Dies ist nur dann möglich, wenn H zwei singuläre Punkte verbindet und diese ein Quadrupel bilden.

Wir werden später den Nachweis liefern, dass factisch jede Curve mit zwei Doppelpunkten ein solches System besitzt. Für's Folgende heben wir bloss hervor, dass ihr auch Systeme eigen sind, in welchen keine doppelt zu nehmenden Geraden erscheinen, und zwar weder als quadratische Polaren, noch als Berührungslinien, und berufen uns auf den 3. Artikel, in dem eine Bestätigung für das Gesagte zu finden ist.

Ein System der dort behandelten Art enthält nämlich ein Tangentenpaar aus jedem singulären Punkte. In ihm kann daher unmöglich auch die Verbindungslinie zweier solcher Punkte als

---

stehen. Diese Gleichung enthält nur 13 implicite Constanten, kann also nicht mit jener der allgemeinen Curve vierter Ordnung identificiert werden. Dies gilt auch für den Fall, als diese Curve singuläre Punkte besitzt; denn diese reduciren in gleicher Weise die Constantenanzahlen beider Gleichungen.

Berührungskegelschnitt auftreten. Es müsste ja — soll dies geschehen — auf jeder quadratischen Polare, die durch den einen singulären Punkt Δ geht auch der zweite Δ' liegen, was jedoch nicht der Fall ist, weil diese Kegelschnitte erwiesenermassen ein Büschel bilden, das in Δ eine feste Tangente besitzt und dessen weitere Scheitel die Berührungspunkte des Tangentenpaares aus Δ sind.

Als besonders bemerkenswerth für das Weitere heben wir als Resultat der vorstehenden Untersuchung den folgenden Satz hervor:

„Systeme vierfach berührender Kegelschnitte, die Bestandtheile von Netzen mit einer „doppelt zu nehmenden Geraden" sind, kommen im allgemeinen erst bei Curven vor, welche mindestens zwei singuläre Punkte besitzen.

Netze, mit mehr als einer doppelt zu nehmenden Geraden treten nur bei Curven ganz specieller Art auf."

6. Nachdem wir so die Überzeugung gewonnen haben, dass auch bei den Curven mit singulären Punkten vierfach berührende Kegelschnitte vorkommen, welche conische Polaren für eine Curve dritter Ordnung C^3 sind, wenden wir uns zu einer näheren Betrachtung des geometrischen Ortes der Pole für ein derartiges System.

Dass derselbe wie bei der Curve ohne Singularitäten von der zweiten Ordnung ist, ist evident; es handelt sich nur um die Bedingung, welche nothwendig an seine Lage zu knüpfen ist, damit die ihm entsprechende Curve einen Doppelpunkt oder eine Spitze erhalte.

Wie die ihm 3. Artikel der ersten Mittheilung angegebene Construction der Schnittpunkte einer Geraden s mit der Curve C^3 zeigt, ist ein auf ihr befindlicher Punkt Δ dann ein Curvenpunkt, wenn seine gerade Polare g bezüglich C^3 sowohl Tangente an den oben besprochenen festen Kegelschnit C^2 als auch an die Poloconiken aller Strahlen aus Δ ist.

Die Gesammtheit dieser Poloconiken ist ähnlich gebildet, wie ein System vierfach berührender Kegelschnitte einer Curve C^4, und geht aus diesem hervor, wenn C^4 in eine Gerade g und in die Hesse'sche Curve H^3 von C^3 zerfällt. Von ihnen laufen zwei

durch einen Punkt P, entsprechend den zwei Tangenten aus Δ an die conische Polare des Punktes. Deshalb und auch zum Unterschiede von einem System bei einer Curve C^4 nannten wir dieses System eine „Schaar", und wir wollen kürzehalb diese Bezeichnung auch für's Folgende beibehalten.

Von den Poloconiken dieser Schaar berührt nur eine die Gerade g im Tangentialpunkte Δ' mit C^2; ihr entspricht die Tangente von C^4 in Δ.

Soll jeder Strahl aus Δ die Curve hier in zwei benachbarten Punkten schneiden, so müssen unbedingt alle Poloconiken der Schaar die Gerade g in Δ' tangiren. Dies ist aber nur möglich, wenn Δ' ein Punkt der Hesse'schen Curve und g die zugehörige Tangente ist.

Es ist sonach für das Zustandekommen eines Doppelpunktes nothwendig, dass der Kegelschnitt C^2 die Hesse'sche Curve einfach berühre. — Der Doppelpunkt ist dann der conjugirte Pol des Berührungspunktes.

Zur Erhärtung dieses Resultates wollen wir noch in Kürze zeigen, dass in der That die gefundene Bedingung auch immer erfüllt wird, und greifen zu dem Ende zum 3. Artikel zurück.

Dort haben wir bewiesen, dass das Büschel der quadratischen Polaren, die durch Δ und die Berührungspunkte B, B' des einen Tangentenpaares t, t' aus Δ laufen, in diesem Punkte eine feste Tangente δ hat. Der Punkt Δ ist somit ein Doppelpol und liegt als solcher auf der Hesse'schen Curve. Seine gerade Polare berührt diese im conjugirten Pol Δ' und den Kegelschnitt C^2 in jenem Punkte, dem das Tangentenpaar t, t' als conische Polare entspricht: also beide Curven an derselben Stelle, — was zu beweisen war.

7. Die C^2 in Δ' osculirenden Poloconiken entsprechen den Doppelpunktstangenten von C^4. Letztere tangiren demnach die conische Polare π^2 des auf C^2 gelegenen Nachbarpunktes p von Δ'.

Obzwar nun Δ unendlich nahe an π^2 liegt, weil dieser Kegelschnitt die Pole der Geraden $\overline{\Delta' p}$ enthält und von denselben zwei sich in unmittelbarer Nähe von Δ befinden; so sind dennoch die Tangenten getrennt und verschieden, und zwar deshalb, weil die Krümmung von π^2 in der Nähe von Δ eine unendlich gross werdende ist. Was daraus zweifellos hervorgeht, dass π^2 auch

als ein Kegelschnitt zu betrachten ist, der C^4 in den zwei Nachbarpunkten von Δ und ferner in jenen von B und B' berührt, und in Folge dessen in den ersteren zwei Punkten, trotzdem ihre Entfernung eine unendlich kleine ist, Tangenten hat, die einen Winkel von endlicher Grösse einschliessen.

Hieraus folgt auch, dass C^4 in Δ einen Knoten oder einen isolirten Punkt besitzt, je nachdem er ausserhalb oder innerhalb π^2 liegt.

Auf π^2 selbst kann Δ sich nicht befinden, ohne dass π^2 in die zwei Tangenten t, t' zerfällt. Die Doppelpunktstangenten können demzufolge also nur dadurch zur Coincidenz gebracht werden, dass π^2 in das polare Geradenpaar übergeht, das auf t, t' folgt. Dann liegt p auch auf H^3, und diese Curve wird in Δ' von C^2 dreipunktig berührt. Dies ist die Beziehung, welche nothwendig zwischen C^2 und H^3 bestehen muss, damit C^4 eine Spitze aufweise. — Die Spitzentangente berührt in Δ auch H^3, weil ihre Poloconik mit dieser Curve in Δ' eine vierpunktige Berührung eingeht.

8. Hiermit sind auch die Bedingungen entwickelt für mehrere singuläre Punkte.

Denn es ist nun klar, dass C^2 die Curve H^3 doppelt, beziehungsweise dreifach berührt, wenn C^4 zwei oder drei Doppelpunkte erhält. Im letzteren Falle findet selbstverständlich die Berührung in drei Punkten statt, deren conjugirte Pole nicht auf einer Geraden liegen.

Ebenso erkennt man, dass einer Curve mit einem Doppelpunkte und einer Spitze ein Kegelschnitt C^2 zukommt, der H^3 berührt und osculirt, und dass endlich jener Kegelschnitt diese Curve zweimal osculirt, wenn C^4 zwei Rückkehrpunkte besitzt.

Sehen wir die Curven mit höheren Singularitäten als Grenzfälle der aufgezählten Curven an, was gestattet ist, weil sie aus ihnen dadurch hervorgehen, dass mehrere einfach singuläre Punkte zusammenrücken; so haben wir damit auch die Lage gekennzeichnet, welche der Fundamentalkegelschnitt C^2 für ihre Entstehung gegen H^3 einnehmen muss.

Nähern sich nämlich zwei oder drei der erwähnten Punkte, so geschieht dies auch zwischen den entsprechenden Berührungsstellen von C^2 und H^3, und es ist also der Contact zwischen

beiden Curven ein vier-, fünf- und sechspunktiger für beziehungsweise einen Berührungsknoten, eine Knotenspitze und einen Osculationsknoten.

Vier, fünf und sechs beträgt auch die Zahl der Schnittpunkte von H^3 mit C^4 im singulären Punkte.

9. Hat C^2 mit H^3 in Δ' r unmittelbar aufeinander folgende Punkte $1', 2', 3', \ldots r'$ gemein, so laufen durch irgend einen Punkt P der Ebene ebensoviele Strahlen — nämlich jene nach den r conjugirten Polen $1, 2, 3, \ldots r$ der erst Genannten — von denen jeder die Eigenschaft hat, dass ihm eine Poloconik zukommt, die in Δ' die Curve H^3 und also auch den Kegelschnitt C^2 berührt.

Jeder von diesen Strahlen zählt desshalb, auf Grund der im 3. Artikel der I. Mittheilung gegebenen Erzeugungsweise einer C^4, unter den Tangenten aus P an diese Curve einmal, ohne eine eigentliche Tangente zu sein.

Dies ist ein neuer Beweis und eine geometrische Erklärung für die bekannte Thatsache, dass die Classe einer Curve vierter Ordnung um zwei, drei, vier, fünf und sechs Einheiten erniedrigt wird durch beziehungsweise einen Doppelpunkt, eine Spitze, einen Berührungsknoten, eine Knotenspitze und einen Osculationsknoten.

Unter den aufgezählten finden wir die Curven aller Classen und Formen bis herab zur sechsten vertreten.

Eine Ausnahme ist bloss bezüglich der Formen zu verzeichnen, nämlich die Curve mit einem dreifachen Punkte.

Sie geht aus der Curve mit drei Doppelpunkten hervor, indem das Doppelpunktdreieck bei endlich bleibender Grösse seiner Winkel unendlich klein wird.

Bei diesem Übergang coincidiren die Tangentenpaare aus den Doppelpunkten paarweise und bilden die Tangenten im dreifachen Punkte. Da nun eben sie die degenerirten Berührungskegelschnitte des sprachlichen Systems vorstellen, und da dieses keine doppelt zu nehmende Gerade enthalten kann, so verliert es in diesem Falle seine geometrische Bedeutung.

„Es sind sonach Systeme vierfach berührender Kegelschnitte, welche Bestandtheile von Netzen conischer Polaren einer Curve dritter Ordnung sind,

allen Curven vierter Ordnung eigenthümlich, die mindestens von der sechsten Classe sind, ausgenommen die Curve mit dreifachem Punkt."

b) Uneigentliche Berührungskegelschnitte.

10. Unter dieser Bezeichnung fassen wir jene Kegelschnitte zusammen, welche durch einen oder mehrere singuläre Punkte gelegt sind und die Curve an allen weiteren Stellen, in denen sie mit ihr zusammentreffen, berühren.

Dass Kegelschnitte dieser Art bei Curven vierter Ordnung thatsächlich auftreten, sobald die entsprechende Anzahl von singulären Punkten vorhanden ist, geht aus Gründen hervor, wie jene, welche für die Existenz der vielfach berührenden Kegelschnitte angeführt wurden.

Auf die dreifach berührenden Kegelschnitte, welche einen singulären Punkt enthalten, weist das Vorhandensein der Doppeltangenten und der Tangenten aus dem betreffenden singulären Punkte. Eine jede von den letzteren stellt im Verein mit einer Doppeltangente einen solchen Kegelschnitt vor. Aus ihm kann ein ganzes System abgeleitet werden.

Ähnlich wird ein Kegelschnitt, der zwei singuläre Punkte enthält und C^4 doppelt berührt, gebildet: einerseits von je einer Tangente aus jedem der zwei singulären Punkte, anderseits von der Verbindungslinie derselben und einer Doppeltangente.

Doch kann man auch direct, ohne Berufung auf die degenerirten Elemente, zeigen, dass Berührungskegelschnitte beider Arten existiren.

Um dies für die dreifach berührenden Kegelschnitte zu bestätigen, legen wir durch den singulären Punkt Δ einen Kegelschnitt K, der die Curve an zwei Stellen B und B' berührt und folglich noch in zwei Punkten x, x' schneidet. Dann halten wir B fest und lassen B' an der Curve fortgleiten. Dabei beschreiben x und x' auf C^4 ein symmetrisches Punktsystem, dessen Doppelpunkte offenbar Berührungsstellen sind für Kegelschnitte, welche C^4 auch in B und noch in einem dritten Punkte B' berühren.

Für die doppelt berührenden Kegelschnitte ist der Beweis womöglich noch einfacher, indem man hier bloss das Punktsystem

in Betracht zu ziehen hat, welches ein Kegelschnittbüschel auf C^4 fixirt, das die zwei singulären Punkte zu Basispunkten hat und die Curve in einem festen Punkte B berührt.

Jeder von seinen Doppelpunkten bildet mit B das Berührungspunktepaar für einen Kegelschnitt sprachlicher Art.

Von den einfach berührenden Kegelschnitten durch drei singuläre Punkte ist schliesslich jeder einzelne durch Angabe seines Berührungspunktes bestimmt.

11. Die Beweise für die Gruppirung der aufgezählten Berührungscurven in Systeme, welche Bestandtheile von Netzen sind, sind den früher zu gleichem Zwecke angewendeten analog, wesshalb wir uns möglichst kurz fassen.

Wir nehmen an, die Curve C^4 habe $\sigma = 1, 2, 3$ singuläre Punkte Δ, legen durch dieselben einen Kegelschnitt K und bilden aus seinen weiteren Schnittpunkten mit C^4, deren Anzahl $8-2\sigma$ ist, zwei gleiche Gruppen P', P'', die wir mit den Punkten Δ durch zwei sonst beliebige Kegelschnitte K' und K'' verbinden.

Beide bestimmen auf C^4 zwei neue mit den früheren gleiche Gruppen p', p'', die mit den Punkten Δ, nach dem mehrfach benützten Satz von Plücker, Punkte eines Kegelschnittes K_1 sind.

Halten wir K und K'' fest und lassen K' alle ihm im Büschel mit den Grundpunkten $\Delta P'$ möglichen Lagen annehmen, so constituirt K_1 ein projectivisches Büschel, das mit dem ersteren die Curve zum Erzeugniss hat. Dies gibt den bekannten Satz:

„Eine Curve vierter Ordnung C^4 mit mindestens $\sigma = 1, 2, 3$ singulären Punkten kann auf unendlich viele Arten erzeugt werden durch zwei projectivische Kegelschnittbüschel, welche die σ besonderen Punkte zu gemeinschaftlichen Basispunkten haben.

Die weiteren Grundpunkte des einen Büschels und einer des andern sind auf der Curve beliebig anzunehmen.

Da an den erläuterden Beziehungen sich nichts ändert, wenn die zwei Gruppen P' und P'' zusammenrücken, so erkennen wir, dass auch irgend zwei Kegelschnitte K', K'', welche durch die Punkte Δ und eine Gruppe von Berührungspunkten gelegt sind, auf C^4 zwei Gruppen herausschneiden, die mit den Δ auf einem Kegelschnitte K_1 liegen.

Lassen wir nun K' mit K oder K mit K' coincidiren, so wird auch K_1 zum Berührungskegelschnitt. In jeder Punktgruppe, die mit den Punkten Δ und P auf einem Kegelschnitte liegt, wird demnach C^4 von einem Kegelschnitte berührt, dem die σ Punkte Δ angehören, und durch diese Punkte und irgend zwei Berührungsgruppen bezeichneter Art lässt sich ein Kegelschnitt beschreiben.

Damit ist bewiesen, „dass homologe Kegelschnitte zweier projectivischer Büschel eines Netzes mit σ Basispunkten einander in $4-\sigma$ Punkten einer Curve vierter Ordnung schneiden, in denen dieselbe von einem Kegelschnitte des Netzes berührt wird."

„Jede Curve vierter Ordnung mit mindestens $\sigma=1, 2, 3$ singulären Punkten kann auf diese Weise erzeugt werden. [1]

Von den weiteren Basispunkten eines jeden Büschels kann man einen auf der Curve beliebig wählen.

12. In Betreff der Formen, welche möglicherweise die beschriebenen Systeme annehmen können, sind folgende Fälle zu verzeichnen:

A. Netze mit einem Basispunkte Δ.

I. Ohne eine doppelt zu nehmende Gerade H.

Ein Netz dieser Art wird allemal gebildet von den conischen Polaren einer rationalen Curve dritter Ordnung. Diese und ihre Hesse'sche Curve haben in Δ einen Knoten oder isolirten Punkt, Die Cayley'sche Curve zerfällt in Δ und einen Kegelschnitt K^2. den absoluten Involutionskegelschnitt von Weyr. [2]

II. Mit einer Geraden H, die nothwendig den Punkt Δ enthält.

Die Curve von Hesse besteht aus H und einem Kegelschnitte H^2, die von Cayley aus Δ und einem Kegelschnitte K^2. Beide Kegelschnitte werden in Δ von H berührt, weil das Büschel

---

[1] Bei dem entsprechenden Satz auf pag. 399 d. I. Mittheilung soll es in der 3. und 4. Zeile von unten heissen: „auf unendlich viele Arten" und nicht „auf unendlich verschiedene Arten."

[2] Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. 80. Bd., II. Abth. December-Heft.

das H in Δ zur Tangente hat, aus Kegelschnitten besteht, die einander an dieser Stelle vierpunktig berühren.

Das Netz besteht nicht aus Polaren.

B. Netze mit zwei Basispunkten Δ_1, Δ_2.

I. Ohne eine Gerade H.

Die Curve, für welche ein so beschaffenes Netz die Polaren vorstellt, weist in Δ_1 und Δ_2 Doppelpunkte auf. Ebenso die Hesse'sche Curve; sie degenerirt in einen Kegelschnitt H^2 und in die Gerade $\overline{\Delta_1\Delta_2}$, deren Pol K bezüglich H^2 die Eigenschaften der Cayley'schen Curve besitzt. Er repräsentirt auch dieselbe in Gemeinschaft mit Δ_1 und Δ_2. [1]

II. Mit $\overline{\Delta_1,\Delta_2}$ als einer doppelt zu nehmenden Geraden.

Man gewinnt dieses Netz, wenn von den drei bestimmenden Kegelschnitten, zwei einander in Δ_1 und Δ_2 berühren.

Der Cayley'sche Punkt K befindet sich nun auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$; ihm entspricht für sämmtliche Kegelschnitte des Netzes dieselbe Gerade G als Polare, die im Verein mit $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ auch die Rolle der Hesse'schen Curve spielt.

C. Netze mit zwei vereinigten Basispunkten Δ_{12}.

I. Sind die drei Kegelschnitte K_1, K_2, K_3, welche behufs Bestimmung des Netzes angenommen wurden, nur der einen Einschränkung unterworfen, einander an einer Stelle Δ_{12} zu berühren, so besteht es nicht aus conischen Polaren.

Die drei zur Tangente T in Δ_{12} conjugirten Sekanten von K_1, K_2 und K_3 treffen im Cayley'schen Punkte K zusammen. Die Berührungspunkte der Tangenten aus diesem Punkte an die Kegelschnitte des Netzes erfüllen — wie eine kurze Überlegung zeigt — zwei Strahlen H, H' aus Δ_{12}, die beide doppelt zu nehmende Gerade sind und mit T die Hesse'sche Curve bilden.

II. Soll das Netz aus conischen Polaren einer Curve dritter Ordnung C^3 bestehen, so muss nach Cremona (l. c. pag. 276, Art. 2) der Punkt K auf T liegen.

Die Curve C^3 hat in Δ_{12} eine Spitze mit T als Tangente, und H' fällt mit T zusammen.

D. Netze mit drei Basispunkten Δ_1, Δ_2, Δ_3 treten in drei Formen auf:

---

[1] Siehe die „Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften" von H. Schröter (pag. 555).

I. Die Punkte Δ_1, Δ_2, Δ_3 sind verschieden.

II. Zwei Basispunkte sind vereinigt.

III. Alle drei coincidiren.

Im ersten und letzten Falle sind die Kegelschnitte conische Polaren, im zweiten nicht. [1]

13. In diesem Artikel wollen wir zeigen, dass die im vorstehenden Verzeichniss jedesmal an die erste Stelle gesetzten Netze von allgemeinerer Form auch den in ihrer Art allgemeinsten Curven eigen sind; indem wir den Nachweis liefern, dass ein Auftreten der mit II bezeichneten Form immer entweder eine Erniedrigung der Classe oder eine Singularität zweiter Ordnung an der Curve hervorruft.

Wir nehmen an, in dem Netze A II wäre ein System dreifach berührender Kegelschnitte einer Curve C^n enthalten, die selbstverständlich in Δ einen singulären Punkt hat.

Setzen wir noch voraus, dass die Gerade H ein einfacher Strahl durch Δ ist, der C^n in zwei Punkten α und β schneidet, so kann sie bloss eine quadratische Polare vorstellen; weil nun die Punkte α, β und Δ nicht ein Tripel bilden können, sondern jedenfalls zwei repräsentiren.

Das eine Tripel wird von α, dem ihm auf der Curve C^n unmittelbar folgenden Punkte α' und dem einem Nachbarpunkte Δ' von Δ constituirt, und das zweite von β, dem folgenden Punkte β' und dem andern Nachbarpunkte Δ'' von Δ. Beiden Tripeln entsprechen „Singularitäten zweiter Ordnung“, nämlich Kegelschnitte, die mit C^n in α respective β einen vierpunktigen und in Δ einen dreipunktigen Contact eingehen.

Übergeht H in eine Tangente des singulären Punktes, so rückt β nach Δ und der eine Kegelschnitt berührt den einen Curvenzweig in Δ siebenpunktig, während der andere, dem Punkte α entsprechende, ungeändert bleibt.

In beiden Fällen gehört die Curve der im Artikel 5 erwähnten speciellen Gattung an, auf die sich die Anmerkung bezieht.

Ist hingegen H eine Gerade, welche mit C^n noch an anderer Stelle Δ_1 zwei unendlich nahe Punkte gemein hat, so bilden diese mit Δ nur ein Berührungstripel B und folglich ist H ein Berührungs-

[1] Cremona: Zusatz II, Art. 4 und 6, pag. 277.

kegelschnitt. Die Kegelschnitte, welche Δ und Δ_1 mit den anderen Tripeln verbinden, bilden ein Büschel (K) mit festen Tangenten T und T_1 in Δ und Δ_1. Sie schneiden C^4 in Δ_1 in zwei Punkten, weil von den Punkten des Tripels B zwei hier vereinigt sind.

Daraus erhellt, dass auch Δ_1 ein singulärer Punkt ist und zwar im allgemeinsten Falle ein Doppelpunkt.

Der Punkt Δ dagegen ist eine Spitze, da man die Curve C^4 herstellen kann als Erzeugniss eines Büschels (K_1), das den Punkt Δ und ein Tripel zu Basispunkten hat, und des Büschels (K) mit der festen Tangente T in Δ, die zugleich die Rückkehrtangente ist.

Lassen wir die Curven mit Singularitäten zweiter Ordnung ausser Acht, so haben wir durch das Vorangehende indirect bewiesen, „dass bei den Curven mit einer Spitze oder mit mehreren Doppelpunkten ausschliesslich das Netz A I vorkommt, da die Form A II erst bei Curven auftreten kann, die mindestens einen Doppelpunkt und eine Spitze aufweisen."

Später werden wir zeigen, dass dieses Netz selbst bei diesen Curven nur vereinzelt auftritt, wogegen die Zahl der Systeme A I für jede Curve eine grössere ist.

Für alle Kegelschnitte des Netzes B II kommt dem Punkte K dieselbe Gerade G als Polare zu; sie ist daher auch für jede Curve C^4, welche die Enveloppe eines Systems aus diesem Netze ist, die harmonische Polare von K.

Die allgemeine Curve mit zwei oder drei singulären Punkten wird sonach ihre Systeme von doppelt berührenden Kegelschnitten aus dem Netze B I nehmen; und nur dann, wenn sich unter denselben zwei Rückkehrpunkte befinden, wird auch das Netz B II zur Geltung kommen, — wie wir bei dieser Curve zeigen werden.

In den Netzen C können nur Systeme von doppelt berührenden Kegelschnitten der Curven mit einem singulären Punkte höherer Ordnung[1] enthalten sein. In dem ersteren, das nicht aus conischen

[1] Einem Berührungsknoten oder einer Knotenspitze etc.

Polaren besteht, die allgemeinen Curven und in dem zweiten jene, welche mit einem Pol K und einer harmonischen Polare H' versehen sind.

14. Sehen wir nun das Netz A I, wie es uns bei der Curve mit einem Doppelpunkte entgegentritt, etwas näher an.

Es ist unschwer einzusehen, dass der feste Kegelschnitt C^2, dessen Punkten die Kegelschnitte des Systems als conische Polaren entsprechen, sich in keiner besonderen Lage gegen die Hesse'sche Curve H_4^3 befindet; da irgend einem Kegelschnitte, der ausser jedem Zusammenhang mit H_4^3 steht, als Enveloppe der Polaren seiner Punkte eine Curve C^4 mit einem Doppelpunkte in Δ zukommt.

Es lässt sich dies am schnellsten direct beweisen, indem man die Schnittpunkte von C^4 mit einem Strahl g aus Δ construirt. Diese Gerade hat mit H_4^3 einen Punkt d' gemein, um dessen conjugirten Pol d sich die geraden Polaren γ der Punkte von g drehen. Jedem γ entsprechen wieder vier Punkte als Pole, von denen immer einer p nach Δ fällt und ein zweiter q sich irgendwo auf der Geraden g befindet. Für die zwei Tangenten γ', γ'' aus d an C^2 sind die Punkte p', q', und p'', q'' Punkte der Curve C^4. Unter diesen sind also die Punkte q' und q'' von Δ verschieden, während die andern zwei p' und p'' jedesmal nach Δ fallen.

Es geschieht nun zweimal, d. h. für zwei Lagen von g, dass auch einer von den Punkten q nach Δ rückt, und zwar dann, wenn eine von den Tangenten aus d an C^2 durch Δ geht, weil die conischen Polaren für die Punkte dieser Linie den Strahl, der aus Δ nach dem conjugirten Pol d' von d zielt, in Δ berühren.

Diese zwei besonderen Stellungen von g — g_1, g_2 mögen sie heissen — sind dadurch vollkommen fixirt; sie lassen sich auch leicht angeben, wenn man erwägt, dass die Strahlen nach den Punkten d, d' eine quadratische Involution bilden, welche die Doppelpunktstangenten T_1, T_2 von H_4^3 zu Doppelstrahlen hat: Sie sind harmonisch conjugirt zu den Tangenten τ_1, τ_2 aus Δ an C^2 bezüglich T_1 und T_2.

„Die Tangenten der Curve C^4 im Doppelpunkte sind harmonisch conjugirt zu den Tangenten an den festen Kegelschnitt C^2 bezüglich der Doppelpunktstangenten der Hesse'schen Curve.

Der Doppelpunkt ist somit ein Knoten, ein ideeller Punkt, oder eine Spitze, je nachdem er ausserhalb, innerhalb oder auf C^2 liegt.

15. Im übrigen gilt auch hier für die Bildung der singulären Punkte Alles, was wir darüber im 6. und 7. Artikel gesagt haben.

Einem Kegelschnitte C^2, der H_4^3 an einer Stelle Δ_1' zwei-, drei-, vier-, fünfpunktig berührt, entspricht eine Curve C^4, die im conjugirten Pol Δ_1 einen Doppelpunkt, eine Spitze, einen Berührungsknoten, eine Knotenspitze, einen Osculationsknoten, respective erhält.

Rückt Δ_1' nach Δ, geht folglich C^2 den angegebenen Contact mit dem einen Curvenzweige in Δ ein, so erhalten wir eine C^4 mit beziehungsweise einem Berührungsknoten, einer Knotenspitze einem Osculationsknoten und einer Schnabelspitze in Δ.

Berührt C^2 die Curve H_4^3 in Δ_1' und Δ_2', so hat C^4 ausser dem singulären Punkte Δ noch zwei Doppelpunkte. Ist die Berührung in Δ_1' eine dreipunktige, so ist Δ_1 eine Spitze. Osculiren die Curven einander doppelt, so erhalten wir die Curve mit zwei Spitzen und einem Doppelpunkte.

„In dem Netze AI treffen wir somit alle Curven C^4 an, die mindestens von der vierten und höchstens von der zehnten Classe sind."

Eine Ausnahme bilden ganz specielle Curven und die Curven mit einem dreifachen Punkte. Die Gründe sind dieselben wie im Artikel 9.

16. In gleicher Weise erkennen wir, dass für die Curve mit zwei Doppelpunkten Δ_1, Δ_2 der geometrische Ort der Pole des Kegelschnittsystems BI ein Kegelschnitt von möglichst allgemeiner Lage ist.

Auch hier liegt Δ_1 — das Gleiche gilt für Δ_2 — ausserhalb, innerhalb oder auf C^2, je nachdem er ein Knoten, ein isolirter Punkt oder eine Spitze ist; weil auch für BI die Doppelpunktstangenten von C^4 harmonisch zugeordnet sind zu den Tangenten aus Δ_1 an C^2 für $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und die Tangente von H^2 in Δ_1 als Fundamentalstrahlen.

Die untere Grenze für die Classe der Curven C^4 bleibt vier, die obere sinkt auf acht herab.

In dem Netze *DI* endlich werden wir alle Curven mit drei singulären Punkten vorfinden. Insbesondere entspricht der allgemeinen Curve C^4 mit drei Doppelpunkten ein Kegelschnitt C^2 von allgemeiner Lage, dessen Tangentenpaar aus Δ_i $[i=1,2,3]$ harmonisch liegt zu den Doppelpunktstangenten in Δ_i bezüglich der anstossenden Seiten des Dreieckes $\Delta_1\Delta_2\Delta_3$.

Daraus geht hervor, dass die sechs Doppelpunktstangenten von C^4 einen Kegelschnitt K^2 umhüllen[1], der gleichzeitig mit C^2 einen ideellen Punkt von C^4 umschliesst, eine Spitze enthält und einen Knoten ausschliesst.

Da ferner die conische Polare eines Schnittpunktes α' von C^4 mit $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ aus dieser Linie und einem Strahl t aus Δ_3 nach dem conjugirten Pol α von α' besteht, der C^4 berührt, weil er mit $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ einen Berührungskegelschnitt des Systems vorstellt; so finden wir, dass auch die sechs Tangenten aus den Doppelpunkten Tangenten eines Kegelschnittes T^2 sind. [1]

Zwischen dem Kegelschnitte C^2 und der Curve C_6^4 besteht die Steiner'sche Verwandtschaft[2]; diese ist also der speciellste Fall der Beziehung, welche durch Vermittelung einer allgemeinen Curve dritter Ordnung C^3 hergestellt wird, und geht aus dieser hervor, wenn die Curve C^3 in drei Gerade — die Hauptlinien — zerfällt.

c) Polareigenschaften der Systeme.

17. Die Sätze der Artikel 7—11 der I. Mittheilung (pag. 406—414) behalten im wesentlichen ihre Geltung für alle anderen Systeme von Berührungskegelschnitten; da zu ihrer Begründung nur die eingangs des zweiten Artikels (pag. 400) auseinandergesetzte Möglichkeit der Abbildung auf einen Kegelschnitt und

---

[1] Cf. Salmon-Fiedler: Analyt. Geomet. d. höheren eb. Curven, (II. Auflage) pag. 340 und des Verfassers Abhandlungen im Jännerheft des 79. Bd. und im Aprilheft des 83. Bd. der Sitzb. d. k. Akademie der Wissenschaften.

[2] H. Durége benützt dieselbe in seiner Abhandlung „Über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten" Sitzb. d. k. Akademie d. Wissensch. Bd. 72, Octoberheft. Ebenso verwerthet sie Herr Bobek zu dem gleichen Zwecke im 80. Bd. der Sitzungsb.

die daraus hervorgehende Unveränderlichkeit der Charakteristiken erforderlich ist.

Von den letzteren ändert sich eine scheinbar bei den Systemen III, AII, BII und CIII mit einer doppelt zu nehmenden Geraden H als Berührungskegelschnitt, indem sich die Anzahl der Kegelschnitte, die eine Gerade berühren, um eine Einheit vermindert, weil unter denselben immer die Gerade H mitzuzählen ist.

Mit dieser Linie coincidirt auch die in Bezug auf sie genommene Polare irgend eines Punktes, weshalb sie eine gemeinschaftliche Tangente aller Polarkegelschnitte und infolge dessen auch ein gemeinsamer Bestandtheil der Polarcurven ist.

Letztere sind somit von der dritten Ordnung. Jede hat einen Doppelpunkt in dem conjugirten Pol des Schnittpunktes ihrer Polare mit H.

Für eine Doppeltangente oder eine Tangente aus einem singulären Punkte, die dem System angehört, degenerirt die Polcurve noch weiter in diese Linie und einen Kegelschnitt, weil die Polarkegelschnitte der Punkte dieser Geraden selbe zur Tangente haben.

18. Hervorzuheben ist noch die Polcurve der Verbindungslinie von zwei singulären Punkten Δ_1, Δ_2. Sie ist ein Kegelschnitt in den folgenden Fällen:

α) Wenn das System ein Tangentenpaar t_1t_1 aus Δ_1 und eines t_2t_2 aus Δ_2 enthält.

Um dies zu beweisen, bringen wir in Erinnerung, dass die Polcurve einer Geraden g das Erzeugniss zweier projectivischer Tangentensysteme ist, welche die Polarkegelschnitte P_1^2, P_2^2 von irgend zwei Punkten P_1,P_2 auf g zu Trägern haben[1]. Diese Tangentensysteme übergehen in zweideutig verwandte Strahlbüschel, wenn wir P_1 und P_2 in zwei Schnittpunkte der Linie g mit der Hesse'schen Curve verlegen, und zwar in jene mit Mittelpunkten in den conjugirten Polen P_1', P_2' von P_1 und P_2.

Die zweideutige Beziehung wird durch die Kegelschnitte S des Systems vermittelt, indem jeder Strahl y_1 durch P_1' Polare

[1] Vergl. pag. 408 der I. Mittheilung.

von P_1 für zwei Kegelschnitte S' und S'' ist, bezüglich der dem Punkte P_2 zwei verschiedene, p_1 zuzuordnende Strahlen p_2', p_2'' aus P_2' als Polaren entsprechen.

Für die Linie $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ ist nun der eine Kegelschnitt S, etwa S'', allemal identisch mit dem Tangentenpaar t_1t_1, wenn man — wie oben von P_1 — von Δ_1 ausgeht. Die Beziehung der Büschel mit den Scheiteln in Δ_1' und Δ_2' ist sonach jetzt, weil sie nur durch einen variablen Kegelschnitt S' vermittelt wird, eine eindeutige — und das Erzeugniss, die Polarcurve, ein Kegelschnitt.

β) für die Systeme *BI* und *DI*.

Sie wird hier erzeugt von den Büscheln, welche die Tangenten der Kegelschnitte S des Systems in den Punten Δ_1 und Δ_2 bilden. Diese stehen in zweideutiger Verwandtschaft, da jeder Strahl durch Δ_1 — das Gleiche gilt für Δ_2 — von zwei Kegelschnitten S berührt wird. Doch entspricht ihr gemeinschaftlicher Strahl $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ sich zweimal selbst, weil er der Bestandtheil von zwei Kegelschnitten des Systems ist, nämlich von den conischen Polaren seiner Schnitte mit dem festen Kegelschnitte C^2, der der Curve C^n zukommt.

Das Erzeugniss ist demnach die Gerade $\overline{\Delta_1\Delta_2}$, doppelt gezählt, und ein Kegelschnitt, der geometrische Ort der Pole dieser Linie.

γ) In den Systemen III und *A*II ist die Polcurve der Geraden *H* identisch mit dem Hesse'schen Kegelschnitte und in *B*II mit der Geraden *G*.

III. Bestimmung der Anzahl der Doppel- und Wendetangenten.

1. Die im 9. Artikel gemachte Wahrnehmung, dass ein Strahl durch einen singulären Punkt Δ_1, der einer $r_1$punktigen Berührung zwischen D_2 und H_3 seine Entstehung verdankt, als Tangente aus irgend einem seiner Punkte r_1-mal zählt, versetzt uns in die Lage, auch die Anzahl der Doppeltangenten irgend einer Curve mit singulären Punkten aus jener ohne solche durch Abzählen zu bestimmen.

Wir bemerken zu dem Zwecke, dass eine Tangente aus Δ_1 unter den Doppeltangenten mitzuzählen ist, wenn man auch für diese Curve, wie für jene ohne Singularitäten, als Gesammtzahl der Doppeltangenten 28 erhalten will.

Eine Tangente aus Δ_1, welche im Verein mit einer zweiten die conische Polare von Δ_1' bildet, ist zu zählen als Doppeltangente des Systems, und eine Tangente, die nicht im System auftritt, desshalb, weil ihr eine Poloconik P^2 entspricht, die C^2 in Δ'_1 und noch an anderer Stelle berührt. Und zwar gilt beidemal die Tangente für r_1 Doppeltangenten.

Im ersten Falle darum, weil das Tangentenpaar, übereinstimmend mit den r_1 in Δ'_1 vereinigten Schnittpunkten von C^2 und H^3, als aus r_1 Doppeltangentenpaaren des Systems zusammengesetzt anzusehen ist; im zweiten hingegen deshalb, weil sie unter den Strahlen aus Δ_1, die als Tangenten r_1-mal zählen, eine Doppeltangente repräsentirt.

Besitzt C^4 noch zwei singuläre Punkte Δ_2 und Δ_3, und ist die durch sie bedingte Berührung zwischen C^2 und H^3 einen r_2 und r_3 punktige, so sind ausser den Tangenten aus ihnen auch ihre Verbindungslinien als Doppeltangenten zu berücksichtigen, weil auch ihnen Poloconiken entsprechen, die mit C^2 einen doppelten Contact eingehen.

So wird man die Gerade $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ aufzufassen haben als aus r_1 Doppeltangenten bestehend, weil sie Δ_1 enthält und jede von diesen r_1 Doppeltangenten wieder als eine r_2-mal zunehmende, weil auch Δ_2 auf ihr liegt. — Die Zahl der von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ absorbirten Doppeltangenten ist demnach $r_1 r_2$. Man erfährt demnach die Anzahl der eigentlichen Doppeltangenten einer gegebenen Curve, indem man von 28 die Zahl abzieht, welche nach dem Vorstehenden den uneigentlichen Doppeltangenten entspricht, und erhält so für die letzte Voraussetzung, wenn man mit t_1, t_2, t_3 die Zahl der Tangenten aus $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ respective bezeichnet, die Formel: [1]

$$\tau = 28 - (r_1 t_1 + r_2 t_2 + r_3 t_3) - (r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)$$

2. Bei der Anwendung dieser Formel auf Curven mit höheren Singularitäten ist es am bequemsten, diese in einfach singuläre Punkte aufzulösen. So den Berührungsknoten in zwei Doppelpunkte, die Knotenspitze in einen Doppelpunkt und eine Spitze etc.

[1] Diese Formel lässt sich auf algebr. Curven beliebigen Grades ausdehnen.

Doch führt selbstverständlich auch die directe Anwendung zum Ziele, nur wird man dann sorgfältig Alles das zu berücksichtigen haben, was in der Tangente des singulären Punktes vereint erscheint.

So gilt — um dies an einem Beispiel zu erklären, — bei der Curve C_1^4 mit einer Knotenspitze K die Tangente in dieser nicht nur als Verbindungslinie eines Doppelpunktes Δ und einer Spitze σ, wie bei der Curve C^4 mit diesen zwei Singularitäten, sondern auch als Tangente aus σ, wovon man sich leicht überzeugt, wenn man C_1^4 aus C^4 hervorgehen lässt. Bei C^4 kann man nämlich aus σ vier und aus Δ drei Tangenten ziehen und bei C_1^4 aus K nur drei. Dies zeigt klar, dass von den vier Tangenten aus σ eine bei dem Übergang von C^4 in C_1^4 mit der erwähnten Verbindungslinie coincidirt ist.

Das Resultat enthält beidemal die eigentlichen Doppeltangenten inclusive der Tangente im singulären Punkte. Diese zählt als Doppeltangente bei einer Knotenspitze einfach, bei einem Berührungsknoten oder einer Schnabelspitze doppelt und für einen Osculationsknoten dreifach, wie aus der Entstehung dieser Punkte folgt.[1])

3. Unter den Inflexionstangenten bewirken eine Verminderung der Anzahl nur die Tangenten in den singulären Punkten, denn nur ihnen entsprechen noch Poloconiken, welche den Kegelschnitt C^2 osculieren.

Da wir eine höhere Singularität immer in angegebener Weise in Doppel- und Rückkehrpunkte auflösen können, so werden wir bloss die Reductionen zu bestimmen haben, welche diese Punkte hervorrufen.

Wir setzen voraus, C^4 hätte einen Doppelpunkt Δ, und berechnen die Anzahl der Wendetangenten wie in der ersten Mittheilung.

Wie dort wird C^2 in einem Punkte B von vier Polconiken P^2 berührt, die C^2 noch in acht Punkten P schneiden. Durch P gehen jedoch nur 12 P^2, die C^2 an anderer Stelle B berühren und nicht sechzehn wie im allgemeineren Falle, weil C^4 nun nur von der zehnten Classe ist.

---

[1] Vergl. Salmon-Fiedler, Analyt. Geomet. etc. pag. 279 u. f.

Die Verwandtschaft zwischen den von P und B gebildeten Punktsystemen ist eine 8 — 12deutige, und daher ist $8+12=20$ die Zahl ihrer Doppelelemente. Von diesen ist jedes der Berührungspunkt einer C^2 osculierenden Poloconik. Unter diesen sind auch jene mit inbegriffen, die C^2 in Δ^1 dreipunktig berühren. Ihnen entsprechen die Doppelpunktstangenten, weshalb sie auszuscheiden sind, so dass für die eigentlichen Wendetangenten die Zahl 18 bleibt.

Bei der Curve mit einer Spitze ist die Verwandtschaft zwischen P und B eine 8 — 10deutige, demnach die Zahl der sich selbst entsprechenden Punkte 18. Unter ihnen zählt der Punkt Δ' zweimal, weil die Poloconik, die C^2 hier osculiert, aus der Coincidenz der zwei im vorhergehenden Falle erwähnten entstanden ist. — Die Zahl der eigentlichen Wendetangenten ist somit 16.

Demnach reducirt — wie bekannt — ein Doppelpunkt die Zahl der Inflexionstangenten um 6 und eine Spitze um 8 Einheiten.

Ist eine Knoten- oder eine Schnabelspitze vorhanden, so hat man zu berücksichtigen, dass die Tangente in einem solchen Punkte, wie seine Entstehung zeigt, eine eigentliche Wendetangente enthält.

IV. Die Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

1. Wir geben nun die Anwendung der vorstehenden Resultate auf die Ermittelung der projectivischen Eigenschaften der einzelnen Curven und auf die Berechnung der Anzahl ihrer Systeme von Berührungskegelschnitten. Die uns bei dieser Bestimmung hauptsächlich leitenden Gesichtspunkte, die zu allen Systemen führen, sind die folgenden:

a) Jedes System von Berührungskegelschnitten ist der Bestandtheil eines Netzes.

b) Eine Curve besitzt so viele Systeme einer Art, als sich aus ihren Doppeltangenten, Tangenten aus den singulären Punkten und deren Verbindungslinien Gruppen von derselben Beschaffenheit bilden lassen, wie jene im betreffenden System.

2. Nach den Artikeln 5 und 13 des Abschnittes II kommen bei der allgemeinen Curve C^4 mit einem Doppelpunkte Δ nur Systeme aus den Netzen I und AI vor.

Der ihr im ersten Netze zukommende Fundamentalkegelschnitt C^2 berührt die Hesse'sche Curve H^3 in einem Punkte Δ', dessen conjugierter Pol Δ ist, und schneidet sie sonach noch in vier Punkten α'. Daraus ersehen wir, dass im Systeme I für die behandelte Curve ein Tangentenpaar t,t' aus Δ, das polare Geradenpaar dieses Punktes, und vier Doppeltangentenpaare dd', d_1d_1'...., die conischen Polaren der Punkte α', auftreten. Nun lassen sich aus den 16 Doppeltangenten der Curve $\binom{16}{2}=120$ Paare bilden, und man erhält daher $120:4=30$ Systeme I, weil jedes 4 Paare besitzt und ein Paar nicht in zwei Systemen vorkommen kann.

Dies steht im Einklang mit den $\binom{6}{2}=15$ Paaren t, t', zu welchen die 6 Tangenten aus Δ Veranlassung geben; denn jedes liefert nach Artikel 3 in II zwei Systeme. Von diesen zweien ist eines vollkommen bestimmt, wenn man ausser t,t' noch eine Doppeltangente d, die es enthält, kennt, weil dadurch auch die zweite d' zu einem Paar ergänzende Doppeltangente d' fixirt ist, indem ihre Berührungspunkte auf dem Kegelschnitte liegen müssen, der die Berührungspunkte von d mit jenen von t und t' und mit Δ verbindet.

Daraus ist klar, dass die zwei durch ein Paar tt' bedingten Systeme I alle 16 Doppeltangenten enthalten. Jedes besitzt ja 8 Doppeltangenten, von denen keine beiden gemeinsam ist.

Damit ist der folgende Satz bewiesen:

„Die Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte besitzt 30 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte von der Art I. Jedes enthält als degenerirte Elemente vier Doppeltangentenpaare und ein Tangentenpaar aus dem Doppelpunkte.

Die 30 Systeme bilden 15 Paare derart, dass in jedem alle 16 Doppeltangenten und nur ein Tangentenpaar aus dem Doppelpunkte vorkommen.[1])

[1] Vergl. Brill's Abhandlungen: „Über diejenigen Curven, deren Coordinaten sich als hyperelliptische Functionen eines Parameters darstellen

Die Cayley'schen Curven zweier Systeme eines Paares berühren sowohl das gemeinschaftliche Tangentenpaar tt' in seinen Berührungspunkten mit C^4 als auch die Berührungsehne.

Dass ferner auf t durch die Doppeltangenten zwei quadratische Involutionen festgelegt werden, in welchen auch der Doppelpunkt Δ mit dem Berührungspunkte von t ein Paar bildet, folgt durch Specialisirung aus dem Satz auf Seite 406 der I. Mittheilung.

3. In einem Netze $\mathcal{A}I$ entspricht C^4 als Fundamentalkegelschnitt ein Kegelschnitt C^2 von allgemeiner Lage, der die Hesse'sche Curve H_4^3 in 6 getrennten Punkten α^1 trifft. Jedem dieser Punkte ist als conische Polare die Vereinigung einer Tangente t aus Δ und einer Doppeltangente d, die im conjugierten Pol α von α' zusammentreffen, zugeordnet.

Eine Tangente t aus Δ lässt sich mit jeder Doppeltangente zusammenfassen, gehört also 16 Systemen an. Ausser diesen treten keine weiteren auf, weil von den $6 \cdot 16$ Paaren t, d, die sich aus allen t und allen d bilden lassen, je 6 sich in einem System $\mathcal{A}I$ befinden und keines zwei Systemen gemeinsam sein kann.

„Die sprachliche Curve weist 16 Systeme dreifach berührender Kegelschnitte auf. Jedes ist von der Art $\mathcal{A}I$ und enthält 6 Geradenpaare, deren jedes aus einer Doppeltangente und einer Tangente aus dem Doppelpunkte besteht."

4. Die Seiten der Tripel von Berührungspunkten umhüllenden Cayley'schen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$, der demnach die Rolle der Directionscurve für das involutorische System der Tripel spielt. Er wird auch von jeder Doppeltangente des Systems und den Verbindungslinien ihrer Berührungspunkte mit jenem der ihr entsprechenden Tangente t aus Δ berührt.

Eine Tangente δ von $\mathfrak{K}^2$ bestimmt auf H_4^3 3 Punkte, von denen zwei conjugierte Pole p' p'' und der dritte ihr Schnitt α mit jenem Strahl τ aus Δ ist, der mit ihr das polare Geradenpaar von

---

lassen" (Crelle Journal, Bd. 65, pag. 283) und „Note über Doppeltangenten einer Curve vierter Ordnung mit einem Doppelpunkte" (Math. Annalen, Bd. 6, pag. 66).

α bildet. Die Geraden δ und τ, beziehungsweise die von ihnen gebildeten Strahlensysteme, sind projectivisch auf einander bezogen und erzeugen die Hesse'sche Curve H_4^3. Da entsprechende Elemente auch eine Doppeltangente d und die sie zu einem Berührungskegelschnitt ergänzende Tangente t sind, so ist folgende Relation richtig:

„Die 16 Doppeltangenten von C_{10}^4 bilden 16 Hexaden, deren jede einen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ umhüllt und auf ihm ein Tangentensystem bestimmt, das projectivisch ist mit dem Büschel der 6 Tangenten aus dem Doppelpunkte."

Da die 6 Punkte α, in welchen die Doppeltangenten eines Systems die zugeordneten Tangenten t treffen, als die conjugierten Pole der Punkte α' auf einem Kegelschnitt C_1^2 liegen, so ist auch bewiesen, „das die 96 Punkte, in welchen die 16 Doppeltangenten von den Tangenten aus dem Doppelpunkte geschnitten werden, 16 Gruppen von je 6 Punkten eines Kegelschnittes formiren."

Den 6 Punkten, welche die Tangenten aus dem Doppelpunkte auf einer Doppeltangente d festlegen, erscheinen in jedem der 6 Systeme AI, in denen sie vorkommt, bezüglich der auf ihr liegenden conjugierten Pole p' p'', ihr Berührungspunkt mit dem betreffenden Cayley'schen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ und 5 Punkte, die auf Doppeltangenten liegen, harmonisch conjugirt.

Solcher Involutionen gibt es auf einer Doppeltangente 6, in jeder bilden auch die Berührungspunkte ein Paar.

5. Es ist nun klar, dass man irgend welche 5 Tangenten d des absoluten Involutionskegelschnittes $\mathfrak{K}^2$ einer Curve H_4^3 zu Doppeltangenten und die entsprechenden Strahlen t aus dem Doppelpunkte Δ von H_4^3 zu Tangenten einer Curve C_0^4 machen kann, die mit einem Doppelpunkte in Δ versehen ist, und dass durch diese Annahme C_{10}^4 eindeutig bestimmt ist.

Wählt man nicht vorerst eine Curve H_4^3 als Grundlage für die Bestimmung von C_{10}^4, sondern direct 5 Doppeltangenten $d_1, d_2 \ldots d_5$, von denen vorausgesetzt wird, dass sie einer Hexade angehören, so dürfen, davon unabhängig, noch zwei Strahlen $t_1 t_2$ aus dem Punkte Δ, der den Doppelpunkt von C_{10}^4 repräsentirt, als Tangenten angenommen werden.

Den Schnittpunkten p_1, p_2 der letzteren mit einer Tangente τ jenes Kegelschnittes $\mathfrak{K}^2$, den die Geraden $d_1 \ldots d_5$ festlegen, weise man irgend zwei von den fünf Punkten $q_1, q_2 \ldots q_5$ zu, die sie auf diesen Linien fixirt, und vervollständige die durch diese zwei Punktepaare $p_1 q_1, p_2 q_2$ gegebene Involution.

Das Strahlbüschel, welches die Punkte p von τ aus Δ projicirt und das System der Tangenten von $\mathfrak{K}^2$ durch die conjugirten Punkte q sind projectivisch und erzeugen eine Curve H_4^3, für die, als Hesse'sche Curve, $\mathfrak{K}^2$ die Cayley'sche ist.

Die conjugirten Pole der Schnittpunkte α' der Doppeltangenten $d_1 \ldots d_5$ mit den entsprechenden Strahlen t aus Δ bestimmen einen Kegelschnitt C^2, dem als Enveloppe der conischen Polaren seiner Punkte die gesuchte C_{10}^4 entspricht.

Wir ersehen aus dem Vorstehenden, dass zur Bestimmung einer Curve C_{10}^4 fünf Doppeltangenten einer Hexade und zwei Tangenten aus dem Doppelpunkte hinreichen. — Die Zahl der Lösungen ist übereinstimmend mit den möglichen Zuordnungen der Punkte $p_1 p_2$ und $q_1 \ldots q_5$ gleich 20.

6. Die Curve C_{10}^4 wird in einem ihrer einfachen Schnittpunkte D mit einer Hesse'schen Curve H^3 von einem Kegelschnitte des betreffenden Systems vierpunktig berührt, der noch einen doppelten Contact mit ihr eingeht. In einem Systeme kommen 10 solche Punkte vor, im ganzen also 300.

Eine Hesse'sche Curve H_4^3 hingegen schneidet C^4 ausser in Δ an acht Stellen D', deren jede die Berührungsstelle eines vierpunktigen Contactes mit einem Kegelschnitt des Systems ist. Die Gesammtzahl dieser Punkte ist $8 \cdot 16 = 128$.

„Es gibt 428 Berührungskegelschnitte, die C_{10}^4 vierpunktig berühren. Von denselben berühren 300 die Curve noch an 2, und 128 noch an einer Stelle. Die letzteren Kegelschnitte enthalten alle den Doppelpunkt."

Hieher gehören ferner noch jene Kegelschnitte O_1^2 und O_2^2 eines Systems AI, welche einen Curvenzweig von C_{10}^4 in Δ osculiren und C_{10}^4 noch in zwei Punkten berühren. Sie entsprechen den Tangentialpunkten der Tangenten aus Δ an C^2 als conische Polaren. — Ihre Gesammtzahl ist 32.

Wir schliessen noch Relationen bei, welche zwischen den Berührungspunkten der Doppeltangenten und der Tangenten aus dem Doppelpunkte bestehen.

In einem der 30 Systeme I kommen 4 Paare von Doppeltangenten vor. Die 8 Berührungspunkte irgend zweier befinden sich auf einem Kegelschnitte K^2, solcher Kegelschnitte enthält also ein System 6. Dies gäbe im ganzen 180 K^2, da aber jeder in drei Systemen auftritt, weil die ihm zugehörige Tetrade von Doppeltangenten zu 3·2 Paaren Veranlassung gibt, so reducirt sich die Zahl auf 60.

Ferner erscheinen in je zwei Systemen eines Paares 8 Kegelschnitte K^2, deren einer den Doppelpunkt Δ mit den Berührungspunkten des Tangentenpaares t, t' und mit jenen eines Doppeltangentenpaares verbindet. Ihre Gesammtzahl ist $8 \cdot 15 = 120$.

„Es gibt 60 Kegelschnitte, von denen jeder durch die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten geht, und 120 Kegelschnitte von der Eigenschaft, dass auf jedem der Doppelpunkt, die Berührungspunkte zweier Tangenten aus ihm und zweier Doppeltangenten liegen."

Wir haben im Vorstehenden alle Systeme erhalten, deren degenerirte Elemente Geradenpaare sind; denn wir gruppirten in Paare: *a)* alle Doppeltangenten, *b)* alle Tangenten aus dem Doppelpunkte und *c)* alle Doppeltangenten mit allen Tangenten aus dem Doppelpunkte.

Systeme mit einem in eine „doppelt zunehmende Gerade" ausgearteten Berührungskegelschnitte können bei der allgemeinen Curve C_{10}^8, wie wir dies in dem Artikel 5 und 13 des Abschnittes II begründet haben, nicht vorkommen.

Das 31. System vierfach berührender Kegelschnitte, zu dem Herr Professor Brill a. a. O. durch Anwendung Abel'scher Integrale gelangt, besteht demnach nicht aus eigentlichen Kegelschnitten, sondern ist allem Anschein nach mit dem 32., dem Systeme der doppelt zählenden Geraden der Ebene identisch.

Auch Herr Professor Lindemann[1]) findet dieses System, und zwar auf demselben Weg, und fügt hinzu, dass es jede der

[1] Clebsch, Vorlesungen über Geometrie, pag. 876 u. 882.

6 Tangenten aus dem Doppelpunkte als eine in eine Doppelgerade ausgeartete Curve besitzt.

Dass dies nur möglich ist, wenn dieses System mit dem 32. zusammenfällt, liegt auf der Hand. Die Hesse'sche Curve eines Netzes von eigentlichen Kegelschnitten ist ja von der 3. Ordnung kann also nie aus 6 Geraden bestehen.

V. Die Curve C_9^4 mit einer Spitze.

1. Bei der Curve C_9^4 mit einem Rückkehrpunkte Δ ist ein System von der Art I versehen mit drei eigentlichen Doppeltangentenpaaren α, α^1 und einem dreifach zählenden Tangentenpaare t, t' aus Δ, da der Fundamentalkegelschnitt C^2 die Hesse'sche Curve H_6^3 osculirt.

Die Curve besitzt zehn Doppeltangenten, die Zahl der Paare ist somit $\binom{10}{2}=45$ und die der Systeme I gleich $45:3=15$.

Ebenso gross ist die Zahl der Systeme AI, denn jedes enthält erstens, entsprechend den vier einfachen Schnittpunkten von C^2 und H_4^3, vier Tangenten t aus Δ mit vier Doppeltangenten d vereinigt und zweitens, weil C^2 auch durch Δ geht, die aus den weiteren zwei Tangenten t, t' aus Δ — den Doppelpunktstangenten von H_4^3 — bestehende conische Polare von Δ, die als Berührungskegelschnitt doppelt gilt.

Auch hier lässt sich für zwei Systeme I und AI, welche das Tangentenpaar tt' aus Δ gemeinsam haben darthun, dass keine Doppeltangente des einen im andern auftritt[1])

„Die Curve C_9^4 mit einer Spitze besitzt 15 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte I und ebenso viele Systeme AI von dreifach berührenden Kegelschnitten, welche durch die Spitze gehen.

In einem System I kommen 3 Doppeltangentenpaare vor, und in einem System AI vier Doppeltangenten vereinigt zu Paaren mit vier Tangenten aus Δ, ferner in beiden ein Tangentenpaar aus Δ.

In einem System AI, das mit einem System I das Tangentenpaar aus Δ gemeinschaftlich hat, treten jene

[1] Siehe Artikel 2 im Abschnitt IV.

vier Doppeltangenten auf, die dem letzteren nicht angehören, so dass in beiden ein Paar bildenden Systemen alle zehn Doppeltangenten zu finden sind."

2. Die vier Doppeltangenten d_1, d_2, d_3, d_4 im System AI umhüllen mit dem zugehörigen Tangentenpaare tt' und seiner Berührungssehne den Cayley'schen Kegelschnitt $\mathfrak{K}^2$ und bilden auf ihm ein Tangentensystem, das projectivisch mit dem Büschel der 6 Tangenten aus Δ [1]). In der Zuordnung entspricht der Tangente t, als einem Element des Tangentensystems, die Tangente t' als Strahl des Büschels, und umgekehrt.

Halten wir die Thatsache, dass ein Tangentenpaar t,t' aus Δ zu einem System I und zu einem von der Art AI führt, mit dem im Artikel 3, Abschnitt II Gesagten zusammen, so erkennen wir, dass von den dort erwähnten zwei Doppelstrahlen der eine die Curve C^3 im vorliegenden Fall nur noch in einem Punkte schneidet, folglich mit der Rückkehrtangente identisch ist. Der zweite liegt zu dieser bezüglich t,t' harmonisch:

Die Curve C_9^3 wird in ihren zwei weiteren Schnittpunkten mit der Berührungssehne irgend eines Tangentenpaares tt' aus der Spitze Δ und in den zwei Punkten, welche der zur Rückkehrtangente bezüglich tt' harmonisch liegende Strahl auf ihr bestimmt, von einem und demselben Kegelschnitte berührt."

„Jeder Kegelschnitt, der in Δ die Spitzentangente berührt und die Berührungspunkte irgend zweier Tangenten aus Δ enthält, legt auf C_9^3 drei Punkte fest, in welchen die Curve von einem durch Δ laufenden Kegelschnitte berührt wird."

3. Zwischen den vier Doppeltangenten d_1, d_2, d_2, d_4 von AI und den drei Doppeltangentenpaaren $d_1'd_1'', d'_2d''_2, d_3'd_3''$ des conjugirten Systems I bestehen noch folgende Beziehungen:

Die Berührungspunkte je zweier von den drei Doppeltangentenpaaren liegen auf einem Kegelschnitte und zwar von $d_1'd_1''d_2'd_2''$ auf K_3, von $d_2'd_2'', d_3'd_3''$ auf K_1 und von $d_3'd_3'', d_1'd_1'$

[1]) Hieraus ergibt sich ein Zusammenhang zwischen den 15 Cayley-schen Kegelschnitten.

auf K_2. Daraus geht hervor, dass die Berührungspunkte von drei Doppeltangenten, von denen keine zwei einem der drei Paare angehören, also etwa von d_1', d_2', d_3'' nicht auch Punkte eines Kegelschnittes K sein können. Denn wäre dies der Fall, so müssten die drei Doppeltangenten $d_1' d_2'' d_3''$ — als die zu d_2' conjugirten Sehnen der drei in den Berührungspunkten von d_2' zusammentreffenden Kegelschnitte K_1, K_3 und K_4 — durch einen Punkt gehen, — was bei einer allgemeinen Curve C_9^4 nicht geschieht.

In dem System I, das durch $d_1' d_2'$, als Paar, gegeben ist und in dem auch $d_1' d_2''$ ein solches bilden, kann somit das dritte Paar nur aus zwei Doppeltangenten des „Quadrupels" $d_1 d_2 d_3 d_4$ bestehen. Nennen wir dieses $d_1 d_2$, so kann im selben System ferner nicht auch $d_3 d_4$ als Paar auftreten, weil ein System von der Art I nur drei Paare besitzt: Die Berührungspunkte der vier Doppeltangenten eines Systems AI sind demnach nicht Punkte eines Kegelschnittes.

Die Doppeltangenten des Quadrupels, zu Paaren gruppirt, führen zu sechs Systemen I; je zwei davon sind dadurch adjungirt, dass sie keine der Tangenten, $d_1 d_2, d_3 d_4$ gemein haben und dass ihn ihnen, jedesmal in anderer Gruppirung, dieselben vier Doppeltangenten, die in dem System I, das die weiteren sechs Doppeltangenten $d_1' d_1'', d_2' d_2'', d_3' d_3''$ enthält, zwei Paare bilden, auch in zwei Paaren erscheinen. So kommen in den zwei $d_1 d_2$ und $d_3 d_4$ entsprechenden Systemen I die Paare $d_1' d_2', d_1'' d_2''$, beziehungsweise $d_1' d_2'' d_1'' d_2'$ vor.

4. Von den drei Kegelschnitten K_1, K_2, K_3 im System I kommt jeder noch in zwei Systemen vor. Im Ganzen gibt es sonach 15 Kegelschnitte durch die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten und 15 derartige Tetraden. Dazu treten in jedem System I 3 Kegelschnitte durch Δ, welche die Berührungspunkte des Tangentenpaares $t t'$ und eines Doppeltangentenpaares enthalten. Ihre Gesammtzahl ist offenbar gleich 45. Endlich findet man in jedem System AI noch vier Kegelschnitte, von denen einer den Punkt Δ mit den Berührungspunkten des Tangentenpaares $t t'$, einer weiteren Tangente t aus Δ und der diese zu einem Berührungskegelschnitt ergänzenden Doppeltangente d verbindet. Jeder tritt in drei Systemen auf, da sich

aus den drei Tangenten t drei Paare herstellen lassen. Ihre Anzahl ist $4\times 15:3=20$, jeder tangirt in Δ die Spitzentangente von C_9^4.

„Bei der Curve C_9^4 kommen 15 Kegelschnitte vor, von denen jeder die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten enthält, 45 Kegelschnitte, von denen jeder die Spitze Δ mit den Berührungspunkten zweier Tangenten aus ihr und zweier Doppeltangenten verbindet, und endlich 20 von der Eigenschaft, dass auf jedem die Spitze Δ, die Berührungspunkte dreier Tangenten aus ihr und die einer Doppeltangente liegen."

5. Da die Hesse'sche Curve H_6^3 eines Systems I von der Rückkehrtangente in Δ berührt wird, so schneidet sie C_9^4 nur noch in neun weiteren Punkten, in welchen diese von Kegelschnitten des Systems vierpunktig berührt wird. Die Hesse'sche Curve eines Systems AI trifft mit C_9^4, wie bei C_{10}^4, ausser in Δ in acht Punkten zusammen. Die Zahl der vierpunktig berührenden Kegelschnitte in AI bleibt also die gleiche:

„Es gibt 15 $(9+8)=255$ Berührungskegelschnitte, welche mit C_9^4 einen vierpunktigen Contact eingehen. Davon berühren 135 die Curve noch an zwei Stellen, und 120 gehen durch die Spitze und berühren sie noch einfach."

VI. Die Curve mit zwei Doppelpunkten.

a) Doppelt berührende Kegelschnitte

1. Wir leiten die Untersuchung mit der Besprechung der Systeme CI ein, weil wir so zu den projectivischen Eigenschaften der Curve C_8^4 und zu einem einfachen Nachweis für die Existenz des Systems III gelangen, und übergehen dann zu den Systemen I und AI.

Der C_8^4 in BI entsprechende Fundamentalkegelschnitt C^2 legt auf dem Hesse'schen Kegelschnitt H^2 vier Punkte α' fest, deren conische Polaren aus Geradepaaren $a_1 a_2$ bestehen, von denen jedes die zwei Doppelpunkte Δ_1, Δ_2 mit dem conjugirten Pole α von α' verbindet und C_8^4 in zwei Punkten A_1, A_2 berührt, die mit dem Cayley'schen Punkt $\mathfrak{K}$ auf einem Strahl liegen.

Diese vier Geradenpaare stellen sonach die Tangenten der Curve aus den Doppelpunkten Δ_1, Δ_2 vor und bilden um diese zwei projectivische Büschel[1]), da je zwei Tangenten eines Paares in einem Punkte α des durch Δ_1 und Δ_2 laufenden Kegelschnittes H^2 zusammentreffen.

Gemäss den vier Permutationen der Tangenten a_1, b_1, c_1, d_1 aus Δ_1, welchen derselbe Doppelverhältnisswerth $(a_1 b_1 c_1 d_1) = (a_2 b_2 c_2 d_2)$ zukommt, wie den vier Tangenten a_2, b_2, c_2, d_2, gibt es vier Kegelschnitte H^2: $H_1^2, H_2^2, H_3^2, H_4^2$, von denen jeder im Verein mit der Linie $\overline{\Delta_1 \Delta_2}$ die Bedeutung der Hesse'schen Curve in einem besonderen System BI hat. Die zugehörigen Cayley'schen Punkte $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \mathfrak{K}_3, \mathfrak{K}_4$ sind die Pole von $\overline{\Delta_1, \Delta_2}$ in Bezug auf $H_1^2, H_2^2, H_3^2, H_4^2$ respective.

Die conische Polare eines Punktes δ' von $\overline{\Delta_1 \Delta_2}$ wird zusammengesetzt von dieser Linie und einem Strahl durch den betreffenden Cayley'schen Punkt $\mathfrak{K}$, der Polare von δ' bezüglich H^2. Dieser wird zur Doppeltangente d von C_8^4, wenn δ in einen der zwei Schnittpunkte D, D' von $\overline{\Delta_1 \Delta_2}$ mit C^2 rückt, da er mit dieser Linie nun einen Berührungskegelschnitt des Systems BI constituirt.

In jedem Cayley'schen Punkte durchschneiden sich somit zwei von den acht Doppeltangenten der Curve, sie gruppiren sich in dieser ganz bestimmten Ordnung in vier Paare $d_1 d_1'$ $d_2 d_2', d_3 d_3'$ und $d_4 d_4'$, deren jedes einem System BI angehört.

„Die allgemeine Curve C_8^4 besitzt vier Systeme BI. Zwei von den sechs degenerirten Berührungskegelschnitten eines solchen Systems werden gebildet von der Verbindungslinie der zwei Doppelpunkte und je einer Doppeltangente, jeder weitere von zwei Tangenten aus den beiden Doppelpunkten.“[2])

---

[1] Cf. Salmon-Fiedler, „Höhere eb. Curven etc.“ pag. 317.

[2] Vergl. Salmon-Fiedler, pag. 323, und Küpper's „Beiträge zur Theorie der Curven 3. und 4. O.“, Abhandlungen d. k. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. in Prag, VI. Folge, 5. Bd. Herr Prof. Küpper bespricht zuerst verschiedene Eigenschaften der Einhüllenden eines Systems der oben erwähnten Art und führt auf Grund derselben den Beweis für die Identität dieser Curve mit einer allgemeinen Curve C_8^4.

2. Ein Strahl durch einen Cayley'schen Punkt $\mathfrak{C}i$ $(i=1,2,3,4)$ schneidet C_8^4 in vier Punkten, welche zwei Punktepaare B_1', B_2', B_1'', B_2'' bilden sowohl in der quadratischen Involution (vom Geschlechte 1), welche von den Berührungspunkten der Kegelschnitte des $\mathfrak{C}i$ entsprechenden Systems BIi auf C_8^4 formirt wird, als auch in jener, die auf dem Strahl bestimmt wird durch seine Schnittpunkte mit dem Hesse'schen Kegelschnitte H^2i von BIi als den Doppelelementen.

In dieser Involution bilden auch die Schnittpunkte mit irgend einem Kegelschnitte des Netzes BIi ein Paar, also auch jene mit zwei zusammengehörigen Tangenten von C_8^4 aus Δ_1 und Δ_2 und der Schnitt mit $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ im Verein mit $\mathfrak{C}i$.

Daraus geht hervor, dass der Strahl in jedem seiner Schnitte mit H_i^2 von Kegelschnitten des Netzes und von zwei Kegelschnitten des Systems berührt wird, und dass auch umgekehrt jeder solche Kegelschnitt in seinen von $\Delta_1\Delta_2$ verschiedenen Schnittpunkten mit H^2i Strahlen aus $\mathfrak{C}i$ zu Tangenten hat.

Auf eine Doppeltangente des Systems angewendet, führt dies zu der Relation:

„Das Berührungspunktepaar einer Doppeltangente und das Punktepaar, welches der auf ihr liegende Cayley'sche Punkt $\mathfrak{C}i$ und ihr Schnitt mit der Verbindungslinie der Doppelpunkte Δ_1, Δ_2 bilden, bestimmen auf ihr die quadratische Involution harmonischer Pole für den zu $\mathfrak{C}i$ gehörigen Hesse'schen Kegelschnitt H_i^2. In dieser Involution sind den Schnittpunkten der Doppeltangente mit dem Tangentenbüschel aus dem einen Doppelpunkt Δ_1 jene mit den vier Tangenten aus dem zweiten Δ_2 conjugirt."

3. Bezeichnen wir den Schnittpunkt zweier Tangenten a_1 und a_2 aus Δ_1 beziehungsweise Δ_2 mit $(a_1 a_2)$, so finden wir, da nach Obigem zwischen den zwei Tangenten-Büscheln die Doppelverhältnissgleichungen:

$$(a_1 b_1 c_1 d_1) = (a_2 b_2 c_2 d_2) = (b_2 a_2 d_2 c_2) = (d_2 c_2 b_2 a_2) = (c_2 d_2 a_2 b_2)$$

bestehen, als Punkte, welche auf Hesse'schen Kegelschnitten liegen, die folgenden:

$(a_1 a_2),(b_1 b_2),(c_1 c_2),(d_1 d_2)$ auf H_1^2
$(a_1 b_2),(a_2 b_1),(c_1 d_2),(c_2 d_1)$ „ H_2^2
$(a_1 c_2),(b_1 d_2),(a_2 c_1),(b_2 d_1)$ „ H_3^2
$(a_1 d_2),(b_1 c_2),(b_2 c_1),(a_2 d_1)$ „ H_4^2

Um die Beziehung der vier Cayley'schen Punkte $\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_4$ zu diesen vier Gruppen aufzudecken, wenden wir die bekannte Construction an für die Bestimmung des Poles $\mathfrak{K}_1$ der Linie $\overline{\Delta_1 \Delta_2}$ in Bezug auf den Kegelschnitt H_1^2, der diese zwei Punkte und die Punkte $(a_1 a_2),(b_1 b_2),(c_1 c_2)$ enthält.

Wir greifen von den letzteren zwei, etwa $(a_1 a_2)$ und $(b_1 b_2)$ heraus und verbinden sie mit Δ_1 und Δ_2. Die Verbindungslinie der zwei weiteren Ecken $(a_1 b_2)$ und $(a_2 b_1)$ des durch diese vier Linien bestimmten vollständigen Vierseits stellt — wie ohneweiters klar ist — einen Strahl durch den gesuchten Pol vor.

Da wir in gleicher Weise wie $(a_1 a_2),(b_1 b_2)$ irgend zwei andere Punkte der ersten Gruppe verwenden können, so erkennen wir, dass die sechs Linien $\overline{(a_1 b_2)(a_2 b_1)},\overline{(a_1 c_2)(a_2 c_1)},\overline{(a_1 d_2)(a_2 d_1)}$ $\overline{(b_1 c_2)(b_2 c_1)},\overline{(b_1 d_2)(b_2 d_1)},\overline{(c_1 d_2)(c_2 d_1)}$ durch den Cayley'schen Punkt K_1 laufen.

Zu den anderen Gruppen übergehend, finden wir das Gleiche für $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$ und $\mathfrak{K}_4$, woraus wir ferner insbesondere erkennen, dass diese drei Punkte die Diagonalecken für das Viereck der ersten Gruppe bilden:

„Irgend drei Cayley'sche Punkte bilden somit ein Polardreieck für den Hesse'schen Kegelschnitt, der dem vierten Cayley'schen Punkte entspricht."

Um die weiteren Schnittpunkte von H_1^2 und H_2^2 zu ermitteln, bedienen wir uns des bekannten Verfahrens und projiciren die Punkte $(a_1 b_2),(a_2 b_1)$ und $(c_1 d_2)$ aus Δ_1 und Δ_2 auf H_2^2. Wir gelangen so zu den Punktepaaren $(a_1 a_2)(b_1 b_2),(b_1 b_2)(a_1 a_2)$ und $(c_1 c_2)(d_1 d_2)$, die kreuzweise, d. i. $(a_1 a_2)$ mit $(c_1 c_2)$ und $(b_1 b_2)$ mit $(d_1 d_2)$ etc. verbunden, Linienpaare geben, die offenbar in $\mathfrak{K}_3$ respective $\mathfrak{K}_4$ zusammentreffen und also $\overline{\mathfrak{K}_3 \mathfrak{K}_4}$ als die weitere gemeinsame Sekante von H_1^2 und H_2^2 liefern.

„Die Verbindungslinie zweier Cayley'schen Punkte ist die gemeinsame Sekante für die zwei ihnen nicht entsprechenden Hesse'schen Kegelschnitte."

4. Halten wir diesen Satz mit dem vorletzten zusammen, so erkennen wir, dass der Geraden $\mathfrak{R}_3\mathfrak{R}_4$ als Pol für H_1^2 der Punkt $\mathfrak{R}_2$ und für H_2^2 der Punkt $\mathfrak{R}_1$ zukommt. Die Tangenten von H_2^2 in seinen Schnittpunkten mit H_1^2 sind also auch Strahlen aus $\mathfrak{R}_1$ und er ein Kegelschnitt des durch $\mathfrak{R}_1$ und H_1^2 gegebenen Netzes, und umgekehrt. Dasselbe gilt für H_3^2 und H_4^2; auch sie sind Elemente des Netzes BI_1, wie schon daraus unzweifelhaft hervorgeht, dass sie einander und H_2^2 ausser in Δ_1 und Δ_2 in Punkten schneiden, die beziehungsweise auf den Strahlen $\overline{\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2}$, $\overline{\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_4}$, $\overline{\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_3}$ des Büschels um R_1 liegen.

„Irgend drei von den vier Hesse'schen Kegelschnitten gehören dem Netze BI des vierten an, d. h jenem Netze, in dem der vierte im Verein mit $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ Hesse'sche Curve ist."

Dem Schnittpunkte von $\overline{\mathfrak{R}_3\mathfrak{R}_4}$ und $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ entspricht bezüglich H_1^2 und H_2^2 dieselbe Gerade als Polare, und zwar die Gerade $\overline{\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2}$, da $\mathfrak{R}_1$ und $\mathfrak{R}_2$ die Pole von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ rücksichtlich der zwei erwähnten Curven sind. Weil sich ebenso nachweisen lässt, dass $\overline{\mathfrak{R}_3\mathfrak{R}_4}$ die Polare des Schnittes von $\overline{\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2}$ und $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ in Bezug auf H_3^2 und H_4^2 ist; so sehen wir in $\overline{\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2}$, $\overline{\mathfrak{R}_3\mathfrak{R}_4}$ conjugirte Polaren der vier Kegelschnitte H_1^2, H_2^2, H_3^2 und H_4^2.

Gleiches lässt sich für $\overline{\mathfrak{R}^1\mathfrak{R}_3}$ und $\overline{\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}_4}$ und daher auch für $\overline{\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_4}$ und $\overline{\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}_3}$ zeigen: Jedes Gegenseitenpaar des Viereckes $\mathfrak{R}_1\mathfrak{R}_2\mathfrak{R}_3\mathfrak{R}_4$ bildet ein Polarenpaar für alle vier Hesse'sche Curven und legt auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ zwei Punkte fest, welche Δ_1, Δ_2 harmonisch trennen.

„Die vier Cayley'schen Punkte sind die Ecken eines gemeinsamen Polvierecke der vier Hesse'schen Kegelschnitte, bezüglich dessen die Doppelpunkte von C_3^3 ein Paar conjugirter (harmonischer) Pole bilden."

Anmerkung. *a*) Degenerirt ein Hesse'scher Kegelschnitt H_1^2 in zwei Gerade, von denen die eine selbstverständlich mit $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ identisch ist, so liegen die zwei Tangentenbüschel $a_1b_1c_1d_1$ und $a_2b_2c_2d_2$ perspectivisch. Die Perspectivitätsaxe ist die zweite Linie H_1, in welche H_1^2 zerfällt.

Der zu H_1^2 gehörende Cayley'sche Punkt $\mathfrak{K}_1$ befindet sich auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und ist der Pol von H_1 für die drei anderen Hesse'schen Kegelschnitte H_2^2, H_3^2, H_4^2, deren Cayley'sche Punkte $\mathfrak{K}_2$, $\mathfrak{K}_3$, $\mathfrak{K}_4$ folglich auf H_1 liegen.

Jeder Strahl aus $\mathfrak{K}_1$ legt auf C_8^4 vier Punkte fest, die paarweise durch $\mathfrak{K}_1$ und H_1 harmonisch getrennt sind, woraus erhellt, dass H_1 eine harmonische Polare von C_8^4 für $\mathfrak{K}_1$ als Pol ist.

Die Tangenten an C_8^4 in den Schnitten mit H_1 laufen durch den Punkt $\mathfrak{K}_1$, aus dem man folglich ausser diesen einfachen Tangenten, deren Zahl immer vier ist, nur zwei Doppeltangenten, die das $\mathfrak{K}_1$ entsprechende Paar repräsentiren, an C_8^4 legen kann.

b) Zerfällt auch noch H_2^2 in zwei Gerade $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und H_2, so bilden die Tangentenbüschel $a_1b_1c_1d_1$, $a_2b_2c_2d_2$ zwei Vierseite mit dem gemeinschaftlichen Diagonaldreiseit $(H_1, H_2, \overline{\Delta_1\Delta_2})$. Die Ecken $\mathfrak{K}_1 \equiv (\overline{\Delta_1\Delta_2}, H_2)$, $\mathfrak{K}_2 \equiv (\overline{\Delta_1\Delta_2}, H_1)$ und $\mathfrak{K} \equiv (H_1, H_2)$ sind die Cayley'schen Punkte; von ihnen zählt der letzte offenbar, als aus $\mathfrak{K}_3$ und $\mathfrak{K}_4$ entstanden, doppelt. In ihm durchschneiden sich auch aus leicht begreiflichen Gründen vier Doppeltangenten, die zwei Paare d_3d_3', d_4d_4' bilden.

In jedem der zwei anderen einfachen Cayley'schen Punkte treffen hingegen nur zwei Doppeltangenten d_1d_1', respective d_2d_2' zusammen. Die weiteren Tangenten sind einfach und berühren C_8^4 auf der Gegenseite H_2 beziehungsweise H_1 des Diagonaldreiseites, das offenbar ein Polardreiseit für die Curve ist.

b) Entstehungsarten der Curve.

5. Nach der allgemeinen Polarentheorie durchsetzt die conische Polare K^2 eines Punktes P die Hesse'sche Curve, hier H_i^2, in den conjugirten Polen (η', η'') der Berührungspunkte ξ', ξ'' ihrer Tangenten τ', τ'' aus P und wird in diesen Punkten (η', η'') von Tangenten der Cayley'schen Curven, hier den Strahlen $\sigma'\sigma''$ aus $\mathfrak{K}_i$ tangirt. Die Tangenten ν', ν'' von H_i^2 in η', η'' schneiden einander in einem Punkte Q, der mit $\mathfrak{K}_i$ und P in der Polare des

Schnittpunktes π von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ mit $\overline{\xi'\xi''}$ und $\overline{\eta'\eta''}$ (bezüglich H_i^2 und und K^2) liegt. Sie, nämlich ν' und ν'' treffen ferner die Tangenten t', t'' von H_i^2 in Δ_1 respective Δ_2 in zwei Punkten einer durch π laufenden Geraden R, der Polare in Bezug auf H_i^2 und K^2 des Schnittes r von $\Delta_1\eta'$ und $\Delta_2\eta''$.

Daraus folgt, dass $\mathfrak{K}_i$ und Q durch r und R harmonisch getrennt werden, und dass folglich die K^2 in Δ_1 und Δ_2 berührenden Linien $\mu'\mu''$ im Punkte Q zusammentreffen, weil sich die Tangenten σ', σ'' in den Punkten η', η'' desselben Kegelschnittes in $\mathfrak{K}_i$ begegnen. — Q ist also der Pol von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ rücksichtlich K^2.

Diese Beziehung lässt sich auch nachweisen, wenn Δ_1 und Δ_2 imaginär, ihre Verbindungslinie $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ aber reell ist, und auch dann, wenn $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und $\overline{\eta_1\eta''}$ conjugirte uneigentliche oder ideelle Sekanten von H_i^2 und K^2 vorstellen.

Im letzteren Falle findet sich nämlich auf $\overline{\mathfrak{K}_1 Q}$ immer auch ein reeller Punkt r, dem bezüglich beider Kegelschnitte dieselbe Gerade R als Polare entspricht. Diese trennt mit r die beiden ideellen gemeinsamen Sekanten $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und $\eta'\eta''$ harmonisch, und daher auch sowohl ihre Pole K_i und Q bezüglich H_i^2 als auch jene α und α' bezüglich K^2. Da nun nach der Voraussetzung α' stets mit K_i zusammenfällt — weil K^2 ein Kegelschnitt des Netzes ist — so coincidirt auch beständig α mit Q, w. z. b. w.

Ist endlich $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ eine ideelle und $\overline{\eta'\eta''}$ eine eigentliche gemeinschaftliche Sekante beider Curven, so kann man das ganze System immer so projiciren, dass das Bild von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ mit der unendlich fernen Geraden u zusammenfällt und jenes h_i^2 von H_i^2 ein Kreis wird. Dann ist offenbar auch das Bild K_1^2 von K^2 ein Kreis, und zwar ein h_i^2 rechtwinkelig schneidender, da die Projection k_i von $\mathfrak{K}_i$ einerseits als Pol von u bezüglich h_i^2 zum Mittelpunkte dieses Kreises wird, anderseits aber auch den Pol vom Bilde der Sekante $\overline{\eta'\eta''}$ in Bezug auf k_i^2 vorstellt. In Folge dessen schneidet h_i^2 auch k_1^2 unter rechten Winkeln, das heisst auch bezüglich h_i^2 entspricht dem Bilde von $\overline{\eta'\eta''}$ das Centrum von K_1^2 als Pol. Dieses Centrum ist also das Bild von Q, und dieser Punkt demnach auch in diesem Falle der in Bezug auf K^2 genommene Pol von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$.

Durchläuft nun P den C_8^4 im sprachlichen Netze BI_i zukommenden Fundamentalkegelschnitt C_i^2, so bleibt $\overline{\xi'\xi''}$ stets Tangente an einem Kegelschnitt $\mathfrak{Q}_i^2$, $\overline{\eta'\eta''}$ an einem Kegelschnitt $\mathfrak{P}_i^2$, Q beschreibt den $\mathfrak{P}_i^2$ für H_i^2 als Basiscurve entsprechenden polarreciproken Kegelschnitt P_i^2 und K^2 endlich hat C_8^4 zur Enveloppe.

Nach der obigen Auseinandersetzung ist P_i^2 der geometrische Ort der Pole der Verbindungslinie $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ rücksichtlich der Kegelschnitte des Systems BI_i, mögen Δ_1 und Δ_2 reell oder conjugirt imaginär sein, und aus seiner Entstehungsweise, als Polcurve von $\mathfrak{P}_i^2$, erkennen wir in ihm den zu C_i^2 für $\mathfrak{R}_i$ als Centrum und $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ als Achse involutorisch liegenden Kegelschnitt, woraus ferner nach Artikel 16, Abschnitt II, folgt, dass er von den reellen oder imaginären Doppelpunktstangenten von C_8^4 tangirt wird.

Damit sind für die Curve C_8^4 folgende zwei Darstellungsarten gefunden, die gleichmässig für C_8^4 mit reellen und für jene mit conjugirt imaginären Doppelpunkten gelten:

„Die Enveloppe eines veränderlichen Kegelschnittes K^2, der mit einem gegebenen Kegelschnitte H_i^2 eine feste Sekante $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und eine variable, einen Kegelschnitt $\mathfrak{P}_i^2$ umhüllende bestimmt, ist eine allgemeine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten in den Schnittpunkten von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ mit H_i^2, wenn entweder

I. der Pol der festen Sekante bezüglich K^2 den polarreciproken Kegelschnitt P_i^2 von $\mathfrak{P}_i^2$ für H_i^2 als Basiscurve beschreibt, oder

II. die Tangenten von K^2 in Punkten der variablen Sekante stets durch den Pol $\mathfrak{R}_i$ von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ in Bezug auf H_i^2 laufen.“[1]

Der Punkt Q, welcher in dem angegebenen innigen Zusammenhang mit K^2 steht, und diesen Kegelschnitt ebenso eindeutig bestimmt wie sein Pol P, bezeichnen wir als K^2 „beigeordnet“. In dieser Art sind also den C_8^4 einhüllenden Kegelschnitten K^2 des Netzes, dem System, die Punkte des Polkegelschnittes P_i^2, und den drei anderen Hesse'schen Kegelschnitten ihre Cayley'schen Punkte beigeordnet. Diese bilden, wie die Artikel 3 und 5

[1] Vergl. die analyt. Geomet. d. höh. eb. Curven von Salmon-Fiedler, wo diese Erzeugungsarten, wenn auch nicht in dieser Form, so doch implicite in den Betrachtungen enthalten sind.

lehren, das gemeinschaftliche Poldreieck von H_i^2 und P_i^2, demnach alle vier Cayley'schen Punkte ein Polviereck bezüglich aller H_i^2 und aller P_i^2.

6. Um die Pole einer Geraden T' in Bezug auf die dem Netze zu Grunde liegende Curve dritter Ordnung zu construiren, bringe man T' mit H_i^2 in x', x'' und mit $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ in x zum Schnitt und bestimme die conischen Polaren dieser drei Punkte. Sie bestehen aus Linienpaaren, und zwar für die ersten zwei Punkte aus denjenigen Strahlen aus Δ_1 und Δ_2, welche H_i^2 in ihren zweiten Schnittpunkten y', y'' mit $\mathfrak{R}_i\overline{x'}$ und $\mathfrak{R}_i\overline{x''}$ schneiden, und für x aus $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und der Polare $\mathfrak{R}_i\overline{y}$ von x bezüglich H_i^2. Die ersten zwei Linienpaare treffen in den gesuchten, auch auf $\mathfrak{R}_i\overline{y}$ liegenden Punkten B_1', B_2' zusammen.

Diese zwei Punkte sind offenbar conjugirte Pole für H_i^2 und werden auch durch $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und $\overline{y'y''}\equiv V'$ harmonisch getrennt. Ihre Lage ist also vollkommen und unabhängig von den Punkten Δ_1 und Δ_2 charakterisirt; sie lassen sich auch ermitteln, wenn Δ_1 und Δ_2 conjugirt imaginär sind. Ist dies der Fall, das heisst ist $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ reell und sind Δ_1, Δ_2 imaginär, so werden B_1', B_2' nur dann reelle Punkte sein, wenn T' den Kegelschnitt H_i^2 in imaginären Punkten schneidet. Sind hingegen Δ_1, Δ_2 reell, so ist für die Realität von B_1', B_2' nothwendig, dass T' eine eigentliche Sekante von H_i^2 sei.

7. Das Gesagte führt zu einer bequemen Bestimmung der Schnittpunkte eines Strahles $\mathfrak{R}_i\overline{y}$ mit C_8^4. Man wird aus dem Pol x von $\mathfrak{R}_i\overline{y}$ an C_i^2 die Tangenten T', T'' ziehen und in den ihnen entsprechenden Punktepaaren B_1', B_2', B_1'', B_2'' die gesuchten erhalten.

Diese sind offenbar stets imaginär, Δ_1 und Δ_2 mögen reell oder imaginär sein, wenn x innerhalb C_i^2 und also auch innerhalb der zwei im 1. Artikel dieses Abschnittes mit D, D' bezeichneten Schnittpunkte von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ mit C_i^2 liegt; denn in diesem Falle sind T', T'' allemal imaginär. Sie können reell sein, wenn x sich ausserhalb der Strecke DD' befindet, und sie fallen in ein reelles oder imaginäres Punktepaar zusammen, sobald x nach D oder D' rückt.

Die Polaren d, d' dieser Punkte sind die in $\mathfrak{R}_i$ einander schneidenden Doppeltangenten von C_8^4; sie trennen den vollen

Winkel um $\mathfrak{K}_i$ in zwei Theile, von denen der eine, den innerhalb $D\,D'$ liegenden Punkten entsprechend, von Strahlen aus $\mathfrak{K}_i$ erfüllt wird, die C_8^4 stets in imaginären Punkten treffen, während der andere auch Strahlen enthält, auf denen reelle Curvenpunkte liegen.

Eine Ausnahme bilden nur die Doppelpunkte. Wenn ein solcher reell und ideell ist, so liegt er nach Artikel 14 und 16 (Abschnitt II) innerhalb C_i^2 und also auch in dem erwähnten, keinen reellen einfachen Curvenpunkt einschliessenden Winkel.

„Zwei reelle Doppeltangenten von C_8^4, welche in einem Cayley'schen Punkte zusammentreffen, begrenzen stets einen Winkel, in dem kein reeller einfacher Curvenpunkt sich befindet."

8. Da die Curve C_8^4 in jedem ihrer Schnittpunktepaare $B_1'B_2'$, $B_1''B_2''$ mit $\mathfrak{K}_i\overline{y}$ von einem Kegelschnitte K_1^2, respective K_2^2 aus dem System BI_i berührt wird, so liegt jedes mit dem Berührungspunktepaare B_1, B_2 irgend eines anderen Kegelschnittes K^2 und mit Δ_1, Δ_2 auf einem dritten Kegelschnitte L_1^2, beziehungsweise L_2^2. Auch ist klar, dass jeder durch $\Delta_1\Delta_2$, B_1B_2 laufende L_1^2 auf C_8^4 zwei weitere Punkte B_1', B_2' eines Paares erwähnter Art festlegt, die mit $\mathfrak{K}_i$ auf einem Strahl $\mathfrak{K}_i\overline{y}$ sich befinden.

Der Kegelschnitt L_1^2 bestimmt in dieser Weise einen einzigen Strahl $\mathfrak{K}_i\overline{y}$, dieser jedoch ausser L_1^2 noch einen Kegelschnitt L_2^2 des Büschels. Die Verwandtschaft zwischen den beiden die Curve erzeugenden Gebilden, dem Strahlbüschel $(\mathfrak{K}_i\overline{y})$ und dem Kegelschnittbüschel $(L_1^2L_2^2)$, ist offenbar 1—2deutig und nur insoferne specialisirt, als dem Strahl $\mathfrak{K}_i\overline{y_o}$, der die zwei Basispunkte B_1, B_2 enthält und folglich C_8^4 noch in $B_1^0B_2^0$ schneidet, in dem Büschel der C_8^4 in B_1 und B_2 berührende Kegelschnitt und der aus $\mathfrak{K}_i\overline{y_o}$ und $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ bestehende zugeordnet erscheinen.

Die Kegelschnitte L_1^2, L_2^2 bilden eine Involution; den Doppelelementen derselben entsprechen die zwei durch K_i laufenden Doppeltangenten von C_8^4.

„Das Erzeugniss eines eindeutigen Strahlbüschels $(\mathfrak{K}_i\overline{y})$ und eines zweideutigen Kegelschnittbüschels mit den Basispunkten $\Delta_1, \Delta_2, B_1, B_2$ ist immer dann eine Curve C_8^4, wenn $\mathfrak{K}_i$ auf der Verbindungslinie zweier Basispunkte, etwa auf $\overline{B_1B_2}$, liegt und die Zuordnung

derart getroffen ist, dass dem Strahl $\overline{\mathfrak{R}_i B_1 B_2}$ der in diese Linie und in $\overline{\Delta_1 \Delta_2}$ zerfallende Kegelschnitt einmal entspricht."

Jede Curve C_8^4 mit reellen oder imaginären Doppelpunkten kann in dieser Weise erzeugt werden, sobald sie reelle Cayley'sche Punkte besitzt.

Sehr bequem wird die Darstellung für jene circulare Curve, welche in den imaginären Kreispunkten von einem Kreise berührt wird, auf dem ihre Doppelpunkte liegen, und für die bicirculare Curve.

In beiden Fällen tritt an Stelle des Kegelschnittbüschels ein Kreisbüschel und im ersteren noch an Stelle des Strahlbüschels ein Parallelstrahlbüschel.

9. Sind die Doppelpunkte Δ_1, Δ_2 reell, so ist es auch das im Artikel 6 besprochene Vierseit mit den festen Gegenecken Δ_1, Δ_2, den variablen auf H_i^2 gleitenden y', y'', und den freien B_1, B_2, welche offenbar C_8^4 erzeugen, sobald $\overline{y'y''} \equiv V$ den Kegelschnitt P_i^2 umhüllt.[1]

Diese Darstellungsweise der Curve ermöglicht eine einfache Ausführung der verschiedenen an ihr vorzunehmenden Constructionen. — Wenige Andeutungen sollen genügen:

Um die Tangente in einem Punkte $B_1^{(n)}$ an C_8^4 zu legen, projicire man denselben aus Δ_1 und Δ_2 nach y' und y'' auf H_i^2 und lasse $y'y''$ um ihren Berührungspunkt Q mit P_i^2 rotiren. Die Punkte B_1, B_2 beschreiben hiebei den C_8^4 in $B_1^{(n)}$ berührenden, dem Punkte Q beigeordneten Kegelschnitt, der mit C_8^4 in $B_1^{(n)}$ dieselbe Gerade als Tangente gemein hat.

Sind die Schnittpunkte einer Geraden G mit C_8^4 zu ermitteln, so zeichne man den Kegelschnitt π^2, der zu der Poloconik von G bezüglich $\mathfrak{R}_i$ als Centrum und $\overline{\Delta_1 \Delta_2}$ als Axe involutorisch liegt. Er berührt H_i^2 in den auf G gelegenen Punkten und $\overline{\Delta_1 \Delta_2}$ in dem zu G bezüglich Δ_1, Δ_2 harmonisch conjugirten Punkte. Jede seiner mit P_i^2 gemeinsamen Tangenten fixirt auf H_i^2 zwei Punkte, die

---

[1] Vergl. die cit. Abhandlung von Küpper und auch die Inaugural-Dissertation „Über Involutionen auf ebenen Curven" von H. Wiener, München 1881.

aus Δ_1, Δ_2 projicirt zwei andere Punkte liefern, von denen der auf G liegende einer der gesuchten Schnittpunkte ist etc.

10. Der Kegelschnitt P_i^2 vermittelt auch sehr anschaulich die Erzeugung von C_8^4 durch zwei zweideutige Strahlbüschel mit den Scheiteln Δ_1 und Δ_2.

Man findet nämlich die Curvenpunkte auf einem Strahl $\Delta_1 y'$, indem man aus seinem Schnittpunkte y' mit H_i^2 die Tangenten an P_i^2 zieht und ihre weiteren Schnitte mit H_i^2 aus Δ_2 auf $\Delta_1 y'$ projicirt.

Berührt der Strahl den Polkegelschnitt, so coincidirt eine der zwei Tangenten aus y' mit ihm, was zur Folge hat, dass einer seiner Schnittpunkte mit C_8^4 nach Δ_1 rückt. Damit ist bestätigt, was wir schon in anderer Weise erwiesen haben: dass die Doppelpunktstangenten die vier Polkegelschnitte umhüllen.

Ähnlich lässt sich darthun, dass die Strahlen aus Δ_1 und Δ_2 nach den Schnittpunkten von H_i^2 und P_i^2 die Tangenten aus Δ_1 und Δ_2 an C_8^4 sind. Sie stellen die Verzweigungselemente der beiden Strahlbüschel vor, die ihnen entsprechenden Strahlen die Doppelelemente.[1]

Es ist auch ersichtlich, dass die gemeinsamen Tangenten von P_i^2 und H_i^2 den letzteren Kegelschnitt in seinen Schnitt-

---

[1] Weil zwei zweideutige Strahlbüschel auch in der allgemeinsten Lage eine Curve vierter Ordnung, welche ihre Mittelpunkte zu Doppelpunkten hat, erzeugen, so können die oben für die Curve C_8^4 geometrisch gefundenen Eigenschaften in anderer Form als Sätze über 2—2-deutig aufeinander bezogene Gebilde angesprochen werden. Von diesen Sätzen, die hiemit bewiesen sind, werden wir im Verlaufe der Untersuchung die folgenden benützen:

a) „Von zwei zweideutig aufeinander bezogenen Gebilden besitzt jedes vier Verzweigungselemente."

b) „Die zwei Verzweigungsgruppen sind doppelverhältnissgleich."

c) „Zwei conlocale 2-deutige Gebilde haben vier Elemente sich selbst entsprechend gemein."

Der letzte Satz erhellt daraus, dass C_8^4 in vier Gerade zerfällt, wenn die Mittelpunkte der Büschel coincidiren.

Durch „Schneiden" und „Projiciren" lassen sich diese Sätze auf beliebige ungleichartige Gebilde, welche in der angegebenen Beziehung stehen, übertragen.

(Vergl. die Curvenlehre von Emil Weyr, pag. 32.)

punkten mit C_8^4, den Stellen vierpunktigen Contactes dieser Curve mit Kegelschnitten des Systems, berühren, und endlich, dass die Polaren der Treffpunkte D_i, D_i' von P_i^2 mit $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ bezüglich H_i^2 die Doppeltangenten von C_8^4 repräsentiren, etc.

11. Wir haben bereits den Nachweis geliefert, dass die Berührungspunkte $B_1'B_2', B_1''B_2''$ von irgend zwei Kegelschnitten eines Systems mit Δ_1, Δ_2 auf einem dritten Kegelschnitte liegen.

Dieser Kegelschnitt λ_i^2 hat für die in $\mathfrak{R}_i$ zusammentreffenden Doppeltangenten d_i, d_i', deren Berührungspunkte B_i', B_i'' er mit $\Delta_1\Delta_2$ verbindet, offenbar den Pol A von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ bezüglich P_i^2 zum beigeordneten Punkte. Denn ihre Berührungspunkte sind die Pole der zwei Linien T_i und T_i', welche C_i^2 in D_i, D_i' berühren, und liegen also auf der conischen Polare λ_i^2 des Schnittes p_i von T_i und T_i', einer Curve, die im Sinne des Artikel 5 dem Punkte A beigeordnet erscheint.

Dieser Punkt, der auf $K_i\overline{p_i}$ zu p_i für $\mathfrak{R}_i$ und $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ harmonisch liegt, bleibt derselbe für alle vier Systeme BI, da alle vier Polkegelschnitte dem Vierseit der Doppelpunktstangenten einbeschrieben sind, daher für sie der Geraden $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ derselbe Punkt A als Pol entspricht.

Dieser Punkt ist auch der Pol von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ bezüglich λ_i^2, weil er dieser Curve — wie bewiesen wurde — beigeordnet ist. Daraus erhellt weiter, dass die vier Kegelschnitte $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2$ einander in Δ_1 und Δ_2 berühren. (Vergl. Küpper l. c.)

12. Aus den letzten Artikeln ergeben sich unter Zuziehung des Artikels 6 einige Kriterien über den Zusammenhang der Art der Doppeltangenten und der Doppelpunkte.

Befindet der Punkt A sich innerhalb der vier Hesse'schen Kegelschnitte, so werden sie alle von den Strahlen aus A in reellen Punkten geschnitten. Dies gilt auch für die zu T_i, T_i' bezüglich $\mathfrak{R}_i$ und $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ harmonisch liegenden Geraden V_i, V_i', woraus (nach Art. 6) folgt, dass die ihnen entsprechenden Punkte B_1, B_2, B_1', B_2' gleichzeitig mit den Punkten Δ_1, Δ_2 reell und imaginär sind. Dies gibt, da nun B_1, B_2 und B_1', B_2' die Berührungspunkte der D_i, D_i' zugeordneten Doppeltangenten sind, den Satz:

„Liegt der Punkt A innerhalb der vier Hesse'schen Kegelschnitte und sind die Doppelpunkte Δ_1, Δ_2 von C_8^4 reell, so hat jede reelle Doppeltangente auch

reelle Berührungspunkte; sind hingegen Δ_1, Δ_2 imaginär, so sind alle Doppeltangenten ideell."

Da die vier Polkegelschnitte eine Schaar, die durch die Doppelpunktstangenten bestimmte, bilden, so schneiden sie $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ in einer Punktinvolution D_i, D_i', in der auch Δ_1, Δ_2 ein Paar ist. Gleiches gilt folglich für die Schnitte von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ mit den vier Doppeltangentenpaaren.

„Die vier Doppeltangentenpaare schneiden die Verbindungslinie der zwei Doppelpunkte in vier Punktepaaren einer quadratischen Involution, in der auch die Doppelpunkte ein Paar bilden."

Ist die Involution reell und elliptisch, so liegt einer von den Doppelpunkten innerhalb der vier Polkegelschnitte und ist isolirt. Von den Tangenten aus A an die letzteren (P_i^2) schneidet demnach jedenfalls je eine aus jedem Paare den betreffenden Hesse'schen Kegelschnitt in zwei reellen Punkten:

„Ist ein Doppelpunkt isolirt, so hat mindestens die halbe Anzahl der reellen Doppeltangenten reelle Berührungspunkte."

„Ist mindestens ein Doppeltangentenpaar reell und die Involution, welche es auf der Verbindungslinie der Doppelpunkte mit diesen bestimmt, elliptisch, so ist ein Doppelpunkt ideell und der zweite ein Knoten."

Berühren die zwei Tangenten T_i, T_i' aus A an P_i^2 auch H_i^2, so sind d_i, d_i' offenbar Undulationstangenten, d. h. jede berührt C_8^4 in vier aufeinander folgenden Punkten, die auf H_i^2 liegen. Sind hiebei Δ_1 und Δ_2 reelle Punkte, so ist die Involution auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ jedenfalls hyperbolisch und daher liegen Δ_1 und Δ_2 entweder (beide) ausser- oder innerhalb P_i^2.

„Besitzt die Curve zwei reelle, ein Paar bildende Undulationstangenten und sind die Doppelpunkte reell, so sind beide entweder Knoten- oder isolirte Punkte."

Im ersten Falle kann man aus keinem Doppelpunkte reelle Tangenten an die Curve legen.

c) Das einzelne System vierfach berührender Kegelschnitte.

13. Aus dem im ersten Artikel der Mittheilung I (pag. 399) begründeten Fundamentalsatz geht hervor, dass, wenn es möglich ist, durch die Berührungspunkte (B) und (B') von zwei vierfach berührenden Kegelschnitten, zwei andere Kegelschnitte K_1^2 respective K_2^2 so zu legen, dass ihre weiteren Schnittpunkte (B'') auf der Curve C^8 liegen, erstens die vier Punkte (B'') auch ein Quadrupel von Berührungspunkten bilden, und zwar sowohl in dem aus (B), wie auch in dem aus (B') abgeleiteten System, und dass folglich zweitens (B) und (B') Punkte eines Kegelschnittes K_3^2 sind.

Diese Beziehung besteht nun (nach Art. 11) zwischen den Berührungspunkten (B_i) und (B_k) von irgend zwei der vier Doppeltangentenpaare, etwa $d_i d_i'$ und $d_k d_k'$, und den Doppelpunkten Δ_1, Δ_2 der Curve C_8^4; denn mit diesen liegen sowohl die Punkte (B_i) als auch (B_k) auf je einem Kegelschnitt λ_i^2 beziehungsweise λ_k^2, die einander in Δ_1 und Δ_2 tangiren, somit nur in Punkten zusammentreffen, die auf C_8^4 liegen.

Damit ist dargethan, dass die Punkte Δ_1, Δ_2 ein Quadrupel vorstellen, und $\overline{\Delta_1\Delta_2}$, doppelt gezählt, den zugehörigen Berührungskegelschnitt; ferner ist auch mit bewiesen, dass die Berührungspunkte von je zwei Doppeltangentenpaaren, einem Kegelschnitte angehören. — Diese Kegelschnitte, ihre Anzahl ist offenbar 6, ferner die Kegelschnitte $\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \lambda_4^2$ sowie die vier Doppeltangentenpaare und endlich die Gerade $\overline{\Delta_1\Delta_2}$, als ein Kegelschnitt, sind also Elemente eines und desselben Netzes.

Ein jeder Kegelschnitt, welcher entweder in Δ_1 und Δ_2 die Strahlen nach A zu Tangenten hat, oder durch irgend eines der Punktquadrupel (B) gelegt ist, fixirt auf C_8^4 vier Punkte, in welchen ein Kegelschnitt des Netzes, beziehungsweise des in demselben enthaltenen Systems, die Curve berührt.

Dieses System ist von der Art III, weil es (nach Art 5, Abschn. II) ausser $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ keine „doppelt zu nehmende Gerade" enthalten darf — sofern C_8^4 eine allgemeine Curve bleiben soll.

14. Alle Kegelschnitte des Netzes, die durch einen Punkt δ von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ gehen, berühren einander nicht nur in demselben, sondern auch in einem zweiten Punkte δ' von $\Delta_1\Delta_2$, weil sie alle

mit $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ zu demselben Büschel gehören. Die Punkte $\partial\partial'$ formiren auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ eine Involution, in der auch Δ_1, Δ_2 und die Schnitte mit jedem Doppeltangentenpaare Elementenpaare sind, die sonach identisch ist mit der im 12. Artikel behandelten Involution $D_i D_i'$.

Daraus geht hervor, dass der geometrische Ort der Pole von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ für die Kegelschnitte des Systems zugleich derselbe ist für alle Kegelschnitte des Netzes[1]. Er ist ein Kegelschnitt H^2, der durch den Punkt A und die vier Cayley'schen Punkte $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4$ der Systeme BI läuft und mit $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ Hesse'sche Curve des Netzes III ist. Dieser Hesse'sche Kegelschnitt schneidet $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ in den Doppelpunkten der Involution $D_i D_i'$, in denen die Cayley'sche Curve $\mathfrak{R}_4^3$, die nun rational ist, von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ tangirt wird.

Beide Curven berühren einander bekanntlich dreifach, und zwar in Punkten, die sich auf den in dem Pol von $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ bezüglich H^2 zusammentreffenden Rückkehrtangenten von $\mathfrak{R}_4^3$ befinden.

15. Die eingeführte Bezeichnung $d_i d_i'$, $d_k d_k' \ldots$ für die vier Doppeltangentenpaare des Systems III vorausgesetzt, nehmen wir nun an, das Paar $d_i d_k$ würde auch zu einem System von der Art III, das also ebenfalls $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ als Berührungskegelschnitt enthält, führen.

In diesem zweiten System, III' wollen wir es nennen, würden dann jedenfalls auch $d_i' d_k'$ ein Paar bilden, weil ihre Berührungspunkte mit jenen von $d_i d_k$ auf einem Kegelschnitte K^2 liegen. Ferner sehen wir, dass nun, ausser den Kegelschnitten λ_i^2, λ_k^2, welche einander in Δ_1 und Δ_2 berühren und die auf C_8^4 die Berührungspunkte von $d_i d_i'$ respective von $d_k d_k'$ herausschneiden, zwei weitere l_1^2 und l_2^2 auftreten, die ebenfalls in Δ_1 und Δ_2 einen Contact eingehen und von denen der eine die Berührungspunkte von $d_i d_k$, der andere jene von $d_i' d_k'$ enthält.

Da die vier Kegelschnitte $\lambda_i^2, \lambda_k^2, l_1^2, l_2^2$ die zwei Punkte $\Delta_1\Delta_2$ gemeinschaftlich haben, so laufen die weiteren zu $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ conjugirten gemeinschaftlichen Sekanten von je drei dieser Curven durch einen Punkt. Diese Sekanten sind

für	$\lambda_i^2, \lambda_k^2, l_1^2$	die	Linien	$\overline{\Delta_1\Delta_2}, d_i, d_k,$	ihr	Schnittpunkt	sei	0,
„	$\lambda_i^2, \lambda_k^2, l_2^2$	„	„	$\overline{\Delta_1\Delta_2}, d_i', d_k',$	„	„	„	0',
„	$\lambda_i^2, l_1^2, l_2^2$	„	„	$d_i, d_i', \overline{\Delta_1\Delta_2},$	„	„	„	0'',
„	$\lambda_k^2, l_1^2, l_2^2$	„	„	$d_k, d_k', \overline{\Delta_1\Delta_2},$	„	„	„	0'''.

[1] Vergl. Art. 17 u. 18 im II. Abschn.

Ein Blick zeigt, dass die Punkte 0, 0′, 0″, 0‴ identisch sind, dass also die vier Doppeltangenten in einem Punkte 0 auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ zusammentreffen.

Diesem Punkte 0 entspricht bezüglich der fünf Kegelschnitte $F^2, \lambda_1^2, \lambda_2^2, f_1^2, f_2^2$ und in Folge dessen auch des ganzen Netzes III dieselbe Gerade p als Polare, die also auch eine harmonische Polare der Curve C_8^4 ist.

Weil nun für die Curve C_8^4 mit einem Pol auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und einer harmonischen Polare in dem ersten nur zwei Doppeltangenten sich schneiden [1], so sehen wir, dass die oben gemachte Voraussetzung zu einer Relation zwischen zwei Doppeltangentenpaaren von C_8^4 führt, die unter keinerlei Umständen befriedigt wird, und dass folgerichtig die Gerade $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ factisch nur in einem System als Berührungskegelschnitt vorkommt.

Für die allgemeine Curve C_8^4 erhellt diese Thatsache übrigens zu Genüge aus den aufgezählten Beziehungen des Systems III zur Curve; so aus dem Umstand, dass der Punkt A eindeutig bestimmt ist, dass die Doppeltangenten sich nur auf eine Art in der angegebenen Weise in vier Paare gruppiren, dass es folglich nur vier Cayley'sche Punkte und einen Kegelschnitt H^2 gibt, und schliesslich daraus, dass die Cayley'sche Curve des Systems vollkommen und eindeutig bestimmt ist durch $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ als Doppeltangente und zwei Doppeltangentenpaare, da diese für sie Paare correspondirender Tangenten vorstellen.

Der folgende Satz ist sonach in aller Strenge bewiesen:

„Eine Curve vierter Ordnung mit zwei Doppelpunkten besitzt nur ein System vierfach berührender Kegelschnitte, in dem die Verbindungslinie der Doppelpunkte Δ_1, Δ_2 als Berührungskegelschnitt auftritt.

Dasselbe enthält ausser dieser Linie noch die vier Doppeltangentenpaare von C_8^4 als degenerirte Elemente."

„Die Doppeltangenten einer Curve C_8^4 bilden vier Paare correspondirender Tangenten einer Curve dritter Classe, welche die Gerade $\overline{\Delta_1\Delta_2}$, die Verbindungslinie der Doppelpunkte, zur Doppeltangente hat und Cayley'sche

[1] Siehe die Anmerkung auf pag. 52.

Curve für das erwähnte einzelne System ist. Der zugehörige Hesse'sche Kegelschnitt H^2 ist bestimmt durch die fünf Punkte A, B_1, B_2, B_3, B_4."

16. Auch hier können wir aus den Polareigenschaften des Netzes einige Relationen bezüglich der gegenseitigen Lage der Doppeltangenten gewinnnen.

So erkennen wir ohne weiters, dass auf einer Doppeltangente der Curve C_8^4 von den drei andern Doppeltangentenpaaren eine quadratische Involution fixirt wird, der auch ihre Berührungspunkte als ein Paar und ihr Schnitt mit $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ als Doppelpunkt angehören.

Von zwei conjugirten Polen des Netzes liegt bekanntlich der eine p auf H^2 und der zweite p' auf $\overline{\Delta_1\Delta_2}$. Ihre Verbindungslinie berührt stets $\mathfrak{R}_4^3$ und schneidet jeden Kegelschnitt des Netzes, also auch das Strahlenpaar $A\Delta_1, A\Delta_2$ in zwei durch p, p' harmonisch getrennten Punkten. Erwägt man, dass folglich $\overline{pp'}$ und Ap conjugirte Polaren für das Punktepaar $\Delta_1\Delta_2$ sind, so erkennt man, dass in dem Büschel mit dem auf H^2 beweglichen Scheitel p dem Strahl aus A bezüglich der Doppelpunktstrahlen $\overline{p\Delta_1}$, $\overline{p\Delta_2}$ eine Gerade harmonisch conjugirt ist, die stets Tangente an $\mathfrak{R}_4^3$ bleibt.

Coincidirt $\overline{pp'}$ mit einer Doppeltangente d_i, so wird p zum zweiten Doppelelement der oben erwähnten quadratischen Involution. Daraus erhellt:

„Aus demjenigen Punkte einer Doppeltangente von C_8^4, welche von ihrem Schnitte mit $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ durch das Paar der Berührungspunkte harmonisch getrennt wird, werden die beiden Doppelpunkte Δ_1, Δ_2 und der $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ gegenüberliegende Diagonalpunkt A des Vierseits der Doppelpunktstangenten durch Strahlen projicirt, welche durch die Doppeltangente zu einem harmonischen Vierstrahl ergänzt werden."

Ferner finden wir, dass die Strahlen aus A nach den Berührungspunkten B_iB_i' von d_i und jene nach Δ_1, Δ_2 eine Involution mit den Doppelstrahlen nach p und p' festlegen. Daraus ist ersichtlich, dass auf Ap sich sowohl die Geraden $\overline{\Delta_1 B_i}, \overline{\Delta_2 B_i'}$ als auch $\overline{\Delta_1 B_i'}, \overline{\Delta_2 B_i}$ durchschneiden. Daher die Relation:

„In jedem Viereck, das von den Doppelpunkten Δ_1, Δ_2 der Curve C_8^4 und den Berührungspunkten B_i, B_i' einer Doppeltangente d_i gebildet wird, liegt dem Schnittpunkte von d_i und $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ eine Diagonale gegenüber, welche durch den Punkt A läuft."

Die acht Schnittpunkte d der Doppeltangenten mit den entsprechenden Diagonalen liegen mit den Punkten $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \mathfrak{R}_3, \mathfrak{R}_4$ und A auf einem Kegelschnitte — dem Hesse'schen Kegelschnitte H^2. Derselbe enthält auch die $2 \cdot 8$ Schnitte von je zwei Berührungssehnen desselben Doppeltangentenpaares.

d) Weitere Systeme von Berührungskegelschnitten.

17. Die vierfach berührenden Kegelschnitte der Curve C_8^4 können sich, wie bewiesen wurde, nur in Systeme von den Formen *I* und *III* vertheilen. Ein zweites System *III* erscheint durch die vorstehende Untersuchung ausgeschlossen; jedes weitere System ist demnach von der Art *I*, besteht also aus conischen Polaren einer Curve dritter Ordnung.

In einem solchen System entspricht der Curve C_8^4 ein Fundamentalkegelschnitt C^2, der die Hesse'sche Curve H_6^3 an zwei Stellen Δ_1', Δ_2' berührt und in zwei Punkten schneidet. Es enthält somit zwei Doppeltangentenpaare und ein Tangentenpaar aus jedem Doppelpunkte.

Aus den acht Doppeltangenten von C_8^4 kann man $\binom{8}{2} = 28$ Paare herstellen; vier davon, die wir schlechtweg „Doppeltangentenpaare" nannten, da ihre Bildung keine willkürliche, sondern eine durch die Curve selbst vorgeschriebene ist, gehören dem einzelnen System III an: es geben daher nur 24 Paare zu Systemen I, und zwar zu 12 solchen Systemen Veranlassung[1].

Es steht dies im Einklang mit der Zahl der Paare, die man aus den vier Tangenten aus einem Doppelpunkte bilden kann Ihre Anzahl ist sechs, und jedes ist zwei Systemen gemeinschaftlich.[2]

---

[1] Vergl. Abschnitt IV, Art. 1 und 2 (pag. 38).

[2] Siehe Abschnitt II, Art. 3 (pag. 18).

Auch hier gruppiren sich die Systeme in Paare, und zwar auf doppelte Art:

a) Jedes Tangentenpaar $t_1 t_1'$ aus Δ_1 veranlasst zwei Systeme I' und I'', die keine Doppeltangente gemeinsam haben[1]. Sie enthalten also alle acht Doppeltangenten und alle Tangenten t_2, t_2', t_2'', t_2''' aus Δ_2.

Bezeichnen wir die Doppeltangentenpaare im System *III* mit $d_1 d_1'$, $d_2 d_2'$, $d_3 d_3'$, $d_4 d_4'$, und nehmen wir an, in I' stellen $d_1 d_2$ und demnach auch $d_1' d_2'$ ein Paar vor, so können in I'' entweder $d_3 d_4$ und $d_3' d_4'$ oder $d_3 d_4'$ und $d_3' d_4$ als Paare auftreten.

b) Irgend zwei der vier „Doppeltangentenpaare", so $d_1 d_1'$ und $d_2 d_2'$, liefern ausser *III* noch Systeme I' und I_1', correspondirend den Paaren $d_1 d_2$ und $d_1' d_2'$, respective $d_1 d_2'$ und $d_1' d_2$.

Beide Systeme können keine Tangente t_i aus einem der zwei Doppelpunkte Δ_i gemeinschaftlich haben. Denn wäre dies der Fall, so müssten Δ_i und der Tangentialpunkt von t_i sowohl mit den Berührungspunkten von $d_1 d_2$ als auch mit jenen von $d_1' d_2'$ auf je einem Kegelschnitte K_2, respective K_2' liegen. Nun sind die Berührungspunkte von $d_1 d_2 d_1' d_2'$ auch Punkte eines Kegelschnittes K^2; wir hätten also in K_2, K_2', K^2 drei Kegelschnitte, welche durch dieselben auf d_1 liegenden zwei Punkte gehen, deren weitere zu d_1 conjugirte gemeinsame Sekanten $t_i, d_2 d_2'$ folglich durch einen Punkt laufen, — was jedoch, mit Rücksicht auf die Bedeutung dieser Sekanten, offenbar für eine allgemeine Curve C_8^4 unmöglich ist.

Wir ersehen daraus, dass wenn wir für I' die Paare $t_1 t_1'$ und $t_2 t_2'$ voraussetzen, dem System I_1' die Paare $t_1'' t_1'''$ und $t_2'' t_2'''$ eigen sind.

„Die Curve C_8^4 besitzt 12 Systeme vierfach berührender Kegelschnitte von der Art *I*. Jedes enthält vier Doppeltangenten (in zwei Paaren) und ein Tangentenpaar aus jedem Doppelpunkte.

Die Systeme gruppiren sich in doppelter Weise in Paare: 1. derart, dass zwei Systeme alle vier Doppeltangenten, jedoch keine Tangente aus einem Doppelpunkte gemeinsam haben; 2. dergestalt, dass zwei

---

[1] Vergl. Abschnitt IV. Art. 1 u. 2. (pag. 38).

Systemen keine Doppeltangente, aber ein Tangentenpaar aus einem Doppelpunkte gemeinschaftlich zukommt.

In einem Systempaar erster Art treten alle Tangenten aus den zwei Doppelpunkten, in einem der zweiten Art alle Doppeltangenten und alle Tangenten aus einem Doppelpunkte auf."

18. In einem Netze AI ist C_8^4 ein fester Kegelschnitt C^2 coordinirt, der die Hesse'sche Curve H_4^3 des Netzes an einer Stelle Δ_2' berührt und in vier Punkten α' durchschneidet.

Die degenerirten Elemente eines Systems dieser Form sind daher vier Doppeltangenten, jede vereinigt mit einer Tangente aus dem gemeinsamen Doppelpunkte Δ_1 von C_8^4 und H_4^3, und eine Tangente t_2 aus dem zweiten Doppelpunkte Δ_2 in Verbindung mit der Linie $\overline{\Delta_1\Delta_2}$; die ersteren sind die conischen Polaren der Punkte α', das letztere entspricht in gleicher Weise dem Punkte Δ_2'.

Die Zahl der Systeme beträgt für einen Doppelpunkt Δ_1 acht, weil die vier Tangenten t_1, t_1', t_1'', t_1''' aus ihm mit den acht Doppeltangenten $4 \cdot 8$ Paare $t_1 d$ liefern, und jedes System vier solche Paare, die nur ihm eigen sind, besitzt.

Der aus $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und einer Tangente t_2 zusammengesetzte Berührungskegelschnitt gehört hingegen stets zwei Systemen AI an, weil sich aus $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und den Tangenten aus Δ_2 nur die vier Paare $\overline{\Delta_1\Delta_2}\, t_2$, $\overline{\Delta_1\Delta_2}\, t_2'$, $\overline{\Delta_1\Delta_2}\, t_2''$, $\overline{\Delta_1\Delta_2}\, t_2'''$ herstellen lassen. Zwei so verbundene Systeme bezeichnen wir wieder als Paar.

Betrachten wir ein solches Paar, etwa das durch $\Delta_1\Delta_2, t_2$ gegebene, etwas näher, so bemerken wir, dass im selben t_1 nur mit d_1 oder d_1', t_1' nur mit d_2 oder d_2' u. s. f. sich paaren kann, weil mit Δ_1, Δ_2 und den Berührungspunkten von t_1 und t_2 nur jene von d_1 oder d_1' auf einem Kegelschnitte liegen, wie aus Artikel 3 (pag. 49) unmittelbar folgt, wenn man für t_1 und t_2, a_1 und a_2 schreibt[1].

---

[1] Weil der eingeführten Bezeichnung nach $(t_1 t_2)$, $(\Delta_1\Delta_2\, d_1)$ und $\overline{\Delta_1\Delta_2}\, d_1'$) Berührungskegelschnitte eines und desselben Systems BI vorstellen. Um die Übereinstimmung auch mit den Art. 1 und 3 dieses Abschnittes formell herzustellen, hat man $t_1 \equiv a_1$ und $t_2 \equiv a_2$ zu setzen.

Nehmen wir sonach an, dass in dem einen System des Paares die Doppeltangenten d_1, d_2, d_3, d_4 vorkommen, so werden in dem zweiten die Doppeltangenten d'_1, d'_2, d'_3, d'_4 auftreten, da beide Systeme aus den für einen analogen Fall im Artikel 2, Abschnitt IV, (pag. 39) angeführten Gründen, keine Doppeltangente gemeinsam haben

Da von den vier Doppeltangenten eines Systems AI keine zwei ein Paar des Systems III bilden und keine drei einem System I angehören, so liegen weder die Berührungspunkte von drei noch die aller vier auf einem Kegelschnitte. Solcher Quadrupel gibt es 16.

„Die dreifach berührenden Kegelschnitte der Curve C_3^3 vertheilen sich in 16 Systeme von der Art AI. Je acht Systeme sind einem Doppelpunkte Δ_i, durch den ihre Kegelschnitte gehen, zugeordnet und bilden vier Paare, von denen jedes alle acht Doppeltangenten, ferner alle Tangenten aus Δ_i, aber nur eine Tangente aus Δ_k, dem zweiten Doppelpunkte, enthält."

„In einem System kommen fünf Geradenpaare vor. Davon werden vier gebildet von je einer Tangente aus dem zugeordneten Doppelpunkte und einer Doppeltangente, das fünfte, doppelt zu zählende, von einer Tangente aus dem zweiten Doppelpunkte Δ_k und der Linie $\overline{\Delta_i\Delta_k}$".

Die Tangente aus Δ_k bildet mit den vier Doppeltangenten auf dem Cayley'schen Kegelschnitte des Systems ein Tangentensystem, das projectivisch ist mit dem Büschel, das aus den vier Tangenten aus Δ_i und der Geraden $\overline{\Delta_i\Delta_k}$ besteht. Ferner werden auf der erst erwähnten Tangente von den Tangenten aus Δ_i vier Punkte fixirt, die in Involution sind mit den Punkten auf dem Quadrupel der Doppeltangenten. Ein Paar der Involution ist auch Δ_k und der Berührungspunkt der Tangente; die Doppelelemente liegen auf H_4^3. — Ähnliches gilt für eine Doppeltangente, auf der überhaupt so viele Involutionen auftreten, als die Zahl der Systeme I, AI, BI beträgt, denen sie angehört.

Auf Grund der Sätze dieses, des letzten und des Artikel 3 lässt sich leicht ein Schema für die Gruppirung

der Doppeltangenten und der Tangenten aus den Doppelpunkten aufstellen.

19. Die Verschiedenartigkeit der Systeme von Berührungskegelschnitten bedingt eine grössere Mannigfaltigkeit unter den Kegelschnitten, welche die Berührungspunkte ihrer degenerirten Elemente verbinden.

Es gibt 12 Kegelschnitte c_2, von denen jeder die zwei Doppelpunkte Δ_1, Δ_2 mit den Berührungspunkten je zweier Tangenten $t_1 t_1', t_2 t_2'$ aus jedem von ihnen verbindet, nämlich in jedem der vier Systeme BI gibt es sechs und jeder ist zwei Systemen gemeinsam. — Es steht dies im Einklang mit der Zahl der Systeme I, deren jedes einen enthält.

Ferner existiren 32 Kegelschnitte c_2', welche Δ_1, Δ_2, die Berührungspunkte je einer Tangente t_1 und t_2 aus Δ_1 respective Δ_2 und die einer Doppeltangente d tragen. Jedes der vier Tangentenpaare eines Systems BI liefert offenbar mit einer Doppeltangente desselben einen solchen Kegelschnitt. Ihre Anzahl ist in einem System $2 \cdot 4$, im Ganzen $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$. Zu demselben Resultat führen auch die Systeme AI. Dann sind die vier Kegelschnitte λ_i^2 zu erwähnen, welche durch Δ_1, Δ_2 laufen und auf C_8^4 die Berührungspunkte je eines Doppeltangentenpaares $d_i d_i'$ herausschneiden, dazu treten 48 Kegelschnitte, deren jeder einen Doppelpunkt Δ_i mit den Berührungspunkten von zwei Tangenten aus ihm und von zwei Doppeltangenten verbindet, und schliesslich die sechs Kegelschnitte K, auf deren jedem die Berührungspunkte von vier Doppeltangenten liegen.

20. Die Anzahl der Berührungskegelschnitte, welche mit C_8^4 einen vierpunktigen Contact eingehen, ist gleich der Zahl ihrer von Δ_1 und Δ_2 verschiedenen Schnittpunkte mit den Hesse'schen Curven der sämmtlichen Systeme BI, III, I und AI.

Den vier Systemen BI entsprechend, kommen 16 Kegelschnitte vor, welche durch Δ_1, Δ_2 laufen und C_8^4 vierpunktig berühren.[1])

Es gibt $8 + 12\,(12-4) = 104$ Kegelschnitte, welche C_8^4 doppelt berühren und an je einer Stelle mit ihr vier unendlich nahe Punkte gemein haben. Sie gehören in

[1]) Clebsch: Ebene Curven, deren Coordin. ellipt. Functionen eines Parameters sind. Crelle J., Bd. 64, pag. 257.

Gruppen zu acht einem Netze, beziehungsweise einem System I an, und ebenfalls acht entfallen auf das einzelne System III. Ihre vierpunktigen Contactstellen liegen stets auf der betreffenden Hesse'schen Curve: für III auf einem Kegelschnitte H^2, für jedes System I auf einer allgemeinen Curve 3. O., welche die Doppelpunkte Δ_1, Δ_2 enthält. Die einfachen Berührungspunkte sind sowohl für III als auch für ein I die Schnittpunkte von C_8^4 mit der betreffenden Cayley'schen Curve.

Es existiren $6 \cdot 16 = 96$ Kegelschnitte von der Eigenschaft, durch einen Doppelpunkt Δ_i zu gehen, C_8^4 an einer Stelle v einfach und einer anderen δ vierpunktig zu berühren. Auf jeden Doppelpunkt kommen 48 und auf ein System AI sechs solche Kegelschnitte.

Die sechs Punkte δ liegen für ein System auf einer rationalen Curve 3. O., die im betreffenden Doppelpunkte Δ_i auch einen solchen hat — und durch den zweiten Δ_k einfach geht, — der Hesse'schen Curve H_3^3 des Systems. Die sechs Punkte v sind allemal auf dem Cayley'schen Kegelschnitte $\mathfrak{K}^2$ gelegen.

Hieher zu zählen sind schliesslich die Kegelschnitte O^2, welche durch die Doppelpunkte von C_8^4 gehen, im einen den einen Curvenzweig osculiren und C_8^4 noch einfach tangiren.

Man gelangt zu ihnen, indem man nach der Bedeutung des Punktepaares β, β' frägt, in welchem ein Strahl, der einen Doppelpunkt Δ_1 mit einem Cayley'schen Punkte $\mathfrak{K}_i$ verbindet, die Curve trifft. Ein solcher Strahl tangirt den betreffenden Hesse'schen Kegelschnitt H_i^2 in Δ_1. Es bilden daher $\beta\beta'$ in der auf C_8^4 von den Strahlen aus $\mathfrak{K}_i$ bestimmten quadratischen Involution $(B_1 B_2)$ nicht ein Paar, sondern jeder stellt mit einem Nachbarpunkte Δ_1' respective Δ_1'' von Δ_1 ein besonderes Paar desselben vor. Damit ist, mit Rücksicht auf die Bedeutung der Paare $B_1 B_2$ (vergleiche Artikel 2, pag. 49), die Existenz der Kegelschnitte O^2 bestätigt.

Ihre Anzahl ist, entsprechend den zwei Doppelpunkten und den vier Punkten $\mathfrak{K}_i$, gleich 16.

Auch C_8^4 besitzt, wie C_{10}^4, 32 Kegelschnitte $O_1 O_2$, die sie in zwei Punkten einfach und in einem Doppelpunkte dreipunktig berühren. Sie zerfallen gemäss den

zwei Punkten $\Delta_i\Delta_k$ in zwei Gruppen zu 16, und jede von diesen in acht Paare, die einzeln den Systemen AI zukommen. Sie sind die conischen Polaren der Berührungspunkte von den Tangenten aus dem betreffenden Doppelpunkte an den bezüglichen Kegelschnitt C^2.

e) Quadratische Involutionen (vom Geschlechte 1[1]) auf C_8^4 und weitere Darstellungsarten dieser Curve.

21. Zu weiteren sehr bemerkenswerthen Eigenschaften der Curve und insbesondere ihres Systems III führt uns die folgende Betrachtung:

Wir legen durch die Doppelpunkte Δ_1 und Δ_2 von C_8^4 einen Kegelschnitt K_1 und bezeichnen seine Schnittpunkte mit der Curve mit a,a' und x,x', bestimmen ferner die weiteren auf $\overline{xx'}$ befindlichen Curvenpunkte y,y' und beschreiben durch sie und Δ_1,Δ_2 einen anderen Kegelschnitt K_2. Derselbe fixirt auf C_8^4 noch die Punkte b,b', von denen wir behaupten, dass sie allemal mit a,a' auf einem durch Δ_1,Δ_2 laufenden Kegelschnitte K^2 liegen.

Man begreift dies, sobald man erwägt, dass K_1 mit K_2 (als eine Curve) und C_8^4 ein Curvenbüschel vierter Ordnung bestimmen, dessen sämmtliche Elemente in Δ_1 und Δ_2 Doppelpunkte aufweisen. Denn da nun x,x' und y,y' Punkte einer Geraden sind, so müssen a,a', b,b' einer Curve dritter Ordnung angehören, die Doppelpunkte in Δ_1 und Δ_2 hat, demnach in $\overline{\Delta_1\Delta_2}$ und einen Kegelschnitt K^2 zerfällt.

Halten wir a,a' und b,b' fest und lassen wir K_1 und K_2 variiren, so beschreiben sowohl x,x' als auch y,y' je ein involutorisches Punktsystem, eine quadratische Involution vom Geschlechte 1. Beide Systeme stehen in einem sehr innigen Zusammenhang.

Es liegen nämlich die weiteren Schnittpunkte der Verbindungslinie $\overline{xx'}$ eines Elementenpaares xx' der einen Involution stets mit den Punkten b,b' und Δ_1,Δ_2 auf einem Kegelschnitte K_2

[1] Wir bezeichnen hier mit diesem Namen ein System von Punkten, das aus Gruppen besteht, in denen Vertauschungsfähigkeit herrscht, und fügen, um es von den eigentlichen Involutionen, d. h. solchen auf rationalen Curven zu unterscheiden, jedesmal das Geschlecht der Trägercurve hinzu.

und repräsentiren folglich allemal ein Punktepaar y,y' der zweiten Involution. Umgekehrt legt auch jede Gerade yy' auf C_8^4 ein Paar x,x' fest: die beiden Involutionen sind, nach der von Herrn Professor Emil Weyr für Involutionen auf rationalen Trägern eingeführten Terminologie, „einander begleitend.“[1]

Beiden Involutionen kommt als Directionslinie dieselbe Curve zu, und zwar ist es ein Kegelschnitt J_2, der die Rolle derselben spielt. Letzteres wird klar, wenn man in Erwägung zieht, dass jede Tangente t derselben die Curve C_8^4 in einem Punktepaare x,x' der einen, und einem Paare y,y' der zweiten Involution schneidet, und dass man in Folge dessen aus einem Punkte p von C_8^4 nur zwei Tangenten t',t'' an sie legen kann, nämlich die Verbindungslinien von p mit dem ihm conjungirten Punkte x' in der einen, und mit dem ihm entsprechenden Punkte y' in der zweiten Involution.

Ist p zugleich auf J_2 gelegen, so fallen t' und t'' zusammen. Dann liegen die beiden p conjugirten Punkte x' und y' auf einer Geraden $t'\equiv t''\equiv t_1$ und es erscheinen die zwei x' und y' zugeordneten Punkte x und y von C_8^4 in p auf t vereinigt. Diese Linie ist also in p nicht nur an J_2 sondern auch an C_8^4 Tangente: Der Involutionskegelschnitt geht an allen Stellen, in denen er mit C_8^4 zusammentrifft, mit dieser Curve einen Contact ein, — er berührt sie vierfach.

22. Die Punkte b,b' stellen ein Elementenpaar der Involution (xx') vor, und a,a' eines von (yy'). Es wird dieselbe Involution (xx') auf C_8^4 auch herausgeschnitten durch alle jene unendlich vielen Kegelschnittbüschel, von denen jedes Δ_1,Δ_2 und ein beliebiges Elementenpaar der begleitenden Involution (yy') zu Basispunkten hat; denn es liegt, wie schon aus der Definition der Involution (xx') hervorgeht, jedes Paar x,x' mit jedem Paare der begleitenden Involution (yy') auf einem durch Δ_1,Δ_2 laufenden Kegelschnitte. Daraus erhellt, dass eine solche Involution durch die Annahme eines Punktepaares unzweideutig bestimmt ist. Die ferneren Schnittpunkte irgend eines durch Δ_1,Δ_2 und das Punktepaar gehenden Kegelschnittes dürfen zu Basispunkten des die Involution festlegenden Büschels gewählt werden.

[1] Weyr: „Über biquadrat. Involutionen 2. Stufe und ihre typischen Curven“. Sitzb. d. k. Akademie d. Wissensch. 81. Bd., p. 1007.

Hervorzuheben ist, dass in einer Involution (xx') [oder (yy')] die Nachbarpunkte Δ'_i, Δ''_i eines Doppelpunktes Δ_i von C_8^4 nicht ein Paar bilden, sondern dass jedem, so Δ'_i, zwei Punkte x'_i, y'_i, die auf einem Strahl aus Δ_i [einer Tangente von J_2] liegen, conjungirt sind, und zwar x'_i in (xx') und y'_i in (yy'). Der Grund ist der, dass der Kegelschnitt K_2^i, der durch Δ_i, Δ_k, a, a' geht und in Δ_i den einen Curvenzweig berührt, nicht auch den zweiten berühren kann, so lange er ein eigentlicher Kegelschnitt ist, sondern C_8^4 in einem von Δ_i verschiedenen Punkte x'_i schneidet.

Nur in dem Falle, wo y, y' Punkte eines Strahles φ_i aus Δ_i sind, berührt der aus φ_i und $\overline{\Delta_i \Delta_k}$ bestehende Kegelschnitt beide Curvenzweige in Δ_i. Dann übergeht aber auch (xx') in die von den Strahlen aus Δ_k auf C_8^4 fixirte centrale Involution, während die begleitende durch Strahlen aus Δ_i festgelegt wird.

Alle Paare von (xx') werden nun von Δ'_i, Δ''_i begleitet, und analog begleitet der Doppelpunkt Δ_i die ganze Involution (yy').

Bilden y, y' ein Elementenpaar B_1, B_2 der quadratischen Involution $(B_1, B_2)_i$, welche von den Strahlen aus einem Cayley'schen Punkte $\mathfrak{K}_i$ auf C_8^4 herausgeschnitten wird, so sind auch alle Paare xx' in derselben enthalten. Diese ist ein Specialfall der Involution (x, x'), eine Involution (xx'), die sich selbst begleitet. Die Identität der beiden Involution (xx'), (yy') für diesen Fall erhellt auch daraus, dass C_8^4 in jedem Punktepaare B_1, B_2 von einem Kegelschnitte des Systems BI_i berührt wird. In Bezug auf den Hesse'schen Kegelschnitt H_i^2 von BI_i stellt jedes Elementenpaar B_1, B_2 ein Paar conjungirter Pole vor.

Der $(B_1 B_2)_i$ zukommende Involutionskegelschnitt J_2 ist als Enveloppe der Punkt $\mathfrak{K}_i$ und als Ort das Doppeltangentenpaar $d_i d'_i$.

Analog entspricht den zwei Involutionen (xx') und (yy'), welche Δ_1 und Δ_2 als je ein Paar enthalten, als Involutionscurve sowohl das Doppelpunktepaar Δ_1, Δ_2 als auch die Verbindungslinie $\Delta_1 \Delta_2$, und zwar diese als doppelt zu nehmende Gerade.

23. Die vier Schnittpunkte einer Geraden t mit C_8^4 kann man auf drei Arten in zwei Paare xx', yy' gruppiren, sie ist demnach Tangente von drei Kegelschnitten J_2.

Diese Kegelschnitte bilden sonach in ihrer Gesammtheit ein System vierfach berührender Kegelschnitte, das eine Charak-

teristik hat, wie sie (nach Artikel 17, Abschnitt II) nur dem einzelnen System III zukommt und das nach Artikel 22 dieselben degenerirten Elemente besitzt wie dieses. Beide Systeme sind identisch. Demnach die Sätze:

„Ein Kegelschnittbüschel, welches die Doppelpunkte Δ_1, Δ_2 und zwei beliebige Punkte von C_8^4 zu Basispunkten hat, schneidet diese Curve in Punktepaaren xx', deren Verbindungslinien $\overline{xx'}$ einen vierfach berührenden Kegelschnitt des Systems III zur Enveloppe haben."

„Zwei einander begleitende quadratische Involutionen auf einer Curve C_8^4 haben stets einen Berührungskegelschnitt aus dem System III zur Involutionscurve; und umgekehrt, legen die Tangenten eines jeden solchen Kegelschnittes auf C_8^4 Punktepaare zweier derartiger Involutionen fest."

Die vier Berührungspunkte eines J_2 gehören mit den Doppelpunkten einem Kegelschnitte an. Die Involution (xx'), welche durch zwei von diesen vier Punkten gegeben ist, wird daher von einer (yy') begleitet, in welcher die andern zwei ein Paar vorstellen. Das heisst:

„Von den sechs Berührungssehnen eines Kegelschnittes aus dem System III mit der Curve C_8^4 sind je zwei gegenüberliegende Tangenten an einen zweiten Berührungskegelschnitt desselben Systems."

24. Fassen wir für den Moment von den zwei Involutionen $(xx'), (yy')$, die ein J_2 auf C_8^4 veranlasst, nur die eine (xx') in's Auge, und legen wir jedesmal aus dem Paare x, x', das eine Tangente t von J_2 auf C_8^4 bestimmt, die weiteren Tangenten t', t'' an J_2, so gewinnen wir ein Tangentensystem $(t't'')$; kehren wir nun den Vorgang um, das heisst, gehen wir von t' aus und ziehen wir aus dem auf dieser Tangente befindlichen Paare y, y' die Berührungslinien an J_2, so erhalten wir ein zweites Tangentensystem $(t_1 t_2)$, das offenbar mit dem ersten in 2—2deutiger Verwandtschaft steht und mit ihm die C_8^4 erzeugt.

„Ein jeder Kegelschnitt des Systems III ist somit Träger zweier 2—2deutig auf einander bezogenen Tangentensysteme, welche die Curve C_8^4 erzeugen."

Die Wechselbeziehung, welche C_8^4 zwischen den sie erzeugenden Gebilden vermittelt, ist von der allgemeinsten Art. Einer Tangente von J_2, als Element t_1 von $(t_1 t_2)$, entsprechen zwei Tangenten t, t' von $(t't'')$, welche auf ihr das Punktepaar x, x' fixiren. Betrachtet man hingegen die Tangente als Element (t') von $(t't'')$, so kommen ihr zwei andere Tangenten (t_1) und (t_2) zu, die sie in ihren weiteren Schnitten y, y' mit C_8^4 treffen. Von den zwei Tangenten t, t' aus einem Curvenpunkte x an J_2 wird also, wenn wir beide als Elemente des einen der zwei Systeme, beispielsweise von $(t_1 t_2)$, voraussetzen, nur der einen t_1 im andern System eine durch x laufende Tangente zugeordnet erscheinen, die nothwendig mit t' identisch ist. Diese eine Tangente t_1 des Systems $(t_1 t_2)$ ist durch den Punkt x eindeutig gegeben; sie ist es, welche ihm mit dem conjungirten Punkte x in der Involution (xx') verbindet. In gleicher Weise fixirt der Punkt x, als Element y von (yy') betrachtet, im System $(t't'')$ die Tangente t' eindeutig.

Eine Ausnahme machen die beiden Doppelpunkte der Curve. Aus Artikel 22 erhellt, dass von den zwei Tangenten aus einem solchen Punkte an J_2 die eine der andern entspricht, gleichviel welchem System man sie zuzählt. Dieselben stellen die zwei Tangentenpaare vor, welche aus einander involutorisch entsprechenden Elementen der Systeme bestehen.

25. Wir lassen nun die begleitende Involution (yy') ganz ausser acht und verbinden, statt aus x, x' die Berührungslinien an J_2 zu ziehen, diese Punkte mit einem Doppelpunkte Δ_i, die Doppelpunktsstrahlen φ, φ' der Tangente t zuweisend.

Ein Strahl φ begegnet der Curve in zwei Punkten x, x_1 und bestimmt zwei Tangenten t und t_1 von J_2, nämlich die Verbindungslinien von x und x_1 mit den conjugirten Punkten x' respective x_1'. Die Beziehung ist wieder 2—2deutig:

„Jede Curve C_8^4 kann erzeugt werden durch ein Strahlbüschel um einen ihrer Doppelpunkte und ein mit diesem 2—2deutig verwandtes Tangentensystem zweiter Classe.

Ein beliebiger Berührungskegelschnitt aus dem System III darf zum Träger des letzteren gemacht werden.“

Hiebei ist die Zuordnung so gestaltet, dass die Tangenten t_i aus Δ_i an J_2 sich einmal selbst und einmal den Doppelpunktstangenten von C_6^4 entsprechen. Von den zwei das Paar x_i, x_i' vorstellenden Punkten auf t_i ist nämlich (nach Artikel 22) der eine x_i stets ein Nachbarpunkt von Δ_i, daher von den x_i, x_i' projicirenden Strahlen φ_i, φ_i' der erste eine Doppelpunktstangente und der zweite mit t_i identisch.

Die Doppelpunktstangenten sind somit gleichzeitig mit den Tangenten aus Δ_i auf J_2 reell, imaginär und, wenn Δ_i auf J_2 liegt, zusammenfallend.

„Ein Knoten einer Curve C_6^4 liegt stets ausserhalb und ein isolirter Punkt innerhalb aller jener Berührungskegelschnitte, welche das einzelne System III constituiren."

Umgekehrt gibt die Lage eines Doppelpunktes gegen einen Kegelschnitt J_2 ein Kriterium über seiner Art: Er ist ein Knoten, wenn er ausserhalb J_2 liegt, ein ideeller Punkt, wenn er sich im Innern desselben befindet, und ein Rückkehrpunkt, wenn er ein Punkt von J_2 ist.

Im letzten Falle durchschneiden sich alle Kegelschnitte J_2 in ihm. Das System III verwandelt sich für C_7^4 in AII und für C_6^4 mit zwei Spitzen in ein System BII.

Rücken die zwei Punkte x, x' auf t, während diese Linie sich bewegt, in einen Doppelpunkt der Involution $(x\,x')$ zusammen- und übergeht also t in eine Tangente T von C_8^4, so coindiciren auch die entsprechenden Strahlen φ, φ'. Sie bilden einen Doppelstrahl, dem als Verzweigungselement die erwähnte gemeinsame Tangente T zugeordnet ist. Die Zahl der Verzweigungselemente T beträgt (nach der Anmerkung auf pag. 58) vier; ebenso gross ist demnach auch die Zahl der Doppelpunkte einer Involution $(x\,x^{\text{I}})$.

Im Strahlbüschel $\Delta_i\,(\varphi\,\varphi')$ werden die Verzweigungsstrahlen offenbar repräsentirt durch die vier Tangenten τ aus Δ_i an C_6^4. Dem an citirter Stelle Gesagten entnehmen wir, dass dieser Vierstrahl (τ) doppelverhältnissgleich ist mit dem Tangentensystem, das die vier Tangenten T auf J_2 bilden, woraus ferner die Constanz dieses Doppelverhältnisswerthes resultirt.

26. Wir legen durch Δ_1, Δ_2, ein für's Folgende festes Paar y, y' der begleitenden Involution (yy') und durch die Punktepaare x, x' von (xx') Kegelschnitte K. Sie bilden ein Büschel, das vermittelst der Involution (xx') auf das Tangentensystem, welches die Directionscurve J_2 von (xx') zum Träger hat, eindeutig bezogen ist.

Beide Gebilde haben die Tangente $\overline{yy'}$ von J_2 sich selbst entsprechend gemein, weil der durch das auf $\overline{yy'}$ liegende Paar $x_0 x_0'$ festgelegte Kegelschnitt K offenbar in $\overline{yy'}$ und $\overline{\Delta_1 \Delta_2}$ zerfällt.

„Jede Curve C_n^3 kann erzeugt werden durch ein Tangentensystem auf irgend einem sie vierfach berührenden Kegelschnitt J_2 aus dem System III und ein projectivisches Büschel von Kegelschnitten, dass die Doppelpunkte von C_n^3 und ein Punktepaar der auf C_n^3 von den Tangenten des Trägerkegelschnittes bestimmten quadratischen Involution zu Basispunkten hat."

Besonders anwendbar ist diese Darstellung auf die circularen und bicircularen Curven. Bei der ersten Gattung wird man in die imaginären Kreispunkte die Basispunkte y, y' verlegen. Das Kegelschnittbüschel K wird dann zum Kreisbüschel mit den reellen oder imaginären Basispunkten Δ_1, Δ_2, und der Kegelschnitt J_2 zur Parabel.

Damit ist bewiesen, dass die Curve C_8^3, welche durch ein Tangentensystem auf einer Parabel und ein projectivisches Kreisbüschel, das mit dem Tangentensystem die unendlich ferne Gerade sich selbst entsprechend gemein hat, erzeugt wird, von der allgemeinsten Art ist, indem sie nur der einen zufälligen Einschränkung, durch die imaginären Kreispunkte zu laufen, unterworfen ist.

In den vier Doppelelementen von (xx') wird C_8^3 von den vier Kegelschnitten des erzeugenden Büschels berührt, welche den Tangenten T von J_2, die C_8^3 an jenen Stellen tangiren, projectivisch entsprechen.

27. Lässt man endlich an Stelle des erzeugenden Tangentensystems ein zweites Kegelschnittbüschel treten, indem man noch

durch ein anderes festes Paar $y_1 y_1'$ von (yy') und durch Δ_1, Δ_2 die Kegelschnitte legt, so erhält man die bekannte Darstellung der Curve C_8^4.

Setzt man umgekehrt zwei Kegelschnittbüschel (K_1) und (K_2) mit den ganz willkürlich gewählten Grundpunkten $\Delta_1, \Delta_2, b_1, b_1'$ beziehungsweise $\Delta_1 \Delta_2, b_2, b_2'$, in projectivischer Beziehung, so schneiden sich — wie der Artikel 23 lehrt — entsprechende Kegelschnitte in zwei Punkten x, x', die in allen Lagen einer Involution (xx') auf dem Erzeugniss angehören.

Hat man drei beliebige Kegelschnitte K_1', K_1'', K_1''' des einen Büschels drei beliebige K_2', K_2'', K_2''' des andern zugewiesen und so die Projectivität bestimmt, so lässt sich leicht entscheiden, ob die gemeinsamen Basispunkte Δ_1, Δ_2 für das Erzeugniss C_8^4 Knoten, ideelle Punkte oder Spitzen sind. Denn, sind $\overline{x_1 x_1'}$, $\overline{x_2 x_2'}$, $\overline{x_3 x_3'}$ die weiteren zu $\overline{\Delta_1 \Delta_2}$ conjugirten gemeinsamen Sekanten von K_1' und K_2', K_1'' und K_2'', K_1''' und K_2''' respective, so hat man nach dem Obigen bloss zu untersuchen, ob der durch diese drei Linien und die Geraden $\overline{b_1 b_1'}$ und $b_2 b_2'$ bestimmte Kegelschnitt J_2 die Punkte Δ_1, Δ_2, oder einen von ihnen aus- oder umschliesst, oder ob er beide oder einen enthält.

Sind die zwei Doppelpunkte Δ_1, Δ_2 und acht Punkte der Curve C_8^4 gegeben, so ist dieselbe bestimmt und lässt sich in der Art des Artikel 26 construiren.

Bezeichnet man die acht Punkte in beliebiger Ordnung mit b_1, b_1', b_2, 1, 2, 3, 4, 5, so hat man durch die Punkte $\Delta_1, \Delta_2, b_1, b_1'$ und der Reihe nach durch 1, 2, 3, 4, 5 die Kegelschnitte K_1', K_1'', K_1''', K_1^{IV}, K_1^V zu legen und einen Punkt b_2' in der von Kortum[1]) angegebenen Weise so zu bestimmen, dass die Kegelschnitte K_2', $K_2'', K_2''', K_2^{IV}, K_2^V$, welche er mit Δ_1, Δ_2, b_2 und der Reihe nach mit 1, 2, 3, 4, 5 festlegt, ein mit dem ersten Kegelschnittbüschel projectivisches Büschel bilden. Sind dann $1', 2', 3', 4', 5'$ die weiteren Schnittpunkte von K_1' und K_2', K_1'' und K_2'', K_1''' und K_2''', K_1^{IV} und K_2^{IV}, K_1^V und K_2^V beziehungsweise, so umhüllen die Geraden $\overline{11'}, \overline{22'}, \overline{33'}, \overline{44'}, \overline{55'}$ (im Verein mit den Linien $b_1 \overline{b_1' b_2 b_2'}$) einen Kegelschnitt J_2 und bestimmen auf ihm ein Tangenten-

[1]) Kortum. Über geomet. Aufgaben 3. u. 4. Grades. Bonn 1869. pag. 42.

system, das mit jedem der zwei Kegelschnittbüschel die Curve C_8^3 erzeugt. Die Construction bleibt ausführbar, wenn Δ_1 und Δ_2 conjugirt imaginäre Punkte sind und etwa gegeben erscheinen als Doppelelemente einer elliptischen Involution. Auch zwei von den acht einfachen Punkten dürfen als imaginär vorausgesetzt werden. Man wird sie und die Punkte Δ_1, Δ_2 zu Basispunkten des ersten Kegelschnittbüschels wählen und die einzelnen Kegelschnitte $K_1' \ldots K_1''$ am zweckmässigsten nach dem von Herrn Professor Staudigl angegebenen Verfahren[1]) construiren.

28. Die in den letzten Artikeln gewonnenen Eigenschaften der Kegelschnitte J_2 als Träger erzeugender Gebilde bilden eine specielle Eigenthümlichkeit dieses Systems, indem kein anderer Kegelschnitt in der erklärten Art als Träger auftreten kann. Als Beweis diene das Folgende:

Es seien Σ und Σ' zwei zweideutige verwandte Tangentensysteme auf einem Kegelschnitte S_2. Beide schneiden eine beliebige Gerade in 4—4deutigen Reihen; ihr Erzeugniss ist also von der Ordnung acht, zerfällt aber (siehe die Anmerkung pag. 58) in die vier sich selbst entsprechenden Elemente σ und eine Curve vierter Ordnung C^4. Betrachtet man eine Tangente τ von S_2 als Element t_1 von Σ, so entsprechen ihr zwei Tangenten t', t'' in Σ', welche auf ihre zwei Punkte x, x' von C^4 festlegen; sieht man sie hingegen als ein zu Σ' gehöriges Element (t') an, so werden ihr zwei andere Tangenten $(t_1), (t_2)$ in Σ zugeordnet erscheinen, die ihr in den weiteren Curvenpunkten y, y' begegnen.

Man denke sich nun τ in ein Element σ verlegt. Da sich dieses selbst entspricht, gleichviel, ob man es zu Σ oder Σ' zählt, so wird mit ihm sowohl eine von den Tangenten t', t'' als auch eine der zwei Tangenten $(t_1), (t_2)$ coincidiren und demgemäss werden in ihrem Berührungspunkte mit S_2 zwei Curvenpunkte, x und y, vereinigt sein. Daraus folgt, dass S_2 die Curve vierfach berührt.

Weitere gemeinsame Tangenten von S_2 und C^4 können aus τ auch dadurch entstehen, dass x mit x' oder y mit y' coincidirt, oder, was dasselbe ist, dass die τ entsprechenden Elemente in Σ

[1] R. Staudigl: „Construction eines Kegelschnittes, wenn derselbe durch imag. Punkte und Tangenten bestimmt ist.“ Sitzb. d. k. Akademie, 61. Bd. II. Abth.

oder jene in Σ' zusammenfallen. Im ersten Falle wird τ zu einem Verzweigungselement T_2 von Σ', im letzteren zu einem solchen T_1 von Σ. Beides geschieht viermal; die Zahl der in dieser Weise zu Stande kommenden gemeinsamen Tangenten ist also acht. Mehr als diese und die früheren, doppelt zu zählenden Tangenten σ haben S_2 und C^4 nicht gemein. Dies zeigt, dass C^4 von der achten Classe ist und somit zwei Doppelpunkte Δ_1, Δ_2 besitzt.

Zieht man aus einem beliebigen Punkte x von C_8^4 an S_2 die Tangenten und betrachtet beide als Elemente t_1, t_2 von Σ, so wird nur der einen, etwa t_1 eine Tangente t' in Σ' zukommen, die durch x läuft, also mit t_2 identisch ist. Diese eine Tangente t_1 erscheint in Σ durch x eindeutig bestimmt, und durch dieselbe auch ihr Schnitt x' mit dem zweiten ihr zugeordneten Elemente t'' von Σ'.

In gleicher Weise fixirt auch x' in Σ dieselbe Gerade t_1 und mit ihr x: zwischen x und x' herrscht involutorisches Entsprechen.

Hieraus erhellt, dass die Elemente von Σ von den entsprechenden aus Σ' in Punktepaaren xx' einer quadratischen Involution geschnitten werden. Ebenso lässt sich zeigen, dass auch die Punkte y, y' sich in eine quadratische Involution anordnen. Da überdies beide Involutionen einander begleiten, ferner die erste die Berührungspunkte von C_8^4 mit den Verzweigungselementen T_1, die zweite jene mit den T_2 zu Doppelpunkten hat und da endlich, wie sich leicht zeigen lässt, die einem Doppelpunkte Δ_1 von C_8^4 conjugirten Punkte in (xx') und (yy') auf den Tangenten aus ihm an S_2 liegen; so ist dargethan, dass S_2 für C_8^4 eine Involutionscurve J_2 und also auch ein Berührungskegelschnitt aus dem System III ist. Einfacher, aber nicht wesentlich verschieden, gestaltet sich das Beweisfahren für den Fall, als das Tangentensystem Σ auf S_2 mit einem zweideutigen Strahlbüschel erzeugend auftritt.

Selbstverständlich muss jede von den Tangenten aus Δ_i, dem Mittelpunkte des Büschels, an S_2 einmal sich selbst zugewiesen werden. Die zwei anderen Strahlen in Δ_i $(\varphi\varphi')$, welche ihnen noch entsprechen, stellen die Doppelpunktstangenten des Erzeugnisses, das offenbar eine C^4 ist, vor. Die Verzweigungsstrahlen von $\Delta_i(\varphi\varphi^1)$ repräsentiren die Tangenten der Curve aus

Δ_i. Ihre Anzahl ist vier, die Classe von C_8^4 daher gleich acht. Die Curve besitzt also noch einen Doppelpunkt Δ_4.

Ein Punkt x von C_8^4 fixirt mit Δ_i einen Strahl φ. Ihm entsprechen zwei Tangenten t_1, t_2 in Σ, von denen aber nur eine durch x läuft. Dieser Tangente kommt noch ein Strahl φ' zu, der sie in x' trifft. Man gelangt auf diesem Wege von einem Punkte x zu einem einzigen Punkte x' und auch stets von x' zu x zurück, was zu beweisen war.

Setzt man endlich das Tangentensystem Σ in Verbindung mit einem projectivischen Büschel von Kegelschnitten K, von dessen Basispunkten $\Delta_1, \Delta_2, a, a'$ die zwei letzten auf einer Tangente t von S_2 liegen, die sich selbst zugewiesen wird, so ist nach Artikel 23 ohneweiters klar, dass homologe Elemente auf dem Erzeugniss C_8^4 eine Involution (xx') festlegen, da ja dieses in Δ_1, Δ_2 Doppel- und in a, a' einfache Punkte hat. Die vorstehende Untersuchung lehrt, dass jeder Kegelschnitt, welcher Träger eines Tangentensystems ist, das in irgend einer der in den Artikeln 24—27 angegebenen Arten im Verein mit einem zweiten Gebilde einer Curve C_8^4 erzeugt, für diese ein vierfach berührender Kegelschnitt aus dem System III ist."

Zum Schlusse sei noch erwähnt, dass auch zwei zweideutige Tangentensysteme auf zwei verschiedenen Kegelschnitten eine Curve C_8^4 erzeugen, wenn jede gemeinschaftliche Tangente beider sich selbst zugewiesen wird. Die Trägercurven sind allemal Elemente des Kegelschnittsystems III. Doch auch die Umkehrung gilt: Irgend zwei Kegelschnitte aus dem einzelnen System III einer Curve C_8^4 sind Träger von Strahlsystemen, welche in der angegebenen Beziehung stehen und die Curve erzeugen.

Über den innern, aus der mechanischen Wärmetheorie sich ergebenden Zusammenhang einer Anzahl von elektromagnetischen Erscheinungen.

Von **Anton Wassmuth** in Czernowitz.

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. December 1882.)

In einer, am 13. Juli l. J. der k. Akademie vorgelegten Abhandlung[1] habe ich die beiden Hauptsätze der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung angewendet und daraus einige Folgerungen gezogen.

So ergab sich unter Anderm der neue Satz, dass das Eisen sich bei der durch schwächere, magnetische Kräfte im luftleeren Raume bewirkten Magnetisirung abkühlen müsse; es liess sich sogar, was in der Folge verwendet werden soll, ein Ausdruck für die bei dem Magnetisiren stattfindende Temperaturänderung aufstellen. Gestützt darauf, war es mir nun möglich, den magnetischen und unmagnetischen Zustand des Eisens unter verschiedenen Verhältnissen vergleichen und so den inneren Zusammenhang von einigen, bisher isolirt dastehenden elektromagnetischen Erscheinungen aufdecken zu können.

I.

Führt man der Gewichtseinheit Eisen vom Volumen v die nach Arbeitseinheiten gemessene Wärmemenge dQ_1 zu, so dient diese sowohl zur Vermehrung der inneren Energie um dU als auch zur Leistung der äusseren Arbeit: pdv, falls p den auf die Einheit der Oberfläche ausgeübten Druck bedeutet. Es ist daher

---

[1] „Über eine Anwendung der mechanischen Wärmetheorie auf den Vorgang der Magnetisirung. Sitzb. der k. Akad. LXXXVI. Band. II.

für den unmagnetischen Zustand:

$$dQ_1 = dU + pdv \qquad 1)$$

Erhält hingegen die Gewichtseinheit Eisen in Folge der magnetisirenden Kraft x das magnetische Moment μ, so tritt zu der ersteren Arbeit pdv, noch die der Magnetisirung: $-xd\mu$ hinzu; letztere ist negativ zu nehmen, da das positive Zeichen dann gilt, wenn die Kraft überwunden wird. Für den magnetischen Zustand ist daher:

$$dQ_2 = dU + pdv - xd\mu \qquad 2)$$

Hier stellt dQ_2 die in diesem Falle zugeführte Wärmemenge vor und haben dU und pdv dieselben Werthe wie früher, da sie sich in Folge der Magnetisirung doch nur um ein unendlich Kleines höherer Ordnung ändern können.

Ferner muss nach dem zweiten Hauptsatze der mechanischen Wärmetheorie:

$$\frac{dQ_1}{T} = dS_1 \qquad 3)$$

und

$$\frac{dQ_2}{T} = dS_2 \qquad 4)$$

sein, worin dS_1, dS_2 ebenso wie: dU, dv, $d\mu$ vollständige Differentiale darstellen.

Die Verbindung der Gleichungen 1) und 2) liefert:

$$dQ_2 - dQ_1 = -xd\mu \qquad 5)$$

woraus sich mit Hilfe von 3) und 4) ergibt:

$$\frac{xd\mu}{T} = d(S_1 - S_2) = \text{vollständigem Differential.} \qquad 6)$$

Die Betrachtung der beiden Zustände führt also zu dem, anderen Vorgängen analogen Schlusse, dass die Magnetisirungsarbeit: $xd\mu$ der absoluten Temperatur T proportional zu setzen ist.

Will man diesen einfachen Grundsatz weiter verwerthen und etwa μ als eine Function von zwei Variablen y und z ansehen, so ist wohl darauf zu achten, dass y und z beiden Zuständen gemeinschaftlich sein müssen; es zeigt dies die ganze

vorhergehende Ableitung, wie auch z. B. die Gleichung 5). Der Fall: $y = T$, $z = x$ ist somit ausgeschlossen; in der That erhielte man etwas Ungereimtes.

Soll nun $\frac{x d\mu}{T}$ ein vollständiges Differential der zwei unabhängigen und beiden Zuständen gemeinschaftlichen Variablen y und z sein, so muss:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{x}{T}\frac{d\mu}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{x}{T}\frac{d\mu}{dz}\right)$$

sein, oder es ist:

$$\frac{dx}{dy}\frac{d\mu}{dz} - \frac{dx}{dz}\frac{d\mu}{dy} = \frac{x}{T}\left(\frac{d\mu}{dz}\frac{dT}{dy} - \frac{d\mu}{dy}\frac{dT}{dz}\right)^{1} \qquad 7)$$

Ich will gleich hier darauf hinweisen, dass die Gleichungen 5, 6 und 7 auch für jene Fälle gelten, in denen statt pdv irgend eine andere, beiden Zuständen gemeinschaftliche, äussere Arbeit, wie z. B. bei der Torsion, auftritt. Statt pdv ist dann nur ein anderer Werth einzusetzen, der aber ebenfalls eliminirt wird.

Es empfiehlt sich, in 7): $y = T$ zu setzen, wodurch man die neue Beziehung:

$$\frac{dx}{dT}\frac{d\mu}{dz} - \frac{dx}{dz}\frac{d\mu}{dT} = \frac{x}{T}\frac{d\mu}{dz} \qquad 8)$$

erhält, in der also die Variable z beiden Zuständen gemeinsam sein muss.

---

[1] Es ist wohl nicht überflüssig, zu zeigen, dass man zur Gleichung 7) auch auf indirectem Wege gelangen kann, da nach bekannten Formeln:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dQ_1}{dz}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{dQ_1}{dy}\right) = \frac{dp}{dy}\frac{dv}{dz} - \frac{dp}{dz}\frac{dv}{dy} = \frac{1}{T}\frac{dT}{dy}\frac{dQ_1}{dz} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dz}\frac{dQ_1}{dy}$$

und analog:

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{dQ_2}{dz}\right) - \frac{d}{dz}\left(\frac{dQ_2}{dy}\right) = \frac{dp}{dy}\frac{dv}{dz} - \frac{dp}{dz}\frac{dv}{dy} - \frac{dx}{dy}\frac{d\mu}{dz} + \frac{dx}{dz}\frac{d\mu}{dy} =$$

$$= \frac{1}{T}\frac{dT}{dy}\frac{dQ_2}{dz} - \frac{1}{T}\frac{dT}{dz}\frac{dQ_2}{dy}$$

ist. Hieraus folgt durch Subtraction die Gleichung 7), wenn man bedenkt, dass z. B.: $\frac{dQ_1}{dz} - \frac{dQ_2}{dz} = \mathrm{x}\frac{d\mu}{dz}$ ist, falls nicht $\mathrm{z} = \mathrm{x}$ gesetzt wird.

Die in dieser Grundgleichung 8) auftretenden Differentialquotienten $\frac{d\mu}{dT}$ und $\frac{dx}{dT}$ können, wie ich sofort zeigen will, als bekannte oder wenigstens als leicht zu ermittelnde Grössen angesehen werden. Der Quotient: $\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_z$ bestimmt nämlich die Änderung des Momentes in Folge der Temperaturerhöhung bei einem constanten Werthe des z. Auch ist einleuchtend, dass sich $\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_z$ von dem Differentialquotienten: $\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_x$, der sich also auf ein constantes x bezieht, um keine messbare Grösse unterscheiden kann, wie dieses auch im Folgenden um so mehr hervortreten wird. Nach meinen experimentellen wie theoretischen Untersuchungen ist nun:

$$\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_x = C\frac{\mu}{x} - B\mu \qquad 9)$$

wobei C und $B = 0{\cdot}00021$ gewisse Constanten vorstellen.

Der zweite Differentialquotient: $\frac{dx}{dT}$ bezieht sich auf die Temperaturänderung bei dem Magnetisiren und habe ich (cf. l. c. pag. 547) seinerzeit nachgewiesen, dass:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{T}{MC_1}\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_x \qquad 10)$$

gesetzt werden muss, falls $M = 1$ das Gewicht und C_1 die specifische Wärme des magnetisirten Eisens bedeutet.

Da nun sonach die beiden Differentialquotienten $\frac{d\mu}{dT}$ und $\frac{dx}{dT}$ bestimmbar sind, so liefert uns die Grundgleichung 8) eine Relation zwischen $\left(\frac{d\mu}{dz}\right)_T$ und $\left(\frac{dx}{dz}\right)_T$ d. h. es ist möglich, aus der zu Folge der Zunahme von z eintretenden Änderung des Moments μ einen Schluss zu ziehen auf die Grösse der mit steigender Magnetisirung sich vollziehenden Änderung von z. Es wird sich also — um gleich einen speciellen Fall zu betrachten — aus der Grösse der Ver-

änderung des Magnetismus eines Stabes mit der Torsion ein Schluss ziehen lassen auf die Grösse der bei der Magnetisirung stattfindenden Torsion u. dergl.

Eigenthümlich, wenn auch nicht schwer zu deuten, ist das entgegengesetzte Verhalten von $\frac{d\mu}{dz}$ und $\frac{dx}{dz}$, indem nämlich falls mit steigender Magnetisirung der eine Differentialquotient abnimmt, der andere zunimmt und umgekehrt. Um dieses nachzuweisen, ist es nöthig, zuvor einen Satz über die specifischen Wärmen in beiden Zuständen aufzustellen.

II.

Fasst man in der Gleichung 5) das Moment μ und ebenso Q_2 und Q_1 als Funktionen von T und z auf und setzt nachträglich z einer Constanten gleich, so erhält man:

$$\left(\frac{dQ_2}{dT}\right)_z - \left(\frac{dQ_1}{dT}\right)_z = -x\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_z$$

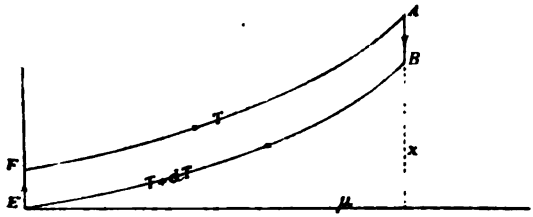
das ist:

$$C_2 - C_1 = -x\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_z \qquad 11)$$

wenn C_2 und C_1 die specifischen Wärmen im magnetischen und unmagnetischen Zustande bei constantem z darstellen.

Es hält nicht schwer, die Richtigkeit dieser Gleichung auch auf einem andern Weg nachzuweisen, indem man nämlich das Eisen einen gewissen Kreisprocess ausführen lässt. Zur besseren Veranschaulichung sollen als Abscissen die Momente μ und als Ordinaten die magnetisirenden Kräfte x gewählt werden. Das Eisen werde aus der Anfangslage A, für welche die Werthe x, μ und T gelten, durch die unendlich kleine Strecke ds von der magnetisirenden Kraft hinweg bewegt. Damit nun trotz des letzteren Umstandes das Moment constant bleibe, ist es nöthig, dem Eisen die Wärme $C_2 dT$ zuzuführen, wenn wir nämlich vorerst jenen Fall ins Auge fassen, bei dem in Folge der schwächeren Magnetisirung $\frac{d\mu}{dT}$ positiv ausfällt. Im Punkte B gelten also die Werthe: $x - dx$, μ und $T + dT$. Die Gerade AB kann als eine isomagnetische Curve bezeichnet werden.

Das Eisenstück werde hierauf längs der verlängerten Geraden ds ins Unendliche gerückt, so dass die den Punkt E charakterisirenden Werthe: $x = 0$, $\mu = 0$ und $T + dT$ werden. Die Linie BE stellt demnach eine isothermische Curve vor.



Lässt man nun den Körper wieder um ds näher rücken, so würde dadurch sein Moment um etwas wachsen, wesshalb wir ihm, um ihn in seinem unmagnetischen Zustande zu erhalten, die Wärme: $C_1 dT$ entziehen wollen. Für den so erhaltenen Endzustand in F gelten dann die Werthe: dx, 0 und T. Die Rückkehr wird dann schliesslich durch die isothermische Curve FA dargestellt.

Der Kreisprocess setzt sich also aus den beiden, den Temperaturen $T + dT$ und T entsprechenden, isothermischen Curven BE und FA und aus den unendlich kleinen, zu den Momenten μ und Null gehörigen, isomagnetischen Curven AB und EF zusammen und entspricht dem Überschusse an zugeführter Wärme, $(C_2 - C_1)dT$ die durch die Fläche des unendlich schmalen Streifens $ABEF$ ausgedrückte, äussere Arbeit. Für den absoluten Betrag dieser Fläche $ABEF$ erhält man leicht den Werth: $x d\mu$ und findet so unter Berücksichtigung des Sinnes einer geleisteten Arbeit die mit 11) identische Gleichung:

$$(C_2 - C_1)dT = -x \frac{d\mu}{dT} dT$$

Für den Fall einer starken Magnetisirung, wobei also $\frac{d\mu}{dT}$ negativ wird, tritt in dem betrachteten Kreisprocesse nur die Änderung ein, dass bei der Zustandsänderung AB die Wärmemenge: $C_2 dT$ nicht hinzugeführt, sondern weggenommen und dass analog bei EF die Wärme $C_1 dT$ hineingesteckt wird.

Für den Fall, dass das Eisen bis zum Maximum $\mu = m$ magnetisirt wurde, habe ich bereits[1] in einer früheren Arbeit x die Gleichung:

$$(C_2 - C_1)\tau = \int_0^{m_\tau} x d\mu$$

aufgestellt und dieselbe an einigen Versuchsdaten geprüft. Darin stellt τ die Anzahl Grade vor, um die das Eisen vom Maximal-Momente m_τ und der Temperatur T erhitzt werden muss, um seinen Magnetismus vollständig zu verlieren. Ist nun die Anfangstemperatur nicht T, sondern $T + dT$, so ist ebenso:

$$(C_2 - C_1)(\tau - dT) = \int^{m_{\tau+dT}} x d\mu$$

Aus beiden Gleichungen folgt:

$$(C_2 - C_1)\,dT = \int_0^{m_\tau} x d\mu - \int_0^{m_{\tau+dT}} x d\mu = \int_{m_{\tau+dT}}^{m_\tau} x d\mu = -x \frac{d\mu}{dT} dT$$

d. h., man gelangt auch von der damals gegebenen Gleichung ausgehend für $\mu = m$ leicht zur Gleichung 11.

Es ist also allgemein: $C_2 \gtrless C_1$ je nach dem $\frac{d\mu}{dT} \lessgtr 0$ ist, d. h. je nach dem (cf. Gl. 9): $x \gtrless \frac{C}{B}$ wird.

Dass für permanente Magnete die specifische Wärme C_2 des Magnets grösser sein müsse als C_1, nämlich die des unmagnetischen Stahles, hat bekanntlich Stefan schon lange dargethan.

Mit Hilfe der Gleichungen 11) und 10) ist es nun möglich, der Gleichung 8) eine andere Form zu geben. Dabei soll wieder: $\left(\frac{d\mu}{dT}\right)_z = \left(\frac{d\mu}{dT}\right)_x$ gesetzt werden; es ist dieses um so mehr gestattet, als in der That eine der Grössen z oder x sich ändert, sobald die andere zu- oder abnimmt.

Man erhält so:

$$\frac{d\mu}{dT} = -\frac{C_2 - C_1}{x}, \qquad 12)$$

$$\frac{dx}{dT} = \frac{x}{T}\frac{C_2}{C_2 - C_1} \qquad 13)$$

[1] Über die specifische Wärme etc. Sitzb. d. k. Akad. LXXXV. Bd. pag. 999.

und durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichung 8):

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{C_1}{(C_2-C_1)^2}\cdot\frac{x^2}{T}\cdot\frac{d\mu}{dz} \qquad 14)$$

Da nun der Factor: $\frac{C_1}{(C_2-C_1)^2}\cdot\frac{x^2}{T}$ immer positiv bleibt, so ist in der That nachgewiesen, dass sich: $\frac{dx}{dz}$ und $\frac{d\mu}{dz}$ immer entgegengesetzt verhalten, so dass also, wenn der eine Differentialquotient bei steigender Magnetisirung wächst, der andere abnimmt und umgekehrt. Es ist merkwürdig, dass nach der Gleichung 10) hinsichtlich des Einflusses und des Auftretens von Temperaturänderungen etwas Ähnliches gilt.

Bei der Betrachtung der einzelnen Fälle soll auf eine hypothetische Erklärung dieses entgegengesetzten Verhaltens etwas näher eingegangen werden. Zugleich möge auch auf den Nutzen hingewiesen werden, den die Verwendung der Relation 8 bei der weiteren Ausführung der Gleichungen 2) und 4) gewährt.

III.

Als erstes Beispiel wähle ich jenen Fall, wo ein gerader unter dem Einflusse der magnetisirenden Kraft x stehender Eisenstab von der Länge l durch eine bedeutende Kraft P in der Richtung seiner Achse gespannt wird. Die Resultate der verschiedenen Versuche, die darüber angestellt wurden, habe ich[1] in dem Satze zusammengefasst, dass die einseitige Vermehrung eines Zuges auf den Magnetismus des Stabes im Allgemeinen so einwirkt wie eine Temperaturerhöhung. Es ist nämlich nach den Versuchen die Änderung des Momentes für die Einheit des Zuges, d. i. $\frac{d\mu}{dP}$ positiv oder negativ, je nachdem die bereits vorhandene Magnetisirung eine schwächere oder stärkere genannt werden muss. Für die absolute Grösse von $\frac{d\mu}{dP}$ geben die Versuche leider keinen Anhaltspunkt.

[1] Sitzb. LXXXVI. Bd. pag. 548.

Nach dem Satze, der durch die Gleichung 14) ausgesprochen wird, muss sich also: $\frac{dx}{dP}$ entgegengesetzt wie $\frac{d\mu}{dP}$ verhalten; bei schwächerer Magnetisirung muss also eine Spannungsverminderung, bei stärkerer eine Spannungsvermehrung eintreten. Es tritt nun in der That bei stärkerer Magnetisirung bekanntlich eine Längenausdehnung ein, die nach den Versuchen von Righi[1] nahe proportional x^2 zu setzen wäre. Die Grösse: $\frac{dx}{dP}$ ist also jetzt sicher positiv, während $\frac{d\mu}{dP}$ negativ wird.

Bei schwächerer Magnetisirung sollte also eine Verkürzung eintreten. Hieher gehört wohl die Beobachtung,[2] dass ein magnetisirter Eisenstab, durch welchen ein Strom geleitet wird, sich im ersten Momente verkürzt und erst hierauf in Folge der Erwärmung ausdehnt.

Über die quantitativen Verhältnisse geben die bis jetzt vorhandenen Beobachtungen leider keinen Aufschluss. Bemerkt mag nur werden, dass man im Sinne von Righi $\frac{dx}{dP}$ umgekehrt proportional μ findet, sobald man in 14 $\frac{d\mu}{dP}$ als eine dem $\frac{d\mu}{dT}$ (c.f. 9) ähnliche Function auffasst d. i. $\frac{d\mu}{dP} = -B'\mu$ und $C_2 - C_1 = +B\mu x$ setzt.

Mit Hilfe der obigen Formeln ist es nun auch möglich, jene Abkühlung zu ermitteln, die bei dem Dehnen des magnetischen wie unmagnetischen Stabes eintritt. Für diesen Fall ist nämlich

$$dQ_2 = dU - Pdl - xd\mu$$

und

$$\frac{dQ_2}{T} = dS_2,$$

woraus sich, in bekannter Weise (l. c. pag. 549.) vorgehend, ergibt:

$$\frac{1}{T}\frac{dQ_2}{dP} = \frac{dl}{dT} - \frac{dx}{dT}\frac{d\mu}{dP} + \frac{dx}{dP}\frac{d\mu}{dT}$$

[1] Beiblätter 4, pag. 802.

[2] Wiedemann Galvanismus II. 1. pag. 582.

falls eben T und P zu unabhängigen Variablen gewählt werden.

Da nun in Folge der Gleichung 8) für $z = P$

$$\frac{dx}{dT}\frac{d\mu}{dP} - \frac{dx}{dP}\frac{d\mu}{dT} = \frac{x}{T}\frac{d\mu}{dP}$$

ist, so geht die vorhergehende Gleichung über in:

$$\frac{1}{T}\frac{dQ_2}{dP} = \frac{dl}{dT} - \frac{x}{T}\frac{d\mu}{dP}. \qquad 15)$$

Wird dem Eisen keine Wärme zugeführt, so ist:

$$dQ_2 = \frac{dQ_2}{dT}dT + \frac{dQ_2}{dP}dP = C_2 dT + T\left[\frac{dl}{dT} - \frac{x}{T}\frac{d\mu}{dP}\right]dP = 0,$$

falls C_2 die specifische Wärme des magnetisirten Eisens bei constantem Zuge P vorstellt und C_2 von der früher mit gleichem Buchstaben bezeichneten Grösse nur unmerklich verschieden ist.

Die Temperaturänderung bei dem Dehnen ist also gegeben durch:

$$\frac{dT}{dP} = -\frac{T}{C_2}\left[\frac{dl}{dT} - \frac{x}{T}\frac{d\mu}{dP}\right]. \qquad 16)$$

Hierin kann: $\frac{dl}{dT} = \alpha l_0$ gesetzt werden, wenn α den linearen Ausdehnungscoëfficienten und l_0 die Länge des Stabes bei dem absoluten Nullpunkte vorstellt. Die Grösse: $\frac{T}{C_2}\frac{dl}{dT}$ misst nahe die Abkühlung des unmagnetischen Eisens in Folge der Dehnung; dieselbe erscheint um die Grösse von $\frac{x}{C_2 T}\frac{d\mu}{dP}$ vermindert. Bei schwächerer Magnetisirung ist, wie erwähnt, $\frac{d\mu}{dP}$ positiv, so dass in diesem Falle der magnetisirte Stab durch die Dehnung nicht so stark abgekühlt wird, wie im unmagnetischen Zustande.

Nur für sehr starke Magnetisirungen wird $\frac{d\mu}{dP}$ negativ, so dass also ein stark magnetisirter Stab bei der Dehnung sich noch mehr abkühlt, als er dies im unmagnetischen Zustande thun würde.

Das Letztere wird im Allgemeinen auch eintreten, wenn statt eines temporär stark magnetisirten Eisens ein permanenter Stahlmagnet einer Dehnung unterworfen wird. Ich schliesse dieses daraus, weil ein permanenter Magnet sich in vielen, wohl bekannten Fällen — z. B. den Einflüssen der Erwärmung und der elastischen Formänderung gegenüber — analog verhält wie ein sehr stark magnetisirter Eisenstab.

Wie bekannt, ist nun durch Herrn H. Haga[1] die Abkühlung in Folge der Dehnung in so scharfer Weise ermittelt worden, dass er rückwärts schliessend einen verlässlichen Werth für das mechanische Wärmeäquivalent erhalten konnte. Auf meine Aufforderung hin unterzog nun H. Haga einen kräftig magnetisirten Stahldraht sowohl im unmagnetischen wie im magnetischen Zustande der Dehnung und erhielt aus mehreren Vorversuchen für den ersten Fall die Temperaturerniedrigungen:

$$D = 0{\cdot}0927 \quad \text{und} \quad D = 0{\cdot}0931$$

und für den zweiten Fall:

$$D = 0{\cdot}099.$$

Die Abkühlung fiel also für den magnetisirten Stab um 6% stärker aus als für den unmagnetischen.

Überblickt man das Gegebene, so sieht man, dass uns die Kenntniss von $\frac{d\mu}{dP}$ — die von $\frac{d\mu}{dT}$ und $\frac{dx}{dT}$ wird vorausgesetzt — zur Bestimmung von $\frac{dx}{dP}$ (cf. Gl. 8) und $\frac{dT}{dP}$ (cf. Gl. 16) verhilft.

Ist also allgemein für eine ähnliche, elektromagnetische Erscheinung $\frac{d\mu}{dz}$ bekannt, so gibt uns die Gleichung 8) $\frac{dx}{dz}$ und eine der 16. analoge Beziehung auch $\frac{dT}{dz}$; bei der Bestimmung des letzteren Differentialquotienten wird man im Allgemeinen auf die Grundgleichungen zurückgehen müssen.

Ein solcher Fall ist der, wo der Oberflächendruck p eine Vermehrung oder Verminderung erfährt.

[1] Wiedemann's Annalen der Physik. Bd. XV. pag. 1.

Durch einige, mit geringen Hilfsmitteln ausgeführte Versuche konnte ich nachweisen, dass eine Druckvermehrung in Bezug auf den Magnetismus des Stabes im Allgemeinen die entgegengesetzte Wirkung wie eine Erhöhung der Temperatur ausübt.

Man findet dieses begreiflich, wenn man sich erinnert, dass in diesem Falle die elementare, äussere Arbeit durch $+pdv$ und bei der Dehnung durch die Kraft P durch $-Pdl$ gegeben war; der jetzige Fall wird also auf den früheren im Allgemeinen zurückgeführt, wenn für P nur $-p$ gesetzt wird. Da das experimentelle Material in dieser Hinsicht noch sehr dürftig ist, so unterlasse ich es, weitere übrigens leicht zu bildende Folgerungen zu ziehen.

Vielmehr kennt man, besonders durch die umfassenden Arbeiten von G. Wiedemann, über die bei der Torsion eines Stabes auftretenden qualitativen Verhältnisse; in quantitativer Hinsicht ist auch hier durch das Experiment noch wenig festgestellt.

Bei diesen ziemlich verwickelten Erscheinungen hat man hauptsächlich zwei Fälle zu unterscheiden. Der eine behandelt den Fall der permanenten Torsion, der andere jenen, wo durch eine drehende Kraft R der Stab in der gedrehten Lage erhalten wird.

Bei der permanenten Torsion, wo also der Stab nach der Drehung sich selbst überlassen bleibt, möge die elementare Arbeit durch $Nd\omega$ bezeichnet werden. Diese Grösse muss positiv sein, da beim Verdrehen des Stabes in dem einen oder andern Sinn immer die Torsionskraft überwunden werden muss. Wir können ohne weiters N als das Maass der Torsionskraft ansehen und $z = N$ setzen, d. h., N neben T als Variable einführen. Nach dem in der Gleichung 14) ausgedrückten Satze müssen sich dann: $\frac{d\mu}{dN}$ und $\frac{d\varkappa}{dN}$ entgegengesetzt verhalten.

Für nicht zu starke Magnetisirungen gilt nun[1] der Satz: Wird ein Eisenstab, während der Strom geschlossen ist, hin und her tordirt, so nimmt sein temporärer Magnetismus zu, d. h., es ist $\frac{d\mu}{dN}$ positiv. Dasselbe besagt der Satz (l. c. pag. 557): „Tor-

[1] Wiedemann, Galvanismus II. 1. pag. 550.

dirt man einen Eisendraht, während oder nach dem Hindurchleiten eines galvanischen Stromes, so wird er magnetisch. Dass auch nach dem Hindurchleiten des Stromes diese Erscheinung stattfindet, erklärt sich meiner Ansicht nach aus dem hier stets bedeutenden, permanenten transversalen Magnetismus.

Nach dem obigen Satze (Gleichung 14) sollte nun für diesen Fall $\frac{dx}{dN}$ negativ sein, d. h., die Torsion sollte in Folge der Magnetisirung abnehmen. Das geschieht nun in der That, indem sich (l. c. pag. 561) die gedrillten Eisenstäbe bei der Magnetisirung detordiren. Aus andern Angaben ersieht man, dass bei diesen Versuchen die magnetisirende Kraft wirklich nicht sehr bedeutend sein konnte; es wurden nämlich höchstens sechs Grove'sche Elemente angewendet, und bestand die Spule aus nur einer Lage von 130 Windungen für eine Länge von 560 Mm. und 13·5 Mm. Weite. Der Eisenstab hatte dabei eine Länge von 580 Mm.

Auch der weitere Zusatz, dass diese Entdrillung mit dem Wachsen der Intensität der magnetisirenden Ströme im abnehmenden Verhältnisse zunehme und bald ein Maximum erreiche, findet durch die Formel 14) seine Erklärung. Da sich nämlich $\frac{d\mu}{dN}$ im Allgemeinen so wie $\frac{d\mu}{dT}$ verhält und dieser letzte Quotient bei der schwächeren Magnetisirung (c. f. Gl. 9) wo das zweite Glied verschwindet, den Werth: $\frac{d\mu}{dT} = C\frac{\mu}{x}$ hat, so kann man auch hier für $\frac{d\mu}{dN}$ die Form: $\frac{d\mu}{dN} = F\frac{\mu}{x}$ annehmen, und findet dann mit Hilfe der Gleichung 14):

$$\frac{dx}{dN} = -\frac{H}{\frac{\mu}{x}} = -\frac{H}{k}$$

worin H eine positive Constante und $\frac{\mu}{x} = k$ die Magnetisirungsfunction vorstellt. Letztere erlangt bekanntlich im sogenannten Wendepunkte den grössten Werth, wesshalb hier auch: $\frac{dN}{dx}$ ein Maximum hat; die Detorsion wird also wie verlangt an dieser Stelle ein Maximum aufweisen.

Stäbe, deren Magnetismus dem Maximum $\mu = m = 1800$ nahe war, wurden meines Wissens hinsichtlich des Einflusses der Torsion nicht untersucht. Hingegen ist für einen analogen Fall, nämlich für permanente Magnete (l. c. pag. 567 Nr. 4 rechts) bekannt, dass der permanente Magnetismus der Stahlstäbe durch ihre Torsion abnimmt und zwar in einem mit wachsender Torsion abnehmenden Verhältnisse.

Das stimmt nun vollständig mit der schon oben gemachten Annahme, dass $\frac{d\mu}{dN}$ dieselbe Form wie $\frac{d\mu}{dT}$ habe, so dass:

$$\frac{d\mu}{dN} = F\frac{\mu}{x} - G\mu \qquad 17)$$

wäre, worin, wie schon erwähnt, bei schwächeren Magnetisirungen das erste Glied, bei sehr starken das zweite Glied ausschlaggebend ist. Aus: $\frac{d\mu}{dN} = -G\mu$ folgt aber:

$$\mu = e^{-GN},$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{d\mu}{dN} = -\frac{G}{e^{GN}}.$$

In der Nähe der Maximalmagnetisirung muss also eine Torsion mit einer Abnahme des Momentes verbunden sein und zwar muss diese Abnahme um so kleiner ausfallen, je stärker die Torsion überhaupt ist.

Wie wir sahen, tritt dieses in der That für den analogen Fall, den der permanenten Magnete ein.

Nach dem obigen Satze (Gl. 14) sollte nun ferner $\frac{dx}{dN}$ sich entgegengesetzt wie $\frac{d\mu}{dN}$ verhalten, somit jetzt positiv ausfallen. Damit steht wohl in einigem Zusammenhange die Beobachtung (l. c. pag. 565), dass ein Magnet, durch den in der Richtung seiner Achse ein Strom geleitet wird, sich tordirt.

Es möge nun auch jener Fall behandelt werden, wo ein Stab durch eine Kraft R in der gedrehten Lage erhalten wird; die

elementare Arbeit in dem früheren Sinne ist dann durch: $-Rd\omega$ gegeben.

Für diesen Fall gilt der Satz (l. c. pag. 568 Nr. 8 links): Wird ein Draht magnetisirt, während er unter dem Einflusse des tordirenden Gewichtes steht, so nimmt seine Torsion bei schwacher Magnetisirung zu, bei stärkerer wieder ab.

Dieser Fall ist also dem früheren, dem der permanenten Torsion, gerade entgegengesetzt. Man begreift dieses, wenn man bedenkt, dass, wie schon der Ausdruck für die elementare Arbeit ersichtlich macht, für das Gleichgewicht die Torsionskraft N gleich und entgegengesetzt der Kraft R sein muss. Nehme also z. B. für kleinere x in Folge der Magnetisirung N ab, so wird die Kraft R in ihrem Sinne so lange drehen, bis wieder Gleichgewicht stattfindet, d. h., es findet eine Torsion statt u. s. w.

Die betrachteten Erscheinungen, besonders das entgegengesetzte Verhalten von $\frac{d\mu}{dz}$ und $\frac{dx}{dz}$ gestatten eine einfache Erklärung. So lange nämlich die magnetisirenden Kräfte nicht bedeutend sind, ist der Einfluss der Coërcitivkräfte, d. i. der eigentlichen und magnetischen Molekularkräfte, sowie der der freien Magnetismen, die sich alle der Magnetisirung entgegensetzen, vor Allem massgebend. Werden nun, wie z. B. bei der Erwärmung oder allgemeiner, indem z um dz wächst, diese Coërcitivkräfte vermindert, so steigt das Moment, d. h., $\frac{d\mu}{dz}$ ist positiv. Umgekehrt muss bei steigender Magnetisirung, die immer (Wied. Galv. pag. 572) mit einer Erschütterung der Molekule verbunden ist, der durch z charakterisirte Bewegungszustand in etwas gestört werden, d. i., $\frac{dx}{dz}$ negativ werden. Wir sahen desshalb, wie z. B. $\frac{d\mu}{dT}$. $\frac{d\mu}{dP}$ und $\frac{d\mu}{dN}$ positiv und dagegen $\frac{dx}{dT}$, $\frac{dx}{dP}$ und $\frac{dx}{dN}$ negativ ausfielen.

Bei Magnetisirungen, die dem Maximum nahe sind, kommt lediglich der Molekularmagnetismus in Frage, da die Coërcitivkräfte jetzt fast ohne Einfluss sind. Erwärmen wir nun ein solches stark magnetisirtes Eisen, dehnen es oder tordiren dasselbe, so werden entweder die Molekule neue Gleichgewichtslagen anneh-

men oder, wie bei der Erwärmung, doch lebhafter um die früheren Mittellagen herumschwingen; in beiden Fällen wird das Moment kleiner, d. h., $\frac{d\mu}{dz}$ ist negativ. Umgekehrt muss bei einer Vermehrung dieser starken Magnetisirung $\frac{dx}{dz}$ positiv ausfallen. Der durch z charakterisirte Bewegungszustand erfährt nämlich mit steigender Magnetisirung, wobei sich die Mittellagen nur wenig ändern, eine Vermehrung seiner lebendigen Kraft, indem die Kraft x in demselben Sinne wirkt. So z. B. werden die Moleküle in Folge der Magnetisirung zu lebhafteren Schwingungen (der allgemeinsten Form) angeregt, d. h. mit der Magnetisirung steigt in diesem Falle auch die Temperatur, u. s. w.

Durch diese Hypothese wird sonach das entgegengesetzte Verhalten von $\frac{d\mu}{dz}$ und $\frac{dx}{dz}$ wirklich veranschaulicht.

Überblickt man das Gegebene, so sieht man, dass in der That der Zusammenhang zwischen einer Reihe von elektromagnetischen Erscheinungen, die bisher isolirt dastanden, angegeben und durch die vorhandenen Versuche in qualitativer und quantitativer Hinsicht bestätigt wurde. Soll der vollständige, experimentelle Nachweis der Richtigkeit der obigen Gleichungen erbracht werden, so wird es nothwendig sein, Versuche über das Verhalten von $\frac{d\mu}{dz}$ und $\frac{dx}{dz}$ über die ganze Magnetisirungscurve und nach absolutem Maasse durchzuführen.

Über die Trennung des Nickels vom Kobalt.

Von G. Vortmann.

(Aus dem Laboratorium der Wiener Handelsakademie. V.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. December 1882.)

So zahlreich die Methoden auch sind, die zur Trennung der Metalle Kobalt und Nickel vorgeschlagen wurden, so besitzen wir doch keine einzige, welche uns gestatten würde, nicht nur kleine Mengen Nickel neben viel Kobalt, sondern auch umgekehrt Spuren von Kobalt neben Nickel nachzuweisen. So ist bekanntlich die Trennung mit salpetrigsaurem Kali nur dann besonders empfehlenswerth, wenn relativ wenig Kobalt neben viel Nickel zugegen ist; im umgekehrten Falle ist diese Methode weniger am Platze, dagegen die Liebig'sche Trennung mit Cyankalium die einzig zuverlässige. Ein Nachtheil vieler Methoden ist ferner, dass sie entweder zu zeitraubend oder schwierig auszuführen sind und daher nur in erfahrenen Händen brauchbare Resultate geben.

Seit längerer Zeit bin ich bemüht, eine Methode ausfindig zu machen, welche leicht und schnell auszuführen ist und dabei eine möglichst vollständige Trennung der beiden Metalle gestattet.

Die meisten Trennungsmethoden des Kobalts vom Nickel beruhen auf der Eigenschaft des ersteren Metalles Oxydsalze zu geben, während diese Fähigkeit dem Nickel abgeht; unter diesen Oxydsalzen haben die ammoniakalischen Kobaltverbindungen schon seit längerer Zeit die Aufmerksamkeit der Analytiker auf sich gezogen. Im Jahre 1866 veröffentlichte Terreil[1] eine Methode zur Trennung des Kobalts vom Nickel, welche auf der

[1] Compt. rend. LXII. 139.

Bildung des Purpureo-Kobaltchlorids beruhte. Er versetzte eine ammoniakalische Kobalt- und Nickellösung mit Kaliumpermanganat, kochte, wobei das Kobalt in Roseokobaltchlorid übergeführt wurde, und übersättigte die Flüssigkeit mit Salzsäure, wodurch das in letzterer schwer lösliche Purpureokobaltchlorid niederfiel. Statt des übermangansauren Kali empfahl er zur Oxydation auch unterchlorigsaures Natron, doch hat er, wie aus seiner Abhandlung hervorgeht, letzteres Oxydationsmittel nicht bei der Trennung des Nickels vom Kobalt, sondern hauptsächlich zur Trennung des Mangans vom Nickel angewandt. Diese obige Methode von Terreil ist jedoch nach C. D. Braun's [1] Untersuchungen sehr ungenau und zur quantitativen Trennung des Kobalts und Nickels durchaus ungeeignet, indem die Oxydation des Kobalts nur langsam erfolgt (Braun wandte, wie Terreil, als Oxydationsmittel nur Kaliumpermanganat an) und selbst nach langer Einwirkung eine unvollständige ist; ferner ist das gebildete Purpureokobaltchlorid in Salzsäure nicht absolut unlöslich.

In der That dürfte es kaum gelingen, auf die Schwerlöslichkeit einer Kobaltammoniumverbindung eine Trennungsmethode zu gründen; das Luteokobaltpyrophosphat und das Luteokobaltjodidsulfat sind wohl unter diesen Verbindungen die am wenigsten in Wasser und verdünntem Ammoniak löslichen, und doch ist deren Löslichkeit noch immer viel zu gross.

Oxydirte ammoniakalische Kobaltlösungen zeigen aber zu Alkalien ein ganz anderes Verhalten, als ammoniakalische Nickellösungen. Letztere geben auf Zusatz von Kali- oder Natronlauge schon in der Kälte einen Niederschlag von Oxydulhydrat, während vollständig oxydirte Kobaltlösungen unter denselben Umständen sowohl beim Verdünnen mit Wasser als auch nach Zusatz von Kali- oder Natronlauge in der Kälte und selbst in gelinder Wärme vollkommen klar bleiben.

Auf dieses Verhalten stützte Delvaux [2] seine Trennungsmethode; er oxydirt, wie Terreil, mit übermangansaurem Kali in ammoniakalischer Lösung und fällt, ohne vom Manganhyper-

[1] Z. f. a. Ch. V. 1866. 114.

[2] Compt. rend. 92. 723. Z. f. a. Ch. 21. 111.

oxydhydrat abzufiltriren, mit Kalilauge; den Niederschlag, der aus Manganhyperoxyd, Nickeloxydul und etwas Kobaltoxydul besteht, löst er in concentrirter Salzsäure auf, übersättigt die Lösung mit Ammoniak und behandelt sie abermals mit Kaliumpermanganat, setzt hierauf Kalilauge zu und filtrirt ab. Der Niederschlag soll nun nur aus Manganhyperoxyd und Nickeloxydul bestehen, welche nach einer der bereits bekannten Methoden weiter getrennt werden können.

Ich habe, noch bevor Delvaux seine Methode veröffentlicht hatte, ebenfalls Versuche angestellt, durch Oxydation mit Kaliumpermanganat in ammoniakalischer Lösung und Fällung mit Kalilauge eine Trennung des Nickels und Kobalts zu bewerkstelligen, doch waren die Resultate nicht befriedigend. Ich verfuhr folgendermassen: die mit Salmiak versetzten Metalllösungen wurden mit Ammoniak übersättigt, erwärmt und während des Kochens mit Kaliumpermanganatlösung versetzt, bis die Flüssigkeit über dem Manganniederschlag nach dem Absetzen desselben stark violetroth gefärbt war, sodann wurde nach Zusatz von etwas Ammoniak aufgekocht, um das überschüssige Permangannat zu zerstören, heiss filtrirt und der Niederschlag mit heissem, Ammoniak enthaltendem Wasser gewaschen. Das Filtrat war durch das gebildete Purpureokobaltchlorid roth gefärbt und gab, nach dem Erkalten und Verdünnen mit Wasser, auf Zusatz von Kalilauge einen apfelgrünen Niederschlag, der nach dem Abfiltriren und Auswaschen sich als frei von Kobalt erwies. Bei der Prüfung des Manganniederschlages fand ich jedoch, dass derselbe sehr beträchtliche Mengen von Kobalt und auch Nickel enthielt; das Kobalt war in demselben als Ammoniumverbindung enthalten, denn nach dem Auswaschen des Niederschlages mit kochendem Wasser und Auflösen desselben in heisser Salzsäure entstand beim Erkalten ein Niederschlag, der aus Purpureo- und Luteokobaltchlorid bestand. Diese Eigenschaft des Manganhyperoxydhydrates, nicht nur Oxyde, sondern auch Salze mit niederzureissen, veranlasste mich, auf die Anwendung des Kaliumpermanganates zu verzichten und macht es sehr wahrscheinlich, dass auch nach Delvaux's Verfahren nicht nur keine quantitative, sondern nicht einmal eine qualitative Trennung von Kobalt und Nickel möglich sein dürfte, abgesehen

davon, dass durch die Auflösung des Manganniederschlages in Salzsäure und nochmalige Behandlung der Lösung mit Ammoniak, Kaliumpermanganat und Kalilauge eine sehr grosse Menge eines voluminösen, manganreichen Niederschlages entsteht, welcher sich absolut nicht vollständig auswaschen lässt.

Es ist ferner noch ein anderer Umstand zu beachten: die mit Kaliumpermanganat behandelte Flüssigkeit enthält das Kobalt in Form einer Kobaltammoniumverbindung. Da nun zur Fällung des Nickels Kalilauge zugesetzt wird und sämmtliche Kobaltammoniumverbindungen durch Alkalien mehr oder weniger leicht Zersetzung erleiden, so ist es durchaus nicht gleichgiltig, welche Ammoniumverbindung des Kobalts sich bildet. Während Hexaminverbindungen auf Zusatz von Kalilauge nahezu sofort einen Niederschlag von Kobaltoxydhydrat geben, Octaminsalze jedoch erst nach längerer Zeit, werden Decaminsalze in der Kälte und in verdünnter Lösung selbst nach mehrtägigem Stehen nicht zersetzt; die grösste Beständigkeit aber zeigen die Luteosalze, da diese in mit Natron- oder Kalilauge versetzter Lösung selbst gelinde erwärmt werden können, ohne Kobaltoxydhydrat abzuscheiden. Man muss daher, will man Kobalt und Nickel aus einer oxydirten ammoniakalischen Lösung mit Kalilauge trennen, darauf achten, dass das Kobalt in ein Luteosalz übergeführt wird. Bei der Oxydation mit Kaliumpermanganat nun bildet sich stets fast nur Purpureosalz und nur bei Gegenwart von viel Salmiak und Ammoniak etwas Luteosalz.

Ich habe desshalb versucht, als Oxydationsmittel eine ammoniakalische Silberlösung anzuwenden; eine mit Salmiak und Ammoniak versetzte Kobaltlösung gibt nämlich auf Zusatz von ammoniakalischer Silberlösung (Chlorsilber in Ammoniak gelöst) bei gelindem Erwärmen sehr bald eine Lösung, die beinahe kein Purpureosalz, sondern fast nur Luteokobaltchlorid enthält, während gleichzeitig metallisches Silber als feines weisses Pulver, zum Theil auch als Spiegel sich absetzt. Dieses Verhalten habe ich öfters schon angewandt, um schnell grössere Mengen reinen Luteosalzes darzustellen. Da das Silber sich pulverförmig abscheidet, leicht auszuwaschen ist und sich fast nur Luteosalz bildet, versuchte ich diese Methode auch auf die qualitative Trennung des Kobalts und Nickels anzuwenden, doch waren

auch hier meine Versuche nicht von dem gewünschten Erfolge begleitet; kleine Mengen von Kobaltsalz, zumal in verdünnter Lösung, werden durch ammoniakalische Silberlösung nur sehr langsam oxydirt und ist die Oxydation selbst nach mehrtägiger Einwirkung keine vollständige.

Ein vortreffliches Oxydationsmittel fand ich dagegen im unterchlorigsauren Natron. Wird eine ammoniakalische, Salmiak enthaltende Kobaltlösung mit letzterem Reagens versetzt, so erfolgt schon in der Kälte nach kurzer Zeit vollständige Oxydation, was man daran erkennt, dass die Lösung sich tief roth färbt und auf Zusatz von viel Wasser kein basisches Kobaltsalz mehr niederfällt. Wird die Lösung gekocht, so geht die Oxydation noch schneller vor sich; nach wenigen Minuten nimmt die Lösung eine dunkelrothgelbe Farbe an und enthält nun das Kobalt hauptsächlich als Luteosalz. Verdünnt man nach dem Erkalten mit Wasser und setzt etwas Kalilauge hinzu, so bleibt die Flüssigkeit, falls sie nur Kobalt enthielt, selbst nach mehrtägigem Stehen klar, enthielt sie jedoch etwas Nickel, so scheidet sich dieses nach wenigen Minuten als Oxydulhydrat ab. Es lassen sich auf diese Weise selbst Spuren von Nickel in Kobaltsalzen nachweisen und umgekehrt kann man auch sehr geringe Mengen Kobalt neben Nickel auffinden. Die ammoniakalische Lösung der Nickelsalze zeigt nämlich eine rein blaue Färbung; sind jedoch gleichzeitig selbst sehr geringe Mengen Kobalt zugegen, so geben diese nach der Behandlung der Lösung mit unterchlorigsaurem Natron in der Kälte eine deutlich rothviolette Färbung; ist diese jedoch nicht recht zu erkennen und man filtrirt, nach dem Verdünnen mit Wasser und Zusatz von Kalilauge, vom Nickeloxydulhydrat ab, so zeigt das Filtrat eine schwache, gelbe Färbung; bei sehr geringen Mengen von Kobalt ist das Filtrat farblos, es gibt aber beim Erwärmen mit ein wenig Schwefelammonium einen schwarzen Niederschlag von Schwefelkobalt. Ist das Filtrat stark roth gefärbt, so erhitzt man es zum Kochen, wobei die Kobaltammoniumverbindung unter Abscheidung von braunem Kobaltoxydhydrat zerlegt wird. Da Nickeloxydulhydrat selbst bei Gegenwart von Kali- oder Natronlauge von verdünntem Ammoniak spurenweise gelöst wird, so hat man von Anfang an darauf zu achten, keinen zu grossen Überschuss von diesem

Reagens zuzusetzen, da man sonst bei der Fällung des Nickels mittelst Kalilauge die Flüssigkeit allzustark verdünnen müsste, was jedenfalls ein Übelstand wäre.

Ich habe in Folgendem einige Versuche ausgeführt, welche die Grenzen angeben sollen, bis zu welchen Nickel und Kobalt nach dieser Methode neben einander erkannt werden können; gleichzeitig habe ich auch vergleichende Versuche mit der Fischer'schen und der Liebig'schen Methode angestellt.

a) 1·55 Grm. wasserfreies Kobaltsulfat (aus Purpureokobaltchlorid dargestellt) wurden in wenig Wasser gelöst und die Lösung auf 100 CC. verdünnt; von dieser Lösung, die ich mit ($Co._1$) bezeichnen will, wurden 5 CC. auf 500 CC. verdünnt; diese zweite verdünntere Lösung bezeichne ich mit ($Co._2$).

100 CC. ($Co._1$) enthalten somit 1·55 Gr. $CoSO_4$ = 0·59 Gr. Co.

100 CC. ($Co._2$) enthalten somit 0·0155 Gr. $CoSO_4$ = 0·0059 Gr. Co.

b) 4·372 Grm. Nickelkaliumsulfat ($NiSO_4 + K_2SO_4 + 6H_20$) wurden in wenig Wasser gelöst und die Lösung auf 100 CC. verdünnt; von dieser Lösung ($Ni._1$) wurden 5 CC. auf 500 CC. verdünnt = ($Ni._2$).

100 CC. ($Ni._1$) enthalten somit 4·372 Gr. Nickelkaliumsulfat = 0·59 Gr. Ni.

100 CC. ($Ni._2$) enthalten somit 0·04372 Nickelkaliumsulfat = 0·0059 Gr. Ni.

c) 1 CC. ($Co._2$) Lösung = 0·000059 Gr. Co wurde mit Kaliumnitrit und Essigsäure versetzt; nach einer halben Stunde zeigte sich eine deutliche Trübung und nach 2 Stunden ein schwacher Niederschlag des Fischer'schen Salzes.

Mit Ammoniak und unterchlorigsaurem Natron war in einem CC. ($Co._2$) das Kobalt an der Färbung der Flüssigkeit nicht erkennbar, wohl aber entstand mit Schwefelammonium nach kurzer Zeit ein schwarzer Niederschlag.

1 CC. der ($Co._2$) Lösung wurde mit einigen Tropfen Salmiaklösung versetzt und auf dem Wasserbade zur Trockne verdampft; der Rückstand gab beim Erwärmen mit einigen Tropfen Ammoniak und NaOCl eine deutlich roth gefärbte Lösung.

d) 2 CC. ($Co._2$) = 0·000118 Gr. Co gaben mit KNO_2 nach einer Viertelstunde einen schwachen gelben Niederschlag. Dieselbe Menge mit Ammoniak und NaOCl behandelt, liess das Kobalt sofort an der Färbung erkennen.

e) 5 CC. ($Co._2$) = 0·000295 Gr. Kobalt und 5 CC. ($Ni._1$ = 0·0295 Gr. Nickel gaben nach Zusatz von KNO_2 und Essigsäure selbst nach 3 Stunden keine Trübung, erst nach 24stündigem Stehen entstand ein geringer gelber Niederschlag.

Wurde eine gleiche Menge Nickel und Kobaltlösung mit Ammoniak und NaOCl behandelt, so war das Kobalt schon in der Kälte an der Färbung der Flüssigkeit leicht erkennbar. Letztere wurde aufgekocht, sodann abgekühlt, mit Wasser verdünnt und mit Kalilauge versetzt, nach dem Abfiltriren vom Nickeloxydulhydrat wurde das Filtrat mit etwas Schwefelammonium versetzt und gelinde erwärmt; hiebei schied sich ein schwarzer Niederschlag von Schwefelkobalt ab, der mit Phosphorsalz am Platindraht zusammengeschmolzen, die für Kobalt characteristische blaue Perle gab.

f) 2 CC. ($Co._2$) = 0·000118 Gr. Co und
10 CC. ($Ni._1$) = 0·059 Gr. Ni wurden mit Salmiak, Ammoniak und NaOCl erwärmt; an der Farbe der Flüssigkeit war das Kobalt nicht erkennbar. Es wurde dieselbe auf das Vierfache ihres Volumens verdünnt und nach Zusatz von Kalilauge vom Nickeloxydulhydrat abfiltrirt; das Filtrat war deutlich rosa gefärbt und gab im Schwefelammonium eine geringe Menge eines schwarzen Niederschlages, der mit Phosphorsalz eine blaue Perle gab.

g) 2 CC. ($Co._2$) = 0·000118 Gr. Co und
20 CC. ($Ni._1$) = 0·118 Gr. Ni wurden genau so behandelt; ein Filtrat vom Nickelhydroxydul war das Kobalt schon an der Färbung der Flüssigkeit erkennbar.

h) 5 CC. ($Ni._2$) = 0·000295 Gr. Ni und
5 CC. ($Co._1$) = 0·0295 Gr. Co wurden nach Zusatz von Salmiak, Ammoniak und NaOCl, erwärmt, die Flüssigkeit abgekühlt und nach dem Verdünnen auf das 4—5fache ihres Volumens, mit Kalilauge versetzt; schon nach weni-

gen Minuten war das Nickel als blassgrüner flockiger Niederschlag erkennbar.

i) 1 CC. (Ni_2) = 0·000059 Gr. Ni und
10 CC. ($Co._1$) = 0·059 Gr. Co wurden auf gleiche Weise behandelt; auch hier war das Nickel wie im vorhergehenden Versuch sehr bald zu erkennen.

Eine Lösung, die dieselbe Menge Kobalt und Nickel enthielt, wurde nach der Liebig'schen Methode mit Cyankalium und Bromwasser auf Nickel geprüft, doch zeigte die Flüssigkeit auch nach mehreren Stunden nicht die geringste Braunfärbung.

k) 1 CC. (Ni_2) = 0·000059 Gr. Nickel und
5 CC. ($Co._1$) = 0·0295 Grm. Kobalt wurden mit Cyankalium und Bromwasser behandelt; die Lösung färbte sich nur sehr schwach braun, ein Niederschlag entstand nicht.

l) 2 CC. (Ni_2) = 0·000118 Gr. Ni und
5 CC. ($Co._1$) = 0·0295 Gr. Co ebenso behandelt, gaben eine deutliche Braunfärbung, erst nach 24stündigem Stehen bildete sich eine geringe Menge eines schwarzen Niederschlages.

m) 1 CC. (Ni_2) = 0·000059 Gr. Ni und
5 CC. ($Co._1$) = 0·0295 Gr. Co liessen nach der Methode mit Ammoniak und NaOCl das Nickel deutlich erkennen.

Nach diesen Versuchen prüfte ich von Trommsdorf bezogenes Nickel- und Kobaltnitrat auf deren Reinheit.

n) 2 Grm. Kobaltnitrat wurden mit Salmiak und Ammoniak erwärmt; nachdem von einer geringen Menge Eisenhydroxyd abfiltrirt worden war, wurde unterchlorigsaures Natron zugesetzt und einige Minuten gelinde erwärmt; sodann abgekühlt, die Flüssigkeit auf circa einen halben Liter verdünnt und mit Kalilauge versetzt; sofort bildete sich ein schwacher, flockiger, hellgrüner Niederschlag. In einer gleichen Menge Kobaltnitrat wurde das Nickel, durch Behandlung mit Cyankalium und Bromwasser ebenfalls mit Sicherheit erkannt.

o) 2 Gr. Nickelnitrat wurden in wenig Wasser gelöst, die Lösung mit Salmiak und Ammoniak versetzt und nach Zusatz von unterchlorigsaurem Natron gelinde erwärmt;

nach dem Abkühlen wurde auf 200—300 CC. verdünnt und vom Niederschlage abfiltrirt. Das Filtrat besass in dickeren Schichten eine deutlich orangerothe Färbung; schon hiedurch gab sich das Kobalt zu erkennen. Nach Zusatz einiger Tropfen Schwefelammonium wurde erwärmt und nach einigen Minuten abfiltrirt. Das abgeschiedene Schwefelkobalt diente zu verschiedenen Reactionen.

α) ein Theil wurde mit Phosphorsalz am Platindraht zusammengeschmolzen, die Perle war intensiv blau;

β) der Rest wurde in wenig Königswasser gelöst und die Lösung in zwei Theile getheilt:

die eine Hälfte gab nach dem Behandeln mit Ammoniak und unterchlorigsaurem Natron eine deutlich roth gefärbte Flüssigkeit,

die andere Hälfte gab auf Zusatz von Kaliumnitrit und Essigsäure schon nach 5 Minuten eine deutliche Färbung und nach 24stündigem Stehen einen schwachen gelben Niederschlag.

2 Grm. Nickelnitrat in möglichst wenig Wasser gelöst und mit Kaliumnitrit und Essigsäure versetzt, zeigten selbst nach mehrstündigem Stehen nicht die geringste Trübung, selbst nach 48stündigem Stehen war keine Spur eines Niederschlages zu bemerken.

Aus vorstehenden Versuchen geht hervor, dass diese Methode in manchen Fällen eine grössere Genauigkeit zulässt als die Fischer'sche und die Liebig'sche und diesen gegenüber den Vorzug hat, leichter ausführbar zu sein und schneller zu einem Resultate zu führen.

Ich zweifle durchaus nicht, dass diese Methode, falls es sich um Trennung geringer Mengen Kobalt von Nickel handelt, auch quantitativ anwendbar sei; bei der Trennung von wenig Nickel neben viel Kobalt wird es jedenfalls nothwendig sein um das Nickel ganz kobaltfrei zu erhalten, die Operation ein zweites Mal vorzunehmen. Untersuchungen hierüber möchte ich mir gerne vorbehalten.

II. SITZUNG VOM 11. JÄNNER 1883.

Der Vorsitzende, Herr Hofrath Ritter v. Brücke, übergibt im Namen des Verfassers den Jahrgang 1882 der von dem ausländischen correspondirenden Mitgliede Herrn Geheimrath Prof. Dr. C. Ludwig herausgegebenen „Arbeiten aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig."

Die historischen Vereine Wiens übermitteln die von ihnen herausgegebene „Festschrift zum sechshundertjährigen Habsburg-Jubiläum."

Das c. M. Herr Prof. Dr. Rich. Maly in Graz übersendet eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Friedrich Emich ausgeführte Untersuchung: „Über das Verhalten der Gallensäuren zu Eiweiss und Peptonen und über deren antiseptische Wirkungen."

Der Secretär legt eine Abhandlung des Assistenten am physikalischen Institute der Wiener Universität Herrn J. Haubner: „Über das logarithmische Potential einer nicht isolirten elliptischen Platte" vor.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Dr. C. Braun, Director der erzbischöflich Haynald'schen Sternwarte in Kalocsa, mit der Aufschrift: „Beitrag zur Praxis der Präcisions-Instrumente" vor.

Das w. M. Herr Regierungsrath Th. Ritter v. Oppolzer überreicht eine Abhandlung des Herrn Ferdinand Anton, Observators der k. k. Gradmessung in Wien, betitelt: „Bestimmung der Bahn des Planeten (114) Cassandra".

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. S. Zeisel ausgeführte Arbeit: „Über Condensationsproducte der Aldehyde und ihre Derivate. II. Methyläthylacrolein und seine Derivate".

Herr Dr. S. Ehrmann in Wien überreicht eine Abhandlung: „Über Fettgewebsbildung aus dem als Winterschlafdrüse bezeichneten Fettorgan.“

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 46e année, 2e série, tome XI. Nr. 51. Paris, 1882; 8°.

— royale de Copenhague: Mémoires. 6me série. Vol. I. Nrs. 6—8. Kjøbenhavn, 1882; 4°. Vol. II, Nr. 3. Kjøbenhavn, 1882; 4°.

— — Översigt over Förhandlingar og dets Medlemmers Arbejder i Aaret 1882. Nr. 2. Kjøbenhavn; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXI. Jahrgang, Nr. 1. Wien, 1883; 8°.

Bonn, Universität: Akademische Schriften pro 1881. 50 Stücke; 4° & 8°.

Britisch Museum: Catalogue of the Batrachia gradientia s. caudata and Batrachia apoda. 2. Edition by George Albert Boulenger. London, 1882; 8°.

Central-Station, königliche meteorologische: Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königreich Bayern. Jahrgang IV. Heft 3. München, 1882; 4°.

— — Übersicht über die Witterungsverhältnisse im Königreiche Bayern während des October und November 1882. München; folio.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCV, Nr. 26. Paris, 1882; 4°.

Gewerbe-Verein, n. ö.: Wochenschrift. XLIV. Jahrgang. Nr. 1. Wien, 1883; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. VIII. Jahrgang, Nr. 1. Wien, 1883; 4°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. XXVIIe année, 3e série, tome XIII, 493e livraison. Janvier 1883. Paris; 8°.

Nature. Vol. XXVII. Nr. 688. London, 1883; 8°.

Observatorium, Tifliser physikalisches: Magnetische Beobachtungen im Jahre 1880. Tiflis, 1881; 8°.

Observatory, The: A monthly review of Astronomy. Nr. 69. January 1, 1883. London; 8°.

Osservatorio, R. di Brera in Milano: Misure di alcune principali stelle doppie di rapido movimento orbitale eseguite negli anni 1875—1882 col Refrattore di Merz da G. V. Schiaparelli. Milano, 1882; 8°.

— centrale del Real Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino mensuale. Serie II. Vol. II. Num. VI. Torino, 1882; 4°.

Repertorium für Experimental-Physik etc., von Dr. Ph. Carl. XVIII. Band, 12. Heft. München und Leipzig, 1882; 8°.

Società degli Spettroscopisti italiani: Memorie. Vol. XI, Disp. 10ª. Roma, 1882; 4°.

— Toscana di Scienze naturali: Atti. Processi verbali Vol. III. Adunanza del di 13 Novembre 1881 al 2 Luglio 1882. Pisa; 4°.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et Compte rendu des travaux. 4ª série, 35ª année, 10ª cahiers. Paris, 1882; 8°.

— Ouralienne d'Amateurs des sciences naturelles. Tome VI, livr. 2. et Tome VII, livr. 2. Jekaterinenburg, 1882; 4°.

Society, the royal microscopical: Journal. Ser. II, Vol. II. Part 6. December, 1882. London und Edinburgh; 8°.

United States: Bulletin of the national Museum. Nr. 11. Bibliography of the fishes of the pacific coast to the end of the year 1879; by Theodor Gill. Washington, 1882; 8°.

— — Report of the Superintendent of the U. S. Coast and geodetic survey showing the progress of the work during the fiscal year ending with June, 1879. Washington, 1881; 4°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 1. Wien, 1883; 4°.

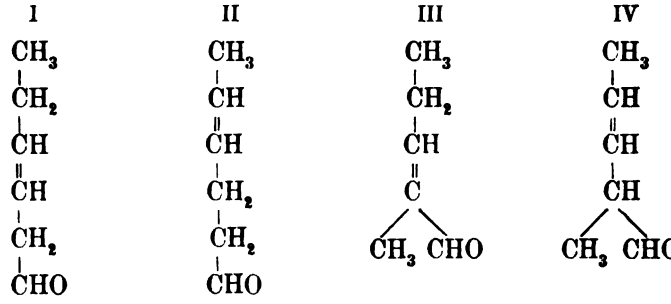
Über Condensationsproducte der Aldehyde und ihre Derivate.

Von **Ad. Lieben** und **S. Zeisel.**

II. Abhandlung.

Methyläthylacroleïn und seine Derivate.

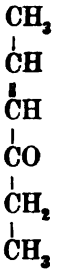
Wir haben in unserer I. Abhandlung[1] bereits erwähnt, dass wir durch Einwirkung von Salzlösungen auf Propionaldehyd ein Condensationsproduct erhalten haben, mit dessen eingehender Untersuchung wir seit 1877 beschäftigt sind.[2] Für die Art, wie zwei Moleküle Propionaldehyd unter Austritt von H_2O zu einem Condensationsproduct $C_6H_{10}O$ zusammentreten können, bieten sich vielerlei Möglichkeiten dar, wie die folgenden Formeln zeigen:



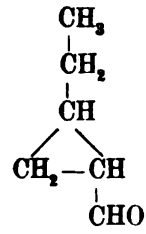
[1] Monatshefte f. Chemie (1880) p. 818. — Sitzgsb. d. k. Akad. d. Wiss. (2) 82. p. 960.

[2] Vgl. vorl. Mittheilungen: Anzeiger d. k. Akad. d. Wiss. zu Wien (1877) p. 178, (1879) p. 86, ferner Berl. Ber. (1879) p. 570, (1880) p. 2032.

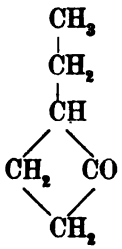
V



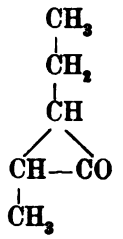
VI



VII



VIII



Unsere Untersuchung hat nun sowohl durch das Studium der Reductions- wie der Oxydationsproducte des $C_6H_{10}O$ mit Evidenz ergeben, dass die Condensation in der Weise erfolgt, dass der Sauerstoff des einen Aldehydmolekülls mit dem Wasserstoff der CH_2-Gruppe des anderen Propionaldehydmolekülls als Wasser austritt.

Auf diese Weise entsteht ein Condensationsproduct von Aldehydnatur, das an einer Stelle des Moleküls eine doppelte Bindung enthält, daher wie ein ungesättigter Körper sich verhält und dem die obige Formel III zukömmt. Man kann es als Propionaldehyd betrachten, in dem αH_2 durch Propyliden $CH_3 \cdot CH_2 \cdot \overset{\parallel}{C}H$ ersetzt sind, oder was auf dasselbe hinausläuft als Acrolein, in welchem ein α H durch CH_3 und ein β H durch C_2H_5 substituirt ist. Dem entsprechend kann es als Propylidenpropionaldehyd oder als Methyläthylacrolein bezeichnet werden. Wir haben die letztere Bezeichnung gewählt, weil sie an das erste und am längsten bekannte Glied der ganzen Reihe erinnert.

Während wir mit dieser Untersuchung beschäftigt waren und auch das obige Resultat bezüglich der Art, wie die Condensation sich vollzieht, bereits mit grosser Wahrscheinlichkeit festgestellt hatten, erschien eine Reihe von Arbeiten, welche verwandte Gegenstände behandelten und für den Vorgang bei der Condensation zu analogen Resultaten wie die von uns erhaltenen führten.

So sprachen sich Gabriel und Michael[1] rücksichtlich der Condensation zwischen Phtalsäureanhydrid und Propionsäure-

[1] Berl. Ber. (1878) p. 1013.

anhydrid dahin aus, dass αH_2 aus der Propionsäure herausgenommen und durch einen Phtalsäurerest ersetzt werden.

Fittig[1] machte darauf aufmerksam, dass die Perkin'schen Synthesen aromatischer Säuren (aus aromatischen Aldehyden und Anhydriden fetter Säuren), die Perkin selbst durch Eingreifen des Aldehydsauerstoffs in die endständige Methylgruppe der fetten Säuren erklärt hatte, noch eine andere Deutung zulassen und dass einiger Grund für die Annahme vorhanden sei, der Sauerstoff der aromatischen Aldehyde wirke auf αH_2 der fetten Säuren ein und veranlasse die Condensation an dieser Stelle. In demselben Sinne sprachen sich Baeyer und Jackson[2] bezüglich der Constitution der aus Bittermandelöl und Normalbuttersäure dargestellten Phenylangelicasäure aus.

Endlich unterzogen Conrad und Bischoff[3] im Anschluss an ihre schönen Arbeiten über Synthesen mittelst Malonsäureester auch die Perkin'schen Synthesen einer eingehenden Discussion und lieferten überzeugender als bis dahin geschehen war den Nachweis, dass die Condensation in der angeführten Weise und nicht in der Art wie sich Perkin dieselbe zuerst vorgestellt hatte, erfolgt. Auch standen sie nicht an, die Regel, die sich zunächst nur für die Einwirkung aromatischer Aldehyde auf Fettsäureanhydride ergeben hatte, auf andere Fälle zu übertragen und gaben nicht nur für die Einwirkung von Phtalsäureanhydrid auf Anhydride von fetten Säuren, sondern auch für die Condensation des Valeraldehyds zu $C_{10}H_{18}O$ und die Bildung der Furfurangelicasäure aus Furfurol und Normalbuttersäureanhydrid Erklärungen in diesem Sinne.

Ganz auf denselben Standpunkt wie Conrad und Bischoff haben sich neuerdings Claisen und Claparède[4] in ihren interessanten Arbeiten über Condensation von Aldehyden mit Ketonen etc. gestellt und für die Richtigkeit der dargelegten Auffassung weitere Belege geliefert. Auch glaubt Claisen[5], dass

---

[1] Lieb. Ann. (1879) 195. p. 169.

[2] Berl. Ber. (1880) p. 116.

[3] Lieb. Ann. (1880). 204, p. 177.

[4] Claisen, Berl. Ber. (1881) p. 345 u. p. 2468. — Claisen u. Claparède Berl. Ber. (1881) p. 349, p. 2460 u. p. 2472.

[5] Berl. Ber. (1881) p. 2468, Anmerkung.

dieselbe Regel vielleicht für die Condensation von Aldehyden mit Aldehyden gilt, im Gegensatze zu J. G. Schmidt,[1] der die von ihm beobachtete Condensation von Furfurol mit Propionaldehyd durch Einwirkung des Aldehydsauerstoffs von Furfurol auf die CH_2-gruppe des Propionaldehyds deutet. Er hält daher für das Condensationsproduct von den beiden Formeln $C_4H_3O \cdot CH = CH.CH_2.CH.O$ und $C_4H_3O.CH = C\begin{matrix}\diagup CH_3 \\ \diagdown CH\cdot O\end{matrix}$ die erstere für wahrscheinlicher, während man die zweite anzunehmen hätte, wenn im Sinne der oben in ihrer historischen Entwicklung dargelegten Regel die Condensation stets an der CH_2- (eventuell CH_3-) gruppe erfolgt, die unmittelbar an eine CO-gruppe gebunden ist.

Unsere im Folgenden darzulegende Arbeit ist von den vorstehend besprochenen und gleichzeitig mit der unseren ausgeführten Arbeiten unabhängig und, wie der Leser entnehmen wird, auch unbeeinflusst durchgeführt worden; auch stützen wir uns ausschliesslich auf Thatsachen, die sich im Laufe der Untersuchung ergeben haben. Schon frühzeitig waren wir durch mit relativ kleinen Mengen ausgeführte Vorversuche zu dem damals für uns selbst überraschenden Schluss gekommen, dass die Condensation zwischen zwei Molekülen Propionaldehyd sich in der Eingangs erwähnten Weise vollzieht. Es war uns aber daran gelegen den Vorgang bei der Condensation mit dem möglichst hohen Grad von Sicherheit aufzuklären und auch nach anderen Richtungen hin, in denen sich uns viele Schwierigkeiten entgegenstellten, die Arbeit vor ihrer Veröffentlichung zu einem befriedigenden Abschluss zu bringen.

Gerade durch den Umstand, dass verschiedene Forscher unabhängig von einander und auf ganz verschiedenem Wege zu demselben Condensationsgesetz gelangt sind, dürfte die Glaubwürdigkeit desselben erheblich gewonnen haben. Auch ist unsere Arbeit umsomehr geeignet das Gesetz zu bestätigen und zu verallgemeinern, als wir ausser der Condensation des Propionaldehydes, auch die Condensation eines Gemenges von Propion-

[1] Berl. Ber. (1881) p. 574.

und Acet-aldehyd genau untersucht haben. Wir werden über die dabei erhaltenen Verbindungen in einer nächsten Abhandlung berichten, wollen aber mit Bezug auf das Condensationsgesetz schon hier anführen, dass bei diesem Vorgange der Wasserstoff der mit CO unmittelbar verbundenen CH_2-gruppe des Propionaldehydes mit dem Sauerstoff des Acetaldehydes sich als Wasser abspaltet und durch Äthyliden ersetzt wird.

Die Condensation verläuft also beim Propionaldehyd einerseits, bei einem Gemenge von Acet- und Propionaldehyd anderseits in folgender Weise:

$$\left.\begin{array}{l} CH_3 \\ CH_2 \\ CHO \\ \hline CH_3.CH_2.CHO \end{array}\right\} = \begin{array}{l} CH_3 \\ CH_2 \\ CH \\ CH_3.\overset{\|}{C}.CHO \end{array} + H_2O$$

$$\left.\begin{array}{l} CH_3 \\ CHO \\ \hline CH_3.CH_2.CHO \end{array}\right\} = \begin{array}{l} CH_3 \\ CH \\ CH_3.\overset{\|}{C}.CHO \end{array} + H_2O.$$

Die früher erwähnte Vermuthung Claisen's über Condensation von Aldehyden mit Aldehyden erhält dadurch volle Bestätigung und dürfte danach über den Vorgang bei der von Schmidt beobachteten Condensation von Furfurol mit Propionaldehyd wohl kaum mehr ein Zweifel übrig bleiben.

Darstellung von Propionaldehyd.

Die zu unseren Versuchen erforderlichen ansehnlichen Mengen von Propionaldehyd wurden in folgender Weise dargestellt.

Je 100 Grm. Gährungspropylalkohol wurden in einem mit Eiswasser-Kühler verbundenen Kolben bis nahe zum Sieden erwärmt und dann durch einen mit Hahn versehenen Tropftrichter die zur Oxydation der halben Menge, d. i. von 50 Grm. Propylalkohol erforderliche Menge Chromsäuremischung (82 Grm. Kaliumbichromat und 109 Grm. Schwefelsäure mit so viel Wasser

um einen halben Liter zu geben[1]) allmälig eingetragen. Die einfallenden Tropfen reagiren sehr schnell und unter dem Alkohol sammelt sich nach und nach eine wässerige grüne Schicht an, die an Volum zunimmt, während die obere Schicht durch Abdestilliren von Aldehyd und unverändertem Alkohol fortwährend abnimmt. Bei richtiger Leitung der Operation soll die obere Schicht ganz verschwinden, wenn eben die letzten Tropfen Chromsäuremischung eingeflossen sind. Man setzt dann die Destillation noch fort und verarbeitet das zuerst Übergehende zusammen mit dem schon während der Oxydation erhaltenen Destillat auf Propionaldehyd und Wiedergewinnung von Propylalkohol.

Die später destillirende Partie wird zunächst mit kohlensaurem Baryt digerirt um die Propionsäure in Salz überzuführen und dann einer Reihe successiver Destillationen unterworfen, um den Propylalkohol, den man zuletzt durch Potasche abscheidet, aus der wässerigen Lösung zu gewinnen.

Aus dem früher erwähnten ersten Destillat wird durch wiederholte fractionirte Destillation der Propionaldehyd als flüchtigster Antheil ausgezogen und anderseits aus dem über 86° siedenden Theil durch Behandlung mit Potasche und Destillation der entwässerten alkoholischen Schicht der Propylalkohol zurückgewonnen, der leicht von etwas propionsaurem Propyl getrennt werden kann.

Die Ausbeute an Propionaldehyd, wenn man den zurückgewonnenen Propylalkohol immer wieder oxydirt oder von dem ursprünglich angewandten in Abzug bringt, stellt sich auf 50—60 Procent (statt theoretisch 96·66 Procent) vom Alkohol.

Wir haben beobachtet, dass bei der Destillation unseres Propionaldehydes kleine Mengen stets noch unterhalb des richtigen Siedepunktes übergingen, und zweifeln nicht, dass dies von

---

[1] Bei Bereitung der Chromsäuremischung von der angegebenen Concentration scheidet sich beim Erkalten ein geringer Niederschlag von schwefelsaurem Kali aus, von dem die überstehende Flüssigkeit abgegossen wird. Da der Niederschlag etwas Chromsäure zurückhält, so enthielt die zur Oxydation verwendete Lösung factisch um ein Geringes weniger Chromsäure, als die obigen Zahlen angeben.

etwas Acetaldehyd herkömmt, der einer Verunreinigung des ursprünglichen Propylalkohols mit Äthylalkohol seine Entstehung verdankt.

Condensation des Propionaldehydes zu Methyläthylacroleïn.

Behufs Condensation wurde der Propionaldehyd mit seinem gleichen Volum Natriumacetatlösung[1] (à 46 Procent wasserhaltigem, das ist 27·7 Procent wasserfreiem Salz) in Glasröhren eingeschmolzen und auf 100° erhitzt. Nach 48stündigem Erhitzen schritt die Condensation, der man durch Beobachtung des Gesammtvolums und des Verhältnisses der beiden Schichten folgen konnte, nicht weiter vor, ja schien nicht weiter zuzunehmen, als einzelne Röhren durch weitere 24 Stunden auf 110° erhitzt wurden. Dabei hatte sich der Röhreninhalt kaum gefärbt. Er wurde im Wasserdampfstrom destillirt und dann das im Destillat erhaltene Öl der fractionirten Destillation in einer Kohlensäureatmosphäre unterworfen. Folgende Mengen der einzelnen Producte wurden bei einer unserer Operationen aus 270 Grm. in Arbeit genommenen Propionaldehyds erhalten:

Unveränderter Propionaldehyd (zurückgewonnen) . .	25 Grm.
Fraction (135—140°)	155 „
Fraction (140—150°)	7 „
Mit Wasserdampf destillirtes, über 150° siedendes Öl	24 „
Mit Wasserdampf nicht flüchtiges Öl	8 „

Wie man aus der Zusammenstellung sieht, ist die Menge höherer Condensationsproducte (über 140° siedend) nicht sehr bedeutend, und die Ausbeute an bei 135—140° siedendem Hauptproduct beträgt 155 Grm. aus 245 Grm. Propionaldehyd, das ist 63·3 Procent, während sich theoretisch, wenn die Reaction ausschliesslich nach der Gleichung

$$2\,C_3H_6O = C_6H_{10}O + H_2O$$

verlaufen würde, 84·5 Procent berechnen.

---

[1] Statt Natriumacetat haben wir versuchsweise auch Zinkchlorid oder Seignettesalz in Lösung zur Anwendung gebracht. Die Wirkung ist ähnlich. Ersteres wirkt energischer, letzteres schwächer als Natriumacetat.

Aus den über 140° siedenden Fractionen des mit Wasserdampf destillirten Öles konnte kein Product von constantem Siedepunkt isolirt werden. Der Siedepunkt erhob sich bei der fractionirten Destillation bis gegen 270°. Während die unter 150° übergegangenen Fractionen in Natriumbisulfitlösung löslich waren, war dies bei den darauffolgenden von 150—200° übergehenden Fractionen nicht mehr der Fall.

Was die unter 135° siedenden Fractionen anlangt, so konnte ausser unverändertem Propionaldehyd noch die Gegenwart sehr kleiner Mengen eines bei circa 120° siedenden Körpers mit grosser Wahrscheinlichkeit constatirt werden. Die Analysen desselben entsprachen annähernd der Formel C_5H_8O und wir sind sehr geneigt zu glauben, dass in der That dieser Körper, den wir in einer späteren Abhandlung beschreiben werden, hier vorliegt und durch Condensation von Propionaldehyd mit Acetaldehyd, der in ihm als Verunreinigung in sehr kleiner Menge enthalten ist, gebildet wurde.

Es erübrigt noch zu bemerken, dass die Natriumacetatlösung, die neben dem oben angeführten nicht flüchtigen Öl bei der Destillation mit Wasserdampf zurückblieb, noch einen löslichen Körper in kleiner Menge enthielt, der durch die Eigenschaft ausgezeichnet ist, sich additional mit Brom zu verbinden. Eine ähnliche Beobachtung über Entstehung einer fixen, in Wasser löslichen, mit Brom verbindungsfähigen Substanz haben wir auch bei der Darstellung des Crotonaldehydes nach derselben Methode gemacht.

Das Hauptproduct der Operation findet sich, wie oben constatirt wurde, in dem bei 135—140° siedenden Theil des mit Wasserdampf abdestillirten Öles. Da es sehr leicht sich oxydirt und Säuren bildet, die sich durch blosse Destillation nicht vollständig daraus entfernen lassen, so ist es zweckmässig, es mit Wasser und Marmorstückchen gut durchzuschütteln, dann mit Chlorcalcium zu trocknen und einer sorgfältigen fractionirten Destillation in einer Kohlensäure- oder Wasserstoff-Atmosphäre zu unterwerfen. Beim Trocknen mit Chlorcalcium wird die Substanz trüb und erst nach längerem Stehen klar. Eine andere Eigenthümlichkeit, die wir beobachtet haben, ist die, dass die frisch bereitete Substanz einen Stich ins Gelbliche zeigt, bei

längerem Aufbewahren in hermetisch verschlossenen Gefässen aber von selbst farblos wird.

Die folgenden Analysen zeigen, dass die reine Substanz der Formel $C_6H_{10}O$ entspricht, offenbar also aus 2 C_3H_6O unter Wasserabspaltung hervorgegangen ist.

I. 0·11825 Grm. Substanz gaben bei der Verbrennung 0·318 Grm. CO_2 und 0·10625 Grm. H_2O.

II. 0·3396 Grm. Substanz einer anderen Bereitung gaben 0·9087 Grm. CO_2 und 0·3157 Grm. H_2O.

III. 0·4498 Grm. Substanz gaben 1·2052 Grm. CO_2 und 0·4145 Grm. H_2O.

	Gefunden			Berechnet für $C_6H_{10}O$
	I	II	III	
Kohlenstoff.....	73·34	72·98	73·07	73·47
Wasserstoff.....	9·98	10·33	10·24	10·20
Sauerstoff.....	—	—	—	16·33
				100.00

Das Condensationsproduct $C_6H_{10}O$, das wir mit Rücksicht auf seine im Folgenden festgestellte Constitution als Methyläthylacrolein bezeichnen, ist eine farblose Flüssigkeit von durchdringendem Geruch, ähnlich aber minder stechend als der von Crotonaldehyd, brennt mit russender Flamme und ist in Wasser nahezu unlöslich. Sein specifisches Gewicht wurde zu 0·8577 bei 20° bezogen auf Wasser von gleicher Temperatur gefunden. Für den corrigirten Siedepunkt[1] ergab sich in zwei an verschiedenen Präparaten ausgeführten Bestimmungen, einmal 136°7 bei auf 0° red. Bar. 741·3 Mm. (dabei berücksichtigte Fadencorrection 1°9), — das andere Mal 137°3 bei auf 0° red. Bar. 758·6 Mm. (dabei Fadencorrection 2°1), was befriedigend übereinstimmt.

[1] Unter corrigirtem Siedepunkt ist hier, wie im Folgenden, stets die Angabe eines calibrirten Thermometers verstanden, welche sowohl für den herausragenden Theil des Quecksilberfadens, als auch aus der Calibrationstabelle und endlich für etwa nachträglich eingetretene Verschiebung der Fundamentalpunkte corrigirt worden ist. Für die Abweichung des Barometerstandes von 760 Mm. wurde keinerlei Correction angebracht, sondern der jeweilige Druck stets angegeben.

Beim Stehen an der Luft färbt sich das Methyläthylacroleïn allmälig gelb, nimmt eine dicklichere Consistenz an und zeigt einen veränderten Geruch. Da der Gedanke nahe lag, dass diese Veränderung durch Oxydation bedingt sei, liessen wir etwas davon über Quecksilber aufsteigen und Sauerstoff zutreten; es trat starke Absorption ein und es schied sich ein fester weisser Körper (wohl eine Quecksilberverbindung) an der Wand ab. Wir konnten leicht nachweisen, dass durch Wirkung des aufgenommenen Sauerstoffs Säuren entstanden waren, deren Bariumsalz sich als amorph erwies.

In Natriumbisulfitlösung löst sich das Methyläthylacroleïn unter Erwärmung vollständig auf. Ist die angewandte Bisulfitlösung concentrirt (etwa 1·33 specifisches Gewicht), so erstarrt die Flüssigkeit beim Abkühlen zu einem Brei von Krystallen; aus verdünnter Lösung scheiden sich keine Kystalle ab. Ähnlich wie wir beim Crotonaldehyd beobachtet haben, lässt sich auch dieser Aldehyd durch Sodalösung aus seiner Bisulfitverbindung nicht mehr abscheiden; dagegen scheint die Abscheidung durch Baryt zu gelingen.

Trockenes Chlorwasserstoffgas wird von mit Eis gekühltem Methyläthylacroleïn unter Bräunung absorbirt und zwar genau im Verhältnisse von einem Molekül zu einem Molekül.

I. 1·03 Grm. Substanz wogen nach Sättigung mit HCl 1·47 Grm. (Die Theorie fordert für $C_6H_{10}O.HCl$ 1·414 Grm.)

II. 1·32 Grm. Substanz wogen nach Sättigung mit Chlorwasserstoff und darauffolgendem Durchleiten von trockenem Kohlensäuregas 1·78 Grm. während sich für Bildung einer Verbindung $C_6H_{10}O.HCl$ ein Gewicht von 1·812 Grm. berechnet.

Wir schliessen aus der Übereinstimmung der gefundenen und berechneten Zahlen auf Entstehung einer additionellen Verbindung $C_6H_{10}O.HCl$, die jedoch ausnehmend zersetzlich ist. Schon beim Aufbewahren tritt Schwärzung ein und die Flüssigkeit, aus der früher durch CO_2 das freie HCl-gas verdrängt worden war, raucht dann wieder an der Luft. Auch durch Wasser wird die Verbindung unter Abspaltung von HCl allmälig zersetzt.

Lässt man Brom in Methyläthylacroleïn eintropfen, das durch Eiswasser gekühlt wird, so verschwinden die einfallenden Tropfen unter Zischen. Fährt man fort bis dauernde Bromfärbung

eintritt, so überzeugt man sich, dass gerade 2 Br für ein Molekül Aldehyd verbraucht werden.

I. 0·793 Grm. Substanz wogen nach der Aufnahme von Brom bis zu schwacher Färbung 2·06 Grm., während sich für Überführung von $C_6H_{10}O$ in $C_6H_{10}O.Br_2$ 2·0877 Grm. berechnen.

II. 3·484 Grm. Substanz lieferten 8·824 Grm. Bromadditionsproduct (berechnet 9·172 Grm.)

III. 2·863 Grm. Substanz gaben 7·417 Grm. Bromadditionsproduct (berechnet 7·537 Grm.).

Die Verbindung $C_6H_{10}O.Br_2$ ist, nachdem sie mit verdünnter schwefliger Säure und reinem Wasser gewaschen worden ist, ein farbloses schweres Öl, das in Kältemischung nicht erstarrt, in Wasser fast unlöslich ist und einen zu Thränen reizenden Geruch besitzt. Im trockenen Zustand aufbewahrt beginnt es bald von HBr zu rauchen, färbt sich braun und wird dicklich. Mit überschüssigem Wasser im zugeschmolzenen Rohr auf 100° erhitzt, erleidet es eine tiefgreifende Zersetzung, indem der grösste Theil des Broms als Bromwasserstoff austritt und dunkle harzartige Condensationsproducte entstehen. Auf eine wässerige Lösung von Kaliumbichromat und Schwefelsäure wirkt es schon bei gewöhnlicher Temperatur reducirend ein, indem zugleich Bromwasserstoff austritt.

Mit concentrirter Lösung (à 1·33 specifisches Gewicht) von Natriumbisulfit geschüttelt, löst sich die Verbindung $C_6H_{10}O.Br_2$ unter Erwärmung vollständig auf; nach dem Erkalten erstarrt die Flüssigkeit zu einem dicken Krystallbrei. Dieser wurde mit Hilfe der Pumpe abgesaugt und etwas gewaschen, doch darf das Waschen nicht lang fortgesetzt werden, da leicht Zersetzung eintritt und schwere Öltröpfchen (wohl von $C_6H_{10}O.Br_2$) im Filtrate erscheinen.

Die Krystalle wurden dann noch zwischen Filterpapier vollständig abgepresst und kurze Zeit in den Exsiccator gestellt. Ihre Analyse führte zu folgenden Resultaten, die mit der Formel $C_6H_{10}O.Br_2.SO_3HNa + 3\ H_2O$ übereinstimmen.

I. 0·549 Grm. Substanz nach Carius im zugeschmolzenen Rohr mit Silbernitrat und Salpetersäure zersetzt, lieferten 0·46 Grm. AgBr, ferner 0·312 Grm. $BaSO_4$, endlich für die Natriumbestimmung 0.0935 Grm. Na_2SO_4.

II. 0·4825 Grm. Substanz in einem grossen Kupferschiffchen mit Kaliumbichromat und Bleichromat, ferner mit Anwendung von Bleisuperoxyd verbrannt gaben 0·305 Grm. CO_2 und 0·1715 Grm. H_2O.

III. 0·393 Grm. Substanz behufs Brombestimmung mit Kalk geglüht lieferten 0·353 Grm. AgBr.

Dies entspricht in 100 Theilen:

	Gefunden			Berechnet für
	I	II	III	$C_6H_{10}OBr_2.SO_3HNa+3H_2O$
Kohlenstoff	—	17·24	—	17·31
Wasserstoff	—	3·95	—	4·09
Brom	35·65[1]	—	38·22	38·46
Schwefel	7·80	—	—	7·69
Natrium	5·52	—	—	5·53
Sauerstoff	—	—	—	26·92
				100·00

Die Verbindung lässt sich durch einige Tage unverändert aufbewahren; im Laufe längerer Zeit tritt jedoch Zersetzung ein, das Krystallpulver fängt an zusammenzubacken und nach Schwefeldioxyd zu riechen.

Das Verhalten des Bromadditionsproductes $C_6H_{10}OBr_2$ lässt wohl keinen Zweifel, dass es als Aldehyd (Bibromcapronaldehyd) zu betrachten und aus $C_6H_{10}O$ durch Anlagerung von 2 Br an der Stelle der doppelten Bindung hervorgegangen ist.

Reduction des Methyläthylacroleïns.

Die Reduction hat uns anfangs Schwierigkeiten gemacht. Wir glaubten wenigstens eine dieser Schwierigkeiten, die nämlich in der Unlöslichkeit der Methyläthylacroleïns gelegen ist, durch den Kunstgriff beseitigen zu können, dass wir eine leichtlösliche Verbindung desselben der Wirkung des nascirenden Wasserstoffs darboten. Zu diesem Zwecke haben wir in einer Reihe von Versuchen die in Wasser gelöste Natriumbisulfitverbindung des genannten Aldehyds der Einwirkung von Natriumamalgam und

[1] Die oben angeführte Brombestimmung nach Carius ist offenbar unrichtig, da sie nicht nur mit der Formel, mit der alle übrigen Analysendaten übereinstimmen, nicht stimmt, sondern auch mit der jedenfalls zuverlässigeren Brombestimmung durch Glühen mit Kalk im Widerspruch steht. Die letztere Bestimmung steht mit der Formel in Einklang.

zugleich von Essigsäure, Schwefelsäure oder schwefliger Säure, — ferner von Zinkstaub, — endlich von Aluminiumamalgam unterworfen. Alle diese Versuche scheiterten jedoch an der grossen Stabilität der Bisulfitverbindung, die uns am Beginn der Untersuchung noch nicht bekannt war und führten, übereinstimmend, nur zur Gewinnung salzartiger Verbindungen nicht aber der gesuchten Alkohole.

Auch die Einwirkung von Natriumamalgam auf Methyläthylacrolein, das in concentrirter Essigsäure gelöst war, oder von Aluminiumamalgam auf eine Lösung desselben Körpers in 50procentigem Weingeist, gab uns nicht die gesuchten Alkohole, sondern höher siedende offenbar complicirtere Verbindungen, deren nähere Erforschung vorläufig ausser unserem Plane lag.

Dagegen gelang es uns, das angestrebte Ziel zu erreichen, indem wir eine Lösung von Methyläthylacrolein in 50procentigem Weingeist der Einwirkung von Zinkdrehspänen und Schwefelsäure oder Salzsäure unterwarfen. Als zu denselben Resultaten führend aber noch zweckmässiger hat sich das Verfahren bewährt, das wir für die Reduction des Crotonaldehydes in Anwendung gebracht haben und das in der Einwirkung von Eisenfeile und Essigsäure besteht. Wir werden daher nur dieses letztere Verfahren in der Form, wie wir uns zuletzt desselben bedient haben, hier beschreiben.

Je 25 Grm. Methyläthylacrolein wurden mit 65 Grm. feiner Eisenfeile und 320 Grm. 60procentiger Essigsäure in eine mit eingeschliffenem Glasstöpsel versehene Flasche gebracht und unter zeitweisem Umschütteln durch vier Wochen bei gewöhnlicher Temperatur stehen lassen. Luftzutritt war in dieser Weise ausgeschlossen. Damit aber durch den Druck, der in der Flasche entsteht, der Stöpsel wohl für einen Augenblick gelüpft, nicht aber weggeschleudert werden könne, war ein Bügel aus Blech an der Flaschenmündung in der Weise befestigt, dass dem Stöpsel eine kleine Bewegung nach aufwärts gestattet war, er dann aber durch sein eigenes Gewicht augenblicklich wieder herabsank und die Flasche verschloss.

Nach vier Wochen wurde der Flascheninhalt, der einen grauweissen Brei darstellte mit Wasser verdünnt, wodurch das Ferroacetat in Lösung ging, und destillirt. Das aus zwei Schichten

bestehende Destillat wurde zur Beseitigung der Essigsäure mit überschüssigem kohlensauren Kalk versetzt, durch 24 Stunden unter häufigem Umschütteln stehen lassen, dann noch 2 Stunden am Rückflusskühler gekocht und endlich mit Wasserdampf der Destillation unterworfen. Im Destillat wurde das Öl von der wässerigen Schicht getrennt und durch wiederholte Destillation der letzteren noch der darin gelöste Theil des Öles gewonnen. Das Öl selbst wurde, ohne es zuvor zu trocknen, durch Destillation in drei Hauptfractionen gespalten, deren Mengenverhältniss bei einer mit 155 Grm. $C_6H_{10}O$ in beschriebener Weise durchgeführten Reduction wir hier mittheilen, um einen Begriff von der Ausbeute zu geben. Es wurden erhalten:

25 Grm. bis 144° übergegangenes Destillat,[1]

120 Grm. von 144° bis 160° übergegangene Fraction,

10 Grm. Destillationsrückstand bei 160°.

Nicht nur die erste, sondern auch die zweite Fraction wurde nun, in der Absicht die Aldehyde (das ist unverändertes Methyläthylacrolein und durch Reduction etwa daraus entstandenes Capronaldehyd) von dem alkoholartigen Reductionsproduct zu trennen, mit concentrirter Natriumbisulfitlösung durchgeschüttelt. Die zweite Fraction (144—160) nahm dabei nur wenig an Volum ab, die erste dagegen löste sich unter Erwärmung zum grössten Theile auf und lieferte alsbald einen Krystallbrei, der durch Wasserzusatz wieder in Lösung gebracht wurde. Aus den wässerigen Bisulfitschichten konnte nun der bei der Reduction entstandene Aldehyd, aus den öligen Schichten der zugehörige Alkohol oder vielmehr die Alkohole leicht gewonnen werden.

Capronaldehyd. Da wir bereits festgestellt hatten, dass die Bisulfitverbindung des Methyläthylacroleïns durch Sodalösung nicht zerlegt wird, so bot sich uns in diesem Verhalten ein Mittel dar, um einen eventuell bei der Reduction entstandenen

[1] In einzelnen Reductionsoperationen, namentlich solchen, die in kürzerer Zeit durchgeführt worden sind, haben wir den zwischen 125° und 144° übergegangenen Theil des Destillates, in dem das unveränderte Methyläthylacrolein (das der Reduction entgangen ist) enthalten ist, einer neuerlichen Reduction mit Eisen und Essigsäure unterworfen. Ob dies im einzelnen Falle räthlich ist oder nicht, kann man aus der Grösse der Fraction (125—144°) entnehmen.

gesättigten Aldehyd (Capronaldehyd) vom Methyläthylacrolein, das der Reduction entgangen ist, zu trennen. Wir versetzten daher die aus der I. wie die aus der II. Destillatsfraction erhaltene Bisulfitschichte mit kohlensaurem Natron bis zu schwach alkalischer Reaction und destillirten ab. Aus der Bisulfitschicht der II. Fraction wurde auf diese Weise nur eine Spur eines nach $C_6H_{10}O$ riechenden Öles erhalten; also war überhaupt kein gesättigter Aldehyd in der von 144—160° destillirten Fraction enthalten gewesen, wohl aber ungesättigter Aldehyd, das heisst nicht reducirtes Methyläthylacrolein, das in Form von Bisulfitverbindung in dem Rückstand der Destillation mit Soda aufgefunden werden konnte. Dasselbe gilt auch von dem analogen Destillationsrückstand aus der Bisulfitschicht der I. Fraction, nur wurde hier ausserdem auch ein Destillat erhalten, das aus einem Öl und einer wässerigen Schicht bestand; aus der letzteren konnte durch wiederholte Destillation noch etwas darin gelöstes Öl gewonnen werden. Dies aus der I. Destillatsfraction durch Lösen in Bisulfit und Wiederabscheiden mittelst Soda gewonnene Öl war ohne Zweifel Capronaldehyd. Es ging schon bei der ersten Destillation nach dem Trocknen mit Chlorcalcium vollständig innerhalb 5° über und zeigte nach Ausfractioniren sehr bald einen constanten Siedepunkt. Der corrigirte Siedepunkt wurde bei auf 0° red. Bar. 737 Mm. bei 116° gefunden (dabei berücksichtigte Fadencorrection 1°8), liegt also 12° unter dem des normalen Capronaldehydes (127°9 bei 737·6 Mm.).

Dass Capronaldehyd bei der Reduction des Condensationsproductes $C_6H_{10}O$ auftritt, ist nicht überraschend, nachdem wir Butyraldehyd neben Normalbutylalkohol und Crotonylalkohol als Reductionsproduct des Crotonaldehydes beobachtet haben[1]. Vor allem wichtig schien uns nur Klarheit darüber zu gewinnen, welcher unter den isomeren Capronaldehyden hier vorliegt. Dazu konnte in erster Linie die genaue Bestimmung der Siedepunkte des Aldehydes und einiger seiner nächsten Derivate führen. Wir haben daher den oben erhaltenen Capronaldehyd successive in

[1] Monatshefte für Chemie (1880) p. 824.
Sitzungsber. d. kais. Akad. d. Wiss. (2) 82. p. 966.

Capronsäure und Capronsäureäther übergeführt und deren Siedepunkte ermittelt.

Zur Überführung in Capronsäure wurde der Capronaldehyd mit der berechneten Menge Kaliumbichromat in 8procentiger Lösung und Schwefelsäure bei gewöhnlicher Temperatur unter häufigem Umschütteln in einer Flasche so lange stehen lassen (etwa drei Tage) bis die Lösung eine rein grüne Farbe angenommen hatte. Dann wurde noch Schwefelsäure zugesetzt, bis fast zur Trockne abdestillirt und das Destillat ohne Rücksicht auf das aufschwimmende Öl erst mit Soda übersättigt und dann nochmals der Destillation unterworfen. Auf diese Weise wurde auf Wasser schwimmend im Destillat ein neutrales Öl erhalten, von dem der grösste Theil bei circa 205° siedete und einen schwachen Geruch besass, während ein kleiner Theil, der einen viel stärkeren Geruch zeigte, schon bei niedrigerer Temperatur überging. Das hochsiedende Öl erwies sich als durch Natronlauge unangreifbar und entsprach der Zusammensetzung $(C_6H_{12}O)_n$. Wir haben diesen Körper vorläufig nicht näher untersucht.

Nach Abdestilliren des neutralen Öles wurde das Natriumsalz, welches die bei der Oxydation des Capronaldehydes entstandenen Säuren enthalten musste, mit Schwefelsäure zerlegt und destillirt. Im Destillat wurde die aufschwimmende ölige Schicht von der saueren wässerigen Schicht getrennt und nachgewiesen, dass die erstere aus reiner Capronsäure bestand, während die letztere, welche durch die Methode der fractionirten Sättigung und durch fractionirte Krystallisation der Salze untersucht wurde, auch lediglich nur Capronsäure in Lösung hielt, doch daneben auch sehr kleine Mengen von Essigsäure zu enthalten schien.

Der corrigirte Siedepunkt der Capronsäure wurde unter dem auf 0° reducirten Druck 749·4 Mm. bei 194°1 gefunden, wobei die Correction für den herausragenden Quecksilberfaden 5°1 ausmachte.

Die erhaltene Capronsäure führten wir durch Behandlung mit ihrem halben Gewicht Schwefelsäure und dem gleichen Volum Alkohol in Capronsäureäther über. Der abdestillirte Äther wurde mit alkalischem, dann reinem Wasser gewaschen, mit Chlorcalcium getrocknet und destillirt. Seine Zusammen-

setzung entsprach der Formel $C_2H_5.C_6H_{11}O_2$, wie folgende Analyse zeigt:

0·2506 Grm. Substanz gaben 0·6097 Grm. CO_2 und 0·2546 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_2H_5.C_6H_{11}O_2$
Kohlenstoff	66·35	66·67
Wasserstoff	11·29	11·11
Sauerstoff	—	22·22
		100·00

Der corrigirte Siedepunkt des Capronsäureäthers ergab sich zu 151°8 bei dem auf 0° red. Bar. 743·2 Mm. (dabei berücksichtigte Fadencorrection 3°2). Für das specifische Gewicht wurde 0·8841 bei 0° bezogen auf Wasser von gleicher Temperatur gefunden.

Die Siedepunkte der aus dem Capronaldehyd durch Oxydation erhaltenen Capronsäure, sowie ihres Äthers weichen nicht nur beträchtlich (ähnlich wie der des Aldehydes selbst) von den Siedepunkten der isomeren normalen Verbindungen ab, sondern stimmen sehr annähernd mit den Angaben überein, welche Saytzeff[1] für die Methylpropylessigsäure und deren Äther gemacht hat, so dass man die Identität dieser Verbindungen für äusserst wahrscheinlich halten darf. Um in dieser Beziehung noch weitere Anhaltspunkte zu gewinnen, haben wir den analysirten reinen Capronsäureäther mit Kalkmilch im zugeschmolzenen Rohre verseift und dadurch in capronsauren Kalk übergeführt, während der überschüssige Kalk mittelst Kohlensäure beseitigt wurde. Beim Verdunsten der Calciumsalzlösung im Vacuum über Schwefelsäure bildeten sich Häutchen an der Oberfläche und blieb eine scheinbar amorphe Masse zurück, die jedoch beim Stehen im befeuchteten Zustande, rascher durch Reiben mit einem Glasstabe sich in ein Aggregat mikroskopischer Krystallnadeln und Prismen verwandelte.

Am besten gelingt die Krystallisation, wenn man einen Krystallsplitter des Salzes in die kalt gesättigte Lösung einträgt und diese dann der Verdunstung überlässt.

---

[1] Liebig's Annalen 193. p. 349.

Die Calciumsalzlösung zeigte folgende Reactionen: mit Kupferacetat einen blaugrünen Niederschlag, — mit Bleinitrat einen weissen Niederschlag, — mit Silbernitrat einen weissen flockigen Niederschlag, der mit überschüssigem Wasser gekocht sich ohne Reduction auflöste und beim Erkalten als baumwolleähnlicher Niederschlag (unter dem Mikroskop aus grossen feinen Nadeln zusammengesetzt) herausfiel, — mit Eisensesquichlorid einen fleischfarbigen Niederschlag, der beim Umschütteln zu einem dicken rothen Öl zusammenfloss, — mit Nickelsalz einen geringen hellgrünen Niederschlag, — mit Cobaltsalz einen geringen rosenrothen Niederschlag, — mit Quecksilberchlorid einen geringen gelblichweissen Niederschlag, — mit Zinkacetat einen weissen Niederschlag, der sich klebrig an die Wände absetzte.

Die Analysen des successive in zwei Fractionen auskrystallisirten Calciumsalzes gaben folgende Resultate, welche annähernd der Formel $Ca(C_6H_{11}O_2)_2+5H_2O$ entsprechen.

0·3421 Grm. der zwischen Papier ausgepressten I. Fraction des Calciumcapronates gaben bei der Verbrennung, bei der das Platinschiffchen mit Substanz durch ein Platinblechrohr geschützt war[1], 0·4765 Grm. CO_2, 0·2714 Grm. H_2O und 0·0781 Grm. Asche. Beim heftigen Glühen gab die Asche noch 0·023 Grm. CO_2 ab, die zur obigen CO_2 hinzukommen, während 0·0551 Grm. CaO hinterblieben.

0·4136 Grm. der zwischen Papier ausgepressten II. Fraction desselben Salzes verloren im Vacuum über Schwefelsäure 0·0971 Grm. H_2O, gaben dann bei 100° nichts weiter ab und lieferten bei heftigem Glühen 0·0661 Grm. CaO.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für
	I. Fract.	II. Fract.	$Ca(C_6H_{11}O_2)_2+5H_2O$
C	39·82	—	40·00
H	8·81	—	8·89
Ca	11·50	11·41	11·11
H_2O		23·48	25·00

[1] Bei Elementaranalysen, mit denen eine genaue Aschenbestimmung verbunden werden soll, benützen wir folgende Disposition, die sich als sehr zweckmässig bewährt hat. Nachdem das Platinschiffchen mit der Substanz in einem gut schliessenden Wägeröhrchen gewogen worden ist, wird es in ein aus einem Stück Platinblech geschweisstes Rohr eingesetzt, das etwas

Alkoholische Reductionsproducte. Es wurde schon oben angegeben, in welcher Weise wir nach der Reduction die Aldehyde, nämlich das unverändert gebliebene Methyläthylacroleïn und den Capronaldehyd, von den Reductionsproducten alkoholischer Natur, die lediglich in der von 144° bis 160° übergegangenen Fraction enthalten waren und das Hauptproduct der Reaction darstellten, getrennt haben. Das in Natriumbisulfit unlösliche Öl wurde zunächst mit Natronlauge durch einige Stunden am Rückflusskühler gekocht, wodurch etwa neben Alkoholen darin enthaltene Essigäther verseift und in Alkohole übergeführt werden mussten, darauf mit Wasserdampf destillirt. Nur wenig eines dicken gelben Öles verblieb dabei im Rückstand, während der bei weitem grösste Theil mit den Wasserdämpfen überging und theils als aufschwimmende Schicht von dem wässerigen Destillat abgehoben, theils (der viel kleinere Theil) durch fortgesetzte Destillation aus der wässerigen Schicht, in der es gelöst war, ausgezogen werden konnte. Die ölige Flüssigkeit wurde durch Erhitzen im trockenen Luftstrom getrocknet und ging nun von 144—155°, ja der grösste Theil schon bis 152° vollständig über. Es bestand, wie eine eingehende Unter-

---

länger ist als das Schiffchen und das in das Verbrennungsrohr eingeschoben wird. Theils um das Platinblechrohr zu verstärken, theils um ein Ankleben desselben an das Glasrohr während der Verbrennung möglichst zu verhüten, sind an der unteren Seite desselben äusserlich drei Streifchen aus dickem Platinblech angeschweisst, die gewissermassen als Füsse dienen. Ausserdem ist das Rohr an der einen Mündung mit ein oder zwei angeschweissten soliden Handhaben versehen, welche ein bequemes Herausziehen mit Hilfe eines Kupferdrahtes nach beendeter Verbrennung ermöglichen. Man zieht es erst heraus, nachdem es im trockenen Luftstrom vollständig erkaltet ist, bringt das Schiffchen in das Wägeröhrchen und erfährt so das Gewicht der bei der Verbrennung hinterbliebenen Asche, ohne eine Verunreinigung mit Kupferoxyd besorgen zu müssen, das sonst so leicht in das Schiffchen fällt und die Aschenbestimmung werthlos macht.

Bei den zahlreichen Calciumsalzanalysen, die wir im Verlauf unserer Arbeit ausgeführt haben, z. B. auch im obigen Falle, haben wir das gewogene Schiffchen mit seinem Ascheninhalt noch vor dem Gebläse bis zu constantem Gewicht heftig geglüht und wieder gewogen. Der Gewichtsverlust stellt die Kohlensäure dar, die selbst nach beendeter Verbrennung noch vom Kalk zurückgehalten worden ist, während die zuletzt hinterbliebene Asche aus kohlensäurefreiem reinen Kalk besteht.

suchung zeigte, aus einem Gemisch von gesättigtem Alkohol $C_6H_{14}O$ und ungesättigtem Alkohol $C_6H_{12}O$, ganz analog wie wir Normalbutylalkohol und Crotonylalkohol als Reductionsproducte von Crotonaldehyd beobachtet haben. Als Beleg theilen wir eine der von uns ausgeführten Analysen des sorgfältig ausfractionirten und mittelst Natrium getrockneten alkoholischen Productes mit.

0·2145 Grm. eines bei 149—150° siedenden Productes gaben 0·5585 Grm. CO_2 und 0·2495 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_{14}O$	Berechnet für $C_6H_{12}O$
C	71·01	70·59	72·00
H	12·92	13·72	12·00
O	—	15·69	16·00
		100·00	100·00

Wie beim alkoholischen Reductionsproduct des Crotonaldehydes stellte sich auch hier heraus, dass die höher siedenden Fractionen des Alkoholgemenges mehr Brom zu addiren fähig waren als die niedriger siedenden, dass also der ungesättigte Alkohol einen etwas höheren Siedepunkt haben muss, als der gesättigte. So wenig eine Trennung der beiden Alkohole durch Destillation zu erreichen ist, so lässt sich auf diese Weise doch eine Spaltung in ein an $C_6H_{12}O$ reicheres und ein daran ärmeres Gemenge herbeiführen. Da ausserdem das Verhältniss von gesättigtem zu ungesättigtem Alkohol in den Producten verschiedener Reductionsoperationen nicht immer das gleiche ist, so haben wir Alkoholgemenge in Händen gehabt, deren Gehalt an $C_6H_{12}O$ (aus der Menge aufgenommenen Broms nach der Voraussetzung, dass $C_6H_{12}O$ je 2 Br addirt, berechnet) von 30 bis zu 66 Procent variirte.

Wir haben versucht, die beiden Alkohole in der Weise zu trennen, dass wir Brom bis zur eintretenden Färbung eintropfen liessen, wodurch die Flüssigkeit etwas dicklich wird und einen gewürzhaften an Campher erinnernden Geruch annimmt, und dann den gesättigten Alkohol von dem entstandenen Bromür abdestillirten. Allein nicht nur bei gewöhnlichem Druck, sondern selbst beim Destilliren im Vacuum trat unter Schwärzung und H Br-Entwicklung Zersetzung des Bromürs ein, so dass wir bei

diesem Verfahren zwar den gesättigten Alkohol gewinnen konnten, den ungesättigten aber verloren.

Wir begnügten uns daher vorerst den ungesättigten Alkohol, statt ihn als solchen abzuscheiden, vielmehr in ein Hexenylglycerin überzuführen, den gesättigten (Hexyl-) Alkohol davon zu trennen und die Constitution des letzteren zu erforschen. Zu diesem Zwecke versetzten wir das Gemenge der beiden Alkohole mit der 30-fachen Menge Wasser, worin es sich nur wenig löst, liessen Brom bis zur eintretenden Färbung eintropfen und kochten am Rückflusskühler durch etwa 12 St. Wir destillirten dann etwa $^2/_3$ ab, wobei eine gelbe wässerige Flüssigkeit, die Bromwasserstoff und das neu entstandene Glycerin in Lösung hielt, nebst dicken harzartigen Substanzen im Rückstand blieb, während zugleich mit Wasser ein Öl destillirte, das leicht abgehoben werden konnte. Aus dem wässerigen Destillate konnte durch wiederholtes Destilliren noch eine kleine Menge darin gelösten Öles gewonnen werden.

Wir kommen auf das in dieser Reaction entstandene Glycerin später zurück und wollen hier nur erwähnen, dass seine Menge weit geringer war, als sich aus der Menge vorhandenen ungesättigten Alkohols $C_6H_{12}O$ im Sinne der Gleichung

$$C_6H_{11}\cdot OH\cdot Br_2 + 2\ H_2O = C_6H_{11}(OH)_3 + 2\ H\ Br$$

berechnet. In der That erleidet ein bedeutender Theil des Bromürs eine andere Art der Zerlegung, worauf nicht nur die oben erwähnten harzartigen Substanzen, die neben Glycerin im Rückstand bleiben, zurückzuführen sind, sondern wodurch auch mindestens zwei mit Wasserdampf flüchtige Substanzen gebildet werden, die neben dem gesättigten Alkohol $C_6H_{14}O$ in dem abdestillirten Öl enthalten sind. Unterwirft man nämlich dieses der fractionirten Destillation, so gelingt es, dasselbe in drei Substanzen zu zerlegen, die sich freilich auf diese Weise nicht ganz scharf von einander trennen lassen.

Die flüchtigste Fraction, die von 135° bis 140° übergeht, besteht zum grossen Theile aus einem aldehydartigen, Silberoxyd reducirenden Körper, der den eigenthümlichen Geruch des Methyläthylacroleïns zeigt, sich in Natriumbisulfit löst und damit eine krystallinische Verbindung liefert. Da zu der Übereinstimmung des Geruches und Siedepunktes auch noch die

weitere Eigenschaft kommt, dass die Bisulfitverbindung dieses Aldehyds durch Kochen mit Sodalösung nicht zerlegt wird, so halten wir es für sehr wahrscheinlich, dass dieser Körper in der That nichts anderes als Methyläthylacroleïn ist, das aus dem Bromür beim Kochen mit Wasser durch Abspaltung von 2HBr hervorgeht[1]:

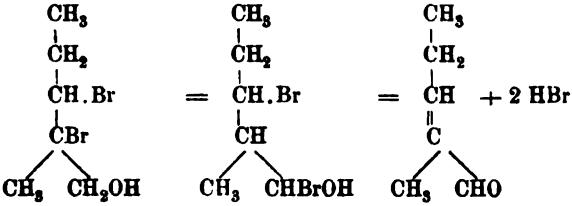
$$C_6H_{12}O.Br_2 = C_6H_{10}O + 2HBr$$

An das Methyläthylacroleïn schliesst sich bei der Destillation des mit Wasserdampf übergegangenen Öles als nächste von 140° bis 150° siedende Fraction der gesättigte Alkohol $C_6H_{14}O$, der die Hauptmenge des gesammten Öles ausmacht, — endlich eine noch erheblich höher siedende Fraction, die wir bisher nicht näher untersucht haben.

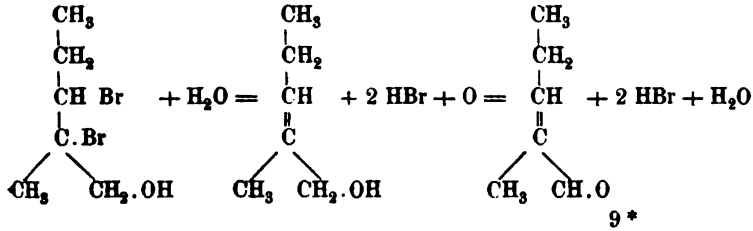
Was den Hexylalkohol anlangt, der, wenn auch seine Ausbeute in verschiedenen Reductionsoperationen Schwankungen unterliegt, doch stets eines der Hauptproducte der Reduction des $C_6H_{10}O$ ausmacht, so gelingt es leicht, ihn aus dem vom Glycerin abdestillirten Öl rein zu erhalten. Nicht nur die Fraction (140—150), sondern auch die beiderseits angrenzenden Fractionen werden mit Natriumbisulfit geschüttelt, wodurch sie vom begleitenden Methyläthylacroleïn befreit werden und zugleich ihre

---

[1] Man kann sich den Verlauf dieser Reaction vielleicht in folgender Weise denken:



Noch einfacher ist vielleicht die folgende Deutung, welche einem bei der Einwirkung von Wasser auf das später zu beschreibende Bibromür der Methyläthylacrylsäure beobachteten Hergang analog ist:



gelbliche Färbung verlieren. Der rohe Hexylalkohol wird dann mit Wasser gewaschen, mittelst geglühter Potasche, später mittelst Kalk, zuletzt durch wiederholtes Destilliren über Natrium vollständig getrocknet und durch Ausfractioniren gereinigt. Seine Zusammensetzung wurde der Formel $C_6H_{14}O$ entsprechend gefunden.

I. 0·3133 Grm. Substz. gaben 0·8078 Grm. CO_2 und 0·3835 Grm. H_2O.
II. 0·2441 Grm., von einer anderen Reductionsoperation stammend, gaben 0·6297 Grm., CO_2 und 0·3016 Grm. H_2O.

	Gefunden		Berechnet für
	I.	II.	$C_6H_{14}O$
C.....	70·32	70·35	70·59
H.....	13·60	13·73	13·72
O.....	—	—	15·79
			100·00

Der corrigirte Siedepunkt dieses Hexylalkohols wurde bei dem Product einer Bereitung zu 146°6 unter dem auf 0° red. Druck 737·7 Mm. (dabei berücksichtigte Fadencorrection 2°25), bei dem Product einer anderen Bereitung zu 146°9 bei auf 0° red. Bar. 735·8 Mm. (dabei berücksichtigte Fadencorrection 2°35) gefunden. Die Bestimmung des specifischen Gewichtes ergab bei dem ersten Product 0,8396 bei 0° und 0·8244 bei 23°7, bei dem zweiten 0·8375 bei 0° und 0·8257 bei 17°6, stets bezogen auf Wasser von den gleichen Temperaturen. Trotz der stimmenden Analysen und der Constanz des Siedepunktes erwecken diese Bestimmungen des specifischen Gewichtes den Verdacht, dass der untersuchte Hexylalkohol nicht vollkommen rein war und zwar nicht nur desshalb, weil die Beobachtungen an zwei verschiedenen Präparaten nicht genau unter einander übereinstimmen, sondern auch aus dem Grunde, weil sie ein höheres specifisches Gewicht als das des um 10° höher siedenden normalen Hexylalkoholes ergeben haben. Nach den zahlreichen Beobachtungen des Einen von uns kommen aber den normalen Alkoholen unter sämmtlichen isomeren die relativ höchsten Siedepunkte und relativ höchsten specifischen Gewichte zu, wobei allerdings zu bemerken ist, dass diese Regel in Bezug auf die

specifischen Gewichte, für welche ein viel weniger zuverlässiges Beobachtungsmaterial vorliegt, nicht so sicher feststeht, als für die Siedepunkte.

Im Laurent'schen Polarisationsapparat mit Hilfe einer 20 Ctm. langen Röhre geprüft, erwies sich der untersuchte Hexylalkohol als optisch inactiv.

Obgleich man von vornherein für sehr wahrscheinlich halten durfte, dass dieser Hexylalkohol dem oben untersuchten Capronaldehyd entspricht, der zugleich mit ihm bei der Reduction des $C_6H_{10}O$ entsteht, dass er also ein primärer Alkohol sein und bei seiner Oxydation dieselbe Capronsäure liefern wird, wie der Aldehyd, so erschien es uns doch geboten, diese für die Charakteristik des Alkohols wesentlichen Beziehungen experimentell festzustellen. Für den gleichen Zweck der Charakteristik schien auch die Darstellung einiger anderer Derivate wünschenswerth. Wir haben das Acetat und das Bromür dargestellt.

Das Hexylacetat wurde durch Erhitzen des Alkohols mit überschüssigem Essigsäureanhydrid in zugeschmolzenen Röhren (auf 110° durch 12 St.) bereitet. Es wurde mit Wasser, dann Sodalösung, dann wieder mit Wasser gewaschen, mit Chlorcalcium getrocknet und zeigte bei der Destillation alsbald einen constanten Siedepunkt. Die Analyse führte zur Formel $C_6H_{13}.C_2H_3O_2$.

0·2243 Grm. Sbstz. gaben 0·5463 Grm. CO_2 und 0·228 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_{13}.C_2H_3O_2$
C.....	66·42	66·67
H.	11·29	11·11
O.....	—	22·22
		100·00

Die Bestimmung des corrigirten Siedepunktes ergab 162°2 bei dem auf 0° red. Bar. 746·3 Mm. (dabei berücksichtigte Fadencorrection 3°2).

Für das specifische Gewicht, bei 25° bezogen auf Wasser von gleicher Temperatur wurde 0·8717 gefunden.

Hexylbromür wurde aus dem Alkohol durch Erhitzen mit bei 0° gesättigter Bromwasserstoffsäure im zugeschmolzenen

Rohr erst auf 100°, dann auf 150° dargestellt, wobei der anfangs homogene Röhreninhalt sich in zwei Schichten theilte. Die obere ölige Schicht wurde mit alkalischem, dann reinem Wasser gewaschen, mit Chlorcalcium getrocknet und dann destillirt, wobei jedoch eine, wenn auch nur geringfügige, Zersetzung unter Abgabe von HBr eintrat. Vielleicht aus diesem Grunde, vielleicht weil möglicherweise kleine Mengen eines isomeren Hexylbromürs zugleich entstanden sind, konnte ein constanter Siedepunkt nicht beobachtet werden. Der corrigirte Siedepunkt wurde unter dem auf 0° red. Druck 748·3 Mm. bei 142—145° gefunden (berücksichtigte Fadencorrection 2°2). Die Zusammensetzung entsprach $C_6H_{13}Br$.

0·352 Grm. gaben 0·559 Grm. CO_2 und 0·2518 Grm. H_2O.
0·2318 Grm. gaben bei der Bestimmung nach Carius 0·263 Grm. AgBr

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_{13}Br$
C.....	43·31	43·63
H.....	7·95	7·88
Br.....	48·27	48·49
	99·53	100·00

Wir versuchten durch Erhitzen mit der 30-fachen Menge Wasser in zugeschmolzenen Röhren das Bromür in Hexylalkohol zurückzuverwandeln. Eine Temperatur von 100° erwies sich dazu als unzureichend und mussten wir durch 30 Stunden auf 150° erhitzen. Dabei bildete sich, wie vorauszusehen war, ziemlich viel Hexylen. Auffallend war jedoch, dass bei der Destillation des getrockneten Productes der Siedepunkt nicht über 138° (uncorr.) stieg, so dass der Gedanke nahe gelegt wird, es sei an Stelle des bei 147° siedenden Hexylalkohols, der als Ausgangspunkt gedient hatte, durch die beschriebene Reaction ein isomerer, niedriger siedender (vielleicht ein tertiärer) Alkohol erhalten worden. Wir beabsichtigen auf die genauere Untersuchung dieser Reaction noch zurückzukommen.

Oxydation des Hexylalkohols. Dieselbe wurde durch Kochen am Rückflusskühler mit der berechneten Menge einer Kaliumbichromatmischung (in einer Operation wurden auf 8·4 Grm. Hexylalkohol 16·1 Grm. Bichromat, 22·6 Grm. Schwefel-

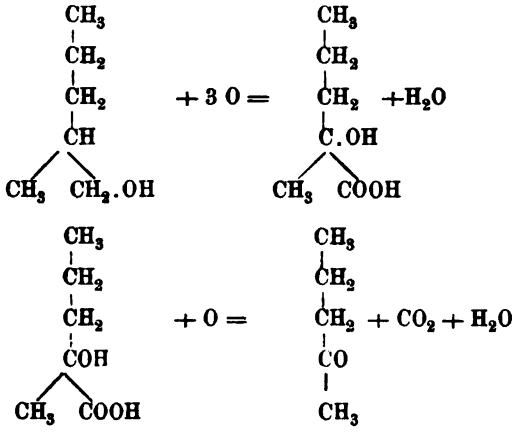
säure und 160 Cc. Wasser angewendet) vorgenommen und vollzog sich ziemlich rasch unter Entwicklung von etwas Kohlensäure. Die weitere Untersuchung wurde in der früher bei Oxydation des Capronaldehydes beschriebenen Weise durchgeführt und lieferte auch anscheinend ganz dieselben Resultate, nämlich einerseits einen neutralen Körper, anderseits Capronsäure.

Der neutrale Körper zeigte einen ziemlich starken ketonartigen Geruch, ähnlich wie ihn der flüchtigere Theil des analogen bei Oxydation des Capronaldehyds erhaltenen Öles gezeigt hatte. Er wurde daher zunächst mit Natriumbisulfit geschüttelt, wodurch unter merklicher Erwärmung eine Volumabnahme eintrat. Die wässerige Schicht schied beim Erkalten schöne Prismen und Blätter ab und lieferte mit Soda destillirt ein leichtes Öl, das den Geruch des Methylpropylketons $CH_3 . CO . C_3H_7$ zeigte und von dem wir um so weniger zweifeln, dass es wirklich Methylpropylketon ist, als wir einerseits dasselbe Keton unter den Oxydationsproducten des Methyläthylacroleïns (s. später) nachgewiesen haben, und als anderseits Krämer durch Oxydation des dem obigen Hexylalkohol ähnlich constituirten Isobutylalkohols Aceton neben Isobutyraldehyd erhalten hat.[1]

Das vom Natriumbisulfit ungelöste Öl wurde mit Wasser gewaschen, mit Chlorcalcium getrocknet und zeigte bei der

---

[1] Man kann sich die Entstehung des Methylpropylketons durch Oxydation des obigen Hexylalkohols etwa in folgender Weise vorstellen:



Destillation alsbald einen constanten Siedepunkt. Es besass nur einen schwachen Geruch. Die Analyse ergab:

0·2496 Grm. gaben 0·661 CO_2 u. 0·2716 H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_{12}O$
C.....	72·22	72
H.....	12·09	12
O.....	—	16
		100

Dampfdichte nach Hofmann im Anilindampf.

	I.	II.
Gewicht der Substanz.....	0·0615 Gr.	0·0654 Gr.
Volum des Dampfes	133·09 Cc.	135·55 Cc.
Auf 0° red. Barometer	747·5 Mm.	745·44 Mm.
Auf 0° red. Quecksilbersäule .	669·8 Mm.	664·55 Mm.
Gefundene Dampfdichte	6·813	6·891
Molekulargewicht.....	196·68	199

Für $C_{12}H_{24}O_2$ berechnetes Molekulargewicht = 200
„ $C_{12}H_{24}O_2$ berechnete Dampfdichte = 6·928

Aus Analyse und Dampfdichte ergibt sich die Formel $C_{12}H_{24}O_2$.

Der corrigirte Siedepunkt wurde bei 223°5 bei auf 0° red. Bar. 744·5 Mm. (dabei berücksichtigte Fadencorrection 6°8) gefunden.

Es lag nahe, diesen Körper als Hexylcapronat anzusehen, dessen Bildung bei der Oxydation des Hexylalkohols leicht verständlich ist. Zu unserer Verwunderung trat jedoch beim Erhitzen mit Kalkmilch im zugeschmolzenen Rohr auf 120° keine Verseifung ein. Die Substanz blieb unverändert und in der Kalkmilch gelang es nur sehr geringe Mengen capronsauren Kalk nachzuweisen, die möglicherweise einer kleinen Verunreinigung der Substanz mit Capronsäure ihre Entstehung verdanken konnten. Gleichwohl ist dieser Körper nichts anderes als Hexylcapronat, denn es gelang uns, ihn durch Erhitzen mit gesättigter Bromwasserstoffsäure auf 130° im zugeschmolzenen Rohr in Hexylbromür und Capronsäure überzuführen.

Das auf der Bromwasserstoffsäure schwimmende Öl wurde mit Sodalösung, wodurch es beträchtlich an Volum abnahm, dann mit Wasser gewaschen, mit Chlorcalcium getrocknet und destillirt.

0·1815 Grm. dieses Destillates mit Kalk geglüht lieferten 0·2098 Grm. Ag Br, enthalten also 49·19 Procent Brom. Die Theorie verlangt für $C_6H_{13}Br$, 48·49 Procent Brom.

Das analysirte Bromür war schwerer als Wasser. Es zeigte keinen constanten Siedepunkt, vielmehr erhob sich derselbe allmälig von 125° bis gegen 145°. Wir vermuthen daher, dass es aus einem Gemenge von zwei isomeren Bromüren, dem primären, das dem Hexylalkohol entspricht, und einem durch Umlagerung daraus entstandenen tertiären Bromür besteht.

Die gleichzeitig mit dem Bromür entstandene Capronsäure wurde aus der Sodalösung nach Zusatz von Phosphorsäure abdestillirt und in Silbersalz verwandelt. Die Silberbestimmung zeigte, dass es capronsaures Silber war.

0·239 Grm. des im Vacuum getrockneten Salzes lieferten 0·1156 Grm. Ag, also 48·37 Procent. — Ag $C_6H_{11}O_2$ enthält 48·43 Procent Ag.

Die ölige Capronsäure, welche neben Hexylcapronat und Methylpropylketon durch Oxydation des Hexylalkohols erhalten worden und deren Ausbeute nicht sehr gut war, stimmte bei der Analyse, nachdem sie durch Kochen getrocknet worden war, für die zu erwartende Formel $C_6H_{12}O_2$.

0·1875 Grm. gaben 0·4234 CO_2 und 0·175 H_2O

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_{12}O_2$
C.....	61·59	62·07
H.....	10·37	10·34
O.....	—	27·59
		100·00

Für den corrigirten Siedepunkt bei auf 0° red. Bar. 752·8 Mm. wurde 195°4 (dabei berücksichtigte Fadencorrection 5°) gefunden.

Wenngleich dieser Siedepunkt um circa 1° höher liegt, als der früher für die Säure aus Capronaldehyd beobachtete, so kann man doch an der Identität der aus Hexylalkohol und anderseits aus Capronaldehyd durch Oxydation erhaltenen Capronsäuren

nicht zweifeln und ebensowenig in Zweifel ziehen, dass die bei der Reduction des Methyläthylacroleïns zugleich und nebeneinander entstehenden Aldehyd und Alkohol einander entsprechen.

Die Capronsäure wurde durch Digestion mit kohlensaurem Kalk und Wasser in Calciumsalz verwandelt, das sich ganz ebenso verhielt wie das früher beschriebene, welches mittelst Capronaldehyd bereitet worden war. Wir beobachteten noch die Eigenthümlichkeit, dass die kalt gesättigte Lösung beim Erhitzen Salz in Form einer klebrigen Haut abscheidet, welche beim Erkalten sich wieder löst, ferner dass der capronsaure Kalk sehr leicht übersättigte Lösungen bildet, die dann durch Eintragen eines Krystallsplitters zu einem Brei von verfilzten kleinen Krystallnädelchen erstarren.

Die Analyse eines gut krystallisirten Salzes I, dass durch allmälige Verdunstung einer Lösung über Schwefelsäure bei Gegenwart eines Krystalles, erhalten worden war, stimmte annähernd mit der Formel $Ca(C_6H_{11}O_2)_2 + 4H_2O$ überein.

I. 0·3616 Grm. des zwischen Filterpapier ausgepressten Salzes verloren im Vacuum über Schwefelsäure 0·0788 H_2O, erlitten darauf bei 100° keinen Gewichtsverlust mehr und hinterliessen beim heftigen Glühen 0·0584 Grm. CaO.

II. 0·1802 Grm. eines aus übersättigter Lösung angeschossenen, zwischen Papier ausgepressten Salzes gaben bei der Verbrennung 0·2645 Grm. CO_2 und 0·1465 Grm. H_2O ferner 0·0488 Grm. Asche. Die Asche gab beim nachträglichen heftigen Glühen noch 0·019 Grm. CO_2 ab und hinterliess 0·0298 Grm. CaO.

III. 0·2724 Grm. abgepresstes Salz verloren bei 100° 0·0568 Grm. H_2O und hinterliessen bei heftigem Glühen 0·0453 Grm. CaO.

In 100 Theilen:

	Gefunden			Berechnet für
	I.	II.	III.	$Ca(C_6H_{11}O_2)_2 + 4H_2O$
C.....	—	42·91	—	42·11
H.....	—	9·03	—	8·77
Ca	11·54	11·81	11.88	11·70
H_2O	21·79	—	20.85	21·05

Das Salz II wurde noch aus Alkohol umkrystallisirt und zeigte dann die Zusammensetzung $Ca(C_6H_{11}O_2)_2 + H_2O$, wie aus folgender Analyse zu ersehen ist:

0·2649 Grm. des zwischen Papier ausgepressten Salzes gaben bei der Verbrennung 0·4594 CO_2 und 0·199 H_2O, ferner 0,0766 Grm. Asche, welche

beim nachträglichen heftigen Glühen 0·0258 CO_2 abgab und 0·0508 Grm. CaO zurückliess.

	Gefunden	Berechnet für $Ca(C_6H_{11}O_2)_2 + H_2O$
C.....	49·95	50·00
H.....	8·35	8·33
O.....	—	27·78
Ca.....	13·70	13·89
		100·00

Die Zusammensetzung des vorstehenden aus Alkohol krystallisirten Salzes stimmt mit derjenigen überein, die Saytzeff[1] für ein aus Wasser krystallisirtes Calciumsalz seiner Methylpropylessigsäure angegeben hat, während wir für das aus Wasser krystallisirte Calciumsalz der durch Oxydation unseres Hexylalkohols bereiteten Säure $Ca(C_6H_{11}O_2)_2 + 4H_2O$ und für das Salz der aus unserem Capronaldehyd dargestellten Säure die Zusammensetzung $Ca(C_6H_{11}O_2)_2 + 5H_2O$ gefunden haben.

Trotz dieser mangelnden Übereinstimmung, aus der wir nur den Schluss ziehen möchten, dass der Wassergehalt des in Rede stehenden Calciumcapronates ein wechselnder sein kann und schon durch geringfügige Umstände beeinflusst wird, halten wir es für unzweifelhaft, dass nicht nur die oben aus Capronaldehyd und anderseits aus Hexylalkohol erhaltenen Capronsäuren untereinander identisch, sondern dass sie auch identisch mit Saytzeff's Methylpropylessigsäure sind. Zunächst ist die nahe Übereinstimmung der von uns und anderseits von Saytzeff an der freien Capronsäure und deren Äther beobachteten Siedepunkte für diesen Schluss massgebend. Von den bisher bekannten isomeren Capronsäuren wäre eine Verwechslung höchstens mit Diäthylessigsäure möglich, die sich ihren Eigenschaften nach kaum von Methylpropylessigsäure unterscheiden lässt. Allein dann wäre man gezwungen den Hexylalkohol, durch dessen Oxydation die Capronsäure erhalten wurde, als Diäthyläthol (Diäthylcarbincarbinol) zu betrachten, was sich mit der Constitution des aus zwei Molekülen Propionaldehyd hervorgehenden Condensationsproductes $C_6H_{10}O$ (Methyläthylacrolein), durch dessen

[1] Journal f. pract. Chemie N. F. 23. p. 293.

Reduction der gesättigte Hexylalkohol bereitet wurde, nicht vereinbaren lässt. In der That würden von den für das Condensationsproduct $C_6H_{10}O$ Eingangs entwickelten Formeln höchstens VII und VIII die Bildung eines Diäthyläthols durch Reduction als möglich erscheinen lassen; allein gerade diese Formeln sind nicht nur durch das später folgende Studium der Oxydation, sondern durch das gesammte Verhalten des Körpers $C_6H_{10}O$, der entschieden kein Keton, sondern ein Aldehyd ist, mit Brom ein Additionsproduct liefert, das auch noch die Eigenschaften eines Aldehydes zeigt, u. s. w., mit Sicherheit ausgeschlossen.

Es darf ferner als feststehend angenommen werden, dass der hier beschriebene Hexylalkohol nicht der normale primäre ist, den man erwarten müsste, wenn das der Reduction unterworfene Condensationsproduct $C_6H_{10}O$ den Formeln I oder II entspräche, und ebensowenig kann er der secundäre Hexylalkohol (Äthylpropylcarbinol) sein, der der Formel V des Condensationsproductes entspricht.

Aus den bisher mitgetheilten Beobachtungen über das Condensationsproduct $C_6H_{10}O$ und namentlich über die bei der Reduction desselben erhaltenen Körper ergeben sich daher folgende Schlüsse:

Der bei der Reduction erhaltene gesättigte primäre Hexylalkohol ist der bisher unbekannte Methylpropyläthol (Methylpropylcarbin-carbinol), der gleichzeitig entstehende Capronaldehyd ist Methylpropyl-acetaldehyd und die aus dem Alkohol wie aus dem Aldehyd durch Oxydation bereitete Capronsäure ist Methylpropylessigsäure.

Für das durch Condensation von zwei Molekülen Propionaldehyd entstehende aldehydartige Product $C_6H_{10}O$ sind von den acht Eingangs angegebenen möglichen Formeln fünf (nämlich I, II, V, VII u. VIII) mit Sicherheit ausgeschlossen. Von den drei übrigen (nämlich III, IV u. VI) muss VI als sehr unwahrscheinlich bezeichnet werden, da sie von der Brom- wie auch von der Wasserstoffaddition keine befriedigende Rechenschaft gibt.

Hexenylglycerin.

In dem vorstehenden Capitel ist dargelegt worden, dass durch Reduction des Condensationsproductes $C_6H_{10}O$, abgesehen vom Capronaldehyd, ein zwischen 144° und 152° siedendes Gemenge von gesättigtem Hexylalkohol $C_6H_{14}O$ und ungesättigtem Alkohol $C_6H_{12}O$ erhalten wird, welches nach Bromirung und Kochen mit Wasser, neben anderen bereits beschriebenen Producten, Hexenylglycerin liefert. Auch wurde dort schon hervorgehoben, dass die Reaction zwischen Wasser und dem Bromür $C_6H_{11}.OH.Br_2$ nicht bloss im Sinne der Glycerinbildung verläuft und dass aus diesem Grunde die Ausbeute an Glycerin beträchtlich hinter der theoretisch zu erwartenden zurückbleibt.

Zur Gewinnung des Glycerins wird die viel Bromwasserstoff enthaltende wässerige Lösung desselben, die man nach dem obigen Verfahren erhält, von dem begleitenden Harz abfiltrirt, mit Bleioxyd gekocht und abgedampft, der wässerige Auszug filtrirt und wieder eingedampft, endlich der Rückstand mit Alkohol ausgezogen. Der alkoholische Auszug enthält ausser dem Glycerin immer noch etwas Bleioxyd und Bromblei; er wird abgedampft und nach Lösen des Rückstandes in Wasser mit Schwefelwasserstoff behandelt. Das Filtrat vom Schwefelblei wird aufgekocht und zur Beseitigung von etwas Bromwasserstoff mit essigsaurem Silber versetzt, darauf nach Abfiltriren des Bromsilbers mit Schwefelwasserstoff wieder entsilbert. Die vom Schwefelsilber abfiltrirte Lösung hinterlässt beim Abdampfen auf dem Wasserbade das Hexenylglycerin als eine sehr dicke bräunliche Flüssigkeit von bitterlich süssem Geschmack.

Statt das so erhaltene Glycerin durch Destillation im Vacuum vollständig zu reinigen, haben wir es vorgezogen, es zunächst zur Darstellung von reinem Triacetin zu benützen.

Zu diesem Zwecke wurde das Glycerin im Vacuum getrocknet und dann mit überschüssigem Essigsäureanhydrid in zugeschmolzenen Röhren durch 24 Stunden auf 150° erhitzt. Der Röhreninhalt mit Wasser versetzt, schied ein schwereres Öl aus, das nach wiederholtem Waschen mit Wasser, mit Chlorcalcium getrocknet und dann im Vacuum destillirt wurde.

Das so bereitete Hexenyltriacetin ist eine farblose dickliche Flüssigkeit von schwachem Geruch und aromatischem bitterem Geschmack, schwerer als Wasser und nicht damit mischbar. Seine Zusammensetzung entsprechend $C_6H_{11}(C_2H_3O_2)_3$ ergibt sich aus den folgenden Analysen:

2·5958 Grm. Substanz wurden mit 150 ccm. titrirtem Barytwasser (fähig 3·25726 Grm. Essigsäure zu neutralisiren) in einem silbernen Kolben durch 16 Stunden am Rückflusskühler gekocht. Die von der Substanz bei der Verseifung abgegebene Menge Essigsäure wurde nun in doppelter Weise bestimmt, indem einerseits die Menge des frei gebliebenen, anderseits des an Essigsäure gebundenen Baryts ermittelt wurde. Zu diesem Zweck wurde Kohlensäure eingeleitet, die gelöste Kohlensäure durch Kochen ausgetrieben, der gefällte $BaCO_3$ abfiltrirt, gewaschen und gewogen = 2·3977 Grm. Dem entspricht 1·46053 Grm. Essigsäure. Demnach hat die Substanz 1·79673 Grm. Essigsäure an den Baryt abgegeben, das heisst 69·22 Procent Essigsäure geliefert.

Anderseits wurde in dem Filtrat vom $BaCO_3$ das Barium durch Schwefelsäure ausgefällt. $BaSO_4$ = 3·4555 Grm. entsprechend 1·77966 Grm. Essigsäure. Daraus berechnet man, dass die Substanz 68·56 Procent Essigsaure abgegeben hat.

Aus der Formel des Triacetins berechnet man 69·23 Procent Essigsäure.

Die Verbrennung gab folgende Resultate:

0·21 Grm. Triacetin lieferten 0.4227 CO_2 und 0·1464 H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_{11}(C_2H_3O_2)_3$
C.....	54·90	55·38
H.....	7·74	7·69
O.....	—	36.93
		100·00

Der für den herausragenden Quecksilberfaden corrigirte Siedepunkt des Hexenyltriacetins wurde an einem nicht calibrirten Thermometer unter 21 Mm. Druck bei 153°8—155°8, dagegen unter gewöhnlichem Druck (745·6 Mm.) bei circa 270° gefunden. Die Destillation unter gewöhnlichem Druck ist jedoch von etwas Zersetzung begleitet, in Folge deren die erst übergehenden Tropfen einen stechend saueren Geruch und gelbliche Farbe zeigen, und bei wiederholten Destillationen ein immer erheblicherer Antheil unterhalb des richtigen Siedepunktes abdestillirt.

Durch Kochen mit Wasser wird das Triacetin nicht vollständig zerlegt. Selbst als es mit der 100-fachen Menge Wasser durch 48 Stunden am Rückflusskühler, oder in einem anderem Versuch durch 24 Stunden im zugeschmolzenen Rohr auf 150° erhitzt wurde, war nur eine theilweise Zerlegung eingetreten, indem wohl Mon-acetin als Hauptproduct entstanden sein mochte.

Hexenylglycerin. Aus dem analysirten Triacetin wurde das Glycerin durch Kochen mit Barytwasser am Rückflusskühler dargestellt. Der überschüssige Baryt wurde durch Kohlensäure ausgefällt, das Filtrat eingedampft und dann mit kaltem absolutem Alkohol ausgezogen, wobei die Hauptmenge des Bariumacetates ungelöst blieb. Nach Verdampfen des alkoholischen Auszugs wurde der Rückstand in Wasser aufgenommen und das in der Lösung enthaltene Barium sorgfältig bis auf eine geringe Spur mittelst Schwefelsäure ausgefällt. Das Filtrat liessen wir zur Vertreibung der Essigsäure erst auf dem Wasserbade, dann im Vacuum über Ätzkali abdunsten, und wiederholten an dem Rückstande das Lösen und Abdunsten einige Male. Das zurückbleibende Glycerin wurde endlich bei auf 53 Mm. verringertem Druck aus dem Ölbade abdestillirt und ging zwischen 170° und 176° (corr.) über. Nur ein geringer bräunlicher Destillationsrückstand blieb zurück.

Da das destillirte Glycerin sich in Wasser nicht vollständig klar löste, so schüttelten wir die wässerige Lösung wiederholt mit kleinen Mengen Äther aus. In der That hinterliess der erste Waschäther beim Verdunsten einen sehr geringen, dicklichen, schwach bräunlichen Rückstand, der sich mit Wasser nicht in jedem Verhältniss mischte, also jedenfalls eine Verunreinigung des Glycerins darstellte. Die späteren ätherischen Ausschüttelungen hinterliessen nichts mehr.

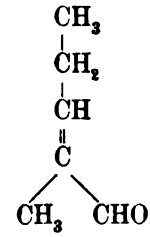
Die mit Äther gewaschene, nunmehr völlig klare Glycerinlösung wurde im Vacuum abgedunstet und hinterliess das Glycerin als eine sehr dicke farblose Flüssigkeit, die behufs Analyse im Vacuum über Schwefelsäure getrocknet wurde. Dabei zeigte es sich, dass das Hexenylglycerin, wenn auch nur sehr wenig, doch in merklicher Weise im Vacuum bei gewöhnlicher Temperatur verdunstet, so dass ein völlig constantes Gewicht beim

Trocknen im Vacuum nicht erreicht werden konnte. Seine Zusammensetzung entsprach der Formel $C_6H_{11}(OH)_3$.

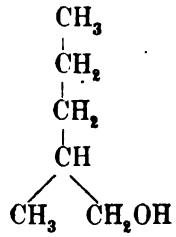
0·1983 Grm. Substanz gaben bei der Verbrennung 0·3884 Grm. CO_2 und 0.1889 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_{11}(OH)_3$
C.....	53·42	53.73
H.....	10·58	10·45
O.....	—	35·82
		100·00

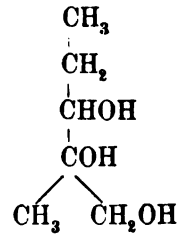
Bemerkenswerth ist der niedrige Siedepunkt dieses Glycerins, der wohl auf den Umstand, dass dasselbe eine tertiäre Alkoholkette enthält, zurückzuführen ist. Soweit man aus seiner Bildungsweise einen Schluss ziehen kann, kommt ihm die folgende rationelle Formel zu, die sich an die für das Condensationsproduct $C_6H_{10}O$ und für den daraus abgeleiteten Hexylalkohol festgestellten anschliesst:



Methyläthylacrolein



Hexylalkohol (Methylpropyläthol)



Hexenylglycerin (Methyläthylglycerin)

Mit überschüssiger Jodwasserstoffsäure im zugeschmolzenen Rohr auf 100° erhitzt, liefert das Glycerin ein Hexyljodür, das nach Waschen und Trocknen bei 154°—160° (uncorr.) destillirte, dessen Constitution wir aber vorläufig nicht ermittelt haben.

Wir haben auch den Versuch gemacht, statt das bei der Reduction erhaltene Alkoholgemenge direct zu bromiren und in Glycerin und Hexylalkohol überzuführen, vielmehr dasselbe durch Behandlung mit Essigsäureanhydrid, nachfolgende Bromaddition und Digestion mit Silberacetat in ein Gemenge von Hexenyltriacetin und Hexylacetat umzuwandeln. Die Hoffnung, die wir daran knüpften, auf diese Weise eine bessere Ausbeute

an Glycerin zu erhalten, hat sich jedoch nicht realisirt und unterlassen wir daher die Darlegung der einschlägigen Versuche.

Oxydation des Methyläthylacroleïns.

Die Oxydation ist ein ziemlich complicirter Process, den zu entwirren uns erst durch eine lange Reihe von unter wechselnden Bedingungen angestellten Versuchen gelungen ist. Gleichviel welches Verfahren man bei der Oxydation in Anwendung bringt, stets erhält man Gemenge von Säuren, die erst getrennt werden müssen, ehe man aus den Analysen oder den Analysen ihrer Salze irgend welche Schlüsse auf ihre Natur ziehen kann. Nur handelte es sich darum, diese Trennung von nach unbekannten Substanzen in solcher Weise durchzuführen, dass jede Gefahr von Zersetzung ausgeschlossen ist, und sich durch Controlversuche zu überzeugen, dass dies gelungen ist.

Für die Darlegung dürfte es genügen, den Gang der Untersuchung anzugeben, den wir bei unseren letzten Oxydationsoperationen einerseits mit Chromsäuremischung, anderseits mit Anwendung von freiem Sauerstoff eingeschlagen haben, und als allgemeines Ergebniss voranzustellen, dass in diesen beiden Fällen und drittens, wenn man Silberoxyd mit Wasser als oxydirendes Agens benützt, qualitativ durchaus dieselben Oxydationsproducte erhalten werden. Am empfehlenswerthesten ist die Oxydation mit freiem Sauerstoff, sowohl wenn es sich darum handelt, sämmtliche Oxydationsproducte kennen zu lernen, als auch für den Zweck zwei interessante neue Säuren (eine in Wasser wenig lösliche, schwer flüchtige, und eine leicht lösliche fixe Säure), die dabei auftreten, darzustellen.

Oxydation mit Chromsäuremischung.

Die anzuwendenden Mengen sind entsprechend dem Verhältniss von 4 O auf 1 Mol. $C_6H_{10}O$ zu wählen, da wir uns durch Versuche überzeugt haben, dass bei Anwendung geringerer Mengen des oxydirenden Agens nicht etwa andere minder oxydirte Producte entstehen, sondern der Process in ganz gleicher Weise verläuft, ein Theil aber des Methyläthylacroleïns der Oxydation

entgeht. Im Folgenden der Bericht über die letzte von uns durchgeführte Operation:

6·1	Grm.	Methyläthylacroleïn
24·4	„	Kaliumbichromat
32·5	„	Schwefelsäure
280·6	„	Wasser

wurden in einer Flasche mit eingeschliffenen Glasstöpsel bei gewöhnlicher Temperatur unter zeitweisem Umschütteln durch einen Monat sich selbst überlassen. Beim Zusammenbringen des Aldehyds mit der Chromsäuremischung tritt sehr merkliche Temperaturerhöhung ein, die aber bald wieder verschwindet. Der Oxydationsprocess ist von einer geringen, äusserst langsamen Kohlensäureentwicklung begleitet, daher es gut ist, den Stöpsel zeitweilig zu lüften. Die Kohlensäure wurde mittelst Kalkwasser nachgewiesen.

Nach Ablauf eines Monats war das aufschwimmende Öl ($C_6H_{10}O$) verschwunden und die wässerige Flüssigkeit hatte eine rein grüne Farbe angenommen; auch hatten sich Chromalaunkrystalle darin ausgeschieden. Die Lösung wurde nun 24mal successive mit Äther ausgeschüttelt und das ausgezogene Product das nach Abdestilliren des Äthers einen eigenthümlichen scharfen saueren Geruch besass, mit Wasser versetzt. Der grösste Theil löste sich auf und nur eine kleine Menge öliger Flüssigkeit blieb zurück, die dem Geruch nach offenbar etwas Methyläthylacroleïn, das der Oxydation entgangen war, beigemengt enthielt. Um auch dies letztere noch weiter zu oxydiren, wurde das Öl durch längere Zeit in einem offenen Rohr der Einwirkung der Luft überlassen, bis der scharfe Geruch verschwunden war. Das dicklich gewordene Öl mit Wasser übergossen, war etwas schwerer als dieses, theilte ihm saure Reaction mit, war aber nur wenig darin löslich; in Barytwasser dagegen löste es sich vollständig auf. Nach Entfernung des überschüssigen Baryts mit Kohlensäure und Verdunsten im Vacuum, wurde ein in Warzen krystallisirtes Bariumsalz gewonnen, das bei Behandlung mit Schwefelsäure unter Verbreitung eines aromatischen, von dem der niederen fetten Säuren völlig verschiedenen, Geruches eine ölige Säure abschied. Beim Erhitzen des im Vacuum getrockneten

Salzes auf 100° trat zwar nur ein geringer Gewichtsverlust ein, doch schien eine theilweise Zersetzung dabei stattzufinden, denn das Salz färbte sich gelblich, wurde dann von Wasser kaum benetzt und löste sich nur sehr langsam und unvollständig darin auf.

0·1935 Grm. des im Vacuum getrockneten Bariumsalzes, im Tiegel in $BaSO_4$ übergeführt, lieferten 0·1245 Grm. $BaSO_4$, enthalten also 37·83 Procent Barium.

Dieser Bariumgehalt entspricht einem Salz $Ba(C_6H_9O_2)_2$, welches 37·74 Procent Barium enthält. Weitere Belege dafür, dass durch Oxydation des Aldehydes $C_6H_{10}O$ eine ölige einbasische Säure $C_6H_{10}O_2$ entsteht, werden später bei der Oxydation mittelst freien Sauerstoffs beigebracht und auch die Eigenschaften der Säure beschrieben werden. Einstweilen darf wohl als feststehend gelten, dass dieser Körper auch bei Oxydation mittelst Chromsäuremischung gebildet wird. Wir haben sein Auftreten bei allen unseren Chromsäureoxydationen beobachtet.

Es blieben nun noch einerseits der in Wasser lösliche Theil des mittelst Äther ausgezogenen Productes — anderseits die grüne wässerige Lösung nach der Ausschüttlung mit Äther zu untersuchen übrig.

Die von der öligen Säure abfiltrirte wässerige Lösung des Ätherproductes wurde über Kalk und Schwefelsäure unter eine Glocke gestellt und bei gewöhnlicher Temperatur der Verdunstung überlassen, wobei die Schwefelsäure sich stark bräunte. Das Wasser und die flüchtigen Säuren wurden unter diesen Umständen allmählig von der Schwefelsäure und dem Kalk aufgenommen und es hinterblieb als Verdunstungsrückstand eine dicke gelbgrüne Flüssigkeit, in der nach längerem Stehen vereinzelte kleine, doch sehr deutliche Krystallnadeln beobachtet werden konnten. Bei Wasserzusatz verschwanden die Krystalle sofort und der ganze Rückstand löste sich bis auf sehr wenig einer öligen Flüssigkeit auf, von der abfiltrirt wurde. Das wässerige Filtrat wurde abermals über demselben Kalk und derselben Schwefelsäure wie früher der Verdunstung überlassen, um die etwa noch anhängenden flüchtigen Säuren möglichst vollständig zu beseitigen, und der dickliche Verdunstungsrückstand, in dem diesmal keine Krystalle bemerkt werden konnten, wieder in

Wasser gelöst. Die stark saure Lösung wurde durch Behandlung mit Kalk, mit Kohlensäure und darauf folgendes Verdunsten im Vacuum in ein Calciumsalz verwandelt, dass jedoch nur als amorphe, firnissartige, nach dem Trocknen spröde Masse von gelblicher Farbe erhalten wurde.

0·1758 Grm. des bei 100° getrockneten Salzes, mit Oxalsäure ausgefällt, lieferten nach heftigem Glühen des Niederschlages vor dem Gebläse 0·0299 Grm. CaO. Daraus berechnet sich ein Gehalt von 12·15 Procent Ca.

Daraus folgt, dass bei der Oxydation mittelst Chromsäuremischung eine nicht flüchtige, in Wasser lösliche Säure entsteht, die leicht amorphe Salze liefert (wir haben auch ein dem obigen Calciumsalz ganz ähnliches Bariumsalz erhalten), die wir gelegentlich der Oxydation mit freiem Sauerstoff näher beschreiben werden und für welche wir die Formel $C_6H_{12}O_4$ gefunden haben. Ihr Calciumsalz $Ca(C_6H_{11}O_4)_2$ enthält 11·98 Procent Ca, was mit der obigen Calciumbestimmung übereinstimmt.

Die von der eben besprochenen fixen Säure durch Verdunstung getrennten flüchtigen Säuren, sofern solche in dem mittelst Äther ausgezogenen Product enthalten waren, mussten sich nach dem beschriebenen Gang der Untersuchung in dem Kalk und der Schwefelsäure finden, über welchen die Verdunstung der wässerigen Lösung des Ätherproductes vorgenommen worden war. Zur Gewinnung dieser Säuren wurde der Kalk mit Wasser ausgezogen, dem wässerigen Auszug die Schwefelsäure zugefügt, abdestillirt, auf den Rückstand Wasser aufgegossen und wieder abdestillirt u. s. f. Die im Destillat erhaltenen Säuren wurden durch Kochen mit Silberoxyd am Rückflusskühler in Silbersalze verwandelt. Dabei wurde mittelst vorgeschlagenen Barytwassers eine ziemlich lang anhaltende Entwicklung von Kohlensäure nachgewiesen, die offenbar von zerstörter Ameisensäure herstammt. Die Silbersalze liessen wir successive in 8 Fractionen stets von heiss auf kalt auskrystallisiren. Dieselben zeigten ein unter einander ziemlich gleichartiges, von dem des essigsauren Silbers sehr verschiedenes Aussehen, nämlich kleine kugelige Krystallwarzen, wie man sie namentlich bei unreinem, propionsaurem Silber oft beobachtet. Die mit den im Vacuum getrockneten Salzen vorgenommenen Silberbestimmungen ergaben:

Fraction I (schwerlöslichste Fraction) 0·292 Grm. lieferten 0·1772 Grm. Ag das ist 60·68 Procent Silber.

Fraction VIII (leichtlöslichste Fraction) 0·3364 Grm. lieferten 0·212 Grm., das ist 63.02 Procent Silber.

Der noch vorhandene Rest der Fract. I (circa 2 Grm.) wurde zur weiteren Reinigung noch dreimal aus siedendem Wasser umkrystallisirt, indem immer die Mutterlauge beseitigt und die Krystalle neuerdings gelöst wurden. Die zuletzt erhaltenen Krystalle stellten also den schwerstlöslichen Theil der Fract. I dar; es waren zu Büscheln vereinigte feine Nädelchen.

0·2396 Grm. des im Vacuum getrockneten Salzes lieferten 0·1433 Grm. das ist 59·81 Procent Silber.

0·1712 Grm. desselben Salzes lieferten 0·1022 Grm., das ist 59·70 Procent Silber.

Damit ist die Gegenwart der Propionsäure mit Sicherheit bewiesen, denn die Theorie verlangt für Silberpropionat 59.67 Procent Silber, und der Beweis ist um so sicherer, als bei vollständiger Abwesenheit einer höheren fetten Säure (Buttersäure etc.) die Möglichkeit einer bloss zufälligen Übereinstimmung hier ausgeschlossen ist.

Die Analyse der Silbersalzfraction VIII deutet mit ziemlicher Bestimmtheit auf Essigsäure hin. Essigsaures Silber verlangt 64.67 Procent Ag.

Unter den drei flüchtigen fetten Säuren (Ameisensäure, Essigsäure, Propionsäure), die im ätherischen Auszug gefunden wurden, ist die Propionsäure an Menge vorwiegend.

Es blieb noch die chromhaltige, wässerige, grüne Lösung zu untersuchen, die 24 Mal mit Äther ausgeschüttelt worden war, und die noch Oxydationsproducte, welche schwerer in Äther als in Wasser löslich sind, enthalten konnte. Insbesondere durfte man erwarten, noch flüchtige fette Säuren darin anzutreffen.

Die grüne Lösung wurde bis nahe zur Trockne abdestillirt, auf den Rückstand Wasser aufgegossen, wieder abdestillirt u. s. f. Das saure Destillat wurde durch fractionirte Sättigung mit Soda und Abdestilliren (wobei auf den Rückstand immer noch vier Mal Wasser aufgegossen und abdestillirt wurde) in 9 Fractionen

gespalten, von denen die ersten zwei (also die relativ stärksten Säuren enthaltenden) Fractionen grösser waren als die folgenden.

Natriumsalzfraction I, 0·2951 Grm. des bei 120° getrockneten Salzes lieferten 0·2979 Grm. Na_2SO_4, enthalten also 32·7 Procent Na.

Diese Fraction besteht offenbar vorwiegend aus ameisensaurem Natrium, für das sich 33·82 Procent Na berechnen, gemischt mit etwas essigsaurem Salz.

(Wir schliessen als weiteren Beleg hier die etwas besser stimmende Analyse eines auf ganz analoge Weise erhaltenen Natriumsalzes aus einer anderen Chromsäureoxydation an:

Fraction I, 0·5399 Grm. des bei 120° getrockneten Salzes lieferten 0·5575 Grm. Na_2SO_4, enthalten also 33·45 Procent Na.)

Natriumsalzfraction III, 0·2426 Grm. des bei 120° getrockneten Salzes lieferten 0·2141 Grm. Na_2SO_4 enthalten also 28·59 Procent Na.

Für essigsaures Natrium berechnen sich 28·05 Procent Na.

Fraction V, 0·24 Grm. des bei 115° getrockneten Salzes lieferten 0·2039 Grm. Na_2SO_4, enthalten also 27·52 Procent Na.

Fraction VIII, 0·2323 Grm. des bei 115° getrockneten Salzes lieferten 0·183 Grm. Na_2SO_4, enthalten also 25·52 Procent Na.

Fraction IX, 0·1655 Grm. des bei 120° getrockneten Salzes lieferten 0·1259 Grm. Na_2SO_4, enthalten also 24·64 Procent Na.

Die letzte Fraction, welche die relativ schwächste Säure enthalten muss, besteht schon hauptsächlich aus propionsaurem Natrium, das 23·96 Procent Na verlangt.

Aus vorstehenden Analysen kann mit Sicherheit auf Ameisensäure, deren Gegenwart auch durch qualitative Reactionen bestätigt wurde, und auf Propionsäure geschlossen werden. Dagegen ist trotz der annähernden Übereinstimmung mit essigsaurem Natrium, welche die Analysen der Fractionen III und V ergeben haben (am genauesten würde ohne Zweifel Fraction IV stimmen) ein zuverlässiger Schluss auf Essigsäure nicht möglich, da ein Gemenge von ameisensauren und propionsauren Salz dieselben Analysenresultate geben könnte. Um in dieser Beziehung Sicherheit zu erlangen, wurde aus den vereinigten Salzfractionen II und IV durch Destillation mit Phosphorsäure und darauf folgende viermalige Destillation des Rückstandes mit Wasser die Säure frei gemacht und durch Kochen mit Silberoxyd am Rückflusskühler in Silbersalz verwandelt. Nach Zerstörung der Ameisensäure musste nun entweder Essigsäure oder Propionsäure in Form von Silbersalz erhalten

werden. Wir liessen das Silbersalz in zwei Fractionen krystallisiren. In dem unlöslichen Rückstand fanden wir neben überschüssigem Silberoxyd reichliche Mengen reducirten Silbers (Beleg für die frühere Gegenwart der Ameisensäure).

Silbersalzfraction I, Schöne Nadeln. 0·4183 Grm. des im Vacuum getrockneten Salzes gaben 0·2688 Grm., das ist 64·26 Procent Silber.

Fraction II zeigte gleiches Aussehen wie I. 0·3048 Grm. des im Vacuum getrockneten Salzes gaben 0·1958 Grm., das ist 64·24 Procent Silber.

Essigsaures Silber enthält 64·67 Procent Silber.

Damit ist der Beweis erbracht, dass das saure Destillat aus der grünen Chromlösung neben Ameisensäure und Propionsäure auch Essigsäure enthält. Es wurden also hier dieselben drei flüchtigen Säuren gefunden, die auch in dem ätherischen Auszug oben nachgewiesen worden sind, nur war dort die Propionsäure an Menge vorherrschend, während sie hier gegenüber der Ameisensäure und Essigsäure zurücktrat. Beide Untersuchungen dienen sich gegenseitig zur Bestätigung.

In dem nach Abdestilliren der flüchtigen Säuren zurückgebliebenen chromsulfatreichen Rückstand waren keine organischen Oxydationsproducte, ausser in Spuren, mehr aufzufinden.

Die Resultate der mittelst Chromsäuremischung durchgeführten Oxydation lassen sich wie folgt zusammenfassen. Es entstehen Kohlensäure, Ameisensäure, Essigsäure, Propionsäure, eine ölige Säure, die ein krystallinisches Bariumsalz liefert, dessen Metallgehalt für die Zusammensetzung $C_6H_{10}O_2$ der Säure stimmt, endlich eine fixe, in Wasser lösliche Säure, für welche sich aus der Calciumbestimmung des amorphen Calciumsalzes, das sie liefert, die Formel $C_6H_{12}O_4$ mit Wahrscheinlichkeit ergiebt.

Bei der Oxydation werden circa 4 O auf 1 Mol. $C_6H_{10}O$ consumirt. Hauptproducte der Menge nach sind die drei flüchtigen fetten Säuren, die wie es scheint in äquivalenten Mengen auftreten, während die ölige Säure, die fixe Säure und Kohlensäure zwar auch wesentliche, nie fehlende Producte der Oxydation sind, aber in geringerer Menge entstehen. Manchmal haben wir auch das Auftreten eines festen, weissen, unlöslichen, mit

Wasserdampf einigermassen flüchtigen Körpers wahrgenommen, aber in so kleiner Menge, dass seine Untersuchung unmöglich war. Auch Spuren eines flüssigen, neutralen, flüchtigen, in Wasser bis zu einem gewissen Grad löslichen Körpers von angenehmem Geruch wurden beobachtet; wir halten ihn für Methylpropylketon.

Bemerkenswerth scheint uns auch die Beobachtung, dass wenn man das Gemenge von Ameisensäure, Essigsäure und Propionsäure, wie es bei der Oxydation häufig noch mit Spuren der obigen Säure $C_6H_{10}O_2$ verunreinigt erhalten wird, in Bariumsalz überführt, dies letztere nicht krystallisirt, sondern gleichviel, ob man die Lösung in der Wärme oder im Vacuum abdunstet, stets gummiartig eintrocknet. Wir haben versucht das Gemenge der Bariumsalze mittelst Alkohol zu trennen, doch hat sich dies Verfahren minder gut bewährt als die oben dargelegten für Trennung der drei fetten Säuren benützten Methoden. Noch viel schlechter als bei den Bariumsalzen gelingt die Trennung mittelst Alkohol bei den gemengten Natriumsalzen der genannten drei Säuren.

Oxydation mit freiem Sauerstoff.

Verfahren bei der Oxydation. Wir haben die Einwirkung des Sauerstoffgases, das aus einer grossen, als Gasometer dienenden Glasflasche durch einen Indicator und ein Chlorcalciumrohr strömte, in zweierlei Weise vor sich gehen lassen.

Nach der einen strömte das Gas in eine viereckige, behufs Vergrösserung der absorbirenden Oberfläche, horizontal gelegte Flasche, die das Methyläthylacrolein enthielt, und konnte, nachdem es über dessen Oberfläche gestrichen war, nur durch ein Abzugsrohr austreten, das sich durch einen Glashahn schliessen liess und zu einer mit Wasser gefüllten Flasche führte. Die letztere war durch einen doppelt durchbohrten Kork geschlossen und eine in die zweite Bohrung eingepasste, auf den Grund reichende, über dem Kork im rechten Winkel gebogene Röhre, an die ein Kautschukschlauch angesetzt war, gestattete dem eventuell verdrängten Wasser den Abfluss. Wenn das Methyläthylacrolein hineingebracht und der ganze Apparat bis zur

letzten Flasche mit Sauerstoffgas gefüllt war, wurde der oben erwähnte Glashahn geschlossen. Die Sauerstoffabsorption vollzog sich dann regelmässig mit allmählig abnehmender Geschwindigkeit, wie sich leicht an den aus dem Sauerstoffbehältniss durch den Indicator streichenden Blasen beobachten liess. Die Ursache der Abnahme ist eine doppelte. Einerseits verwandelt sich das Methyläthylacrolein in eine immer verdünnter werdende Lösung dieses Körpers in seinen Oxydationsproducten, anderseits wird die Atmosphäre der Absorptionsflasche immer unreiner, indem nicht nur der Stickstoff, der als Verunreinigung den Sauerstoff begleitet, sich allmählig darin anhäuft, sondern auch Kohlensäure sich beimischt, die bei der Oxydation entsteht. Aus diesem Grunde haben wir nach je drei Tagen durch kurzes Öffnen des Glashahns und Abfliessenlassen eines dem Inhalt der Absorptionsflasche gleichen Wasservolums aus der den Apparat abschliessenden Aspiratorflasche, die Atmosphäre des Absorptionsgefässes vollständig erneuert, und dadurch bei wieder geschlossenem Glashahn eine neuerdings beschleunigte Sauerstoffabsorption herbeigeführt. Nach 2—3 Wochen pflegt die Menge aufgenommenen Sauerstoffs etwa dem Verhältniss von 1 Atom Sauerstoff auf 1 Mol. $C_6H_{10}O$ zu entsprechen. Wir haben dann meist die Verarbeitung vorgenommen, das noch unangegriffene Methyläthylacrolein von seinen Oxydationsproducten getrennt und neuerdings in obiger Weise der Oxydation unterworfen.

Bei der zweiten von uns angewandten Operationsweise haben wir das Methyläthylacrolein, statt es wie oben in einem abgeschlossenen Gefäss der Einwirkung des in dem Masse als die Absorption sich vollzieht immer nachströmenden Sauerstoffgases auszusetzen, vielmehr der Wirkung eines langsamen, in feinen Bläschen durch die Flüssigkeit selbst streichenden, continuirlichen Sauerstoffstromes unterworfen. Zu diesem Zwecke wurde die Substanz in ein 10—12 Mm. (im Lichten) weites 1·30 M. langes Glasrohr gebracht, in welches auf der einen Seite ein engeres in eine feine Spitze ausgezogenes Röhrchen so eingelöthet war, dass seine Spitze in das weitere Rohr hineinragte. Das engere Röhrchen war im rechten Winkel aufwärts gebogen und war bestimmt den trockenen Sauerstoff in recht kleinen Bläschen in die Flüssigkeit eintreten zu lassen. Dem langen

Rohr wurde eine gegen die Horizontale schwach geneigte Richtung gegeben. Das austretende Gas strich entweder noch durch ein zweites ähnlich vorgerichtetes Absorptionsrohr oder passirte direct eine Waschflasche mit Kalkmilch, um in die schon beschriebene Aspiratorflasche zu gelangen, die den Apparat abschloss. Das Volum des vom Methyläthylacrolein aufgenommenen Sauerstoffs konnte man jederzeit erfahren, wenn man das Volum des aus dem Aspirator verdrängten Wassers von dem des aus dem Gasometer ausgeströmten Sauerstoffgases in Abzug brachte. Bei einem Versuch, den wir in der hier beschriebenen Weise mit 110 Grm. in zwei Absorptionsröhren vertheilten Methyläthylacroleïns durchführten, wurden in den ersten 24 Stunden $2^1/_2$ Liter Sauerstoff aufgenommen, später immer weniger, so dass nach 8 Tagen in der gleichen Zeit nur mehr halb so viel Sauerstoff von der Substanz aufgenommen wurde. Der in der Aspiratorflasche sich ansammelnde, für die Oxydation nicht verbrauchte Sauerstoff zeigte einen ganz eigenthümlichen, ziemlich starken Geruch, wahrscheinlich von Methylpropylketon herrührend, dessen Bildung bei der Oxydation des $C_6H_{10}O$ im Folgenden nachgewiesen wird.

Beide Oxydationsverfahren geben das gleiche Resultat; das zweite ist vielleicht empfehlenswerther, insoferne es eine raschere Oxydation herbeiführt, dagegen kann durch den dabei angewandten Sauerstoffstrom leichter ein Verlust an Methyläthylacroleïn und an flüchtigen Oxydationsproducten (Methylpropylketon) eintreten.

Die Menge Sauerstoff, die für die Oxydation verbraucht wurde, war in allen unseren Versuchen erheblich geringer, als bei Anwendung der Chromsäuremischung, obgleich qualitativ dieselben Producte erhalten werden; sie entstehen eben in quantitativ anderem Verhältniss.

Das Methyläthylacroleïn hatte nach der Oxydation eine etwas dicklichere Consistenz und gelbliche Farbe angenommen; auch zeigte es einen veränderten, scharfen, an Essigsäure erinnernden Geruch.

Gang der Untersuchung. Schon während der Einwirkung des Sauerstoffs wurde Kohlensäure als Oxydationsproduct nachgewiesen.

Wenn die Oxydation so weit vorgeschritten war, das die Sauerstoffabsorption sich stark verlangsamte, wurde das Product mit etwas Äther versetzt und mit kleinen Mengen Wasser 10—12mal successive ausgeschüttelt. Die erhaltene wässerige Lösung wurde dann ihrerseits zweimal mit kleinen Mengen Äther ausgeschüttelt und die ätherischen Schichten mit der Hauptmenge vereinigt. Auf diese Weise wurde eine zwar nur sehr unvollkommene aber doch zweckdienliche Trennung der in Wasser löslichen von den unlöslichen Oxydationsproducten erreicht. Der Ätherzusatz hatte hauptsächlich nur den Zweck, die Trennung der Schichten zu erleichtern.

Die ätherische Lösung wurde zunächst vom Äther befreit und darauf einer sehr lang fortgesetzten Destillation mit Wasserdampf unterworfen. Dabei ging anfangs eine ölige Flüssigkeit zusammen mit stark sauer reagirenden Wasser über. Die späteren, namentlich die letzten Destillate waren nur kaum merklich trüb (von etwas Harz) und zeigten eine äusserst schwache sauere Reaction, die auch bei vieltägiger Destillation nie ganz verschwand. Als Destillationsrückstand hinterblieb Wasser von stark sauerer Reaction neben einer weichen harzartigen schwarzbraunen Substanz.

Die letzten Destillate scheinen wesentlich nichts anderes zu enthalten, als sehr kleine Mengen derselben Substanzen, die auch im Rückstand vorkommen und die gegenüber Wasserdampf wahrscheinlich nicht absolut fix sind. In der That als die letzten Destillate mit kohlensaurem Natron abgedampft, der Rückstand mit Schwefelsäure zerlegt und mit Äther ausgeschüttelt wurde, hinterliess der Äther einen aus braunem Harz und einer in Wasser löslichen Säure bestehenden Rückstand, der ganz dieselben Eigenschaften, wie der obige Destillationsrückstand zeigte, nur dass Spuren flüchtiger Fettsäuren noch beigemischt waren, die beim Erhitzen auf dem Wasserbade entwichen. Wir kommen auf die im Rückstand enthaltene fixe Säure, die beim Verdampfen ihrer wässerigen Lösung als eine sehr dickflüssige bräunliche Masse erhalten wird, später zurück.

Das oben gewonnene Destillat (mit Hinweglassung jener späteren Destillatsfractionen, die überhaupt nur sehr wenig, und zwar Substanz des Rückstandes nebst Spuren von flüchtigen

Fettsäuren in Lösung hielten) wurde ohne Rücksicht auf die ölige Schicht, die darauf schwamm, mit kohlensaurem Kalk am Rückflusskühler gekocht, darauf abdestillirt und aus dem Destillate theils direct, theils durch wiederholte Destillationen ein neutrales Öl abgeschieden. Dasselbe besteht zum grossen Theile aus Methyläthylacrolein, das der Oxydation entgangen ist und wurde daher meist neuerdings der Einwirkung von Sauerstoffgas und der bisher beschriebenen darauf folgenden Behandlung unterworfen. Man erhält auch dann wieder ein neutrales Öl (natürlich in viel geringerer Menge), das jedoch nur zum kleineren Theile mehr aus der Oxydation entgangenem Methyläthylacrolein besteht und einen davon verschiedenen doch ziemlich starken Geruch besitzt. Durch fractionirte Destillation konnte es in einen bei 100°—105° siedenden Körper von starkem Geruch, einen gegen 140° siedenden (Methyläthylacrolein) und endlich noch höher, selbst über 170° siedende Körper zerlegt werden, deren Menge gering war und die vorläufig nicht näher untersucht wurden.

Die Fraction (100—105°) gab bei der Analyse Zahlen, die sehr annähernd der Formel $C_5H_{10}O$ entsprachen. Beim Schütteln mit Natriumbisulfit löste sich die Substanz zwar nicht sogleich, doch nach kurzer Zeit auf und lieferte einen Krystallbrei. Wir haben diese Eigenschaft zur Reinigung benützt, indem wir eine Spur eines in Bisulfit unlöslichen Körpers auf diese Weise beseitigten. Die Bisulfitverbindung krystallisirt aus der warmen nicht zu concentrirten Lösung in schönen Prismen aus. Mit Soda zerlegt liefert sie ein farbloses Öl (vor der Reinigung mit Bisulfit war das Öl stets gelb) als Destillat, das in Wasser nicht ganz unlöslich ist, daher aus dem begleitenden Wasser durch weitere Destillation noch etwas Öl gewonnen werden kann. Bei der Destillation nach der Trocknung mit Chlorcalcium ging es jetzt vollständig bei 100°—102° (corr.) über. Die Analyse führte zur Formel $C_5H_{10}O$:

0·2097 Grm. Substanz gaben 0·5346 Grm. CO_2 und 0·2201 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_5H_{10}O$
C.....	69·53	69·77
H.....	11·66	11·63
O.....	—	18·60
		100·00

Zusammensetzung wie Eigenschaften lassen keinen Zweifel, dass dieser Körper Methylpropylketon ist. Er ist nicht fähig sich mit Brom zu verbinden, noch ammoniakalische Silberlösung zu reduciren. Um die Oxydationsproducte kennen zu lernen, wurden 0·46 Grm. Substanz im zugeschmolzenen Rohr mit 8percentiger Kaliumbichromatlösung und Schwefelsäure auf 100° erhitzt. Nach der Oxydation wurde abdestillirt, das saure Destillat mit Soda gesättigt und etwas unoxydirt gebliebene Substanz abdestillirt, endlich aus dem rückständigen Natriumsalz die Säuren mittelst Phosphorsäure wieder frei gemacht und abdestillirt. Um die gemengten Säuren zu trennen, wurden sie in Silbersalz verwandelt, mit circa $^1/_8$ der zur vollständigen Zersetzung nöthigen Menge Salzsäure versetzt und destillirt, wodurch die schwächste Säure, die zugleich das schwerst lösliche Silbersalz gibt, in Freiheit gesetzt wird. Wir führten nun die abdestillirte Säure in Silbersalz über, liessen krystallisiren (Fract. I) und gossen die Mutterlauge zu dem aus Chlorsilber und organisch saurem Silbersalz bestehenden Destillationsrückstand, der nun wieder mit einer gleichen Menge Salzsäure wie früher versetzt und destillirt wurde. In dieser Weise fortfahrend, verschafften wir uns vier Fractionen Silbersalz, für deren Herstellung zugleich die Methode der fractionirten Sättigung und die ungleiche Löslichkeit der Silbersalze in für die Trennung der Säuren günstigster Weise angewendet worden war.

Die Silberbestimmungen ergaben:

Fraction I (enthaltend die schwächste Säure, die das schwerst lösliche Silbersalz gibt) 0·1416 Grm. Silbersalz lieferten 0·0854 Grm. Silber enthalten also 60·31 Percent.

Propionsaures Silber verlangt 59.67 Percent Silber.

Fraction IV (enthaltend die relativ stärkste Säure, die das leichtest lösliche Silbersalz gibt) 0·348 Grm. Silbersalz lieferten 0·2216 Grm. Silber, enthalten also 63·68 Procent.

Essigsaures Silber verlangt 64·67 Procent Silber.

Diese Resultate rechtfertigen den Schluss, dass die ketonartige Substanz $C_5H_{10}O$ bei ihrer Oxydation Essigsäure und Propionsäure geliefert hat und nichts anderes als Methylpropylketon ist. Wir glauben, dass derselbe Körper auch bei der Oxydation des Methyläthylacroleïns mit Chromsäuremischung

entsteht, wofür wir Indicien beobachtet haben, und überhaupt ein constantes Product der Oxydation ist.

Das Calciumsalz, von dem oben das lediglich aus Methylpropylketon und der Oxydation entgangenem Methyläthylacrolein bestehende neutrale Öl abdestillirt worden war, musste vornehmlich die in Wasser nicht leicht lösliche und mit Wasserdampf flüchtige Säure enthalten. Die Lösung des Salzes wurde vom überschüssigen kohlensauren Kalk abfiltrirt und lieferte schöne bräunliche prismatische Krystalle, die durch Umkrystallisiren aus siedendem Wasser, in dem sie viel leichter löslich sind als in kaltem, oder noch besser aus sehr verdünntem Weingeist gereinigt wurden. Beim Kochen der Salzlösung entweicht etwas Säure, was sich schon durch den Geruch kund gibt, und die Flüssigkeit nimmt meist eine gelbliche Färbung an, die von Verunreinigungen herkommt.

Die letzte Mutterlauge, die nach dem Auskrystallisiren des Calciumsalzes übrig blieb, war sehr dicklich und erstarrte zuletzt zu einer gelben, undeutlich krystallinischen Masse.

Das schön krystallisirte, farblos erhaltene Calciumsalz, welches in kaltem Wasser nicht leicht löslich ist, wurde mittelst der Pumpe abgesaugt, zwischen Filterpapier sorgfältig ausgepresst und der Analyse unterworfen, welche zur Formel $Ca(C_6H_9O_2)_2 + 4H_2O$ führte.

I. 0·4307 Grm. gaben bei der Verbrennung 0·6468 Grm. CO_2, 0·301 Grm. H_2O und 0·0955 Grm. Asche, die beim nachträglichen heftigen Glühen 0·0227 Grm. CO_2 verlor und 0·0728 Grm. CaO hinterliess.

II. 0·3251 Grm. gaben bei der Verbrennung 0·4847 Grm. CO_2, 0·2367 Grm H_2O und 0·0795 Grm. Asche, die beim nachträglichen heftigen Glühen 0·024 Grm. CO_2 abgab und 0·0555 Grm. CaO hinterliess.

III. 0·3437 Grm. verloren im Vacuum über Schwefelsäure 0·072 Grm. H_2O, erlitten darauf bei 100° keinen Gewichtsverlust mehr (die erhitzte Substanz wird von Wasser nicht benetzt und löst sich daher nur äusserst langsam darin auf) und lieferten mit Schwefelsäure abgedampft und geglüht 0·136 Grm. $CaSO_4$.

IV. 0·4377 Grm. zwischen Papier ausgepresstes Calciumsalz aus einer anderen mit freiem Sauerstoff durchgeführten Oxydationsoperation gaben bei der Verbrennung 0·6763 Grm. CO_2, 0·2977 Grm. H_2O und 0·0743 Grm. Asche, deren Gewicht auch bei nachträglichem heftigem Glühen sich nicht ändere, die daher aus reinem CaO bestand.

V. 0·2222 Grm. desselben Präparates wie in IV verloren im Vacuum über Schwefelsäure 0·0465 Grm. H_2O, erlitten dann bei 100° keinen Gewichtsverlust mehr und lieferten mit Schwefelsäure abgedampft und geglüht 0·0881 Grm. $CaSO_4$.

	Gefunden				
	I	II	III	IV	V
C	42·39	42·67	—	42·14	—
H	7·76	8.09	—	7.56	—
Ca	12·07	12·19	11·64	12·12	11·66
H_2O	—	—	20·95	—	20·93

	Gefunden im Mittel	Berechnet für $Ca(C_6H_9O_2)_2+4H_2O$
C	42·40	42·60
H	7·80	7·69
Ca	11·94	11·83
H_2O	20·94	21·30

Aus dem Calciumsalz gelingt es leicht durch Zerlegung mittelst verd. Schwefelsäure und Ausschütteln mit Äther die Säure $C_6H_{10}O_2$ frei zu machen, die eine ölige Flüssigkeit von schwachem angenehmen Geruch darstellt und sich unzersetzt destilliren lässt. Wir werden sie in einem späteren Capitel genauer beschreiben, und wollen hier nur constatiren, dass sie offenbar mit der öligen Säure identisch ist, die wir bei der Chromsäure-Oxydation erhalten und auf deren Zusammensetzung entsprechend $C_6H_{10}O_2$ wir dort aus der Metallbestimmung eines Bariumsalzes geschlossen haben.

Ihrer Constitution nach ist die neue Säure als α Methyl-β Äthyl-Acrylsäure zu betrachten, könnte vielleicht auch als Homotiglinsäure bezeichnet werden, um an die Ähnlichkeit mit der homologen Tiglinsäure, die als α Methyl-β Methyl-Acrylsäure aufgefasst werden kann, zu erinnern.

Nach dem Auskrystallisiren des Calciumsalzes der Säure $C_6H_{10}O_2$ blieb, wie schon oben erwähnt, eine dickliche, zuletzt erstarrende Mutterlauge übrig, deren Menge nicht bedeutend war Zu ihrer Untersuchung machten wir die als Calciumsalze darin enthaltenen Säuren durch Behandlung mit verd. Schwefelsäure frei und schüttelten mit Äther aus. Die ausgezogenen Säuren

wurden nach Beseitigung des Äthers der Destillation unterworfen und erwiesen sich als ein Gemenge von öliger, hoch siedender Methyläthylacrylsäure und unter 150° siedenden flüchtigen fetten Säuren, deren Geruch sowohl wie Siedepunkt auf Abwesenheit aller höheren Säuren als Propionsäure schliessen liess. Wir begnügten uns in diesem Falle mit dem Nachweis, dass die höchste der hier vorhandenen fetten Säuren Propionsäure war. Zu diesem Zwecke wurde die von 135° bis 145° siedende Fraction (zwischen 145° und 200° ging nur mehr sehr wenig über) zu $^1/_4$ mit Soda gesättigt und die frei gebliebene Säure abdestillirt, das Destillat wieder mit der gleichen Menge Soda versetzt und abdestillirt, und das nunmehr erhaltene Destillat, — das von Ameisensäure und Essigsäure so ziemlich frei sein musste, weil diese Säuren stärker sind als Propionsäure und bei der obigen Behandlung als Natriumsalze im Rückstand bleiben, — durch Digestion mit kohlensaurem Silber in Silbersalz verwandelt. Aus der heissen Silbersalzlösung liessen wir eine erste Fraction auskrystallisiren, die also, falls das Salz noch nicht ganz rein war, jedenfalls die höchste Säure, auf die wir eben ausgingen, enthalten musste, und krystallisirten diese erste Fraction nochmals um, um die neuerdings erhaltene erste Fraction zur Analyse zu verwenden.

0·3866 Grm. des im Vacuum über Schwefelsäure getrockneten Silbersalzes hinterliessen beim Glühen 0·2302 Grm. Ag, enthalten also 59·54 Procent Silber.

Propionsaures Silber $AgC_3H_5O_2$ enthält 59·67 Procent Silber.

Mit Vorstehendem ist die Untersuchung des beim Schütteln des ursprünglichen Oxydationsproductes mit Äther und Wasser in den Äther übergegangenen Theiles beendet, und lassen wir nun die Versuche folgen, die wir mit der wässerigen Lösung ausgeführt haben.

Dieselbe wurde über Schwefelsäure und Stücken festen Ätznatrons bei gewöhnlicher Temperatur der Verdunstung im Vacuum überlassen. Es hinterblieb als Verdunstungsrückstand eine sehr dicke braune Flüssigkeit, die in Wasser gelöst und noch ein zweites Mal in gleicher Weise verdunstet wurde. Der Rückstand sah ganz ebenso aus wie nach der ersten Verdunstung und

zeigte namentlich keine Spur von Krystallisation. Auch intensive Kälte (durch Abkühlen mit Kohlensäureschnee), oder Behandlung mit Äther, in dem die dicke Flüssigkeit sich langsam auflöste, brachte in dieser Beziehung keine Änderung hervor. Erst nach etwa 6 Monaten des ruhigen Stehens bei gewöhnlicher Temperatur traten einzelne kleine doch wohl ausgebildete prismatische Kryställchen darin auf, die allmählig zunahmen, doch immer nur einen kleinen Theil des Productes darstellten. Wir halten den hier erhaltenen Rückstand, der stark saure Reaction zeigte, für identisch mit der früher erwähnten fixen Säure, die bei der Destillation mit Wasserdampf des in Äther gelösten Theiles des rohen Oxydationsproductes im Rückstand geblieben war, und werden in dem folgenden Capitel „fixe Säure" über die Producte beiderlei Ursprunges gemeinsam berichten.

Bei der Verdunstung der wässerigen Lösung über Ätznatron und Schwefelsäure mussten ausser Wasser auch alle gelösten flüchtigen Substanzen, in diesem Falle die bei der Oxydation entstandenen flüchtigen Säuren, abdunsten und vom Natron und der Schwefelsäure aufgenommen werden. Wir haben bei der Oxydationsoperation, deren Gang wir im Vorstehenden dargelegt haben, die flüchtigen Säuren nicht untersucht, weil wir über deren Natur durch eine frühere, freilich unter etwas anderen und zwar ungünstigeren Umständen angestellte Untersuchung bereits vollständigen Aufschluss erlangt hatten. Wir hatten damals das durch Einwirkung von Sauerstoffgas auf Methyläthylacrolein erhaltene Product unmittelbar, ohne es durch die Behandlung mit Äther und Wasser in zwei Theile zu spalten, über reines festes Ätznatron unter eine Glocke hingestellt und der Verdunstung bei gewöhnlicher Temperatur überlassen. Dies Verfahren ist minder zweckmässig als das oben dargelegte, nicht nur weil der Verdunstungsrückstand (fixe Säure, Methyläthylacrylsäure und nicht oxydirtes Methyläthylacrolein) hartnäckig flüchtige Säuren zurückhält, wodurch dessen Untersuchung und Zerlegung in reine Producte erschwert wird, sondern auch weil neben den flüchtigen Säuren auch Methyläthylacrylsäure sowie etwas Methyläthylacrolein abdunstet und die vom Ätznatron aufgenommenen flüchtigen fetten Säuren verunreinigt, so dass ihre Tren-

nung und sichere Identificirung erheblich mehr Schwierigkeiten bietet. Der folgende Nachweis dürfte gleichwohl als befriedigend erachtet werden.

Das Ätznatron, über welchem die Verdunstung des oxydirten Methyläthylacroleïns erfolgt war, war braun geworden und schied beim Lösen etwas Harz ab. Ohne Rücksicht darauf wurde es mit verd. Schwefelsäure übersättigt und destillirt, wobei neben schwefelsaurem Natron und Schwefelsäure etwas braunes Harz (vielleicht aus verdunstetem Methyläthylacroleïn entstanden) zurückblieb.

Von dem wässerigen sauren Destillat, in dem Öltröpfchen sichtbar waren, wurde, nachdem es gut durchgeschüttelt worden war, $^1/_{10}$ weggenommen, durch Digestion mit kohlensaurem Kalk am Rückflusskühler in neutrales Calciumsalz verwandelt und dieses den übrig gebliebenen $^9/_{10}$ Säure wieder zugesetzt, worauf durch Destillation die freie Säure vom Calciumsalz (das nun die stärkste Säure enthalten musste) getrennt wurde.

Aus dem rückständigen Calciumsalz wurden durch Auflösen und Concentriren schöne Krystalle gewonnen, die zwischen Papier ausgepresst, gepulvert und für die Analyse bei 100° getrocknet wurden.

0·2496 Grm. des getrockneten Salzes lieferten 0·2578 Grm. $CaSO_4$, woraus sich ein Gehalt von 30·38 Procent Ca berechnet.

Ameisensaures Calcium enthält 30·77 Procent Ca.

Das analysirte Salz zeigte ausserdem mit salpetersaurem Silber, Quecksilberchlorid, Eisenchlorid, conc. Schwefelsäure alle Reactionen der Ameisensäure, die daher mit Sicherheit nachgewiesen ist.

Die vom Calciumsalz abdestillirte Säure, die jedenfalls noch reichlich Ameisensäure enthielt, wurde zu $^4/_9$ mit kohlensaurem Kalk abgesättigt und dann abdestillirt. Das rückständige Calciumsalz mit Phosphorsäure zerlegt und destillirt, lieferte ein saueres Destillat, das in Silbersalz verwandelt wurde, wobei starke Reduction eintrat. Das erhaltene Silbersalz liessen wir successive in sechs Fractionen krystallisiren. Die ersten fünf Fractionen waren ganz gleichartig und zeigten das Aussehen von essigsaurem Silber; nur die kleine letzte Fraction zeigte ein etwas anderes Aussehen, offenbar weil sehr kleine Mengen eines fremden

(propionsauren) Silbersalzes sich allmählig in der Mutterlauge häuften und daher die letzte Fraction verunreinigten. Wir begnügten uns mit der Analyse der ersten Fraction.

0·1823 Grm. des im Vacuum getrockneten Silbersalzes gaben 0·1175 Grm. Ag, enthalten also 64·45 Procent Silber.

Essigsaures Silber enthält 64·67 Procent Silber.

Nachdem so der Nachweis der Essigsäure geführt war, galt es in der zuletzt vom Calciumsalz abdestillirten Säure, welche die Hälfte der gesammten ursprünglichen Säure ausmachte und voraussichtlich wohl kaum Ameisensäure, aber noch reichlich Essigsäure enthalten konnte, die letztere Säure möglichst zu eliminiren und auf Anwesenheit noch anderer Säuren zu prüfen. Zu diesem Zweck neutralisirten wir zur Hälfte mit kohlensaurem Kalk, destillirten die frei gebliebene Säure ab und schüttelten sie vier Mal successive mit kleinen Mengen Äther aus. Der ätherische Auszug hinterliess nach Beseitigung des Äthers eine ölige Säure, die, nachdem sie mit Wasser einige Mal gewaschen worden war, Verhalten und Eigenschaften der Methyläthylacrylsäure zeigte. (Das Calciumsalz war in kaltem Wasser nicht leicht löslich, krystallisirte in den ziemlich characteristischen kugeligen Warzen, gab mit Bleinitrat einen weissen, mit Kupferacetat einen himmelblauen Niederschlag.)

Die mit Äther gewaschene wässerige Säure wurde nun, um zur schwächsten der in Wasser löslichen flüchtigen Säuren zu gelangen, zu $^1/_3$ mit Soda gesättigt und davon abdestillirt, endlich das Destillat wieder zur Hälfte mit Soda gesättigt und abermals abdestillirt. Dies letzte Destillat mit kohlensaurem Kalk gesättigt, lieferte ein krystallinisches Calciumsalz, dessen Calciumgehalt bestimmt wurde.

0·2206 Grm. des bei 100° getrockneten Salzes lieferten 0·1632 Grm. $CaSO_4$, enthalten also 21·76 Procent Ca.

Die Rechnung verlangt für propionsaures Calcium 21·50 Procent Ca.

Die Übereinstimmung der Analyse mit der Rechnung ist in diesem Falle für das Vorhandensein von Propionsäure beweisend, weil weder hier noch in den zahlreichen parallelen, die flüchtigen Säuren betreffenden Untersuchungen, die wir

ausführten, das mindeste Indicium, das auf Buttersäure oder sonst eine höhere Fettsäure hingewiesen hätte, aufgefunden worden ist.

Die Prüfung auf flüchtige Säuren ist damit abgeschlossen.

Fixe Säure. Bei dem vorstehend dargelegten Gang der Untersuchung wurde nach Schütteln des rohen Oxydationsproductes mit Äther und Wasser sowohl in der ätherischen wie in der wässerigen Lösung eine in Wasser lösliche, fixe (wenn auch gegenüber Wasserdampf vielleicht nicht absolut fixe) Säure gefunden. Beim Verdampfen ihrer wässerigen Lösung hinterblieb sie in dem einen wie in dem anderen Fall als eine sehr dicke bräunliche Flüssigkeit, die auch bei langem Stehen an der Luft oder im Vacuum nicht eintrocknete, sich in Äther wie in Chloroform löslich erwies, beim Abkühlen mit Kältemischung oder selbst mit Kohlensäureschnee nicht krystallinisch erstarrte, sondern nur stockte, und nach längerem Stehen (meistens erst im Laufe von Monaten) kleine Kryställchen, doch stets nur in geringer Menge abschied.

Wenn man die durch Abdampfen in der Wärme oder auch Verdunsten im Vacuum erhaltene dickflüssige Säure wieder in Wasser löst, so beobachtet man fast immer die Abscheidung einer weichen harzartigen, manchmal auch öligen Substanz, die übrigens in Wasser nicht ganz unlöslich und in der conc. Säure offenbar leicht löslich ist. Sie zeigt selbst das Verhalten einer Säure und liefert mit Alkalien, wie mit Baryt oder Kalk lösliche Salze. Diese harzartige Säure dürfte hauptsächlich wohl von dem braunen Harz herstammen, das neben fixer Säure im Rückstand bleibt, wenn man das rohe Oxydationsproduct oder nach Schütteln mit Äther und Wasser, dessen ätherische Lösung der Destillation mit Wasserdampf unterwirft. Die Hartnäckigkeit, mit der die harzartige Säure die lösliche fixe Säure begleitet, erweckt sogar den Gedanken, dass vielleicht eine Beziehung zwischen beiden in der Weise stattfindet, dass die eine aus der anderen unter Umständen entstehen kann. Wie dem auch sei, die Trennung bietet jedenfalls Schwierigkeit. Wir haben versucht, der wässerigen Lösung der fixen Säure durch Schütteln mit Äther die harzartige Säure zu entziehen, haben aber keine befriedigende Trennung auf diese Weise erreicht.

Die einzige Substanz, die wir direct rein erhalten konnten, waren die früher erwähnten Krystalle, die sich aus der dicklichen Säure meist erst nach langer Zeit abscheiden und die etwas schneller zu beschaffen, manchmal durch einen mässigen Ätherzusatz und Stehenlassen in verschlossenem Gefäss gelang. Neben der harzartigen, wenig löslichen und der krystallinischen löslichen Säure muss aber mindestens noch eine dritte fixe Säure angenommen werden, die in Wasser leicht löslich ist und die wir bisher nur als gummiartige Masse erhalten haben. Wir versuchten die krystallinische Säure von ihren nicht krystallisationsfähigen Begleitern, die vielleicht auf die Krystallisation einen hemmenden Einfluss üben, durch Dialyse zu trennen, doch ohne Erfolg. Dagegen gelang uns eine annähernde Trennung, indem wir das Gemenge der fixen Säuren in Natriumsalz überführten und dann durch successiven Zusatz kleiner Mengen Schwefelsäure, jedesmaliges Abdunsten zur Trockne und Ausziehen mit Äther eine Reihe von Säurefractionen darstellten. Die auf diese Weise zuletzt erhaltenen Fractionen (welche die stärkere Säure enthalten mussten) lieferten reichlich Krystalle, während die erst erhaltenen Fractionen dicke Flüssigkeiten darstellten, die auch durch Aussaat von Krystallen nicht zur Krystallisation gebracht werden konnten. Als wir jedoch diese nicht krystallisirenden Säurefractionen durch Behandlung mit kohlensaurem Kalk in Salz überführten, bemerkten wir, dass bei längerer Digestion auf dem Wasserbade ein schwerlösliches krystallinisches Salz zur Ausscheidung kam, auf das wir in einer späteren Mittheilung zurückkommen werden und von dem wir einstweilen nur die Zusammensetzung $Ca(C_6H_9O_3)_2$ angeben. Die diesem Salz entsprechende Säure unterscheidet sich demnach von der krystallinischen fixen Säure, deren Beschreibung hier folgt, nur durch den Mindergehalt der Elemente des Wassers.

Was nun die krystallinische fixe Säure anlangt, mag dieselbe durch spontane Krystallisation aus dem Rohproduct oder durch die beschriebene Methode der fractionirten Abscheidung erhalten worden sein, so gelingt es leicht, dieselbe durch Umkrystallisiren aus Wasser und Auspressen zwischen Filterpapier rein zu erhalten. Die Analyse lieferte Zahlen, welche der Formel einer Dioxycapronsäure, $C_6H_{12}O_4$, entsprechen.

0·1795 Grm. der im Vacuum getrockneten Substanz gaben 0·3186 CO_2 und 0·1377 H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_{12}O_4$
C	48·41	48·65
H	8·52	8·11
O	—	43·24
		100·00

Diese Säure kann als eine Glycerinsäure entsprechend dem früher beschriebenen Hexenylglycerin betrachtet werden. Sie ist farblos und löst sich in Wasser vollständig klar (ohne harzige oder ölige Abscheidung) auf. Ihr Schmelzpunkt wurde bei 150°7 (corr.) gefunden, wobei die Correction für den herausragenden Quecksilberfaden 2°5 betrug. Bei einer Partie Säure von einer anderen Darstellung wurde der Schmelzpunkt zu 151°—152°5 (corr.) gefunden. Beim Schmelzen tritt keine Zersetzung ein; die geschmolzene Substanz erstarrt zu schönen mikroskopischen Tafeln und Prismen und zeigt bei neuerlichem Erhitzen wieder genau denselben Schmelzpunkt wie früher. So lang die Krystalle noch nicht ganz rein sind, zeigen sie einen niedrigeren Schmelzpunkt.

Form und Aussehen der Krystalle, wenn sie aus der unreinen dickflüssigen Säure sich allmählich ausscheiden, können ziemlich verschiedenartig sein. Wir haben manchmal feine Nadeln oder Nadelbüschel, die wie Ähren aussahen, andere Male ziemlich gut ausgebildete vierseitige Prismen, häufig abgerundete und deshalb wenig characteristische Formen beobachtet.

Aus der krystallinischen Säure haben wir durch Digestion mit kohlensaurem Kalk ein Salz dargestellt, das manchmal sofort, manchmal erst bei längerem Stehen krystallisirte. Das krystallinische Salz wurde aus Wasser umkrystallisirt und die erhaltene weisse krümelige Masse behufs der Analyse zwischen Papier ausgepresst.

I. 0·1544 Grm. abgepresstes Calciumsalz verloren im Vacuum 0·0163 Grm. H_2O und lieferten dann bei der Verbrennung 0·2029 CO_2, 0·0824 H_2O und 0·03 Asche, welche bei nachträglichem heftigen Glühen 0·0076 CO_2 abgab und 0·0224 CaO hinterliess.

II. 0·3373 Grm. abgepresstes Calciumsalz einer anderen Darstellung gaben bei der Verbrennung 0·4262 CO_2, 0·2141 H_2O und 0·0792 Asche, welche bei nachträglichem heftigen Glühen 0·0299 CO_2 abgab und 0·0493 CaO hinterliess.

	Gefunden		Berechnet für
	I.	II.	$Ca(C_6H_{11}O_4)_2+3H_2O$
C.....	37·18	36·89	37·11
H.....	7·10	7·05	7·22
Ca...	10·36	10·44	10·31
H_2O	10·56		13·92

Die Analysenresultate entsprechen der Formel $Ca(C_6H_{11}O_4)_2 + 3H_2O$. Die ungenaue Übereinstimmung bei der directen Krystallwasserbestimmung kommt daher, dass das Salz nur schwer und unvollständig sein Wasser im Vacuum abgibt; auch ist das getrocknete Salz sehr hygroskopisch.

Die Lösung des Calciumsalzes gab weder mit Bleinitrat noch mit Kupferacetat, noch mit Silbernitrat Niederschläge. Beim längeren Erhitzen mit dem letzteren Reagens entstand allmählig ein Silberspiegel, wobei ein Geruch ähnlich dem bei der Acetaldehydreaction auftrat.

Wie aus Vorstehendem ersichtlich ist, hat die Oxydation mit Sauerstoffgas zu denselben Resultaten geführt wie die mit Chromsäuremischung. Wenn uns nur im ersten Fall der sichere Nachweis des Methylpropylketons gelungen ist, so liegt dies wohl nur daran, dass wir mit viel grösseren Mengen gearbeitet haben, als bei den Chromsäureoxydationen.

Dass auch Silberoxyd mit Wasser als oxydirendes Agens angewandt dieselben Oxydationsproducte liefert, ist bereits oben erwähnt worden, und dürfte es nach dem Mitgetheilten nicht mehr nöthig sein, den Gang der Untersuchung und die dabei erhaltenen Resultate darzulegen.

Discussion der Resultate. Die bei der Oxydation des als Methyläthylacrolein bezeichneten, durch Condensation von zwei Mol. Propionaldehyd entstandenen Productes $C_6H_{10}O$ erhaltenen Resultate sind geeignet, die Constitution dieses Körpers vollständig aufzuklären. Von den 8 Eingangs für ihn aufgestellten Formeln lassen sich 7 mit den Oxydationsresultaten nicht vereinbaren; dagegen steht eine, nämlich die dort angeführte Formel III. mit diesen Resultaten so vollständig in Übereinstimmung, dass sich dieselben aus der durch III ausgedrückten Constitution ohne Weiteres ableiten lassen. Da dieselbe Formel III auch von der Reduction und von allen sonst beobachteten Eigenschaften und

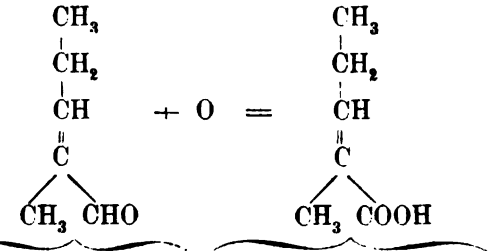
Reactionen des Condensationsproductes $C_6H_{10}O$ in befriedigendster Weise Rechenschaft gibt, so betrachten wir dieselbe als sicher festgestellt.

Um klare Einsicht in den Oxydationsprocess zu gewinnen, muss man sich gegenwärtig halten, dass das Methyläthylacrolein ein ungesättigter Aldehyd ist und als solcher der Wirkung des Sauerstoffes zwei Angriffspunkte darbietet. In viel geringerem Grade gilt dies wohl auch von denjenigen gesättigten Aldehyden, deren Aldehydkette CHO mit einem tertiären CH in Verbindung steht (z. B. Isobutyraldehyd oder der oben beschriebene Capronaldehyd); die Mehrzahl der gesättigten Aldehyde jedoch und namentlich die normalen werden lediglich nur an einer Stelle vom Sauerstoff angegriffen.

Gerade wie bei der früher beschriebenen Reduction der nascirende Wasserstoff einerseits auf die Aldehydkette einwirkt und dadurch den ungesättigten Alkohol $C_6H_{12}O$ liefert, anderseits an der Stelle der doppelten Bindung wirkt und dadurch Capronaldehyd gibt, der theilweise weiter in gesättigten Alkohol $C_6H_{14}O$ verwandelt wird, — so findet auch die Oxydation des Methyläthylacroleïns entweder an der Aldehydkette statt und liefert dann die ungesättigte Methyläthylacrylsäure, oder an der Stelle der doppelten Bindung, wodurch das Molecül gesprengt wird und zu Propionsäure, Essigsäure und Ameisensäure zerfällt. Durch gleichzeitige Einwirkung des Sauerstoffes an beiden Stellen kann Dioxycapronsäure entstehen. Endlich ist die Bildung des Methylpropylketons leicht zu begreifen, wenn auch vorläufig nicht feststeht, ob dabei der Angriff des Sauerstoffes erst an der einen oder der anderen Stelle des Molecüles statthat.

Folgende Gleichungen geben ein Bild von den neben einander verlaufenden Processen:

1)



α Methyl-β Athyl-Acroleïn α Methyl-β Äthyl-Acrylsäure.

2) $$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH \\ \| \\ C \\ \diagup\ \diagdown \\ CH_3\ CHO \end{array} + 4O + H_2O = \underbrace{\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COOH \end{array}}_{\text{Propionsäure}} + \underbrace{\begin{array}{l} CH_2 \\ | \\ COOH \end{array}}_{\text{Essigsäure}} + \underbrace{HCOOH}_{\text{Ameisensäure}}$$

3) $$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH \\ \| \\ C \\ \diagup\ \diagdown \\ CH_3\ CHO \end{array} + 2O + H_2O = \underbrace{\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CHOH \\ | \\ COH \\ \diagup\ \diagdown \\ CH_3\ COOH \end{array}}_{\text{Dioxycapronsäure}}$$

(Methyl-oxypropyl-oxyessigsäure).

4) $$\begin{array}{l} CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH \\ \| \\ C \\ \diagup\ \diagdown \\ CH_3\ CHO \end{array} + 2O = \underbrace{\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array}}_{\text{Methylpropylketon}} + CO_2$$

Die Gleichung 4) wird vielleicht verständlicher, wenn man sich den Hergang in folgender Weise vorstellt:

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH \\ \| \\ C \\ \diagup\ \diagdown \\ CH_3\ CHO \end{array} + H_2O = \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COH \\ \diagup\ \diagdown \\ CH_3\ CHO \end{array}$$

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ COH \\ \diagup\ \diagdown \\ CH_2\ CHO \end{array} + 2O = \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array} + H_2O + CO_2$$

Die Intervention der Elemente des Wassers in den Gleichungen 2) und 3) kann auffallend erscheinen, insofern zwar bei der Chromsäureoxydation Wasser in Überfluss zugegen war, dagegen bei der Sauerstoffoxydation mit trockenen Materialien gearbeitet wurde. Allein abgesehen davon, dass wir im letzteren Falle keinen besonderen Werth auf vollständigen Ausschluss von Feuchtigkeit gelegt haben, kann auch Wasser durch den Oxydationsprocess selbst geliefert worden sein. Nascirende Ameisensäure konnte theilweise zu Wasser und Kohlensäure oxydirt werden. Die harzigen, wenig löslichen und anderseits die löslichen doch nicht krystallinischen Producte, welche als constante Begleiter der krystallisirten Dioxycapronsäure, die stets nur in kleiner Menge erhalten wird, auftreten, können möglicherweise einer Wasserabspaltung ihre Entstehung verdanken.

Methyläthylacrylsäure.

Die Trennung dieser Säure in Form eines wohl krystallisirten Calciumsalzes von den übrigen Oxydationsproducten ist im vorstehenden Capitel beschrieben worden. Durch Zersetzung des Calciumsalzes mittelst verdünnter Schwefelsäure und Ausschütteln mit Äther gewinnt man die Säure als eine in Wasser wenig lösliche ölige Flüssigkeit, die sich ohne Zersetzung destilliren lässt und bei etwas erniedrigter Temperatur krystallisirt. Diese beiden Eigenschaften lassen sich zweckmässig zu ihrer völligen Reindarstellung benützen.

Geht man von einem annähernd reinen Calciumsalz aus, so ist die Destillation für die Reinigung der in Freiheit gesetzten Säure nicht von nöthen. Es genügt sie bei 0° krystallisiren zu lassen, den flüssig gebliebenen, minder reinen Theil abzugiessen, die Krystalle zwischen Filterpapier auszupressen, darauf zu schmelzen, wieder erstarren zu lassen, auszupressen u. s. f. bis der Schmelzpunkt sich nicht mehr verrückt und die Eigenschaften der bei theilweisem Erstarren abgegossenen flüssigen Partie mit denen der krystallisirten zusammenfallen.

Wenn das zur Darstellung der Säure verwendete Calciumsalz minder rein ist, so empfiehlt es sich, die daraus abgeschiedene Säure, deren Erstarrungspunkt selbst durch einen kleinen Gehalt an flüchtigen fetten Säuren stark herabgedrückt wird, erst durch

Destillation zu reinigen, wodurch flüchtige fette Säuren und kleine Mengen harziger Substanzen, die bei der Destillation im Rückstande bleiben, beseitigt werden, und dann zur Ergänzung der Reinigung dem obigen Krystallisationsverfahren, mit Anwendung der theilweisen Erstarrung und des Auspressens der Krystalle zwischen Papier, zu unterwerfen.

Durch Umkrystallisiren aus Lösungsmitteln lässt sich die Reinigung der Säure nicht bewerkstelligen, denn sie ist in Wasser zu wenig löslich (ausserdem mit Wasserdampf flüchtig), anderseits in Äther, Schwefelkohlenstoff, Chloroform, Benzol dermassen leicht löslich, dass erst die letzten Tropfen der verdunstenden Lösung krystallisiren. Auch wässeriger Alkohol ist für diesen Zweck nicht brauchbar, weil eine damit bereitete Lösung sich sowohl beim Abkühlen als beim Verdunsten über Schwefelsäure in zwei Schichten spaltet.

Die Zusammensetzung der Säure ist durch folgende Analysen festgestellt, die zur Formel $C_6H_{10}O_2$ führen:

I. 0·3309 Grm. eines nichtdestillirten, bloss durch fractionirtes Schmelzen und Auspressen gereinigten Productes, das einen Stich ins Gelbliche zeigte, durch Liegen über Schwefelsäure getrocknet, gaben bei der Verbrennung 0·7618 Grm. CO_2 und 0·2618 Grm. H_2O.

II. 0·2533 Grm. eines rein weissen, durch Destillation, dann Krystallisation und Auspressen gereinigten, über Schwefelsäure getrockneten Productes gaben 0·586 Grm. CO_2 und 0·2033 Grm. H_2O.

	Gefunden		Berechnet für
	I.	II	$C_6H_{10}O_2$
C	62·79	63·09	63·16
H	8·79	8·92	8·77
O	—	—	28·07
			100·00

Die Methyläthylacrylsäure krystallisirt in farblosen, grossen Prismen, über welche Herr Prof. v. Lang uns Folgendes mitgetheilt hat:

Krystallsystem: monosymmetrisch.

Elemente: $a : b : c = 1·4087 : 1 : 0·3847$; $ac = 104° 38'$.

Beobachtete Formen: 110, 011.

Habitus: prismatisch durch Vorherrschen der Flächen 110.

Der für Verschiebung des Thermometer-Nullpunktes corrigirte Schmelzpunkt wurde bei 24°4 gefunden.

Die Bestimmung des specifischen Gewichtes der geschmolzenen Substanz bei 25° (corr.) ergab 0·9812 bezogen auf Wasser von derselben Temperatur.

Der corrigirte Siedepunkt unter dem auf 0° reducirten Druck 750 Mm. wurde bei 213° gefunden, wobei die berücksichtigte Fadencorrection 5°7 ausmachte.

Der Geruch der Säure ist sehr charakteristisch, ziemlich angenehm, kaum sauer, von dem der niederen fetten Säuren völlig verschieden, dagegen einigermassen ähnlich dem der Methylpropylessigsäure.

Wir haben das Calciumsalz der Säure $Ca(C_6H_9O_2)_2+4H_2O$ schon früher beschrieben und auch erwähnt, dass dasselbe in Wasser oder wässerigem Alkohol sehr viel leichter löslich in der Hitze als in der Kälte ist, sowie dass seine Lösung beim Kochen etwas Säure abgibt. Die Lösung des reinen Salzes färbt sich beim Kochen nicht, ja wir haben uns überzeugt, dass sie im zugeschmolzenen Rohr selbst höhere Temperatur und lange Einwirkung der Hitze ohne tiefer greifende Zersetzung verträgt.

Eine Calciumsalzlösung durch 40 Stunden auf 110—120°, dann durch 20 Stunden auf 150° erhitzt, blieb farblos und unverändert; auch konnten wir die unveränderte Methyläthylacrylsäure wieder daraus abscheiden.

Das Aussehen des auskrystallisirenden Calciumsalzes kann nach Umständen ziemlich verschieden sein. Häufig, namentlich wenn es aus nicht ganz reinen Lösungen sich abscheidet, beobachtet man ziemlich charakteristische harte, halbkugelförmig auf der Glaswand aufsitzende Krystallwarzen. In anderen Fällen nimmt man gut ausgebildete Prismen oder feine seideglänzende Nadeln wahr, die oft radial von einzelnen Punkten auslaufen.

Das Silbersalz haben wir durch Digestion der freien Säure mit viel Wasser und überschüssigem Silbercarbonat im Wasserbade dargestellt, wobei nur eine geringe Reduction eintrat. Aus der heissen Lösung krystallisirte beim Erkalten das Salz in Nadeln und Blättchen, die auf einer Thonplatte abgesaugt, dann im Vacuum über Schwefelsäure nichts mehr an Gewicht verloren. Es entsprach der Formel $AgC_6H_9O_2$.

Erste Silbersalzfraction. 0·2878 Grm. hinterliessen beim Glühen 0·1407 Grm. Silber, enthalten also 48·89 Proc. Ag.

Letzte Salzfraction. 0·1207 Grm. hinterliessen beim Glühen 0·0592 Grm. Silber, enthalten also 49·05 Proc. Ag.

Für $AgC_6H_9O_2$ berechnen sich 48·87 Proc. Ag.

Wir haben folgende Reactionen noch beobachtet: Die Calciumsalzlösung der Methyläthylacrylsäure gibt mit Silbernitrat einen weissen Niederschlag, der sich in kochendem Wasser ohne Reduction löst und beim Erkalten sich in Form feiner Krystallblättchen wieder ausscheidet, — mit Bleinitrat einen weissen, sich bald zu Klumpen ballenden Niederschlag, der sowohl im Überschuss von Bleinitrat, als anderseits auch in Äther löslich ist, in kochendem Wasser schmilzt und theilweise auch darin sich löst, — mit Kupferacetat einen himmelblauen Niederschlag, der im überschüssigen Kupferacetat sich nicht löst, doch gibt das Filtrat vom Niederschlag beim Kochen wieder einen, wenn auch nicht sehr bedeutenden Niederschlag; beim Kochen mit Wasser löst sich der Kupferniederschlag nicht auf, erleidet auch keine Reduction, dagegen löst er sich in überschüssigem essigsaurem Calcium auf. Wenn daher methyläthylacrylsaures Calcium mit den Salzen der niedrigen fetten Säuren gemengt ist, so hängt es nur vom Verhältniss ab, ob ein Zusatz von Kupfersalz noch bei gewöhnlicher Temperatur, oder zwar nicht mehr bei gewöhnlicher Temperatur aber noch beim Aufkochen, oder endlich weder in der Kälte noch in der Hitze einen Niederschlag hervorbringt.

Das methyläthylacrylsaure Calcium gibt ferner mit Zinkacetat einen weissen, — mit Ferridchlorid einen rothen anfangs öligen Niederschlag (möglicherweise ein Gemenge von öliger freigewordener Säure mit basischem Salz.)

Die Säure vermag sich additionell mit Brom zu verbinden.

Reduction der Methyläthylacrylsäure. Für die Constitution der Säure schien es von Interesse zu ermitteln, ob sie fähig sei, direct Wasserstoff aufzunehmen und ob dabei dieselbe Capronsäure entstehe, die von uns aus dem Methyläthylacrolein auf einem ganz anderen Wege, nämlich durch Reduction zu Capronaldehyd und Hexylalkohol und dann Oxydation dieser Reductionsproducte erhalten worden ist.

Wir haben die Reduction in zweierlei Weise, einmal in kleinem Massstabe mit Bromwasserstoff und Zink, das andere Mal mit Jodwasserstoff durchgeführt und in beiden Fällen Capronsäure erhalten. Im ersteren Falle wurde die Methyläthylacrylsäure (das angewandte Präparat war nicht ganz rein und blieb daher auch in der Kälte flüssig) mit Bromwasserstoffgas in der

Kälte gesättigt, dann mit wässeriger Bromwasserstoffsäure und Zinkdrehspänen behandelt, endlich das Product unter Wasserzusatz abdestillirt. Es ging ein Öl nebst sauerem Wasser über. Das Destillat wurde zunächst in Calciumsalz später in Silbersalz verwandelt. Das Calciumsalz wurde in Form von Krystallspiessen erhalten, die anders aussehen, als das methyläthylacrylsaure Calcium und viel leichter in kaltem Wasser löslich waren als dieses. Das Silbersalz wurde beim Erkalten seiner heissen Lösung in Form voluminöser weisser Flocken gewonnen, die sich unter dem Mikroskop als aus schönen langen Nadeln zusammengesetzt zeigten. Beim Kochen der wässerigen Säurelösung mit kohlensaurem Silber sowie beim Abdampfen der Silbersalzlösung wurde keine Reduction beobachtet.

0·2382 Grm. Silbersalz, das früher auf einer porösen Thonplatte gelegen war, nahm im Vacuum nicht mehr an Gewicht ab und hinterliess beim Glühen 0·115 Grm. enthielt also 48·28 Proc. Silber.

Capronsaures Silber $AgC_6H_{11}O_2$ enthält 48·43 Proc. Silber.

Die Calciumsalzlösung dieser Capronsäure gab mit Kupferacetat einen blaugrünen, mit Bleinitrat einen weissen Niederschlag, gerade wie wir früher bei der aus Capronaldehyd durch Oxydation erhaltenen Capronsäure beobachtet hatten.

Für die Reduction mittelst Jodwasserstoff wurde die Methyläthylacrylsäure mit einem bedeutenden Überschuss einer gesättigten wässerigen Jodwasserstofflösung, in der sie sich vollständig löste, in ein Rohr eingeschmolzen. Beim Aufbewahren schied sich nach einiger Zeit ein dunkles Öl oben ab, das vielleicht ein Jodwasserstoffadditionsproduct sein mochte. Ohne Rücksicht darauf wurde das Rohr durch 24 Stunden auf 150—160° erhitzt, darauf der von ausgeschiedenem Jod dunkle Röhreninhalt mit Wasser stark verdünnt und destillirt, wobei ein Öl nebst sauerem Wasser und wenig Jodwasserstoff überging. Aus dem wässerigen Destillat wurde die darin gelöste ölige Säure durch nochmalige Destillation, wobei die Jodwasserstoffsäure zurückblieb, Sättigen des Destillates mit Soda, Abdampfen der Lösung und Wiederabscheiden der Säure mit Schwefelsäure gewonnen. Die Ausbeute an öliger Säure blieb hinter der theoretisch zu erwartenden, wenn die Methyläthylacrylsäure sich vollständig und ausschliesslich in

Capronsäure verwandelt hätte, erheblich zurück. Doch bestand das erhaltene Product aus reiner Capronsäure, die bei der Destillation innerhalb eines Grades überging und, im Gegensatze zu Methyläthylacrylsäure, Bromwasser nicht zu entfärben vermochte.

Die Analyse gab folgende für Capronsäure stimmende Werthe:

0·2218 Grm. lieferten 0·5057 Grm. CO_2 und 0·2064 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_{12}O_2$
C	62·18	62·07
H	10·34	10·34
O	—	27·59
		100·00

Der corrigirte Siedepunkt unter dem auf 0° reducirten Druck 743·8 Mm. wurde bei 194°7 gefunden, wobei die Correction für den herausragenden Quecksilberfaden 5°2 betrug.

Die erhaltene Säure wurde durch Behandlung mit Calciumcarbonat in Calciumsalz verwandelt und dessen Lösung bei gewöhnlicher Temperatur im Vacuum verdunstet. Nachdem sich ein amorphes Salzhäutchen gebildet hatte, erstarrte beim Kratzen der Salzhaut mit einem Glasstabe die offenbar übersättigte Lösung zu einem Brei von feinen Krystallnädelchen. Dieselben entsprachen der Formel $Ca(C_6H_{11}O_2)_2+3H_2O$, wie folgende Analyse zeigt:

0·2912 Grm. der abgesaugten und zwischen Papier ausgepressten Krystalle verloren beim Stehen über Schwefelsäure 0·0487 Grm. H_2O und erlitten dann im Vacuum keinen Verlust mehr.

0·3634 Grm. desselben ausgepressten Salzes gaben bei der Verbrennung 0·5584 Grm. CO_2, 0·2856 Grm. H_2O und 0·0978 Grm. Asche, welche bei heftigem Glühen 0·0353 Grm. CO_2 abgab und 0·0625 Grm. CaO hinterliess.

	Gefunden		Berechnet für $Ca(C_6H_{11}O_2)_2+3H_2O$
	I	II	
C	—	44·56	44·44
H	—	8·73	8·64
O	—	—	34·57
Ca	—	12·28	12·35
			100·00
H_2O	16·72	—	16·67

Eine andere Partie des Calciumsalzes wurde aus Alkohol umkrystallisirt und zwischen Papier ausgepresst. Sie entsprach der Formel $Ca(C_6H_{11}O_2)_2+H_2O$.

0·2932 Grm. Calciumsalz gaben 0·5013 Grm. CO_2. 0·217 Grm. H_2O und 0·0955 Grm. Asche, welche bei heftigem Glühen 0·0372 Grm. CO_2 abgab und 0·0583 Grm. CaO hinterliess.

	Gefunden	Berechnet für $Ca(C_6H_{11}O_2)_2+H_2O$
C	50·09	50·00
H	8·22	8·33
O	—	27·78
Ca	14·20	13·89
		100·00

Das Verhalten des hier erhaltenen Calciumcapronates beim Abdampfen seiner wässerigen Lösung in der Wärme stimmte ganz überein mit dem des Salzes, das wir, wie früher angegeben, aus einer Capronsäure bereitet hatten, die von (durch Reduction des Methyläthylacroleïns gewonnenen) Capronaldehyd oder Hexylalkohol herstammte. Sowie dort beobachteten wir auch hier die Abscheidung einer amorphen klebrigen Haut in der Hitze, die beim Erkalten sich wieder auflöste und beim Abdampfen hinterblieb ein amorpher, firnissartiger Rückstand, der nach längerem Stehen im befeuchteten Zustande sich in ein Aggregat von Krystallnadeln verwandelte.

Nach der vorstehenden Darlegung halten wir uns zu dem Schlusse berechtigt, dass die Methyläthylacrylsäure bei ihrer Reduction Capronsäure liefert und dass diese mit Rücksicht auf die beobachtete Übereinstimmung im Siedepunkt, im Verhalten des Calcium- und Silbersalzes, in den Reactionen, endlich in der Zusammensetzung des aus Alkohol krystallisirten Calciumsalzes identisch ist mit der aus den Reductionsproducten des Methyläthylacroleïns durch Oxydation gewonnenen, als Methylpropylessigsäure erkannten Capronsäure. Auffallend, jedoch unseres Erachtens nicht von entscheidender Bedeutung ist der verschiedene Krystallwassergehalt, den wir an dem aus Wasser krystallisirten Calciumcapronat verschiedenen Ursprungs ($5H_2O$ bei dem aus Capronaldehyd, — $4H_2O$ bei dem aus Hexylalkohol,

$-3H_2O$ bei dem aus Methyläthylacrylsäure dargestellten Salz) beobachtet haben. Wir können von dieser Verschiedenheit vorläufig keine Rechenschaft geben.

Bromadditionsproduct der Methyläthylacrylsäure. Wenn man in die flüssige (das ist nicht vollständig reine) Säure oder in die Schwefelkohlenstofflösung der Krystalle Brom eintropfen lässt, während man durch Wasser kühlt, so verschwindet das Brom und meist scheiden sich schon bevor alles Brom eingetragen ist, grosse weisse Krystalle des Bromadditionsproductes aus. Nebenher entsteht auch etwas HBr, doch nur in sehr geringer Menge. Mitunter krystallisirt das Product nicht, sondern bleibt auch nach völliger Verdunstung des Schwefelkohlenstoffs und längerem Stehen flüssig, erstarrt aber sofort, wenn Kryställchen der Bromverbindung hineingeworfen werden.

Bei einer in etwas grösserem Massstabe vorgenommenen Bereitung des Additionsproductes, zu der wir eine nicht ganz reine Methyläthylacrylsäure verwendeten, erhielten wir ausser den Krystallen des Bromürs noch eine dicke gelbe Mutterlauge, die auch bei längerem Stehen nur wenig Krystalle nachträglich abschied, im Bromgehalt aber und auch im Verhalten zu Wasser sich von der krystallisirten Verbindung nur wenig unterschied. Es scheint demnach, dass unter Umständen kleine Verunreinigungen genügen können, um die Krystallisation des Bromürs (selbst in Gegenwart von Krystallen desselben) zu verhindern.

Zwischen destillirter Methyläthylacrylsäure und solcher, die niemals einer Destillation unterworfen worden ist, zeigte sich im Verhalten zu Brom sowie auch im Schmelzpunkt des erhaltenen Bromürs keinerlei Unterschied. Dadurch wird der schon früher gezogene Schluss bestätigt, dass die Methyläthylacrylsäure trotz ihres hohen Siedepunktes durch Destillation keine Veränderung erleidet.

I. 2·5497 Grm. Methyläthylacrylsäure bei Gegenwart von etwas Schwefelkohlenstoff mit Brom bis zu schwacher Rothfärbung versetzt, nahmen 3·4817 Grm. Brom auf. Nach dem Verhältniss von 2Br auf $C_6H_{10}O_2$ würden sich 3·5785 Grm. Brom berechnen.

II. 0·6803 Grm. Säure nahmen 0·9532 Grm. Brom auf, während nach der Theorie sich 0·9548 Grm. berechnen.

Das krystallinische Product wird durch Auspressen zwischen Filterpapier, Umkrystallisiren aus Äther, in dem es sehr leicht

löslich ist, und abermaliges Auspressen sehr leicht rein erhalten. Die folgenden Brombestimmungen entsprechen der Formel $C_6H_{10}O_2 . Br_2$, die nach dem Resultat der angeführten Bromadditionen zu erwarten war.

I. 0·2674 Grm. krystallisirtes Bromadditionsproduct mit Kalk geglüht gaben 0·36604 Grm. AgBr, enthalten demnach 58·25 Proc. Brom.

II. 0·2743 Grm. Substanz mit Kalk geglüht, gaben 0·3768 Grm. AgBr entsprechend einem Bromgehalt von 58·45 Proc.

Die Theorie verlangt für Dibromcapronsäure $C_6H_{10}O_2Br_2$ 58·39 Proc. Brom.

Der corrigirte Schmelzpunkt wurde bei 97°6 gefunden, wobei die Fadencorrection 1°1 betrug.

Über die Krystallform hatte Herr Professor v. Lang die Güte uns Folgendes mitzutheilen:

Krystallsystem: Monosymmetrisch.

Elemente: $a : b : c = 0{\cdot}9565 : 1 : 1{\cdot}5331$, $ac = 94° 36'$.

Beobachtete Flächen: 001 und 110 vorherrschend, 011 untergeordnet.

Spaltbarkeit: Unvollkommen parallel 001.

Gelegentlich einer Brombestimmung, die wir statt durch Glühen mit Kalk vielmehr durch Eintragen von festem Natriumamalgam in die wässerig-alkoholische Lösung des Bromürs durchzuführen suchten und bei der wir (vielleicht weil durch Wirkung von Wasser und Ätznatron etwas C_5H_9Br entstanden und durch Wasserstoff weggeführt worden ist) etwas zu wenig Brom (57·37 statt 58·39%) fanden, untersuchten wir auch, was für ein Reductionsproduct neben HBr gebildet worden ist.

Zu diesem Behufe wurde das Filtrat vom AgBr mit Äther ausgeschüttelt und dadurch ein Öl ausgezogen, das leichter war als Wasser, erhebliche Mengen von Bromwasser entfärbte und sich dadurch in ein schweres Öl verwandelte. Dies letztere mit einem Kryställchen $C_6H_{10}O_2Br_2$ versetzt, erstarrte zu einer Krystallmasse, die nach Auspressen zwischen Papier und Trocknen den Schmelzpunkt 95—96° zeigte. Aus der Bildung dieses Körpers durch Bromaddition darf mit Sicherheit geschlossen werden, dass das Hauptproduct der Reduction des Bromürs $C_6H_{10}O_2Br_2$ in weingeistiger Lösung mittelst Natriumamalgam die ungesättigte Säure $C_6H_{10}O_2$ ist. Ob nicht neben dieser

Säure vielleicht auch Capronsäure $C_6H_{12}O_2$ zugleich entsteht, bleibt vorläufig unentschieden.

Verhalten des Bromürs $C_6H_{10}O_2Br_2$ zu Wasser. Diese Reaction bot uns noch aus dem Gründe ein besonderes Interesse, als man erwarten durfte unter den Reactionsproducten eine Dioxycapronsäure anzutreffen, die mit der durch directe Oxydation von Methyläthylacrolein in kleiner Menge erhaltenen krystallinischen Säure identisch sein konnte.

Das Bromadditionsproduct $C_6H_{10}O_2Br_2$ wurde mit der circa zwölffachen Menge Wasser in Glasröhren eingeschmolzen und durch 30 Stunden auf 100° erhitzt. Beim Öffnen der Röhren entwich Kohlensäure, die durch Barytwasser nachgewiesen wurde. Das krystallinische Bromür war verschwunden und statt seiner fand sich auf dem Grund der Röhren ein schweres hellgelbliches Öl, doch in verhältnissmässig nicht sehr bedeutender Menge ausgeschieden. Ohne Rücksicht darauf wurde der gesammte Inhalt der Röhren in einen Kolben gegossen und so lange destillirt bis eine schwache Bromwasserstoffreaction im Destillate auftrat; auf den Rückstand wurde dann noch einige Male successive Wasser aufgegossen und jedesmal ein dem aufgegossenen Wasser gleiches Volumen Wasser abdestillirt.

Das Destillat besass stark sauere Reaction, die nicht von HBr herrührte, denn gerade die zuerst destillirten Partien, die ganz frei von HBr waren, zeigten die stärkste sauere Reaction; ausserdem war das oben erwähnte schwere Öl (und zwar schon am Beginn der Destillation) in das Destillat übergegangen, endlich musste noch eine stark riechende Substanz in dem Destillat enthalten sein, deren Geruch uns lebhaft an den bei der Oxydation des Methyläthylacroleïns beobachteten (von Methylpropylketon herrührenden) erinnerte.

Behufs Trennung der im Destillat enthaltenen Substanzen kochten wir mit kohlensaurem Kalk am Rückflusskühler bis zu neutraler Reaction und destillirten dann das schwere Öl und die riechende Substanz zusammen mit Wasser von dem Calciumsalz ab. Dieses letztere, vom überschüssigen kohlensauren Kalk getrennt, krystallisirte in Warzen aus, deren Anblick an methyläthylacrylsaurem Kalk erinnerte. Durch Auspressen zwischen Filterpapier gereinigt, zeigte es mit Silbernitrat, Kupferacetat,

Bleinitrat die Reactionen des genannten Salzes und lieferte bei Zerlegung mit Schwefelsäure und Ausschütteln mit Äther eine ölige Säure, die den Geruch der Methyläthylacrylsäure besass. In einem unserer Versuche erstarrte die abgeschiedene Säure zu grossen Krystallen, deren Schmelzpunkt bei 23°7—24°8 (statt 24°4) gefunden wurde. In einem anderen Versuche erstarrte die in Freiheit gesetzte Säure zwar nicht, erwies sich aber fähig, sich additionell mit Brom zu verbinden und lieferte damit ein schweres Öl, das auf Zusatz eines Krystallsplitterchens von $C_6H_{10}O_2Br_2$ krystallinisch erstarrte. Die erhaltenen, zwischen Papier ausgepressten Krystalle schmolzen gegen 94° (statt 97°6). Durch die vorstehenden Versuche ist festgestellt, dass die durch Einwirkung von Wasser auf das Bromür $C_6H_{10}O_2Br_2$ entstandene, in das Destillat übergegangene Säure Methyläthylacrylsäure ist.

Das schwere Öl und die riechende Substanz, die oben vom Calciumsalz der Methyläthylacrylsäure abdestillirt worden sind, wurden, da sie bei der Destillation mit Wasser stets zuerst übergehen, durch eine Reihe von Destillationen, indem immer der flüchtigere Theil neuerdings destillirt wurde, von dem begleitenden Wasser annähernd getrennt. Als letztes flüchtigstes Destillat erhielt man zwei Schichten und war nun die riechende Substanz sowohl in dem schweren Öl als in der darauf schwimmenden wässerigen Schicht gelöst. Wir setzten Natriumbisulfit zu, nachdem wir uns vorher überzeugt hatten, dass die riechende Substanz davon gelöst wird, schüttelten durch und trennten die wässerige Bisulfitlösung von dem ungelösten schweren Öl. Aus der Bisulfitlösung konnte durch Neutralisiren mit Soda, Abdestilliren und wiederholte Destillation der flüchtigeren Partie des Destillates eine kleine Menge eines leichten Öles abgeschieden werden, das den deutlichen Geruch von Methylpropylketon besass, sowie dieses in Wasser nicht ganz unlöslich war, ammoniakalische Silberlösung nicht reducirte[1], Bromwasser nicht entfärbte, in

[1] An dem Product einer anderen Darstellung beobachteten wir eine reducirende Wirkung, die es auf Chromsäuremischung bei gewöhnlicher Temperatur übte. Man muss aus dieser Reaction, die dem Methylpropylketon nicht zukommt, auf Verunreinigung mit einer reducirenden Substanz schliessen.

Natriumbisulfit sich unter Erwärmung löste und beim Erkalten Krystalle lieferte. Wir haben es nicht für nöthig gehalten, diesen Körper, den wir unzweifelhaft für Methylpropylketon halten, zu analysiren.

Das mit Natriumbisulfit gewaschene schwere Öl wurde noch mit Wasser gewaschen, mit Chlorcalcium getrocknet und destillirt. Der grössere Theil ging zwischen 110° und 115° über; doch war ausserdem noch ein bedeutend schwerer flüchtiger Körper zugegen, dessen Menge für die Untersuchung zu gering war.

Die von 110° bis 115° übergegangene Substanz war fähig sich direct mit Brom zu verbinden, doch war die Bromaddition von HBr-entwicklung begleitet. Das Additionsproduct mit Kali, dann Wasser gewaschen und mit Chlorcalcium getrocknet, stellte eine wasserhelle farblose Flüssigkeit von ziemlich reizendem Geruch dar, die auch in Kältemischung nicht fest wurde.

Die Art der Entstehung, die Eigenschaften, endlich die folgenden Analysen machen es sehr wahrscheinlich, dass die von 110° bis 115° siedende Substanz gebromtes Amylen C_5H_9Br ist und dass das daraus erhaltene Bromadditionsproduct der Formel $C_5H_9Br_3$ entspricht.

0·3296 Grm. der Fraction (110—115°) gaben bei der Verbrennung 0·515 Grm. CO_2 und 0·1898 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für C_5H_9Br
C	42·61	40·27
H	6·40	6·04
Br	—	53·69
		100.00

0·2604 Grm. des Bromadditionsproductes mit Kalk geglüht, lieferten 0·4618 Grm. AgBr, woraus man 75·46 Proc. Brom berechnet.

Die Theorie verlangt 77·67 Proc. Brom für $C_5H_9Br_3$.

Trotz der ungenauen Übereinstimmung wird man die oben gegebene Deutung der Analysen um so eher für richtig halten dürfen, als bekanntlich Fittig und seine Schüler, denen wir eingehende Untersuchungen über die Einwirkung von Wasser oder Alkalicarbonaten auf die Bibrom- und Hydrobromverbindungen der ungesättigten Säuren verdanken, das Auftreten derartiger Spaltungsproducte wie das Bromamylen beobachtet haben; auch

hat insbesondere A. B. Howe[1] bei der Zersetzung des Bromürs der Äthylcrotonsäure (die man auch als α Äthyl-β Methyl-Acrylsäure betrachten kann und die also der hier beschriebenen α Methyl-β Äthyl-Acrylsäure nicht nur isomer, sondern auch sehr ähnlich constituirt ist) ein gebromtes Amylen erhalten, dessen Analyse von der Rechnung ganz in derselben Weise, nur noch stärker abwich, als dies in unserem Versuche der Fall war. Offenbar war bei Howe wie bei uns das Bromamylen mit einem kohlenstoffreicheren Körper verunreinigt, den wir aus Mangel an Material vorläufig nicht isoliren konnten.

Die Untersuchuug des nach der Einwirkung von Wasser auf das Bromür $C_6H_{10}O_2Br_2$ erhaltenen Destillates hat nach Vorstehendem zum Nachweis von Methyläthylacrylsäure, Methylpropylketon und gebromtem Amylen geführt, welchen Reactionsproducten sich noch Kohlensäure anschliesst, die beim Öffnen der Röhren entwichen ist.

Im wässerigen Destillationsrückstand war reichlich Bromwasserstoff enthalten, ausserdem aber auch eine fixe organische Säure, die wir in einer unserer Operationen durch Ausschütteln mit Äther, in einer anderen durch Umwandlung in Bleisalz von der Bromwasserstoffsäure trennten. Bei dem ersteren Verfahren nahmen wir dreissig ätherische Ausschüttelungen vor und überzeugten uns dabei, dass die ersten zehn Ausschüttelungen das relativ reinste, nach Verdunsten des Äthers krystallisirende Product liefern, während sich bei den späteren Ausschüttelungen relativ immer mehr Verunreinigungen beimischen, so dass man zuletzt aus dem ätherischen Auszug nur einen dicklichen gelben Rückstand erhält, der kaum mehr Krystalle gibt.

Bei dem zweiten Verfahren digerirten wir den wässerigen Destillationsrückstand in der Wärme mit Bleicarbonat, dampften ab und zogen den Rückstand mit Alkohol aus. Der alkoholische Auszug hinterliess einen amorphen Rückstand, der in Wasser gelöst und, da er immer noch etwas Bromblei enthielt, mit wenig Tropfen Silbersulfat versetzt wurde. Das Filtrat vom Niederschlag wurde durch Schwefelwasserstoff von Blei und Silber befreit und lieferte dann beim Abdampfen Krystalle der fixen Säure.

---

[1] Liebig's Annal. 200 p. 38.

Die erhaltenen Krystalle wurden durch Umkrystallisiren und Auspressen zwischen Papier gereinigt. Wir stellten versuchsweise das Blei-, Kupfer-, Cadmium- und Zinksalz dieser krystallinischen Säure dar, erhielten aber diese Salze nur als amorphe, firnissartig eintrocknende Rückstände.

Die Zusammensetzung der freien Säure entspricht einer Dioxycapronsäure, $C_6H_{12}O_4$.

0·2418 Grm. der im Vacuum getrockneten Krystalle gaben 0·4262 Grm. CO_2 und 0·1708 Grm. H_2O und hinterliessen zugleich 0·0024 Grm. Asche.

Bringt man die Asche, die natürlich nur als Verunreinigung darin enthalten ist, vom Gewicht der Substanz in Abzug, so berechnet man in 100 Theilen aschenfreier Substanz:

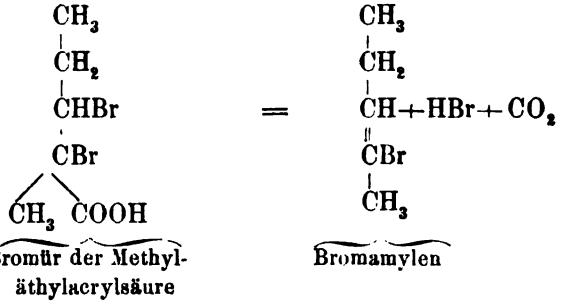
	Gefunden	Berechnet für $C_6H_{12}O_4$
C	48·55	48·65
H	7·93	8·11
O	—	43·24
		100·00

Der corrigirte Schmelzpunkt wurde bei 150°3—151°8 gefunden. Dies stimmt mit dem Schmelzpunkt, der für die durch Oxydation des Methyläthylacroleïns erhaltene Dioxycapronsäure gefunden wurde, so nahe überein, dass man die Identität der beiden Säuren für höchst wahrscheinlich halten darf.

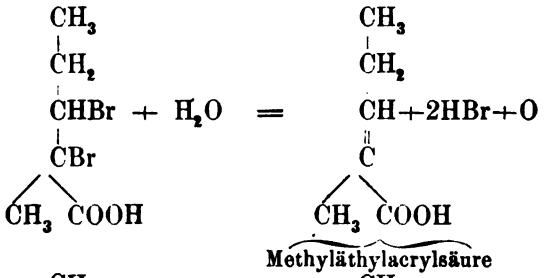
Eine der hier erhaltenen ähnliche, aber jedenfalls davon verschiedene Dioxycapronsäure hat Howe aus dem Bromür der Äthylcrotonsäure erhalten und als Hexerinsäure bezeichnet, wie denn überhaupt seine Untersuchung und die unserige, so weit es sich um die Einwirkung von Wasser auf die beiden isomeren Bromüre $C_6H_{10}O_2Br_2$ handelt, parallel laufen und sich gegenseitig zur Bestätigung dienen. Nur scheint Howe das dem von uns beobachteten Methylpropylketon entsprechende Reactionsproduct (es dürfte in seinem Falle Diäthylketon gewesen sein) übersehen zu haben.

Wir haben aus unserer Dioxycapronsäure ein krystallinisches Calciumsalz erhalten, welches gegen Bleinitrat, Kupferacetat endlich Silbernitrat sich genau ebenso verhielt wie das früher besprochene Calciumsalz der durch Oxydation von Methyläthylacroleïnerhaltenen Dioxycapronsäure.

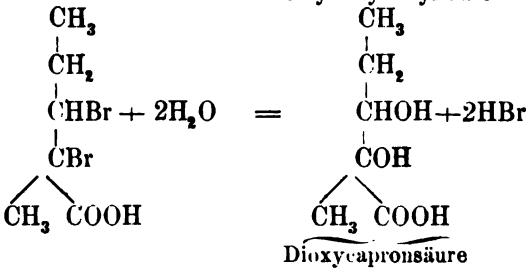
Die Einwirkung von Wasser auf das Bromür $C_6H_{10}O_2Br_2$ lässt sich durch folgende Gleichungen darstellen:

1)


Bromür der Methyläthylacrylsäure — Bromamylen

2)


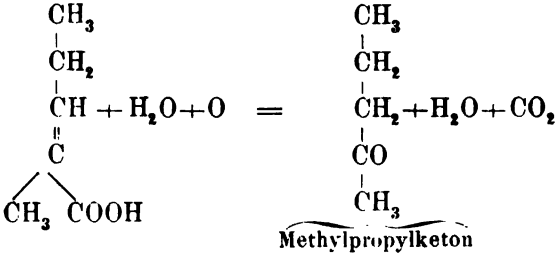
Methyläthylacrylsäure

3)


Dioxycapronsäure

Vielleicht lässt sich die Entstehung der Dioxycapronsäure noch anders deuten, nämlich durch Oxydation (unter Wasseranlagerung) der Methyläthylacrylsäure, die nach Gleichung 2) zugleich mit Sauerstoff abgespalten wird.

Das Methylpropylketon dürfte wohl als Product einer secundären Reaction aufzufassen sein und zwar entweder als Oxydationsproduct der Methyläthylacrylsäure:



Methylpropylketon

oder als Einwirkungsproduct des Wassers auf das nascirende Bromamylen:

$$\begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH + H_2O \\ \| \\ CBr \\ | \\ CH_3 \end{array} = \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CBrOH \\ | \\ CH_3 \end{array} = \begin{array}{l} CH_3 \\ | \\ CH_2 \\ | \\ CH_2 + HBr \\ | \\ CO \\ | \\ CH_3 \end{array}$$

Rückblick.

Die wesentlichsten Resultate der vorstehenden Abhandlung lassen sich übersichtlich in folgender Weise zusammenfassen:

Propionaldehyd mit Lösung von essigsaurem Natron erhitzt, liefert ein Condensationsproduct $C_6H_{10}O$.

Dasselbe verhält sich wie ein ungesättigter Aldehyd, oxydirt sich an der Luft, liefert eine krystallinische Bisulfitverbindung, die durch Soda nicht zerlegt wird, verbindet sich additionell mit HCl oder Br_2 und die Bromverbindung liefert selbst wieder mit Bisulfit Krystalle $C_6H_{10}OBr_2 . SO_3HNa + 3\,H_2O$.

Bei der Reduction gibt das Condensationsproduct $C_6H_{10}O$: Capronaldehyd, Hexylalkohol und einen ungesättigten Alkohol $C_6H_{12}O$. Der Capronaldehyd und der Hexylalkohol liefern bei der Oxydation eine Capronsäure, von der auch der Äther und das Calciumsalz dargestellt wurden, und die man als identisch mit Methylpropylessigsäure betrachten darf. Neben Capronsäure wurden noch Methylpropylketon und Hexylcapronat als Oxydationsproducte des Hexylalkohols erhalten. Aus dem Alkohol wurden ferner noch Hexyl-bromür und -acetat dargestellt.

Der ungesättigte Alkohol $C_6H_{12}O$ gibt mit Br_2 eine wenig stabile Verbindung, die selbst beim Erhitzen im Vacuum schon zerlegt wird; beim Kochen mit Wasser liefert sie als wichtigste Zerlegungsproducte Hexenylglycerin und anderseits den ungesättigten Aldehyd $C_6H_{10}O$. Das Glycerin $C_6H_{11}(OH)_3$ und sein Triacetin wurden rein dargestellt.

Bei der Oxydation, mag dieselbe mit freiem Sauerstoff, Chromsäuremischung oder feuchtem Silberoxyd durchgeführt

werden, gibt das Condensationsproduct $C_6H_{10}O$ stets dieselben Producte, nämlich: Propionsäure, Essigsäure, Ameisensäure, Kohlensäure, eine wenig lösliche, krystallinische doch leicht schmelzbare ungesättigte Säure $C_6H_{10}O_2$, eine lösliche krystallinische fixe Dioxycapronsäure $C_6H_{12}O_4$, die von nicht-krystallisirenden fixen Säuren begleitet ist, endlich Methylpropylketon. Die Mannigfaltigkeit dieser Oxydationsproducte erklärt sich aus der Natur des Körpers $C_6H_{10}O$, der zugleich an der Aldehydkette und an der Stelle der doppelten Bindung vom Sauerstoff angegriffen wird, und ist anderseits geeignet, gerade über dessen Constitution vollständigen Aufschluss zu geben. Von den verschiedenen Möglichkeiten wie die Condensation zwischen zwei Molekülen Propionaldehyd sich vollziehen kann, um zur Bildung des Körpers $C_6H_{10}O$ zu führen, entspricht nur diejenige der Wirklichkeit, bei der das O des einen Aldehydmoleküls mit H_2 aus der CH_2-gruppe des anderen Moleküls als H_2O austritt, so dass durch Vereinigung der Reste ein Körper $C_6H_{10}O$ entsteht, der als Propyliden-propionaldehyd oder (was dasselbe ist) als α Methyl-β äthyl-acroleïn betrachtet werden muss. Mit der Feststellung der Constitution dieses Körpers ist aber zugleich die Constitution sämmtlicher neuer Verbindungen, die in der Abhandlung beschrieben sind, gegeben, und zwar in solcher Weise, dass nirgends ein Widerspruch sich ergibt. Inbesondere herrscht auch in den Fällen volle Übereinstimmung, wo sich die Constitution der einen oder anderen neuen Verbindung, z. B. des Hexylalkohols oder der Methyläthylacrylsäure, durch aufgefundene Beziehungen zu bereits bekannten Körpern, z. B. zur Methylpropylessigsäure in anderer, von der Constitution des Methyläthylacroleïns unabhängiger Weise feststellen lässt.

Von der durch Oxydation erhaltenen krystallinischen Dioxycapronsäure, die meist nur amorphe Salze liefert, ist es uns gelungen, ein krystallinisches Calciumsalz darzustellen.

Die ungesättigte Säure $C_6H_{10}O_2$, d. i. Methyläthylacrylsäure, ist eine krystallinische, destillirbare Substanz ähnlich der Tiglinsäure, von deren Salzen das Calciumsalz $Ca(C_6H_9O_2)_2+4H_2O$ und das Silbersalz $AgC_6H_9O_2$ analysirt worden und die Reactionen angegeben sind. Bei der Reduction mittelst HBr und Zink oder mittelst HJ liefert sie dieselbe Capronsäure, die durch Oxydation

des obigen Hexylalkoholes und Capronaldehydes auch erhalten wird, d. i. Methylpropylessigsäure.

Mit Brom verbindet sich die Methyläthylacrylsäure zu einem in grossen schönen Krystallen auftretenden Bromür $C_6H_{10}O_2Br_2$, das durch nascirenden Wasserstoff wieder zu Methyläthylacrylsäure reducirt, — durch Einwirkung von überschüssigem Wasser bei 100° in der Weise zersetzt wird, dass Bromwasserstoff gebromtes Amylen, Methyläthylacrylsäure, Methylpropylketon, Dioxycapronsäure und Kohlensäure daraus hervorgehen. Die hier auftretende Dioxycapronsäure, eine lösliche krystallinische fixe Säure, die ein krystallinisches Calciumsalz, sonst meist amorphe Salze liefert, scheint mit der durch Oxydation von Methyläthylacroleïn erhaltenen Dioxycapronsäure identisch zu sein.

Versuche über Diffusion von Gasen.

III.

Von **Albert v. Obermayer.**

(Mit 1 Tafel.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Jänner 1883.)

In zwei längeren Versuchsreihen[1] habe ich den Nachweis geliefert, dass der Diffusionscoëfficient der Gase keine constante, sondern eine veränderliche Grösse sei und dass die Unterschiede der Mittelwerthe der Diffusionscoëfficienten nach verschiedenen Versuchszeiten und für verschiedene Gascombinationen verschieden sind. Die Vermuthung, dass das Moleculargewicht hiebei massgebend sei, bestätigt sich nicht; es scheint vielmehr, dass die Mehratomigkeit der Molecüle sowie die absolute Grösse des Diffusionscoëfficienten hierzu in Beziehung stehen.

Die Anzahl der untersuchten Gascombinationen ist noch immer nicht hinreichend, um allgemeine Schlüsse ziehen zu können. Ausserdem stellen sich dieser Untersuchung besondere Schwierigkeiten entgegen, welche darin liegen, dass die zu suchenden Abweichungen der Diffusionscoëfficienten häufig nahe an den Fehlergrenzen liegen, welche durch die Einrichtung der Apparate, die Manipulationen bei den Analysen und die Unreinheit der angewendeten Gase bedingt sind.

In der vorliegenden Abhandlung werden zuerst Versuche mit dem Apparate II und der Combination Luft—Kohlensäure angeführt, welche sich auf den Einfluss beziehen, den die Temperatur auf die Veränderlichkeit des Diffusionscoëfficienten nimmt.

[1] Sitz. Ber. LXXXV, S. 147 und LXXXV, S. 749 1882.

Diese Versuche sind:

Versuch vom 28. December 1881.

	20 Min.	$k_t = 0{\cdot}068890$	
$t = 61{\cdot}5°$ C.		$0{\cdot}068684$	$n_1 = 1{\cdot}83$ $n_2 = 1{\cdot}87$
$b = 76{\cdot}0$ Cm.			
	90 Min.	$0{\cdot}070775$	$n_1 = 1{\cdot}80$ $n_2 = 1{\cdot}83$

Versuch vom 2. Jänner 1882.

$t = 61{\cdot}5°$ C.	20 Min.	$0{\cdot}069381$	$n_1 = 1{\cdot}83$ $n_2 = 1{\cdot}90$
$b = 76{\cdot}0$ Cm.			
	120 Min.	$0{\cdot}072112$	$n_1 = 1{\cdot}93$ $n_2 = 1{\cdot}84$
		$0{\cdot}071160$	$n_1 = 1{\cdot}88$ $n_2 = 1{\cdot}87$

Der Apparat gibt den Werth des Diffusionscoëfficienten Luft-Kohlensäure bei 61·5 C. kleiner, als er in der Untersuchung über die Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten vor der Temperatur gefunden wurde. Diess scheint davon herzurühren, dass das durch die Bleiröhren strömende Gas das Erstarren des Paraffins befördert und so die Temperatur im Apparate etwas niedriger ist.

Die n_1 und n_2 beziehen sich auf Combinationen der vorliegenden Werthe von k bei $61{\cdot}5°$ C. und den Werthen von k bei niedrigen Temperaturen, die verschiedenen Versuchsreihen entnommen sind.

Hieran reihen sich Versuche mit dem Apparate I, welche sich mit der Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten *O—CO* von der Temperatur beschäftigen und welche bereits im Jahre 1880 ausgeführt wurden.

Es wird gefunden:

$$k_0 = 0{\cdot}067383 \qquad n = 1{\cdot}7853.$$

Um die Combinationen der Gase mit Wasserstoff untersuchen zu können, wurde der Apparat III construirt, welcher etwa um ein Drittel länger ist, als der Apparat II.

Derselbe functionirt nach der Stefan'schen Methode. Es wurden damit die Diffusionscoëfficienten für grössere und kleinere Zeiten bestimmt.

Es ergab sich:

	30 Min.	60 Min.	150 Min.
Luft—CO_2	0·046561	0·04759	0·048319

	10 Min.	50—60 Min.
H—O	0·24080	0·24516
	0·23869	0·24068

Die tiefer stehenden Werthe werden erhalten, wenn auf die grössere Contraction Rücksicht genommen wird, welche der nicht ganz reine Wasserstoff gibt.

H—CO_2	0·18208	0·19381
H—N_2O	0·17890	0·19250
H—CO	0·23190	0·23358
H—C_2H_4	0·15864	0·17379
H—CH_4	0·18978[1]	0·22516.

Es wird weiter an einem Apparate IV, welcher einen 9 Mm. weiten Diffusionscylinder von 87·085 Ctm. Länge hat und nach der Stefan'schen Methode functionirt, gezeigt, dass die Weite des Diffusionscylinders keinen merkbaren Einfluss auf den Werth des Diffusionscoëfficienten ausübt.

Es wird für *H—CO₂* erhalten:

10 Min.	60 Min.
0·18089	0·19508.

Zur weiteren Untersuchung der Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten vom Dichtigkeitsgefälle wird der Apparat V construirt. Derselbe functionirt nach der Stefan'schen Methode, lässt sich aber durch einen Hahn in zwei Hälften theilen, so dass der Inhalt jeder Hälfte gesondert aufgefangen und analysirt werden kann.

Es wird mit diesem Apparate für die Combination *H—CO₂* gefunden:

---

[1] Die Zahl 0·18978 scheint etwas zu klein zu sein, da die Versuche H—CH_4 für die kleinen Diffusionszeiten besondere Abnormitäten zeigen.

Diff.-Zeit	Unt. Hälfte	Ob. Hälfte	Mittel
25 Min.	0·19059	0·17843	0·18451
60 Min.	0·19455	0·18475	0·19118

Mit dieser Gascombination wurden noch zum Schlusse der ganzen Versuchsreihe einige Beobachtungen angestellt. Dieselben ergaben:

Diff.-Zeit	Unt. Hälfte	Ob. Hälfte	Mittel
14 Min.	0·19334	0·17818	0·18593
60 Min.	0·19460	0·18478	0·18970
14 Min.	0·17832		
60 Min.	0·19118		

Weiter wurde die Gascombination CO—C_2H_4 wegen der Gleichheit der Moleculargewichte der beiden Gase, bei dem Umstande, dass das eine coërcibl, das andere permanent ist, untersucht.

Diff.-Zeit	Unt. Hälfte	Ob. Hälfte	Mittel
120 Min.	0·042362	0·041695	0·042077

Überdies gibt der Apparat I $k_0 = 0{\cdot}041716$ bei einer Stunde Diffusionszeit, der Apparat V, wenn dessen Gesammtinhalt entleert wird, $k_0 = 0{\cdot}042165$.

Die Combination H—C_2H_4 gibt:

Diff.-Zeit	Unt. Hälfte	Ob. Hälfte	Mittel
30 Min.	0·17586	0·17136	0·17391
70 Min.	0·17991	0·17272	0·17632

Wenn der Gesammtinhalt des Apparates aufgefangen und analysirt wird:

30 Min.	0·17168
12 Min.	0·15940

Die Combination H—C_2H_6 gibt, wenn der Gesammtinhalt des Apparates aufgefangen und analysirt wird:

80 Min.	0·16536
15 Min.	0·15173

Hiebei ist allerdings zu beachten, dass in den Versuchen von 15 Minuten Dauer das angewendete Äthan nicht rein war, sondern bis zu 7% Luft, oder ein anderes, mit *O* nicht verbrennbares Gas enthielt.

Für Wasserstoff — Sauerstoff gibt der Apparat V:

	Unt. Hälfte	Ob. Hälfte	Mittel
48 Min.	0·24366	0·23551	0·23849
20 Min.	0·24235	0·22343	0·23289.

Wird der Gesammtinhalt des Apparates aufgefangen, so wird gefunden:

48 Min. $s_0 = 0 \cdot 24108$.

Wasserstoff — Luft gibt:

	Unt. Hälfte	Ob. Hälfte	Mittel
52 Min.	0·23245	0·22026	0·22636
24 Min.	0·23194	0·21791	0·22492
12 Min.	0·23241	0·21750	0·22495.

Wird der Gesammtinhalt des Apparates aufgefangen:

12 Min.	0·23014
60 Min.	0·21933.

Bei den Versuchen Wasserstoff — Luft und Wasserstoff — Sauerstoff gibt der wirklich aufgefangene Gesammtinhalt bei einer grösseren Diffusionszeit einen etwas grösseren Werth, als der Mittelwerth ist, welcher aus den gesondert aufgefangenen Gasgemengen der beiden Hälften des Apparates abgeleitet wird.

Bei Wasserstoff — Luft und Wasserstoff — Kohlensäure tritt bei sehr kleinen Diffusionszeiten gerade das Entgegengesetzte ein. Es ist dies offenbar durch Fehler im Apparate bedingt. Welcher Art diese Fehler sind, konnte ich nicht ermitteln.

Um noch zu untersuchen, ob die Fehler, welche die Resultate beeinflussen, nicht etwa grösser sind als die wirklichen Abweichungen, habe ich noch nach einer dritten Methode operirt, welche etwa die abgeänderte Stefan'sche Methode genannt werden könnte. Es wird dabei die untere Hälfte des Apparates V mit dem Gase *A*, die obere Hälfte mit dem Gase *B* gefüllt und

das Gas B über die obere Öffnung der oberen Hälfte streichen gelassen. Es wird durch diese Versuchsanordnung das Dichtigkeitsgefälle in der oberen Hälfte des Apparates herabgedrückt und es ist zu erwarten, dass alsdann der Diffusionscoëfficient in dieser Hälfte grösser gefunden wird.

Es wird nach dieser Methode mit der Gascombination H—CO_2 gefunden:

Diff. Zeit	Unt. Hälfte	Ob. Hälfte	Mittel
65 Min.	0·18912	0·19187	0·19050
65 „	a. d. Gesammtinhalt	0·19245	
25 „		0·18788.	

Ein Resultat, welches thatsächlich zu bestätigen scheint, dass den kleineren Dichtigkeitsgefällen ein grösserer Werth von k_0 entspricht.

Die Resultate dieser Versuche lassen sich etwa in folgenden Sätzen zusammenfassen, und gestatten einige weitere Folgerungen zu ziehen.

Die Veränderlichkeit des Diffusionscoëfficienten mit der Temperatur ist dieselbe für kurze und längere Diffusionszeiten.

Die Diffusion geht dort, wo die kleinen Dichtigkeitsgefälle herrschen, schneller. und dort, wo die grossen Dichtigkeitsgefälle vorkommen, langsamer vor sich, als dies nach der Theorie zu erwarten wäre.

Wenn die Werthe des Diffusionscoëfficienten die für eine Gascombination aus grossen und kleinen Versuchszeiten abgeleitet werden, auch nicht merklich differiren, so darf daraus noch nicht geschlossen werden, dass in verschiedenen Stellen des Apparates der Diffusionscoëfficient den gleichen Werth besitze.

Die Gase mit drei- und mehratomigen Molecülen geben in Wasserstoff diffundirend grössere Abweichungen als die Gase mit zweiatomigen Molecülen. So sind die in Rede stehenden Abweichungen grösser für:

$$H—CO_2,\ H—N_2O,\ H—CH_4,\ H—C_2H_4,\ H—C_2H_6$$

als für:

$$H—O,\ H—CO,\ H—\text{Luft}.$$

Die Gascombination $CO—C_2H_4$ liefert gleichfalls nicht unerhebliche Abweichungen, trotzdem die Moleculargewichte der Gase nahezu gleich sind.

Die Molecüle der Kohlensäure und des Stickoxydules scheinen sich nahezu gleich zu verhalten, da sie in Wasserstoff diffundirend nicht nur dieselben Abweichungen vom Diffusionsgesetze, sondern auch dieselben absoluten Werthe geben.

Unter allen Gascombinationen kommt jener Wasserstoff — Sauerstoff der grösste Diffusionscoëfficient zu.

Wenn Wasserstoff in Luft diffundirt, so hat dies eine geringe Entmischung der Luft zur Folge.

Wie aus den von Loschmidt und mir gefundenen Werthen des Diffusionscoëfficienten zu erkennen ist, gilt die Regel, dass die Diffusionscoëfficienten zweier Gase verkehrt proportional dem Producte ihrer Dichten sei, in höchst unvollständiger Weise.

Eine von Stefan angegebene Formel lässt genau erkennen, was die Grösse des Diffusionscoëfficienten bestimmt, wenn ein Gas mit einer Reihe anderer Gase combinirt wird.

Diese Formel ist:

$$k = \frac{3\pi}{32}\,\frac{v\sqrt{m}}{N_0\pi s_{12}^2}\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}}.$$

In derselben bedeutet N_0 die Anzahl der Molecüle in der Volumseinheit, bei Null Graden und dem Normalbarometerstande; m_1 und m_2 sind die Moleculargewichte der ineinander diffundirenden Gase; v und m Geschwindigkeit und Gewicht des Wasserstoffmoleküles.

Bezeichnet man ferner durch s_1 und s_2 die Durchmesser der Molekülle der ineinander diffundirenden Gase, so ist:

$$s_{12} = \frac{s_1+s_2}{2}.$$

Die Grösse $\frac{1}{4}N_0\pi s_{12}^2$ stellt somit die Querschnittssumme aller, in einer Volumseinheit enthaltenen Molekülle vor, deren Durchmesser das arithmetische Mittel der Durchmesser der Mo-

leküle der beiden, ineinander diffundirenden Gase wäre. Dieser Grösse ist der Diffusionscoëfficient nahezu verkehrt proportional.

Wird also dasselbe Gas, z. B. Wasserstoff, in eine Reihe anderer Gase diffundirend gedacht, so ist zu erwarten, dass die Molekülе mit den grösseren Querschnitten, kleinere Diffusionscoëfficienten bedingen werden. Dass dies thatsächlich so ist, lässt sich dadurch erkennen, dass mit Hilfe der gefundenen Werthe von k, aus der Stefan'schen Formel, die Querschnittssummen für die verschiedenen Gase berechnet und diese Zahlen etwa mit jenen verglichen werden, welche aus Reibungsversuchen abgeleitet sind.

Werden zu dieser Berechnung $v = 169800$ Cm. und statt den Molekulargewichten die Dichten und zur Abkürzung der Schreibweise eine Grösse Q_{ij} eingeführt, so gibt die Formel:

$$\frac{1}{4} N_0 \pi s_{ij}^2 = Q_{ij} = \frac{1}{4} \cdot \frac{3\pi v \sqrt{d}}{32} \cdot \frac{1}{k_{ij}} \sqrt{\frac{1}{d_i} + \frac{1}{d_j}}.$$

Beachtet man ferner, dass:

$$s_{ij} = \frac{s_i + s_j}{2}$$

ist, so kann aus den Combinationen je dreier Gase 1. 2. 3, gerechnet werden:

$$\frac{1}{4} N_0 \pi s_1^2 = Q_1 = (\sqrt{Q_{12}} + \sqrt{Q_{31}} - \sqrt{Q_{23}})^2$$

$$\frac{1}{4} N_0 \pi s_2^2 = Q_2 = (\sqrt{Q_{23}} + \sqrt{Q_{12}} - \sqrt{Q_{31}})^2$$

$$\frac{1}{4} N_0 \pi s_3^2 = Q_3 = (\sqrt{Q_{31}} + \sqrt{Q_{23}} - \sqrt{Q_{12}})^2.$$

Hiebei ist noch zu beachten, dass der Diffusionscoëfficient in $\frac{\text{Cm.}^2}{\text{Sec.}}$ in die Formel eingeführt werden muss.

In der nachfolgenden Tabelle sind die bezüglichen Rechnungsdaten zusammengestellt:

	d	$k_0 \frac{\overline{Mtr^2}}{Stunde}$	$k_0 \frac{\overline{Cm.^2}}{Sec.}$	Q_{ij}	$\sqrt{Q_{ij}}$
H	0·0692	—	—	—	—
H — O	1·1056	0·240	0·667	19550	139·85
H — Luft	1·0000	0·232	0·645	20060	141·61
H — CO	0·9673	0·233	0·647	20000	141·41
H — CH_4	0·5531	0·225	0·625	21220	145·67
H — CO_2	0·5202	0·192	0·532	24030	155·00
H — N_2O	1·5241	0·192	0·532	24050	155·07
H — C_2H_4	0·9678	0·175	0·486	26630	163·17
H — C_2H_6	1·0370	0·165	0·458	28180	167·87
CO_2 — Luft	—	0·0486	0·135	31370	177·11
CO_2 — O	—	0·0489	0·136	30330	174·17
CO_2 — N_2O	—	0·0330	0·193	40750	201·88
O — Luft	—	0·0640	0·178	25530	159·79
O — CO	—	0·0674	0·187	24460	156·38
CO — C_2H_4	—	0·0420	0·122	38710	196·74

Mit diesen Daten folgt nun für $Q_i = \frac{1}{4} N_0 \pi s_i^2$

für die Gase	aus den Combinationen			
	H—O—Luft	H—O—CO_2	H—Luft—CO_2	H—O—CO
H	14841	14565	14288	15620
O	24965	25288	—	23502
Luft	26108	—	26815	—
CO	—	—	—	24914
CO_2	—	35843	36180	—

Nimmt man für Wasserstoff $Q_1 = 14565\ \overline{Cm^2}$, so lässt sich nach der Formel:

$$Q_2 = \frac{1}{4} N_0 \pi s_2^2 = (2\sqrt{Q_{12}} - \sqrt{Q_1})^2$$

die Querschnittssumme des Gases berechnen, welches in den Wasserstoff diffundirt.

Man erhält nach dieser Formel die folgenden Zahlen für Q_2, denen jene, welche O. E. Mayer in seiner kinetischen Theorie der Gase S. 207 aus der inneren Reibung der Gase berechnet hat, an die Seite gestellt sind.

Gas	Q_2	Q_2 nach O. E. Mayer	$\frac{2}{3} Q_2$
H	14665	9500	9710
O	25285	16700	16860
Luft	26435	17700	17623
CO	26285	18000	17520
CH_4	29122	20800	19420
CO_2	35837	26000	23891
N_2O	35893	26000	23930
C_2H_4	40387	30400	26925
C_2H_6	46238	—	—

Die absoluten Werthe, die nach der Stefan'schen Formel, mit den von mir gefundenen Werthen der Diffusionsconstanten gerechnet sind, betragen für die 2atomigen Molekule nahe das 3/2fache der von Mayer angegebenen Werthe, wie aus der vierten Columne der obigen Tabelle zu ersehen ist; sie ordnen sich aber ihrer Grösse nach, mit Ausnahme von CO und Luft, die mit einander verwechselt sind, in dieselbe Reihe wie die Mayer'schen Zahlen.

Wird für die drei Combinationen CO_2—Luft, CO_2—O, CO_2—N_2O dieselbe Rechnung wie für die Combinationen, die Wasserstoff enthalten, durchgeführt und hiezu $Q_1 = 36012$ $\sqrt{Q_1} = 189{\cdot}77$ genommen, so ergibt sich:

Luft	$Q_2 = 27044$
Sauerstoff ...	25140
Stickoxydul ..	45791.

Die Zahl 45791 sollte nahe gleich 36012 gefunden werden. Diese bedeutende Abweichung weist darauf hin, dass in dem Versuche Kohlensäure—Stickoxydul Einflüsse merklich sind, welche bei den beiden anderen Versuchen nicht in demselben Maasse wirksam waren.

Rechnet man weiter die Querschnittssummen Q_i aus den Combinationen $H—CO_2—N_2O$ und $H—CO—C_2H$, so findet man:

	Q_i		Q_i
H.....	11705	H.....	11630
CO_2.....	40728	CO	30618
N_2O.....	40785	C_2H_4	47742

Diese Versuche geben für Wasserstoff das Q_i erheblich kleiner. Verfolgt man die Art der Berechnung, so zeigt sich, dass in dem einen Falle Q_{ij} für $CO_2—N_2O$, in dem andern Falle Q_{ij} für $CO—C_2H_4$ aus den Versuchen grösser gefunden wurden als dieselben der obigen Formel entsprechen.

Es wäre zur weiteren Aufklärung dieser Abweichungen wünschenswerth, noch mehr Combinationen zu untersuchen, namentlich solche, in denen H nicht mehr vorkommt. Ich gedenke dies auch bei einer späteren Gelegenheit auszuführen.

Es dürfte übrigens jetzt schon die Bemerkung nicht übereilt erscheinen, dass es sich bei allen diesen Abweichungen höchst wahrscheinlich, wenigstens zum Theil, um die Wirkung einer nicht ganz verschwindenden inneren Arbeit der Gase handelt, eine Wirkung, die insbesondere bei den mehr als zweiatomigen Gasen hervorzutreten scheint.

Nach den vorliegenden Versuchen über Diffusion drängt sich mir weiter die Ansicht auf, dass der Unterschied, welchen die als permanent und die als coërcibl bezeichneten Gase, bezüglich der Abhängigkeit ihrer Reibungs- und Diffusionscoëfficienten von der Temperatur zeigen, wahrscheinlich auch durch die Mehratomigkeit ihrer Molekule bedingt ist.

Von besonderem Interesse schienen mir in dieser Beziehung Versuche, in denen die Abhängigkeit der inneren Reibung des Sumpfgases und etwa des Acetylens von der Temperatur bestimmt würden. Ist obige Ansicht richtig, so müssten die Temperaturexponenten grösser als 0·75 gefunden werden.

Während ich mit den vorliegenden Versuchen über Gasdiffusion beschäftigt war, hat H. Waitz auf optischem Wege die Diffusion von Luft in Kohlensäure untersucht.[1]

Er bediente sich hiezu eines Blechkastens von 50·3 Ctm. Länge, 50·3 Ctm. Tiefe und 7 Ctm. Breite, welcher 10, 20 und 35 Ctm. unter der oberen Öffnung des Kastens Fenster hatte, die durch Glasplatten bedeckt waren, welche über die Rückwand des Kastens hervorragten. Mit Hilfe einer dicken Glasplatte wurden von einer Lichtquelle zwei Lichtstrahlen erzeugt, deren einer durch den Kasten, der andere ausserhalb vorbeilief. Mit Hilfe einer zweiten Glasplatte wurden diese Lichtstrahlen vereinigt und durch ein Fernrohr die entstehende Interferenzerscheinung beobachtet. Da sich die Zusammensetzung des Gases im Kasten während der Diffusion fortwährend ändert, so setzen sich die Interferenzstreifen in Bewegung und die Anzahl von Streifen, welche in einer bestimmten Zeit durch das Gesichtsfeld geht, gibt ein Mass für die Änderung der Zusammensetzung des Gasgemisches.

Wie man hieraus ersieht, wird nach dieser Methode die Änderung des Diffusionscoëfficienten an einer und derselben Stelle des Gefässes untersucht, während aus den von Loschmidt und mir angestellten Versuchen ein Mittelwerth von der Form:

$$\bar{k} = \frac{\int_0^l \int_0^t . k dx dt}{l . t} -$$

sich ergibt, welcher alle Werthe, die der Diffusionscoëfficient an allen Stellen des Apparates seit dem Beginne des Versuches angenommen hat, umfasst.

H. Waitz findet nun, dass an einer bestimmten Stelle des Apparates der Diffusionscoëfficient anfänglich den grössten Werth besitzt, sich aber mit wachsender Zeit einem Grenzwerthe nähert, welcher proportional dem Abstande des, zur Beobachtung benutzten Querschnittes vom oberen Ende des Diffusionsgefässes ist.

Diese Grenzwerthe lassen sich durch die Formel:

$$k = k_0 + ax$$

[1] Wiedemann Ann. Bd. XVII, S. 201.

darstellen, worin $k_0 = 0.12887 \frac{\overline{Cm.}^2}{Sec.}$ $a = 0{\cdot}000220$ ist. Sonach hat der Diffusionscoëfficient an verschiedenen Stellen des Apparates folgende Grenzwerthe:

x Cm.	$\frac{\overline{Cm.}^2}{Sec.}$
0	0·12887
10·0 Cm.	0·13107
20·1	0·13326
35·2	0·13660

Hieraus leitet H. Waitz einen Mittelwerth ab, welcher sich mit dem von mir gefundenen in guter Übereinstimmung befindet. Der aus diesem Grenzwerthe abgeleitete Mittelwerth ist aber nicht genau dasjenige, was meine Versuche gaben, wie aus der oben gegebenen Definition von k sofort zu erkennen ist.

Es scheint mir weiter nicht zulässig anzunehmen, dass für einen Apparat von anderer Länge derselbe Verlauf der Grenzwerthe mit der Tiefe stattfindet. Es müsste denn in einem zehnmal längeren Apparate der Diffusionscoëfficient bereits auf $0{\cdot}23887 \frac{\overline{Cm.}^2}{Sec.}$ oder $0{\cdot}085992 \frac{\overline{Mtr.}^2}{Stunde}$, d. i. nahe das Doppelte des gewöhnlich beobachteten Werthes gewachsen sein.

Die Zunahme des Diffusionscoëfficienten mit der Tiefe scheint an die herrschenden Dichtigkeitsgefälle gebunden zu sein, dürfte also in verschiedenen Apparaten in ähnlicher Weise verlaufen.

Dass in den unteren Theilen des Diffusionsapparates der Diffusionscoëfficient grössere Werthe hat, habe ich mit dem Apparate V gezeigt und dafür, dass die Zunahme des Diffusionscoëfficienten für verschiedene Apparate in ähnlicher Weise erfolgt, scheinen die, mit den verschiedenen langen Apparaten

Apparat II $l = 64{\cdot}98$ Cm.
„ III $l = 86{\cdot}847$ „
„ V $l = 86{\cdot}62$ „

angestellten Versuche zu sprechen, welche von einander nur um die Grösse der Beobachtungsfehler differirende Resultate ergeben.

Würde der Diffusionscoëfficient mit der Tiefe der Apparate in der Weise zunehmen, wie diess H. Waitz voraussetzt, so müsste Apparat III für Luft — Kohlensäure $k_0 = 0{\cdot}0492 \frac{\text{Mtr}^2}{\text{Stunde}}$ geben, wenn bei Apparat II 0·0485 gefunden wurde. Dieser Unterschied ist so beträchtlich, dass es mir kaum entgangen wäre. Ebensowenig zeigen einen solchen Unterschied die mit Wasserstoff—Kohlensäure angestellten Versuche.

Dass die von mir, bei kleinen Versuchszeiten gefundenen Mittelwerthe kleiner sind, als die bei grösseren Versuchszeiten erhaltenen, während H. Waitz die anfänglichen Werthe grösser findet, erklärt H. Waitz dadurch, dass der einzelne Werth des Diffusionscoëfficienten zwar abnehmen, der Mittelwerth jedoch zunehmen könne, wenn sich die verschiedenen Schichten in verschiedener Weise an der Diffusion betheiligen, was ja thatsächlich der Fall ist. Denn nach den Beobachtungen des H. Waitz sinkt zu Beginn des Versuches der Werth des Diffusionscoëfficienten in den oberen Schichten des Apparates rasch zu kleineren Werthen herab; aber gerade aus diesen Schichten stammt das meiste Gas, welches aus dem Apparate tritt, weil in demselben das grösste Dichtigkeitsgefälle herrscht. Die grossen Werthe des Diffusionscoëfficienten in den unteren Schichten des Apparates sind wegen des dort herrschenden geringen Dichtigkeitsgefälles von geringem Einflusse.

Es lässt sich gegen diese Erklärung nichts einwenden. Die Versuche, welche ich bei ganz kleinen Diffusionszeiten mit dem Apparate V und der Gascombination Luft — Wasserstoff anstellte, — bei denen also die Diffusion in der unteren Hälfte gerade beginnt, — ergaben nahezu dieselben Mittelwerthe des Diffusionscoëfficienten in der unteren Hälfte des Apparates, wie die Versuche von grösserer Dauer, bei denen die Diffusion bereits weiter fortgeschritten ist. Nachdem die, aus der oberen Hälfte in die untere Hälfte des Apparates wirklich übertretende Gasmenge geringer ist, als die theoretische und in Folge dessen die wirklichen Dichtigkeitsgefälle in der unteren Hälfte kleiner als die theoretischen bleiben, ist es wahrscheinlich, dass die Diffusion hier thatsächlich etwas rascher stattfindet.

Die oberwähnten Versuche mit dem Apparate V scheinen also darauf hinzudeuten, dass in den tieferen Schichten des Apparates die Diffusion etwas später beginnt, dagegen etwas rascher verläuft, als nach der Theorie zu erwarten wäre. Es ist leicht möglich, dass der Mittelwerth des Diffusionscoëfficienten durch einen solchen Vorgang nur sehr wenig beeinflusst wird. Ich glaube hiernach in meinen Versuchen eine theilweise Bestätigung der von H. Waitz gefundenen Resultate zu erblicken.

Ich habe mir von den Abweichungen des thatsächlichen Diffusionsvorganges vom theoretisch vorausgesetzten, die Vorstellung gebildet, dass die Diffusion in einem bestimmten Querschnitte so lange etwas schneller vor sich gehe, als die ganz kleinen Dichtigkeitsgefälle den Querschnitt durchlaufen, dass mit dem Anlangen der grösseren Dichtigkeitsgefälle die Diffusion minder rasch vor sich gehe und dass in den tieferen Schichten, wegen des dort herrschenden kleineren Gefälles, immer grössere Werthe des Diffusionscoëfficienten gefunden werden müssen, als in den oberen Schichten, wo die Dichtigkeitsgefälle stets grösser bleiben. Die Fähigkeit der Querschnitte, mit den kleinen Dichtigkeitsgefällen eine raschere Diffusion zu ermöglichen, bleibt natürlich nicht ohne Rückwirkung auf die oberen Schichten und beschleunigt in geringem Masse den Process in denselben.

Dieser Vorstellung gemäss müsste in den oberen Schichten des Apparates der Diffusionscoëfficient rascher von seinem grösseren Anfangswerthe herabsinken, als in den unteren. H. Waitz findet nun das gerade Entgegengesetzte, weist aber ausdrücklich darauf hin, dass er in der Luftbewegung, welche das Abheben des Deckels verursacht, eine Störung vermuthe, welche die Diffusion in dem obersten Beobachtungsquerschnitte zu rasch erscheinen lässt.

Wird diese Störung so aufgefasst, als ob zu Beginn des Versuches aus dem obersten Theile des Apparates, bis zu einer gewissen Tiefe hin die Kohlensäure entfernt und die Luft an ihre Stelle gesetzt worden wäre, so sieht man leicht ein, dass die Störung, in die Tiefe des Apparates mit abnehmender Amplitude hinabwandernd, die Diffusion in den einzelnen Querschnitten während jener Zeit grösser erscheinen lässt, als dieselbe braucht,

um einen Querschnitt zu passiren. Die durch diese Störung hervorgebrachte Beschleunigung der Diffusion überdeckt dann in den oberen Schichten vollständig die Wirkung des geringeren Dichtigkeitsgefälles. Je kleiner die Tiefe war, bis zu welcher die Kohlensäure aus dem Apparate entfernt gedacht werden muss, in um so geringerer Tiefe erlöscht die Wirkung der Störung.

Auf der, dieser Abhandlung beigegebenen Tabelle ist ein Vorgang dargestellt, welcher den Charakter einer solchen Störung, wie dieselbe nach der Theorie der Diffusion verläuft, allerdings in höchst auffälliger Weise zur Anschauung bringt.

Das Studium der Waitz'schen Versuche hat mich auf die Idee gebracht, den Einfluss des Dichtigkeitsgefälles dadurch zu untersuchen, dass Diffusionsversuche vorgenommen werden, bei denen ein Gas *B* in das Gemisch der Gase und *B* und *A* diffundirt, wie dies von H. Wretschko bereits geschehen ist. Ich sehe mich zur Vornahme solcher Versuche insbesondere noch durch einen Vorschlag veranlasst, welchen mir Herr Regierungsrath Boltzmann in derselben Richtung machte. Ich habe aus diesem Grunde auch die vorliegende Versuchsreihe abgebrochen, um mich mit der Diffusion von Gasgemischen beschäftigen zu können.

Die Versuche Apparat II.

Luft — Kohlensäure.

Zu den Versuchen Luft—Kohlensäure wurde der Apparat II, wie derselbe in einer früheren Abhandlung[1] beschrieben ist, angewendet. Die ersten Versuche bei gewöhnlicher Temperatur misslangen gänzlich, weil die in die Auffanggefässe überleerten Gase sofort in die Absorptionsröhren überfüllt wurden und, wie aus den Analysen hervorging, sich noch nicht vollständig gemischt hatten.

Durch die Analysen ist in den nachfolgenden Versuchen die Kohlensäure bestimmt worden. Zur Berechnung der Versuche dienen die Tabellen Sitzb. LXXXI, S. 1113; Sitzb. LXXXV, S. 158 und diese Abhandlung Seite 23.

---

[1] Sitzb. Bd. LXXXV, S. 150.

Die Werthe, welche die Analysen geben, werden in den mit $\frac{o-u}{o+u}$ überschriebenen Columnen aufgesucht, der zugehörige Werth von kt der Tabelle entnommen, durch die Versuchszeit t in Stunden dividirt und von dem log k 0·64762—1 abgezogen, um den auf die Länge des Apparates II umgerechneten Werth von k zu erhalten. Dieser Werth wird sodann auf 76 Cm. Barometerstand und 0° C. unter Voraussetzung von $n = 2$ reducirt.

62. Versuch, 19. Dec. 1881.
2 Stunden 740·0 Mm. 4·0 Liter 8·8° C.

0·43663	$kt = 0·046871$
0·43816	$k_{red} = 0·052754$
0·43790	$k_{76} = 0·051364$
	$k_0 = 0·048209$

63. Versuch, 19. December.
30 Minuten 739·5 Mm. 4·5 Liter 8·9° C.

0·71789	0·011553
0·71985	0·052019
0·72212	0·050616
0·71995	0·047473

64. Versuch, 22. December.
25 Minuten 745·0 Mm. 5 Liter 9·2° C.

0·74342	0·0095643
0·74758	0·051670
0·74450	0·050514
0·74517	0·047278

65. Versuch, 23. December.
2 Stunden 747·5 Mm. 4 Liter 9·3° C.

0·43674	0·047095
0·43648	0·053006
0·43661	0·052135
	0·048759

66. Versuch, 23. December.
25 Minuten 748·2 Mm. 4·6 Liter 9·4° C.

0·74545	0·0094354
0·74832	0·050976
0·74689	0·050184
	0·046902

67. Versuch, 26. December.
18 Minuten 760·0 Mm. 4 Liter 7·9° C.

0·78753	0·0066407
0·78733	0·049835
0 78746	0·049835
	0·047084

68. Versuch, 26. December.
2 Stunden 759·1 Mm. 4·5 Liter 8·1° C.

0·44247	0·045815
0·44569	0·051568
0·44404	0·051513
	0·048589

69. Versuch, 28. December.
20 Minuten 756·5 Mm. 4·4 Liter 61·5° C.

0·73792	0·010248
0·73452	0·069208
0·73622	0·068890

70. Versuch, 28. December.

90 Minuten 755·8 Mm.	4 Liter 61·5° C.
0·43463	0·047425
0·43477	0·071167
0·43470	0·070775

71. Versuch, 28. December.

20 Minuten 755·0 Mm.	4 Liter 61·5° C.
0·73768	0·0102373
0 73506	0·069133
0·73637	0·068680

72. Versuch, 31. Dec. 1881.

25. Minuten 748·9 Mm.	4·5 Liter 8·5° C.
0·74959	0·0092530
0·74919	0·049989
0·74925	0·049259
0·74934	0·046338

73. Versuch, 2. Jänn. 1882.

2 Stunden 747·0 Mm.	4 Liter 61·5° C.
0·34527	0·064886
0·34527	0·073030
0·34527	0·072112

74. Versuch, 2. Jänner.

2 Stunden 745·9 Mm.	4 Liter 61·5° C.
0·34599	0·064409
0·34892	0·072506
0·34746	0·071160

75. Versuch, 2. Jänner.

20 Minuten 745·9 Mm.	4 Liter 61·5° C.
0·73388	0·010468
0·73294	0·070691
0·73342	0·069381

76. Versuch, 17. Jänner.

25 Minuten 765·0 Mm.	3·4 Liter 8·0° C.
0·74946	0·0092442
	0·049941
	0·050270
	0·047451

77. Versuch, 23. Jänner.

25 Minuten 758·4 Mm.	5·5 Liter 9·4° C.
0·74782	0·0094644
0·74517	0·051132
0·74650	0·050999
	0·047663

Beim Versuche 77 war zum Entleeren des Gases statt des Kautschukschlauches eine Stahlröhre angebracht. Es sollte dieselbe für die weiter in Aussicht genommenen Versuche mit schwefeliger Säure dienen. Diese letzteren führten aber zu keinem Resultate.

Die Ergebnisse der vorliegenden Versuchsreihe sind:

Zimmertemperatur			
18—30 Minuten		2 Stunden	
0·050616	8·9° C.	0·051364	8·8° C.
50514	9·2	52135	9 3
50184	9·4	51513	8·1
49835	7·9		
49259	8·5		
50270	8·0		
50999	9·4		
0·050239	8·8° C.	0·051671	8·7° C.

Schmelzpunkt des Paraffins	
20 Minuten	$1^1/_2$—2 Stunden
28. December 1881	
0·068890	0·070775
68680	
2. Jänner 1882	
0·069381	0·072112
	0·071160

Es unterscheiden sich hiernach die beiden Mittelwerthe des Diffusionscoëfficienten bei der Zimmertemperatur um 2·6% des grösseren Werthes.

Die Versuchsreihe I[1] Luft—Kohlensäure gibt, wenn die Werthe bei 30 Minuten und 2 Stunden in Betracht gezogen werden 3·3%; die Versuchsreihe II,[2] bei Vergleichung der Werthe für 10 Minuten und 1 Stunde 3·6%; im Mittel ergeben also alle bisher bei der Zimmertemperatur angestellten Versuche 3·2%.

Für den Schmelzpunkt des Paraffins gibt die Versuchsreihe vom 28. December 2·8%, jene vom 2. Jänner 3·2%.

Bezüglich der Abhängigkeit des Diffusionscoëfficienten von der Temperatur geben die Versuche vom:

---

[1] Sitzb. Bd. LXXXV, S. 149.

[2] Sitzb. Bd. LXXXV, S. 753.

28. December		2. Jänner	
20 Minut.	$1^1/_2$ Stunde	20 Minuten	2 Stunden
$n_1 = 1{\cdot}83$	$1{\cdot}88$	$1{\cdot}83$	$1{\cdot}90$
$n_2 = 1{\cdot}87$	$1{\cdot}78$	$1{\cdot}93$	$1{\cdot}84$
	$1{\cdot}82$	$1{\cdot}88$	$1{\cdot}87$
Mittel $1{\cdot}85$	$1{\cdot}83$		

während ich früher mit dem Apparate I, für diesen Exponenten 1·968 gefunden hatte. Hiebei bezieht sich n_1 auf die Combination der Versuche beim Schmelzpunkte des Paraffins mit jenen Versuchen, welche in der vorliegenden Versuchsreihe aufgeführt sind. Die n_2 werden durch Vergleichung der Versuche 69, 71 und 75 dieser Versuchsreihe, mit jenen 50, 52 und 54 der ersten Versuchsreihe mit dem Apparate II[1] gefunden.

Für die Versuche bei kleiner Diffusionszeit ist $k = 0{\cdot}052972$ und $t = 17{\cdot}8°$ C. in Rechnung gestellt.

Für die Versuche bei $1^1/_2$ Stunden ist der Werth von k für 2 Stunden und zwar aus folgenden Versuchen entnommen:

$17{\cdot}9°$ C.	$0{\cdot}055424$	$11{\cdot}5°$ C.	$0{\cdot}052817$
$17{\cdot}7$	$0{\cdot}055644$	$11{\cdot}3$	$0{\cdot}052470$
$18{\cdot}9$	$0{\cdot}054938$	$11{\cdot}4°$ C.	$0{\cdot}052644$
$18{\cdot}2°$ C.	$0{\cdot}055336$		

Mit den Versuchen bei 2 Stunden sind jene von $2^1/_2$ Stunden combinirt und zwar:

$15{\cdot}3°$ C.	$0{\cdot}054751$
$13{\cdot}5$	$0{\cdot}053607$
$14{\cdot}4°$ C.	$0{\cdot}054179$

Der erste Versuch vom 2. Jänner gibt hiemit $n = 1{\cdot}88$ einen etwas grösseren Werth.

Im allgemeinen werden mit dem Apparate II die Coëfficienten n merklich kleiner erhalten, als mit dem Apparate I. Dies scheint dadurch herbeigeführt zu sein, dass die Temperatur des Apparates etwas niedriger war, ein Umstand, der insbesondere bei den Versuchen am 28. December mitgewirkt zu haben scheint. Die niedrigere Temperatur kann namentlich durch jene Bleiröhre

[1] Sitzb. Bd. LXXXV, S. 164.

herbeigeführt worden sein, welche die Luft zum Hahne zuführte, und dadurch zum Erstarren des Paraffins Veranlassung gab. Während des Versuches vom 2. Jänner wurde die Wand des Kastens, welche den Apparat umschloss, erwärmt und thatsächlich zeigt sich ein Steigen des Coëfficienten n.

Wenn nun diese Versuche wahrscheinlich den richtigen absoluten Werth zu bestimmen nicht gestatten, so lassen dieselben doch mit Bestimmtheit erkennen, dass die Temperatur auf jene Ursachen, welche die Veränderlichkeit des Diffusionscoëfficienten bedingen, ohne merklichen Einfluss sei.

Kohlenoxyd—Sauerstoff. Apparat I.

An dieser Stelle führe ich noch Versuche mit CO—O an, welche im Jahre 1880 angestellt, aber damals nicht veröffentlicht wurden. Eine erneuerte Berechnung der Analysen hat aus den damals angestellten fünf Versuchen zwei brauchbare ergeben. Bei den anderen drei Versuchen weisen die Summen der in den beiden Hälften gefundenen Gasmengen eine allzu bedeutende Abweichung von der Einheit aus.

Zur Analyse wurden die Gasgemenge entweder sofort, oder nach Zusatz von Sauerstoff im Eudiometer verbrannt. Ist die hiebei auftretende Contraction c und die Absorption a, so dienen zur Berechnung der Analysen die Formeln:

$$\text{Kohlenoxyd} = \frac{1}{2}a \qquad \text{Sauerstoff} = c + \frac{1}{2}a$$

48. Versuch, 12. März 1880. 40 Min. 757·5 Mm. 13·8° C.

Anal. d. u. H.		Anal. d. o. H.	
angewandt	84·548	57·134	$o = 0{\cdot}71993$
Sauerstoff	—	93·310	
n. d. Expl.	72·476	76·744	$u = 0{\cdot}28299$
n. d. Abs.	48·586	—	$u+o = 1{\cdot}00292$
CO	23·890	41·132	$o-u = 0{\cdot}43694$
O	60·531		$\frac{o-u}{o+u} = 0{\cdot}43567$
Fehler	0·127		
CO	0·28299		$kt = 0{\cdot}047258$
O	0·71701	0·71993	$k_{76} = 0{\cdot}070653$
	1·00000		$k_0 = 0{\cdot}067383$

51. Versuch, 17. März. 35 Min. 744·6 Mm. 61·5° C.

	Anal. d. u. H.		Anal. d. o. H.	
angew.	65·388	62·744	54·680	$u = 30·230$
+O..	—	—	79·030	$o = 69·126$
n. d. Expl.	55·519	53·144	59·594	$u+o = 0·99356$
n. d. Abs.	35·746	34·159	21 797	$o-u = 0·38896$
CO....	19·773	18·985	37·797	$\frac{o-u}{o+u} = 0·39150$
O.....	45·633	43·652	16·346	
Fehler—	0·018	0·107	0·567	$kt = 0·055350$
CO ...	0·30230	0·30259	0·69126	$k_{76} = 0·055360$
O.....	0·69770	0·69571	0·29892	
		0·00170	0·00982	
	1·00000	1·00000	1·00000	

Es ergibt sich sonach:

k	t	n
0·70653	13·8° C.	
0·92960	61·5° C.	1·7853

Apparat III.

Da sich der Apparat II für die Versuche bei kleinen Zeiten mit jenen Combinationen, in welchen Wasserstoff vorkommt, zu kurz erwies, wurde der Diffusionscylinder desselben durch Ansetzen eines Stückes Gewehrlauf von 13 Mm. Bohrung verlängert. Die konischen Endflächen der beiden Röhren waren ineinander geschliffen und wurden durch eine aufgesetzte Muffe aneinander gepresst.

Die innere Länge des Diffusionsrohres betrug 0·86847 Met. Hiefür ist $\log\left(\frac{L}{L'}\right)^2 = 0·39566—1$. Dieser Logarithmus ist vom Logarithmus des aus den Tabellen[1] genommenen Werthes von kt abzuziehen, um diesen Werth für den vorliegenden Apparat umzurechnen.

[1] Sitz. Ber. Bd. LXXXI, S. 1113 u. LXXXV, S. 158.

Mit diesem Apparate sollte auch nachgesehen werden, ob die bisherigen Versuche schon die unterste Grenze von k für die kleinen Diffusionszeiten geliefert haben. Zur Berechnung der hierauf bezüglichen Versuche ist eine Ergänzung der bisher erwähnten Tabelle nöthig, welche hier folgt:

kt	Q	kt	Q
0·0060	0·797854	0·0065	0·789717
61	0·796206	66	0·788121
62	0·794568	67	0·786539
63	0·792940	68	0·784966
64	0·791322	69	0·783406
		0·0070	0·781845

Diese eben erwähnten Versuche wurden mit Luft—Kohlensäure ausgeführt und dabei gleichzeitig die Uberzeugung gewonnen, dass der Apparat mit den bisher gefundenen übereinstimmende Resultate gebe und thatsächlich die untere Grenze der Werthe von k schon erreicht sei.

Zur Reduction der Diffusionscoëfficienten der Wasserstoffcombinationen auf Null Grade wurde $n = 1^3/_4$ vorausgesetzt.

Luft—Kohlensäure.

84. Versuch, 31. Jänner.

30 Minuten	4·1 Liter
758·8 Mm.	8·2° C.
0·79719	0·0060702
0·79450	0·048833
0·79827	0·048758
0·79665	0·045957

85. Versuch, 1. Februar.

$2^1/_2$ Stunden	4·1 Liter
765·7 Mm.	7·4° C.
0·53816	0·031449
0·53814	0·050584
0·53815	0·050964
	0·048319

86. Versuch, 1. Februar.

30 Minuten	3·55 Liter
765·7 Mm.	7·6° C.
0·79793	0·0061076
0·79423	0·049116
0·79608	0·049485
	0·046839

87. Versuch, 2. Februar.

1 Stunde	4·5 Liter
763·3 Mm.	7·5° C.
0·71072	0·012412
0·70885	0·049908
0·70979	0·050117
	0·047591

88. Versuch, 3. Februar.

30 Minuten 8·4 Liter
760·9 Mm. 7·3° C.

0·79573	0·0061388
0·79439	0 049371
0·79659	0·049430
0·79557	0·046887

t	k_0
	0·045957
	0·046839
	0·046887
30 Minuten ..	0·046561
1 Stunde....	0·047591
$2^1/_2$ Stunden ..	0·048319

Wasserstoff — Sauerstoff.

Der Sauerstoff wurde aus chlorsaurem Kali entwickelt. Durch Ätzkali gewaschen und durch CaCl getrocknet. Den Wasserstoff lieferte ein Apparat zur continuirlichen Entwicklung. [1]

Durch die Gasanalysen wird der Wasserstoff durch Verbrennen mit dem stets überschüssigen Sauerstoff bestimmt.

89. Versuch, 4. Februar.

1 Stunde 755·8 Mm. 7·4° C.

0·65250	$kt = 0·064258$
0·65118	$k = 0·25839$
$H = 0·65184$	$k_{76} = 0·25696$
$O = 0·34816$	$k_0 = 0·24521$

91. Versuch, 4. Februar.

10 Min. 753·7 Mm. 7·8° C.

0·26814	0·010607
0·26854	0·25612
0·26834	0·25401
0·73166	0·24179

92. Versuch, 5. Februar.

50 Min. 751·5 Mm. 7·4° C.

0·59990	0·053836
0·60130	0·25977
0·60060	0·25686
0·39940	0·24511

93. Versuch, 5. Februar.

10 Min. 750·4 Mm. 8·2° C.

0·26857	0·010616
0·26834	0·25613
0·26846	0·25289
0·73154	0·24014

94. Versuch, 5. Februar.

10 Min. 750·5 Mm. 8·3° C.

0·26745	0·010636
0·73255	0·25661
	0·25341
	0·24048

10 Min.	50 u. 60 Min.
0·24179	0 24521
0·24014	0·24511
0·24048	
0·24080	0·24516

[1] Sitzb. Bd. LXXXV, S. 165.

Die Abweichung zwischen den bei verschiedenen Diffusionszeiten gefundenen Werthen des Diffusionscoëfficienten beträgt hier nahe 1·8% des grösseren Werthes.

Berücksichtigt man, dass der zu den Versuchen verwendete Wasserstoff nicht rein war und eine etwas grössere Contraction etwa 1·51 statt 1·50 gab, so erhält man:

89. Versuch.	91. Versuch.
H = 0·64793	0·26673
O = 0·35207	0·73327
k_0 = 0·24068	0·23869

also eine Abweichung, welche bloss 0·8% des grösseren Werthes beträgt.

Wasserstoff—Kohlensäure.

95. Versuch, 6. Februar.
1 Stunde 752·8 Mm. 7·3° C.

0·41501	0·050958
0·41473	0·20490
0·41487	0·20297
	0·19381

96. Versuch, 6. Februar.
10 Min. 752·5 Mm. 8·1° C.

0·76647	0·0079156
0·76974	0·19097
0·76811	0·18914
	0·17976

97. Versuch, 8. Februar.
10 Min. 753·2 Mm. 7·7° C.

0·76528	0·0080956
0·76570	0·19532
0·76549	0·19357
	0·18440

10 Minuten	0·17976
	0·18440
k_0 =	0·18208
1 Stunde k_0 =	0·19381

Der Wasserstoffstrom ist nicht continuirlich, sondern setzt durch Augenblicke aus.

Wasserstoff — Stickoxydul.

Das Stickoxydul wurde im Sandbade aus salpetersaurem Ammoniak entwickelt, durch verdünnte Schwefelsäure und Eisenvitriollösung gewaschen und schliesslich durch concentrirte Schwefelsäure getrocknet.

Die gasanalytische Bestimmung des Wasserstoffes in ähnlicher Weise, wie dies bei Wasserstoff—Sauerstoff-Gemengen geschah, ist hier nicht ausführbar, nachdem sich beim Verpuffen eines Gemenges von Wasserstoff und Stickoxydul das Stickoxydul wenn im Überschusse vorhanden, unter mehr oder minder heftiger Explosion zerlegt.

Es scheint die Zerlegung des überschüssigen Stickoxydulgases um so vollständiger zu erfolgen, unter je grösserem Drucke dieselbe vor sich geht. So gaben vier Explosionen folgende Resultate:

	Druck des zur Explosion gebrachten Gemisches.	Aus der Contraction berechneter Wasserstoffgehalt.
1.	265·17 Mm.	0·15544 %
2.	203·84	0·16997
3.	107·25	0·19610
4.	120·84	0·20208

Der wirkliche Wasserstoffgehalt dieses Gemisches war 0·23404 %.

Bei den Versuchen 1, 2 erfolgte die Explosion mit grosser Heftigkeit, weissem Lichte und der Bildung weisslicher Nebel, die mit rothen Dämpfen gemischt sind. Contraction tritt anfänglich gar nicht ein, das Quecksilber steigt erst nach und nach.

Die Zerlegung des Stickoxydulgases durch den elektrischen Funken ist schon von Grove, Andrews, Tait, Buff, Hoffmann beobachtet und auch von Berthelot[1] untersucht worden.

Berthelot hatte das Gas in einer Glasröhre eingeschmolzen und liess einen Strom schwacher Funken eines Ruhmkorff'schen Apparates durchschlagen. Nach einer Minute war etwa ein Drittel des Gases in Stickstoff—Sauerstoff und Untersalpetersäure zerlegt.

Kürzlich hat Berthelot[2] für Acetylen, Cyangas, Arsenwasserstoff, welche sämmtlich wie das Stickoxydulgas unter

---

[1] Berthelot, Essai de Mécanique chimique. T. II, pag. 361.

[2] Berthelot, Detonation des Acetylens, des Cyangases und der endothermischen Verbindungen im Allgemeinen. C. R. XCIII, pag. 613—619 1881. Beiblätter V, S. 863.

Wärmeabsorption gebildet werden nachgewiesen, dass dieselben zerlegt werden, wenn in denselben etwas Quecksilberfulminat zur Entzündung gebracht wird. Wie aus den oben angeführten Versuchen hervorgeht, tritt ganz dieselbe Erscheinung ein, wenn Stickoxydulknallgas in Stickoxydul verbrannt wird. Aber auch das gewöhnliche Knallgas zu Stickoxydul gesetzt, führt die explosive Zerlegung dieses letzteren herbei, wie ich an einem diesbezüglichen Versuche wahrnahm.

Zu den Analysen der Gasgemenge wurde, wo Stickoxydul im Überschuss war, zu der im Eudiometer aufgefangenen Gasmenge zuerst Wasserstoff zugesetzt, explodirt, dann Sauerstoff zugesetzt und abermals explodirt. Setzt man im Gasgemenge x Wasserstoff, y Stickoxydul und z Stickstoff voraus, so hat man zur Berechnung der Analysen die Gleichungen:

$$x+y+z=a$$
$$x+y+z+u=b$$
$$x+z+u=c$$
$$x+z+u+v=d$$
$$-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y+z-\frac{1}{2}u+v=e$$

N_2O, $y=b-c$

H, $x=\frac{2}{3}(d-e)+(b-c)-(b-a)$

N, $z=c-\frac{2}{3}(d-e)-(b-c)$

98. Versuch, 12. Februar. 10 Min. 749·6 Mm. 9·4° C.

a	36·326	$N_2O=0$	74870
b	68·387	H =	0·23407
c	41·189	N =	0·01723
d	49·631		1·00000
e	29·582	in Rechnung gestellt	0·76593

$kt=0\cdot0080636$
$k=0\cdot19455$
$k_{76}=0\cdot19189$
$k_0=0\cdot18086$

100. Versuch, 17. Februar 10 Min. 744·5 Mm. 10·2° C.

a	35·184	40·826	in Rechnung gestellt
b	65·545	72·402	0·76176
c	39·628	42·315	$kt=0\cdot079809$
d	67·896	72·694	$k=0\cdot19255$
e	48·986	56·150	$k_{76}=0\cdot18862$
N_2O	0·73660	0·73698	$k_0=0\cdot17693$
H	0·23202	0·23366	
N	0·03138	0·02936	
	1·00000	1·00000	

Versuch 101, 17. Februar, 1 Stunde 743·8 Mm. 10·2° C.

Da hier Wasserstoff im Überschuss vorhanden war, vereinfachen sich die Analysen, da das Zusetzen von H entfällt. Zur Berechnung hat man die Gleichungen:

$$N_2O \quad y = a - c$$

$$H \quad x = (a - c) + \frac{2}{3}(d - e)$$

$$N \quad z = c - (a - c) - \frac{2}{3}(d - e)$$

a	67·830	58·210	59·064	in Rechnung gestellt
c	40·619	34·914	35·209	$N_2O = 0{\cdot}40835$
d	79·489	104·230	108·362	$kt = 0{\cdot}052157$
e	59·975	87·668	91·686	$k = 0{\cdot}20972$
N_2O	0·40116	0·40020	0·40389	$k_{76} = 0{\cdot}20526$
H	0·59296	0·58988	0·59210	$k_0 = 0{\cdot}19250$
N	0·00588	0·00992	0·00401	
	1·00000	1·00000	1·00000	

Die Versuche ergeben somit:

Diffusionszeit	10 Minuten	1 Stunde
	0·18086	
k_0	0·17693	
	0·17860	0·19250

Es sind dies fast die gleichen Werthe, wie bei Wasserstoff—Kohlensäure.

Wasserstoff—Kohlenoxyd.

Das Kohlenoxyd wurde aus Ameisensäure und ameisensaurem Blei mit concentrirter Schwefelsäure entwickelt, durch Wasser und Ätzkali gewaschen und mittelst Schwefelsäure getrocknet.

In den Analysen wird das Gasgemisch mit Sauerstoff versetzt und verbrannt; die gebildete Kohlensäure durch Absorption bestimmt. Ist c die Contraction, a die Absorption, dann ist:

$$\text{Kohlenoxyd} = a, \quad \text{Wasserstoff} = \frac{1}{3}(2c - a)$$

Versuch 102, 21. Februar. 50 Min. 750·9 Mm. 8·9° C.

angew.	52·488	38·123	$Q = 0·41099$
Contr.	58·123	41·555	$kt = 0·051668$
Abs...	22·142	15·536	$k = 0·24930$
H....	31·368	22·525	$k_{76} = 0·24632$
CO...	22·142	15·536	$k_0 = 0·23288$
Fehler	—1·022	+0·062	
H ...	0·58620	0·59182	
CO...	0·41380	0·40818	

Versuch 103, 21. Februar. 10 Min. 749·8 Mm. 9·0° C.

angew.	58·632	30·639	54·378	$Q = 0·73362$
Contr.	45·187	23·519	42·020	$kt = 0·010452$
Abs....	43·190	22·572	40·179	$k_2 = 0·25218$
H....	15·728	8·155	14 621	$k_{76} = 0·24878$
CO...	43·190	22·572	40·179	$k_0 = 0·23507$
Fehler	—0·286	—0·088	—0·422	
H....	0·26693	0·26541	0·26680	
CO...	0·73307	0·73459	0·73320	

Versuch 104, 24. Februar. 10 Min. 751·3 Mm. 10·6° C.

angew.	34·112	40·096	$Q = 0·73415$
Contr.	26·264	30·849	$kt = 0·010411$
Abs...	25·134	29·621	$k = 0·25118$
H....	9·131	10·691	$k_{76} = 0·24839$
CO...	25·134	29·621	$k_0 = 0·23230$
Fehler	—0·153	—0·217	
H....	0·26649	0·26522	
CO...	0·73351	0·73478	

Versuch 105, 24. Februar. 50 Min. 750·8 Mm. 10·7° C.

angew.	46·724	38·795	49·992	
Contr.	51·349	42·565	55·004	$Q = 0·40794$
Abs...	18·847	16·064	20·703	$kt = 0·052233$
H....	27·950	23·033	29·768	$k = 0·25366$
CO...	18·847	16·064	20·703	$k_{76} = 0·25058$
Fehler	—0·073	—0·302	—0·479	$k_0 = 0·23428$
H....	0·59726	0·58912	0·58980	
CO...	0·40274	0·41088	0·41020	

Versuch 106, 26. Februar. 10 Min. 738·8 Mm. 11·7° C.

angew.	42·905	45·743	35·524	
Contr.	32·887	35·484	27·490	$Q = 0·73292$
Abs...	31·744	33·787	26·051	$kt = 0·0105007$
H....	11·343	12·360	9·643	$k = 0·25335$
CO...	31·744	33·787	26·051	$k_{76} = 0·24571$
Fehler	—0·182	—0·404	—0·170	$k_0 = 0·22833$
H....	0·26325	0·26785	0·27015	
CO...	0·73675	0·73215	0·72985	

Es ergibt sich somit

10 Minuten	50 Minuten
0 23507	0·23288
0·23230	0·23428
0·22833	0·23358
$k_0 = 0·23190$	

Der Unterschied in den beiden Werthen beträgt hier 0·7 % und wird noch kleiner, wenn man voraussetzt, dass der Wasserstoff eine etwas grössere Contraction gebe.

Wasserstoff — Äthylen.

Das Äthylen wurde aus Äthylendibromid $C_2H_4Br_2$ mit granulirtem Zink und absolutem Alkohol entwickelt. Zum einmaligen Füllen des Apparates wurde 5—6 CC. $C_2H_4Br_2$ mit etwa 25—30 CC. absolutem Alkohol versetzt, angewendet. Die Entwicklung geschah in einem 200 CC. fassenden Kolben, sie beginnt entweder von selbst, namentlich dann, wenn schon gebrauchtes Zink verwendet wird oder lässt sich durch gelindes Erwärmen einleiten. Damit der Process nicht zu stürmisch verlaufe, muss mit kaltem Wasser gekühlt werden. Das entweichende Gas wird durch concentrirte Schwefelsäure und Ätzkali geleitet und durch Schwefelsäure oder Chlorcalcium getrocknet. Waschflaschen und Trockenapparate fassen höchstens 50 CC.

Ich wurde von Herrn Professor E. Ludwig auf diese Methode aufmerksam gemacht und verdanke ihm auch die ersten Partien Äthylendibromid.

Um das Äthylen zur Analyse aufsammeln zu können, trat dasselbe durch eine verzweigte Leitung aus dem Apparate. In

dem einen Zweige waren Glasröhren zum Einschmelzen des Gases eingeschaltet; während des Einschmelzens wurde das Gas durch den anderen Zweig geleitet.

Von dem auf diese Art aufgefangenen Äthylen des Versuches 108 wurden die nachfolgenden Verbrennungsanalysen ausgeführt:

	1. Analyse	2. Analyse	3. Analyse	Summe
angewandt....	17·344	11·847	11·238	40·429
+Luft und O..	250·000	248·905	235·874	—
Contr.....	35·600	24·230	22·874	82·704
Abs.....	34·590	23·404	22·635	80·629

Das Äthylen gibt daher, statt einer Contraction 2, jene 2·0457 und statt einer Absorption von 2, jene von 1·9945.

Der zum Versuch 110 verwendete Wasserstoff wurde gleichfalls analysirt und es ergab sich:

	1	2	Summe
angewandt	18·032	22·895	40·927
+O	73·048	123·994	
n. d. Exploration .	45·849	89·380	
Contraction	27·199	34·614	61·813

Statt einer Contraction von 1·50 ergibt sich eine solche von 1·51, d. i. um 0·6% grössere.

Zur Berechnung der Verbrennungsanalysen hat man die Gleichungen:

$$H = \frac{2}{3}(c-a) \qquad C_2H_4 = \frac{a}{2}.$$

Da aber das Äthylen nicht ganz normal zusammengesetzt ist, empfiehlt es sich, die Analysen in der Berücksichtigung dieser Zusammensetzung zu berechnen. Alsdann ist:

$$C_2H_4 = \frac{a}{1\cdot9945} \qquad H = \frac{2}{3}\left(c - \frac{2\cdot0457}{1\cdot9945}a\right).$$

Die ersten Verbrennungsanalysen, welche ich ausführte, ergaben eine sehr geringe Übereinstimmung. Ich entschloss mich daher, das Äthylen durch Absorption zu bestimmen und bediente mich hiezu des Verfahrens von E. Ludwig, wonach Kugeln aus

kohlensäurefreiem Gyps bei 130° getrocknet, in rauchende Schwefelsäure getaucht, angewandt werden. Eine solche Kugel durchtränkt sich derartig mit der Schwefelsäure, dass sie weich wird und absorbirt in 36 bis 48 Stunden das acht- bis neunfache ihres Volumens an Äthylen. Nach der Gypskugel wird noch eine Kalikugel eingeführt.

Die Ergebnisse der Absorptionsanalysen und der Verbrennungsanalysen zeigen eine erhebliche Abweichung von einander. Berechnet man jedoch die Verbrennungsanalysen mit Rücksicht auf die gefundene Zusammensetzung des Äthylens, so gelangt man zu einer viel grösseren Übereinstimmung in den Resultaten.

Damit die Verbrennungsanalysen untereinander in Übereinstimmung seien, ist die Anwendung von fast trockenen Kalikugeln zur Absorption der Kohlensäure nöthig, damit die Eudiometer vollständig ausgetrocknet werden. Das Übersehen dieses Umstandes hat mich sehr viel Mühe und Zeit gekostet.

Versuch 108, 3. März 10. Min. 735·9 Mm. 12·7° C.

Absorptionsanalyse

0·78117	$kt = 0·0069011$	$k_0 = 0·14988$
0·78487	$k = 0·16722$	
0·78292	$k_{61} = 0·16192$	

Verbrennungsanalyse

angewandt	14·757
+O	293·480
Contr.	28·215
Abs.	22·965
C_2H_4	11·483
H	3·500
Fehler	—0·216
C_2H_4	0·76640
H	0·23360

Im Mittel $k_0 = 0·15278$.

Wird die gefundene Zusammensetzung des Äthylens und die grössere Contraction des angewandten Wasserstoffes berücksichtigt, dann erhält man:

C_2H_4 . .	11·489	77·854
H	3·121	21·150
Fehler . .	0·147	0·996
	14·757	100·000

$kt = 0·0072158$ $k_{76} = 0·16857$

$k = 0·17409$ $k_0 = 0·15568$

Versuch 109, 3. März.

1 Stunde 735·6 Mm. 12·8° C.

0·43036	$kt = 0·047936$
0·43336	$k = 0·19275$

Versuch 110 17. März.

1 Stunde 753·4 Mm. 15·1° C.

0·42825	0·048451
0·43263	0·19482

0·42791	$k_{76} = 0·18657$	0·42566	0·19313
0·43568	$k_0 = 0·17220$	0·42885	0·17538
0·43178			

Versuch 111, 17. März.		Versuch 122, 18. April	
10 Minuten 753·1 Mm. 15·4° C.		10 Minuten 735·9 Mm. 14·8° C.	
0·77722	0·0071994	0·76974	0·0078340
0·77826	0·17358	0·76886	0·18902
0·78110	0·17192	0·76930	0·18303
0·77879	0·15626		0·16688

10 Minuten	1 Stunde
0·15278	0·17220
0·15626	0·17538
0·16688	
0·15864	0·17379

Die Abweichung der Werthe der Diffusionscoëfficienten, die aus den verschiedenen Beobachtungszeiten abgeleitet sind, ist hier nahezu 9·6%.

Wasserstoff — Sumpfgas.

Das Sumpfgas wurde aus einem Gemische von einem Theile essigsauren Natron mit zwei Theilen Natronkalk durch Erhitzen in einem eisernen Rohre dargestellt, durch Wasser, concentrirte Schwefelsäure, Ätzkali gewaschen und schliesslich durch zwei kleine Absorptionsthürme geleitet, welche mit concentrirter Schwefelsäure befeuchtete Glasperlen enthielten.

Von dem angewendeten Sumpfgase wurden Proben in Glasröhrchen eingeschmolzen, um später analysirt zu werden.

So ergab die Analyse des Sumpfgases vom Versuche 113, wenn es unmittelbar in die Eudiometer überfüllt wurde:

angewandt	12·640	10·148
+O u. Luft	179·875	169·700
C	25·447	20·969
a	12·263	10·061

Eine mit dem Sumpfgase vom Versuche 113 angestellte Absorptionsanalyse unter Anwendung von Gypskugeln, die in rauchende Schwefelsäure getränkt sind und nachherige Einwirkung einer Kalikugel ergab:

angewandt	77·874	0·7 % absorbirbare Bestand-
n. d. Abs.	77·328	theile.
Diff.	0·546	

Dabei ist zu bemerken, dass das Sumpfgas keine, durch eine Ätzkalikugel absorbirbare Bestandtheile enthielt.

Das nach der Absorption in den Röhren zurückbleibende Gas wurde in die Eudiometer überleert und nochmals analysirt. Es ergab sich:

	1.	2.	Summe
angewandt.....	20·636	17·512	38·147
+Luft u. O.	208·681	183·780	—
c	40·751	34·749	75·500
a	19·689	16·785	36·474

Und hieraus ergibt sich:

CH_4 =	36·474	95·549
H =	1·701	4·456
Fehler =	−0·027	
	38·148	100·000

Die ausgeführten Analysen ergaben also für das zum Versuche 113 angewendete Sumpfgas:

CH_4 =	94·875
H =	4·424
durch H_2SO_4 absorb. Bestandth. =	0·701
	100·000

Die absorbirbaren Bestandtheile hätten sich, wie ich glaube, dadurch entfernen lassen, dass das Sumpfgas durch eine mit rauchender Schwefelsäure gefüllte Kugelröhre geleitet worden wäre, wie solche bei der Darstellung des Äthans angewendet wurde und wie ich dieselbe dort beschreibe.

Um bei der Berechnung der Analysen der Zusammensetzung des Sumpfgases Rechnung tragen zu können, ist zu beachten, dass sich die Contraction 2·0369 des Gases vertheilt auf:

H	0·0664
CH_4	1·8975
Die durch H_2SO_4 absorbirbaren Bestandtheile	0·0730

Für reines Sumpfgas wären die Analysen des Gemenges Sumpfgas—Wasserstoff nach den Formeln zu berechnen:

$$CH_4 = a \qquad H = \frac{2}{3}(c - a) \qquad a)$$

Für das Sumpfgas des Versuches 113 ist:

$$CH_4 = \frac{a}{0{\cdot}9797,} \qquad H = \frac{2}{3}\left(c - \frac{1{\cdot}9705}{0{\cdot}9797}a\right) \qquad b)$$

Allerdings wird hiebei noch vorausgesetzt, dass die durch rauchende Schwefelsäure absorbirbare Verunreinigung gleichzeitig mit dem Sumpfgase diffundirt.

Bei der Berechnung der Diffusionsversuche hat man zu beachten, dass Waserstoff in ein Gemisch von H und CH_4 diffundirt. Um den Werth von kt aus der Tabelle zu entnehmen, muss der Procentgehalt Q, den die Analyse des Gasgemisches an Sumpfgas liefert, durch den Factor $1-\beta$ dividirt werden, worin β der Procentgehalt des angewendeten Sumpfgases an Wasserstoff ist.

Versuch 113, 25. Mai 35 Min. 736·5 Mm. 14·2° C.

Die Analysen der Gasgemenge sind zuerst nach den Formeln *a)* berechnet, um ihre Übereinstimmung zu zeigen, dann ist die Summe aus den angewandten Gasmengen den Contractionen und Absorptionen gebildet und mit diesen Zahlen wird nach den Formeln *b)* gerechnet.

	1	2	3	Summe
angew.	18·387	25·990	25·388	69·765
+Luft u. O	147·337	228·505	231·021	—
c ...	32·589	45·653	44·721	122·963
a	8·921	12·544	12·368	33·833
H....	9·831	13·710	13·323	36·609
CH_4..	8·921	12·544	12·368	33·008
Fehler	—0·365	—0·264	—0·303	+0·148
H....	52·420	52·220	51·860	52·475
CH_4..	47·580	47·780	48·140	47·313
Fehler	—	—	—	0·212

$Q = 0 \cdot 47313$ $\quad kt = 0 \cdot 037648$

$1-\beta = 0 \cdot 95576$ $\quad k = 0 \cdot 25952$ $\quad k_0 = 0 \cdot 23017$

$\frac{Q}{1-\beta} = 0 \cdot 49503$ $\quad k_{76} = 0 \cdot 25153$

Rechnet man den Versuch mit dem Mittel: $Q = 0 \cdot 47856$, welcher aus den nach der Formel *a)* berechneten Analysen abgeleitet ist, so findet man:

$$kt = 0 \cdot 040184$$
$$k_0 = 0 \cdot 24566$$

Ein Resultat, welches von jenen der übrigen Versuche erheblich abweicht und die Nothwendigkeit einer Correction erkennen lässt.

Von den Versuchen 117, 118 und 119 wurden die aufgefangenen Sumpfgase in ein Absorptionsrohr überfüllt und ganz in derselben Weise behandelt, wie es für das Methan des Versuches 113 gezeigt wurde.

Die Analysen ergaben für diesen Fall:

CH_4	96·287
H	2·340
Durch H_2SO_4 abs. Bestandth.	6·353
Fehler	0·020
	100·000

Bei der Gleichförmigkeit der Resultate, welche ich ohne Rücksichtnahme auf die Zusammensetzung des angewendeten Sumpfgases erhalten hatte, glaubte ich dieses Resultat auf die sämmtlichen übrigen Versuche anwenden zu können. Ein befriedigendes Resultat gaben aber hiemit bloss die Versuche 114 und 116.

Bei den anderen Versuchen ergeben die nach *b)* berechneten Analysen positive Fehler, welche bis zu 4% ansteigen, so dass ich annehmen muss, das Wasserstoffgas sei nicht rein gewesen, sondern habe Luft enthalten.

Versuch 114, 29. März 1 Stunde 737·7 Mm. 15·1° C.

	1	2	Summe
angew.	22·675	21·231	43·906
+Luft u O	215·426	188·600	—
C	38·247	35·783	73·930
a	7·856	7·317	15·163
H	15·023	14·099	28·069
CH_4	7·856	7·317	15·211
Fehler	—0·204	—0·185	+0·626
H	65·663	65·835	63·930
CH_4	34·337	34·165	34·645
Fehler	—	—	1·425

$Q = 0{\cdot}34645$ $\quad kt = 0{\cdot}062825$

$1-\beta = 0{\cdot}97660$ $\quad k = 0{\cdot}25264$

$\frac{Q}{1-\beta} = 0{\cdot}35475$ $\quad k_{76} = 0{\cdot}24523$ $\quad k_0 = 0{\cdot}22320$

Versuch 116, 3. April, 1 Stunde 743·5 Mm. 16·1° C.

	1	2	3	4
angew.	18·985	23·591	22·053	19·103
+Luft u. O	198·420	239·650	278·653	185·054
c	31·878	39·895	38·449	32·257
a	6·268	8·087	7·784	6·517
H	12·895	15·814	15·254	12·815
CH_4	6·268	8·087	7·784	6·517
Fehler	—0·173	—0·310	+0·015	—0·229
H	67·291	66·163	66·218	66·289
CH_4	32·709	33 837	33·787	33·711
Fehler	—	—	—	—

Summe				
angew.	84·732	H	64·867	$kt = 0{\cdot}064474$
c	142·479	CH_4	33·903	$k = 0{\cdot}25926$
a	28·656	Fehler	1·230	$k_{76} = 0{\cdot}25362$
H	54·962	Q =	0·33903	$k_0 = 0{\cdot}22945$
CH_4	28·727	$1-\beta$ =	0·97666	
Fehler	1·043	$\frac{Q}{1-\beta}$ =	0·34715	

Ich gebe zum Schlusse noch eine Zusammenstellung der Versuchsresultate, welche mit den Combinationen H—CH_4 erlangt wurden.

Unter I führe ich jene Werthe von k_0 an, welche mit den nach *a)* berechneten Analysen erhalten wurden. Unter II sind jene Werthe von k_0 zusammengestellt, welche unter Anwendung der Formeln *b)* erhalten wurden:

Nr. d. Vers.	t	I	II
113	35 Min.	0·24566	0·23017
114	60	0·23262	0·22320
116	60	0·23900	0·22945
117	10	0·23930	0·19661
118	20	0·23549	0·21177
119	60	0·23004	0·22284
120	10	0·22440	0·18659
121	10	0·21554	0·18613
Mittel	10 Min.	0·22641	0·18978
	20	0·23549	0·21177
	60	0·23388	0·22516

Die kleinen Werthe, welche für k_0 in den Versuchen 120 und 121 erhalten werden, scheinen meine Vermuthung, dass der Wasserstoff bis zu 4% Luft enthalten habe, zu bestätigen.

Trotz der Unsicherheit der in dieser Tabelle mitgetheilten Zahlen darf doch mit grosser Wahrscheinlichkeit angenommen werden, dass die kleineren Diffusionszeiten erheblich kleinere Werthe des Diffusionscoëfficienten liefern.

Apparat IV.

Wasserstoff—Kohlensäure.

Es schien mir nicht ohne Interesse, einige Diffusionsversuche mit einem Diffusionscylinder von anderer innerer Weite als 13 Mm. anzustellen. Am einfachsten konnte dies durch Anwendung eines Bessemerstahllaufes von 9 Mm. innerem Durchmesser erreicht werden, den mir die Waffenfabriks-Gesellschaft zu Steyer sowie die bisher benützten Läufe zur Verfügung gestellt hatte.

Dieser Lauf wurde mit den entsprechenden Gewinden, Konussen und am oberen Ende mit einem Cylinder von 13 Mm.

äusserem Durchmesser versehen, um in das Hahnlager und den Fuss des Apparates II eingeschraubt werden zu können. Der an den Lauf angedrehte Cylinder füllt die verticale Bohrung des Hahnkörpers aus, endet aber in eine ebene Fläche. Zwischen dieser und der konischen Mantelfläche des Hahnkörpers bleibt ein Zwischenraum von 0·4 Cc., der sich mit dem, durch den Hahn strömenden Gase ausfüllt. Beim Entleeren des Apparates werden daher 0·4 Cc. von diesem letzteren Gase mehr aufgefangen. Der durch die Analyse ausgewiesene Procentgehalt des Gases, welches sich ursprünglich im Diffusionscylinder befand, muss mit dem Factor $\frac{558}{554}[\log 0{\cdot}000313]$ multiplicirt werden, um diesem Umstande Rechnung zu tragen.

Die Länge des Diffusionsrohres wurde hier zwischen den beiden oberen Endflächen gemessen und zu 87·085 Cm. gefunden. Der Kubikinhalt des Diffusionscylinders ist somit 55·401 Cc. Vom log *kt* der Tabellen ist daher 0·39313—1 abzuziehen, um die dem vorliegenden Apparate entsprechenden Werthe von *kt* zu finden.

Die obige Correction macht wegen des geringen Kubikinhaltes des Apparates die Resultate ziemlich unsicher.

127. Versuch 20. März.		128. Versuch 21. März.	
10 Minuten 748·8 Mm. 17·0° C.		1 Stunde 742·9 Mm. 16·3° C.	
0·75827	$kt = 0{\cdot}008387$	0·38910	0·054238
0·75345	0·020347	0·39975	0·21929
$Q = 0{\cdot}75586$	0·19823	0·39443	0·21436
$Q = 0{\cdot}76132$	0·17845	0·39728	0·29369
corr.			

129. Versuch 21. März.		130. Versuch 21. März.	
10 Minuten 742·6 Mm. 16·4° C.		1 Stunde 742·0 Mm. 17·4° C.	
0·75550	0·0084327	0·37133	0·055450
0·75490	0·20457	0·39600	
0·75521	0·19988	0·38767	
0·76068	0·18050	0·39047	0·19646

131. Versuch 21. März.

10 Minuten 742·0 Mm. 17·7° C.		10 Minuten	1 Stunde
0·75357	0·0086576	0·17845	
0·75057	0·21003	18050	0·19364
0·75207	0·20505	18372	19646
0·75752	0·18372	$k_0 = 0·18089$	0·19508

Es gibt also auch ein Apparat mit einem engeren Diffusionscylinder dieselben Werthe, so dass die von Stefan gefundene Unabhängigkeit der Diffusionserscheinungen von der Weite des Diffusionscylinders durch diese Versuche bestätigt erscheint.

Apparat V.

Um noch weiteren Aufschluss über die beobachtete Abweichung vom Diffusionsgesetze zu erhalten, wurde der Apparat V construirt. Derselbe functionirt nach der Stefan'schen Methode, gestattet aber, den Inhalt des Diffusionscylinders durch einen Hahn in zwei Theile zu theilen und jeden Theil für sich aufzufangen.

Um den Apparat V zusammenzustellen, wurde vom Apparate I das obere Rohr abgeschraubt und statt dessen ein anderes, vom Apparate II herrührendes eingesetzt, welches an seinem oberen Ende den Hahn des Apparates II trug.

Die untere Mantelfläche des Hahnes I theilt die Höhlung des Apparates genau in zwei gleiche Theile, jeder von der Länge 0·4331 Met. Wird der Apparat in derselben Weise benutzt, wie die Apparate II, III und IV, so ist das aus der Tabelle genommene kt mit 4 zu multipliciren. Wird das Gas aus den beiden Hälften des Apparates gesondert aufgefangen, dann ist zu beachten, dass die Gasmenge Q_u der unteren Hälfte durch die Formel:

$$Q_u = \int_0^{\frac{l}{2}} \rho dx = \frac{8}{\pi^2} \sin\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{1} e^{-kt\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2} - \frac{1}{9} e^{-9kt\left(\frac{\pi}{2l}\right)} - \frac{1}{25} e^{-25kt\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2} + \ldots\right]$$

gegeben ist und die Gasmenge der oberen Hälfte durch:

$$Q_0 = Q - Q^u$$

gefunden wird, wobei Q die unter $\frac{u-o}{u+o}$ in der Tabelle stehenden Zahlen sind. Mit Hilfe der, von den schon mitgetheilten Tabellen herrührenden Rechnungsdaten ist es leicht, die zur Berechnung dieser Versuche nöthige Tabelle abzuleiten:

kt	Qu	Qo	kt	Qu	Qo
0·0100	482167	257271	131	8620	2787
101	1761	6380	132	8156	2508
102	1356	5493	133	7688	1844
103	0946	4618	134	7222	1183
104	0535	3752	0·0135	6752	0533
0·0105	0121	2890	136	6281	229882
106	479704	2040	137	5809	9239
107	9285	1200	138	5336	8602
108	8864	0365	139	4862	7970
109	8439	249540	0·0180	444697	205758
0·0110	8013	8722	185	2176	3459
111	7586	7910	190	9688	1191
112	7155	7108	195	437113	199070
113	6723	6313	0·0200	4577	6973
114	6287	5527	205	2036	4937
0·0115	5851	4746	210	429494	2960
116	5413	3972	215	6951	1035
117	4972	3207	220	4410	189160
118	4529	2449	0·0225	1870	7336
119	4085	1698	230	419331	5559
0·0120	473638	240953	235	6797	3823
121	3191	0214	240	4268	2129
122	2740	239484	245	1750	0468
123	2288	8759	0·0250	409223	178859
124	1835	8041	255	6709	7279
0·0125	1382	7326	260	4202	5732
126	0925	6621	265	1702	4217
127	0467	5920	270	399210	2756
128	0007	5227	0·0275	396724	171283
129	469547	4537	280	4252	169855
0·0130	9085	3865	285	1784	8458

kt	Q_u	Q_o	kt	Q_u	Q_o
290	389328	7083	54	1591	6939
295	6880	5735	0·055	277921	5379
0·0300	4446	4404	56	4301	3859
0·050	296744	123396	57	0723	2357
51	2884	1756	58	267194	0856
52	289073	0117	59	3709	109391
53	5310	118520	0·060	0272	7948

Auch die kt dieser Tabelle sind mit 4 zu multipliciren, um dieselben für den vorliegenden Apparat umzurechnen.

Die unter Q_u und Q_o eingetragenen Werthe sind die Hälften der Procentgehalte, welche die Analysen geben, so dass $Q_u + Q_o = Q$ der Procentgehalt an dem Gase wäre, mit welchem der Apparat gefüllt war, wenn nach beendeter Diffusion der Gesammtinhalt aufgefangen worden wäre.

Der Werth von Q_o, den die Analysen geben, bedarf einer Correction. Die obere Endfläche des Diffusionsrohres ist hier eben und hat einen Durchmesser von 16·5 Mm. Der Zwischenraum zwischen dieser ebenen Endfläche und der Mantelfläche des Hahnes II beträgt 0·154 CC. Quecksilberkügelchen, die sich in diesen Raum hineinsetzen, müssen durch Ausblasen entfernt werden. Alsdann ist die, durch die Analyse für die obere Hälfte gelieferte Procentzahl des im Diffusionsrohre zurückgebliebenen Gases mit dem Factor $\frac{57640}{57486}$ [log = 0·00116] zu multipliciren.

Wird aber der gesammte Inhalt des Diffusionscylinders entleert, dann ist die gefundene Gasmenge Q dadurch zu corrigiren, dass zum log 0·00057 addirt wird.

Wasserstoff—Kohlensäure.

133. Versuch, 24. März 1 Stunde 738·4 Mm. 18·4° C.

Anal. d. u. H.	Anal. d. o. H.	
0·54198	0·23780	$o + u = 0·39018$
0·54193	0·23809	$kt = 0·055600$
0·54196	0·23795	$k = 0·22240$
$u = 0·27098$	$o = 0·11888$	$k_{76} = 0·21608$
	o corr $= 0·11920$	$k_0 = 0·19278$

$kt = 0{\cdot}056928$	$0{\cdot}052574$
$k = 0{\cdot}227712$	$0{\cdot}210294$
$k_{76} = 0{\cdot}22123$	$0{\cdot}20431$
$k_0 = 0{\cdot}19738$	$0{\cdot}18228$

Für den Fall, als der Gesammtinhalt des Apparates aufgefangen und analysirt worden wäre.

134. Versuch, 24. Mai.

25 Minuten 735·8 Mm. 18·8° C.

0·83468	0·37754
0·83462	0·37811
0·83465	0·37783
0·41732	0·18892
	0·18943
0·023039	0·021569
0·22118	0·20707
0·21414	0·20047
0·19059	0·17843

135. Versuch, 25. Mai.

1 Stunde 744·5 Mm. 19·2° C.

0·55149	0·23468
0·55903	0·23572
0·55527	0·23520
0·27763	0·11760
	0·11792
0·055080	0·053380
0·22032	0·21352
0·21583	0·20917
0·19162	0·18571

136. Versuch, 28. Mai.

1 Stunde 751·0 Mm. 20·7° C.

0·55076	0·23386
0·54715	0·23550
0·54891	0·23468
0·27445	0·11734
	0·11766
0·055957	0·053541
0·22383	0·21416
0·22118	0·21162
0·19464	0·18623

Wenn der Gesammtinhalt des Cylinders aufgefangen worden wäre.

$o+u = 0{\cdot}39211$
$k = 0{\cdot}220924$
$k_{76} = 0{\cdot}21831$
$k_0 = 0{\cdot}19210$

Diese Versuche mit dem Apparat V geben somit:

Nr. d. Vers.	t	u. H.	o. H.	Mittel
133	60 Min.	0·19738	0·18228	0·19278
134	25	0·19059	0·17843	0·18451
135	60	0·19162	0·18575	0·18867
136	60	0·19464	0·18623	0·19210

Die Mittelwerthe nähern sich den, mit den Apparaten II und III gefundenen so sehr, dass ich den Apparat zu weiteren

Versuchen brauchbar ansah und die folgenden Versuche mit anderen Gascombinationen durchführte.

Zum Schlusse der ganzen Versuchsreihe wurden mit der Combination Wasserstoff—Kohlensäure folgende Versuche angestellt:

178. Versuch, 11. December.

14 Minuten 733·2 Mm. 8·9° C.

obere Hälfte.

$CO_2 = 0{\cdot}49236$
$Q_0 = 0{\cdot}24618$
Q corr. $= 0{\cdot}24683$
$kt = 0{\cdot}011235$
$k = 0{\cdot}19461$
$k_{76} = 0{\cdot}18775$
$k_0 = 0{\cdot}17750$

Die Analysen der unteren Hälfte sind sämmtlich verdorben worden.

179. Versuch, 12. December.

14 Minuten 740·8 Mm. 9·0° C.

	u. H.	o. H.
	0·94364	0·49318
	0·94349	0·49269
	0·94357	0·49294
	0·47179	0·24647
$Q =$	0·47294	0·24712
corr.		
$kt =$	0·012155	0·011200
$k =$	0·21055	0·19400
$k_{76} =$	0·20523	0·18910
$k_0 =$	0·19391	0·17867

Mittel $k_0 = 0{\cdot}18629$

180. Versuch, 12. December.

14 Minuten 740·8 Mm. 9·1° C.

Der Gesammtinhalt des Apparates wurde analysirt.

72·306
72·114
72·210

Q corr. $= 0{\cdot}72302$
$kt = 0{\cdot}011301$
$k = 0{\cdot}19373$
$k_{76} = 0{\cdot}18884$
$k_0 = 0{\cdot}17832$

181. Versuch, 13. December.

14 Minuten 743·2 Mm. 9·0° C.

	u. H.	o. H.
	0·94398	
	0·94412	
	0·94405	0·49297
$Q =$	0·47201	0·24649
$Q =$	0·47317	0·24715[1]
corr.		
$kt =$	0·012100	0·011195
$k =$	0·20959	0·19391
$k_{76} =$	0·20496	0·18963
$k_0 =$	0·19277	0·17836

Im Mittel $k_0 = 0{\cdot}18557$

Bemerkung. Die in den unteren Hälften bei den Versuchen 179 und 181 gefundenen Kohlensäuremengen sind, mit Rücksicht darauf, dass die Kohlensäure höchstens 0·23% eines nicht absorbirbaren Gases enthält, corrigirt.

183. Versuch, 17. December.

60 Minuten 748·9 Mm. 10·1° C.

	u. H.	o. H.
	57·516	24·773
	57·490	24·859
	57·503	24·816
$Q =$	0·28752	0·12408
$Q =$	—	0·12442
corr.		
$kt =$	0·052413	0·049376
$k =$	0·20965	0·19770
$k_{76} =$	0·20650	0·19481
$k_0 =$	0·19386	0·18281

Im Mittel $k_0 = 0·18837$

184. Versuch, 17. December.

60 Minuten 748·6 Mm. 10·4° C.

0·40949
0·41000
$Q = 0·40979$
Q corr. $= 0·41033$
$kt = 0·051804$
$k = 0·20722$
$k_{76} = 0·20412$
$k_0 = 0·19118$

186. Versuch, 20. December 60 Min. 754·4 Mm. 10·2° C.

u. H.	o. H.	u. H.	o. H.
0·57524	0·24603	$kt = 0·052456$	0·050150
0·57417	0·24527	$k = 0·20982$	0·20060
0·57471	0·24565	$k_{76} = 0·20828$	0·19912
$Q_u = 0·28736$	$Q_0 = 0·12282$	$k_0 = 0·19533$	0·18675
	Q corr. $= 0·12315$	Im Mittel $k_0 =$	0·19104

Diese Versuche geben;

Nr. d. Vers.	Zeit	u. H.	o. H.	Mittel
178	14 Min.	—	0·17750	—
179	14	0·19391	0·17867	0·18629
181	14	0·19277	0·17836	0·18557
183	60	0·19386	0·18281	0·18837
186	60	0·19533	0·18675	0·19104
Im Mittel	14	0·19334	0·17818	0·18593
	60	0·19460	0·18478	0·18970
180	14			0·17832
184	60			0·19118

Für die Versuche von 60 Minuten Dauer ist die Übereinstimmung zwischen den Mittelwerthen, welche aus den gesondert aufgefangenen Gasmengen der beiden Hälften abgeleitet werden,

und dem Werthe, welcher sich ergibt, wenn der Gesammtinhalt aufgefangen wird, ein sehr befriedigender.

Für die kleinen Versuchszeiten sind diese Abweichungen allerdings sehr erhebliche. Es ist mir aber nicht gelungen, die Ursache dieser Unterschiede aufzufinden.

Bei allen mit dem Apparate V durchgeführten Versuchen gibt die obere Hälfte des Apparates einen kleineren Werth des Diffusionscoëfficienten, als die untere Hälfte.

Für die kleineren Versuchszeiten gibt der Apparat V so wie die bisher angewandten Apparate kleinere Werthe des Diffusionscoëfficienten. Diese kleineren Werthe entspringen hauptsächlich daraus, weil in der oberen Hälfte, wo die grossen Dichtigkeitsgefälle stattfinden, die Diffusion langsamer vor sich geht. Die untere Hälfte des Apparates, welche die kleinen Dichtigkeitsgefälle enthält, gibt fast stets die gleichen Werthe des Diffusionscoëfficienten.

Kohlenoxyd—Äthylen.

Das Äthylen wurde aus $C_2H_4Br_2$ dargestellt. Das Kohlenoxyd wurde aus Oxalsäure mit concentrirter Schwefelsäure entwickelt und durch vier Waschflaschen mit Ätzkalilauge gewaschen.

Das durch die Diffusionsversuche erhaltene Gasgemisch zeigte nicht eine Spur von Kohlensäure.

Apparat I.

Versuch 125. 28. April 1 Stunde 733·5 Mm. 16·8° C.

Zur Berechnung der Verbrennungsanalysen dienen die Formeln:

$$C_2H_4 = \frac{1}{2}(2c-a) \qquad CO = 2(a-c)$$

	u. H.	o. H.	
angew....	20·454	16·044	$u = 0{\cdot}28447$
+O u. Luft	218·926	260·124	$o = 0{\cdot}70870$
c.....	19·053	24·808	$o+u = 0{\cdot}99317$
a	26·409	27·154	$o-u = 0{\cdot}42423$
CO.....	14·712	4·692	$\frac{o-u}{o+u} = 0{\cdot}42745$
C_2H_4	5·849	11·415	

Fehler . . .	—0·107	—0·053	$kt = 0{\cdot}048700$
CO	71·555	29·130	$k_{76} = 0{\cdot}047002$
C_2H_4	28·447	70·870	$k_0 = 0{\cdot}041716$

Apparat V.

Das Kohlenoxydgas ist über Wasser aufgefangen und wird durch die Sitzb. Bd. LXXXV, S. 153 beschriebene Verrichtung durch den Hahn II getrieben.

137. Versuch, 31. Mai, 2 Stunden 743·8 Mm. 22·7° C. 2·5 $\frac{\text{Liter}}{\text{Std.}}$

Absorptionsanalyse			
u. H.	o. H.	n. H.	o. H.
0·81209	0·35338	$kt = 0{\cdot}025458$	0·024891
0·81559	0·36153	$k = 0{\cdot}050916$	0·049782
0·81384	0·35746	$k_{76} = 0{\cdot}049831$	0·048721
$Q = 0{\cdot}40692$	$Q_0 = 0{\cdot}17873$	$k_0 = 0{\cdot}042480$	0·041534
	Q corr. $= 0{\cdot}17921$		

Versuch, 138. 6. Juni 2^h 746·6 Mm. 21·9° C. 2·7 $\frac{\text{Liter}}{\text{Stunde}}$

Absorptionsanalyse			
u. H.	o. H.	u. H.	o. H.
0·82530	0·35100	$kt = 0{\cdot}025239$	0·024859
0·80788	0·36809	$k_{76} = 0{\cdot}049589$	0·048840
0·81494	0·3558	$k_0 = 0{\cdot}042500$	0·041860
0·81604	0·35765		
$Q_u = 0{\cdot}40802$	$Q_o = 0{\cdot}17883$		
	Q corr. $= 0{\cdot}17931$		

Versuch, 139. 9. Juni 2^h. 736·6 Mm. 21·7° C. 3 $\frac{\text{Liter}}{\text{Stunde}}$

Absorptionsanalyse			
u. H.	o. H.		
0·81468	0·36878	$kt = 0{\cdot}025311$	0·023937
0·81596	0·35865	$k_{76} = 0{\cdot}049064$	0·046400
0·81532	0·36372	$k_0 = 0{\cdot}042107$	0·039822
0·40766	0·18186		
	0·18234		

Versuch 140 17. Sept. 2^h, 741·7 Mm. 22·2° C. 3·1 $\frac{\text{Liter}}{\text{Stunde}}$

angew	13·202	16·004	9·944	$Q = 0{\cdot}59025$
+O..	213·273	233·121	218·470	Q corr. $= 0{\cdot}59102$
+H..	—	—	240·550	$kt = 0{\cdot}024644$
c ...	17 773	21·505	46·471	$k = 0{\cdot}048288$
a	19·890	24·164	14·987	$k_{76} = 0{\cdot}047125$
CO...	4·234	5·322	3·272	$k_0 = 0{\cdot}041104$
C_2H_4	7·828	9·432	5·857	
Fehler	1·140	1·259	0·815	
CO...	32·071	33·254	32·904	
C_2H_4	59·294	58·880	58·900	
Luft..	8·635	7·866	8·196	

Absorptionsanalyse $C_2H_4 = 0{\cdot}58749$

Versuch 141. 20. Sept. 2^h 19·1° C. 738·6 Mm. 3·3 Liter.

angewandt	12·491	14·216	$Q = 0{\cdot}58705$
+O.....	231·010	227·640	Q corr. $= 0{\cdot}58782$
+H.....	14·225	—	$kt = 0{\cdot}025032$
c	38·215	19·354	$k = 0{\cdot}050064$
a	19·159	21·936	$k_{76} = 0{\cdot}048655$
CO.....	4·564	5·164	$k_0 = 0{\cdot}043225$
C_2H_4	7·297	8·386	
Luft.....	0·630	0·666	
CO.....	36·540	36·326	
C_2H_4	58·420	58·990	
Luft.....	5·040	4·684	

Es wurde somit gefunden:

Nr. d. Vers.	u. H.	o. H.	Mittel
125	—	—	0·041716
137	0·042480	0·041531	0·042007
138	0·042500	0·041860	0·042180
139	0·042107	0·039822	—
140	—	—	0·041104
141	—	—	0·043225
Mittel	0 042362	5·041695	0·042077

Wird der abnorme kleine Werth 0·039822 ausser Acht gelassen, dann beträgt der Unterschied der Werthe des Diffusionscoëfficienten 1·5%.

Wenn der Gesammtinhalt des Apparates entleert wurde, so ergab sich:

Versuch		
140	120 Min.	0·041104
141		0·043225
	Mittel	0·0422659

Äthylen — Wasserstoff.

Die mit dieser Gascombination mit dem Apparate III ausgeführten Versuche führten zu sehr verschiedenen Resultaten, je nachdem die Gasgemische durch Absorptionsanalysen, oder durch Verbrennungsanalysen untersucht wurden. Ich habe daher diese Versuche mit dem Apparate V nochmal aufgenommen und es zeigte sich, dass sich die mit diesem Apparate erhaltenen Resultate mit den früher gefundenen in befriedigende Übereinstimmung bringen lassen, wenn darauf Rücksicht genommen wird, dass das angewendete Äthylen nicht chemisch rein ist.

Bei der grossen Gleichförmigkeit der Versuchsresultate, schien es mir genügend, Analysen des angewandten Äthylens nur für einen Versuch auszuführen. Ich wählte das Äthylen des Versuches 144 hinzu.

Es wurde gefunden:

	1	2	Summe
angewandt	12·631	11·187	23·818
+O	257·256	238·655	—
Contr.....	25·395	22·523	47·918
Absorption	24·840	22·222	47·062

Hieraus ergab sich die Contraction des angewendeten Äthylens zu 2·012, die Absorption zu 1·9759.

Die Formeln zur Berechnung der Analysen, chemisch reines Äthylen vorausgesetzt, sind:

$$C_2H_4 = \frac{a}{2} \qquad H = \frac{2}{3}(c-a) \qquad a)$$

Mit Berücksichtigung oben angeführter Analysen sind diese Formeln:

$$C_2H_4 = \frac{a}{1{\cdot}9759} \qquad H = \frac{2}{3}\left(c - \frac{2{\cdot}012}{1{\cdot}9759}\,a\right)$$

Der Wasserstoff, welcher bisher aus dünnem Zinkbleche mit verdünnter Schwefelsäure entwickelt und durch übermangansaures Kali und Kalilauge gewaschen würde, wird nunmehr mit einer Lösung von salpetersaurem und schwefelsaurem Silber und sehr concentrirter Ätzkalilauge gewaschen. Analysen des Wasserstoffes weisen eine nur um Weniges zu grosse Contraction auf, so dass derselbe wesentlich reiner ist als früher.

Um den gleichnamigen Gang des zur continuirlichen Entwicklung von Wasserstoff bestimmten Apparates nicht zu stören, dürfen keine zu grossen Säulen von Waschflüssigkeiten vorgeschlagen werden; es musste daher auf eine noch vollständigere Reinigung verzichtet werden.

Der von mir benutzte Apparat geht in seiner jetzigen Einrichtung stundenlang gleichmässig pulsirend fort. Dadurch, dass im Apparate hoher Druck erhalten, aber verhältnissmässig wenig Gas ausströmen gelassen wird, entsteht ein nahezu continuirlicher Gasstrom, dessen Flamme kaum merklich zuckt.

In der nachfolgenden Zusammenstellung der Versuchsresultate sind die einzelnen Analysen nach den Formeln *a)* gerechnet, um deren Übereinstimmung und Fehler zu zeigen; dann werden aus den angewandten Gasmengen, den Contractionen und den Absorptionen die Summen gebildet und auf diese die Formeln *b)* angewendet.

Die Berechnung des Diffusionscoëfficienten geschieht mit den Daten, welche die Formel *b)* liefert.

143. Versuch, 29. September, 30 Min. 739·5 Mm. 18·0° C.

Untere Hälfte

angewandt	12·838	n. d. Formel	$Q = 81{\cdot}656$
$+O$	210·000	*b)* gerechnet	$Q_u = 0{\cdot}40828$
c.....	24·456	C_2H_4 10·483	$kt = 0{\cdot}025187$
a.....	20·714	H ... 2·243	$k = 0{\cdot}20150$
C_2H_4.....	10·357	Fehler 0·112	$k_{26} = 0{\cdot}19607$
H.	2·494	C_2H_4 81·656	$k_0 = 0{\cdot}17535$

Fehler ...	—0·013	H ...	17·472
C_2H_4.....	80·594	Fehler	0·872
H	19·406		

Obere Hälfte

	1.	2.	3.	Summe
angew.	16·612	17·954	15·705	50·271
+O ..	163·020	208·870	195·605	—
c.....	28·190	30·290	26·301	84·781
a.....	11·840	12·934	11·094	35·868
C_2H_4..	5·920	6·467	5·547	18·153
H	10·900	11·574	10·138	32·172
Fehler	—0·208	—0·076	+0·020	—0·054
C_2H_4..	35·196	35·852	35·365	36·070
H	64·804	64·168	64·635	63·930

$Q = 36·070$ $kt = 0·024385$ $k_0 = 0·16978$

$Q_0 = 0·18035$ $k = 0·19508$

Q corr. $= 0·18084$ $k_{76} = 0·18981$

144. Versuch, 2. October, 30 Min. 747·8 Mm. 17·8° C.

	1.	2.	Summe	
angew.	15·060	12·869	27·929	$Q = 0·59263$
+O ..	214·142	217·574	—	Q corr. $= 0·59341$
c.....	27·181	23·565	50·746	$kt = 0·024357$
a.....	17·641	15·309	32·950	$k = 0·19486$
C_2H_4..	8·821	7·655	16·876	$k_{76} = 0·19174$
H	6·360	5·504	11·463	$k_0 = 0·17168$
Fehler	—0·121	—0·290	—0·210	
C_2H_4..	58·105	58·173	59·263	
H	41·895	41·827	40·737	

150. Versuch, 9. October, 70 Min. 749·9 Mm. 17·1° C.

Untere Hälfte

	1.	2.	Summe	
angew. ..	15·225	16·342	31·567	$Q = 52·679$
+O.....	234·532	236·520	—	$Q_u = 0·26340$
c ...	26·813	28·316	55·129	$kt = 0·059090$
a ...	15·837	17·020	32·857	$k = 0·20259$
C_2H_4	7·919	8·510	16·629	$k_{76} = 0·19990$

H ...	7·314	7·531	14·448	$k_0 =$ 0·17975
Fehler ..	— 0·008	+0·300	+0·490	
C_2H_4	51·985	52·077	52·679	
H ...	48·015	46·087	45·769	
Fehler ..	—	1·836	1·552	

Obere Hälfte

	1.	2.	3.	Summe
angewandt .	28·703	31·068	27·583	87·354
+0.....	197·860	248·000	207·355	—
c	46·436	49·930	44·433	140·799
a	13·030	13·818	12·236	39·084
C_2H_4	6·515	6·909	6·118	19·780
H	22·271	24·075	21·798	67·335
Fehler	—0·083	+0·084	—0·333	+0·239
C_2H_4	22·632	22·238	21·916	22·643
H	77·368	77·492	78·084	77·084
Fehler	—	0·270	—	0·273

$Q = 22·643$ $kt = 0·056225$ $k_0 = 0·17104$

$Q_0 = 0·11322$ $k = 0·19277$

Q corr. $= 0·11352$ $k_{76} = 0·19022$

151. Versuch, 10. October, 70 Min. 747·6 Mm. 17·0° C.

Untere Hälfte

	1.	2.	Summe	
angew. ..	17·488	15·996	33·186	$Q =$ 52·510
+0.....	238·390	208·910	—	$Q_u =$ 0·26255
c ...	30·800	27·702	58·502	$kt =$ 0·059337
a ...	18·190	16·243	34·433	$k =$ 0·20344
C_2H_4	9·095	8·122	17·426	$k_{76} =$ 0·20012
H ...	8·407	7·639	15·627	$k_0 =$ 0·18006
Fehler ...	—0·014	—0·063	+0·133	
C_2H_4	51·965	51·531	52·510	
H ...	48·035	48·469	47·090	
Fehler ...	—	—	0·400	

Obere Hälfte

angewandt	28·600	nach den	$Q_0 =$ 0·11136
+0	201·360	Formeln	Q corr. = 0·11166
c	46·229	*b)*	$kt =$ 0·057464

a	12·605	gerechnet	$k = 0{\cdot}19702$
C_2H_4	6·303	6·379	$k_{76} = 0{\cdot}19381$
H	22·416	22·263	$k_0 = 0{\cdot}17438$
Fehler	—0·119	—0·042	
C_2H_4	21·948	22·271	
H	78·052	77·729	

152. Versuch, 11. October, 30 Min. 742·9 Mm. 16·8° C.

Untere Hälfte.

angewandt	13·780	n. d. Formel *b)*	
+O	236·091	C_2H_4	81·808
c	26·216	H	17·097
a	22·275	Fehler	1·096
C_2H_4	11·138	$Q_u = 0.40904$	
H ...	2·627	$kt = 0{\cdot}025036$	
Fehler ...	+0·015	$k = 0{\cdot}20029$	
C_2H_4	80·829	$k_{76} = 0{\cdot}19571$	
H ...	19·062	$k_0 = 0{\cdot}17637$	
Fehler ...	0·109		

Obere Hälfte.

	1.	2.	Summe
angewandt ..	22·955	21·979	44·934
+O	262·365	268·500	—
c	38·465	36·610	75·075
a	16·319	15·427	31·746
C_2H_4	8·160	7·714	16·066
H	14·764	14·122	28·481
Fehler.....	+0·031	+0·143	+0·387
C_2H_4	35·547	35·097	35·755
H	64·318	64·252	63·384
Fehler	0·135	0·651	0·861

$Q = 35{\cdot}755$ $kt = 0{\cdot}024862$ k_0 .. 0·17515

$Q_0 = 0{\cdot}17888$ $k = 0{\cdot}19890$

Q corr. = 0·17926 $k_{76} = 0{\cdot}19442$

154. Versuch, 16. October, 12 Min. 740·6 Mm. 15·9° C.

angewandt	16·588	18·922	35·510	$Q = 0{\cdot}74867$
+O.....	256·031	304·113	—	Q corr. = 0·74965
c ...	31·081	35·223	66·304	$kt = 0{\cdot}0092303$

a ...	24·495	28·035	52·530	$k = 0{\cdot}18461$
C_2H_4	12·248	14·018	26·585	$k_{76} = 0{\cdot}17990$
H ...	4·391	4·792	8·543	$k_0 = 0{\cdot}16295$
Fehler ...	—0·051	+0·112	+0·382	
C_2H_4	73·610	74·085	74·867	
H ...	26·390	25·355	24·058	
Fehler ...	—	0·590	1·075	

156. Versuch, 19. October, 12 Min. 747·1 Mm. 15·3° C.

angewandt ..	18·146	18·157	15·942	16·860
+O	293·186	299·164	258·750	266·530
c	33·930	33·834	29·720	31·340
a	27·240	27·008	23·654	25·215
C_2H_4	13·620	13·504	11·827	12·608
H	4·460	4·551	4·044	4·083
Fehler	+0·066	+0·102	+0·071	+0·169
C_2H_4	75·058	74·374	74·186	74·780
H ...	24·578	25·065	25·368	24·224
Fehler	0·364	0·561	0·446	1·000

Summe:

angewandt .	69·105	C_2H_4 .. 52·188	C_2H_4 .. 75·520
c	128·824	H .. 15·549	H .. 22·500
a	103·116	Fehler. 1·368	Fehler. 1·980
	$Q = 0{\cdot}75520$	$kt = 0{\cdot}0087532$	$k_{76} = 0{\cdot}17209$
	Q corr. $= 0{\cdot}75619$	$k = 0{\cdot}17506$	$k_0 = 0{\cdot}15634$

Die Versuche ergeben somit:

	Diff. Zt.	Anal. n. d. Formel *b)*		Anal. n. d. Formel *a)*	
N. d. Ver.	Min.	u. H.	o. H.	u. H.	o. H.
143	30	0·17535	0·16976	0·18275	0·17632
150	70	0·17975	0·17104	0·18262	0·17473
151	70	0·18006	0·17438	0·18347	0·18123
152	30	0·17637	0·17296	0·18323	0·17902
Mittel	30	0·17586	0·17136	0·18299	0·17767
	70	0·17991	0·17282	0·18305	0·17798
144	30	0·17168		0·18134	
154	12	0·16295		0·17251	
156	12	0·15644		0·16853	
Mittel	12	0·15940		0·17052	

Wasserstoff—Äthan C_2H_6.

Das Äthan wurde durch Elektrolyse des essigsauren Kalis dargestellt und hiezu der Strom von 6—8 Grove'schen Elementen, durch zwei Zersetzungszellen hintereinander geleitet.[1] Das an der positiven Elektrode abgeschiedene Gas wurde, da es zu zwei Drittel Kohlensäure enthält, durch concentrirte Kalilauge gewaschen. Zu weiterer Reinigung passirt das Gas rauchende Schwefelsäure, nochmals Ätzkali und schliesslich, um es zu trocknen, concentrirte Schwefelsäure. Die Waschflüssigkeiten sind in Kugelröhren enthalten, welche aus zehn hintereinander gereihten Kugeln bestehen, und welche wenig gegen die Horizontale geneigt, aufgestellt werden. Die Verbindungen zwischen den Kugeln sind so weit gehalten, dass die Waschflüssigkeit leicht aus einer oberen in eine untere Kugel zurückfliessen kann. Wo das Gas eingeleitet wird, ist eine Kugel an der Zuleitungsröhre, wo es austritt, ist eine, durch einen Kautschukstöpsel schliessbare Erweiterung, durch welche die Waschflüssigkeiten eingegossen werden. Solche Kugelröhren sind unter allen Vorrichtungen, welche ich zum Waschen von Gasen angewendet habe, das Verlässlichste. — Überdies kommt denselben nur ein sehr geringer schädlicher Raum zu.

Es ist mir nicht jedesmal gelungen, den Apparat mit chemisch reinem Gase zu füllen. Ist der elektrische Strom zu schwach, dann reisst der Gasstrom nicht alle Luft aus dem Apparate mit sich; ist der Strom zu stark, dann scheint an der positiven Elektrode Sauerstoff aufzutreten, was ich übrigens nicht weiter untersucht habe. Wird die Lösung des essigsauren Kali zweimal zur Elektrolyse angewendet, so ergibt sich nie mehr C_2H_6 allein, sondern ein unverbrennliches Gas, dasselbe begleitend.

Zur Berechnung der Analysen der Gasgemische dienen die Formeln:

$$C_2H_6 = \frac{a}{2} \qquad H = \frac{2}{3}\left(c - \frac{5}{4}a\right)$$

[1] Kolbe, Ann. d. Chemie u. Pharm. Bd. 69, S. 179.

Mit jedem Versuche wurden auch Äthananalysen verbunden, um über den Grad der Reinheit des angewendeten Gases im Klaren zu sein. Diese Analysen geben auch die Anhaltspunkte zur Beurtheilung, ob die bei den Analysen der Gasgemische gefundenen Abgänge durch das angewendete Äthan bedingt sind.

Versuch 157, 21. October, 80 Min. 745·0 Mm. 15·7° C.

Äthylenanalyse

	1.	2.	Summe
angewandt..	14·424	15·505	30·019
+O	341·500	328·508	—
c.....	34·480	38·218	72·698
a.....	28·450	30·959	59·405
a. d. *c* ger...	13·792	15·287	29·079
a. d. *a* ger...	14·225	15·480	29·705

Diese Analyse gibt ein ähnliches Resultat, wie es von Kolbe gefunden wurde. Die Contraction gibt etwas zu wenig C_2H_6.

Analysen der Gasgemenge

	1.	2.	3.
angewandt..	21·089	23·982	25·691
+O	267·370	275·431	296·622
c.....	38·645	43·999	47·122
a.....	14·883	16·700	17·895
C_2H_6.....	7·442	8·350	8·948
H	13·361	15·416	16·502
Fehler	+0·286	+0·216	+0·241
C_2H_6.....	35·289	34·818	34·830
H	63·355	64·282	64·233
Fehler	1·356	0·900	0·939

Die Fehler werden zum Äthan geschlagen. Es ist dann:

$Q = 0{\cdot}36044$ $kt = 0{\cdot}061521$ $k_{76} = 0{\cdot}18092$

Q corr. $= 0{\cdot}36091$ $k = 0{\cdot}18456$ $k_0 = 0{\cdot}16407$

158. Versuch, 24. October, 15 Min. 740·8 Mm. 15·1° C.

Äthananalyse

angewandt	11·430
+O	293·579
c	26·802
a	21·587
a. d. *c* ger.	10·721
a. d. *a* ger.	10·763

Das Äthan wurde durch Elektrolyse der zum vorigen Versuche angewendeter höchst concentrirter Lösung von essigsaurem Kali enthalten. Der Strom war, obgleich dieselbe Anzahl Elemente benutzt wurde, viel stärker,

Analyse der Gasgemenge

angew.	16·547	16·783	16·272	17·351
+O ..	283·200	322·040	264·659	280·547
+H ..	—	332·060	—	—
c.....	34·459	34·533	33·654	36·130
a	21·916	22·484	21·415	23·282
C_2H_6	10·958	11·292	10·708	11·641
H....	4·709	4·285	4·443	4·685
Fehler	+0·880	+1·206	1·121	1·025
C_2H_6	66·224	67·282	65·806	67·091
H....	28·459	25·532	27·305	27·002
Fehler	5·317	7·186	6·889	5·907

$Q = 0·72930$ $kt = 0·010718$ $k_{76} = 0·16715$

Q corr. $= 0·73026$ $k = 0·17149$ $k_0 = 0·15162$

159. Versuch, 27, October, 15 Min. 740·3 Mm. 14·7° C.

angew.	17·738	14·029	19·368	19·456
+O ..	294·550	250·412	267·124	293·080
c.....	36·006	28·722	39·634	39·620
a.....	23·164	18·163	25·508	25·286
C_2H_6	11·582	9·082	12·754	12·643
H.....	4.701	4·012	5·166	5·341
Fehler	1·455	0·935	1·448	1·472
C_2H_6	65·295	64·737	65·450	64·984
H.....	26·504	28·598	26·674	27·451
Fehler	8·207	6·665	7·476	7·566

$Q = 0·72693$ $kt = 0·010908$ $k_{76} = 0·17001$

Q corr, $= 0·72788$ $k = 0·17453$ $k_0 = 0·15511$

162. Versuch, 6. November, 80 Min. 746·8 Mm. 14·4° C.

Äthananalyse

angew. . .	13·252	14·452
+O	293·786	301·360
c	34·186	36·578
a	26·038	28·376
a. d. *c* ger.	13·647	14·631
a. d. *a* ger,	13·015	14·188

Die Zersetzungszellen sind mit filtrirter Lösung des essigsauren Kali, zu welcher noch reines essigsaures Kali in grösserer Menge zugesetzt wurde, beschickt worden. Als Stromquelle dienen sechs Grove'sche Elemente.

Analysen des Gasgemenges

angewandt	29·291	$Q = 0·35893$
+O	308·847	Q corr. $= 0·35940$
c	54·566	$kt = 0·061842$
a	21·071	$k = 0·18553$
C_2H_6	10·536	$k_{76} = 0·18231$
H	18·818	$k_0 = 0·16664$
Fehler . . .	—0·063	
C_2H_6	35·893	
H	64·107	

163. Versuch, 7. November, 15 Min. 744·0 Mm. 14·5° C.

Die Lösung, welche zum vorigen Versuche gedient hatte. Sechs Grove'sche Elemente.

Äthananalyse

angewandt. .	14·355	13·104
+O	315·894	304·660
c	34·441	31·450
a	27·947	25·067
a. d. *c* ger. . .	13·776	12·580
a. d. *a* ger. . .	13·973	12·533

Analysen der Gasgemische

angew.	16·568	15·178	$Q = 0·73362$
+O . .	278·856	283·000	Q corr. $= 0·73458$
c	35·589	32·947	$kt = 0·010377$

a	23·385	21·313	$k = 0·16603$
C_2H_6	11·692	10·656	$k_{76} = 0·16254$
H	4·238	4·204	$k_0 = 0·14847$
Fehler	+0·638	0·318	
C_2H_6	70·570	70·280	
H	25·579	27·697	
Fehler	3·851	2·095	

Es ergibt sich somit:

	80 Min.	15 Min.
	0·16407	0·15162
$k_0 =$	0·16664	0·15511
	0·14847	
Mittel	0·16536	0·15173

Die Differenz dieser Werthe ist sehr beträchtlich, dieselbe beträgt 10%.

Leider ist es mir nie gelungen, zu einem Versuche bei kurzer Diffusionszeit ein fast reines Gas zu erhalten. Auch einige, im Vorigen nicht mitgetheilte, zu diesem Zwecke unternommene Versuche haben dieses Resultat nicht ergeben. Aus dem Versuche 163 scheint jedoch zu folgen, dass der Diffusionscoëfficient des reinen Äthans für die kleinere Diffusionszeit noch kleiner herauskommt.

Wasserstoff—Sauerstoff.

146. Versuch, 6. October, 48 Min. 752·9 Mm. 17·1° C.

Die Analysen des Gasgemisches der oberen Hälfte wurden auf zweifache Weise ausgeführt.

Bei der ersten Analyse wurde zum Gasgemische O zugesetzt und dann verbrannt, bei den beiden folgenden Analysen wurde das Gasgemisch sofort der Explosion unterworfen. Es ergab sich,

untere Hälfte

1. Analyse

$H = 0·44347$	$k = 0·272160$
$O = 0·55653$	$k_{76} = 0·26962$
$Q = 0·27842$	$k_0 = 0·24246$
$kt = 0·054432$	

obere Hälfte

1. Analyse		2. Analyse		3. Analyse
angewandt	30·904	angewandt	58·683	54·555
+O	61·747	n. d. Expl.	116·618	15·486
n. d. Expl.	36·214			
O =	0·23342		0·23894	0·23871
H =	0·76658		0·76106	0·76129
Q =	0·11671	Q =	0·11942	
Q corr. =	0·11704	Q corr. =	0·11975	
kt =	0·055936		0·052229	
k =	0·269680		0·261125	
k_{76} =	0·26717		0·25870	
k_0 =	0·24024		0·23263	
Mittel k_0 =	0·23644			

Mittel aus den Werthen beider Hälften $k_0 = 0{\cdot}23945$.

Der grosse Unterschied zwischen den Analysen der oberen Hälfte scheint auf einem Fehler zu beruhen.

147. Versuch, 7. October, 48 Min. 750·8 Mm. 17·9° C.

Untere Hälfte

Q = 0·55624	kt = 0·055019
0·55518	k = 0·27509
0·55571	k_{76} = 0·27176
Q_u = 0·27786	k_0 = 0·24320

Obere Hälfte

Q = 0·23919	kt = 0·052393
0·23745	k = 0·26197
0·23832	k_{76} = 0·25880
Q_u = 0·11916	k_0 = 0·23160
Q corr. = 0·11949	

148. Versuch, 7. October, 48 Min. 750·7 Mm. 17·7° C.

Der Wasserstoffstrom zuckt und setzt zuweilen aus.

Untere Hälfte			Obere Hälfte
angewandt	57·764	Q_u = 0·27762	Q = 0·23583
n. d. Expl.	19·226	kt = 0·055083	Q_0 = 0·11792
+H	70·759	k = 0·27542	Q corr. = 0·11826
n. d. Expl.	13·520	k_{76} = 0·27205	kt = 0·053163

H ..... 44·477	$k_0 = 0{\cdot}24377$	$k = 0{\cdot}26582$
O = 55·270		$k_{76} = 0{\cdot}26256$
Fehler = 0·253		$k_0 = 0{\cdot}23524$
Q = 0·55523		

149. Versuch, 8. October, 50 Min. 751·0 Mm. 17·9° C.

Der gesammte Inhalt des Apparates wird zur Analyse aufgefangen.

$O = 0{\cdot}38363$	Q corr. $= 0{\cdot}38411$	$k_{76} = 0{\cdot}26940$
0·38357	$kt = 0{\cdot}056797$	$k_0 = 0{\cdot}24108$
0·38360	$k = 0{\cdot}27262$	

153. Versuch, 15. October, 48 Min, 739·0 Mm. 16·7° C.

Der Wasserstoffstrom geht während der ganzen Versuchsdauer sehr lebhaft.

Untere Hälfte

angewandt	40·748	H = 18·365	$Q_u = 0{\cdot}27465$
n. d. Expl.	13·201	O = 22·339	$kt = 0{\cdot}055900$
+H	96·340	Fehler = —0·043	$k = 0{\cdot}27950$
n. d. Expl.	56·840	H = 0·45070	$k_{76} = 0{\cdot}27177$
		O = 0·54930	$k_0 = 0{\cdot}24498$

Obere Hälfte

angewandt	30·215	35·351
+O	83·393	79·797
n. d. Expl.	48·685	39·142
c.....O..	34·708	40·655
H	23·138	27·103
O	7·077	8 248
	30·215	35·351
H =	0·76578	0·76668
O =	0·23422	0·23332
Q =	0·11689	
Q corr. =	0·11720	
kt =	0·053835	
k =	0·26918	
k_{76} =	0·26175	
k_0 =	0·23594	

angewandt	38·046	33·559
n. d. Expl.	11·195	9·868
+O	51·050	69·087
n. d. Expl.	34·130	54·091
c_1	26·851	23·691
c_2	16·920	14·996
O	8·950	7·897
H	29·181	25·791
Fehler..	—0·085	—0·129
O	0·23472	0·23441
H	0·76528	0·76659

$Q = 0{\cdot}11729$

Q corr. $= 0{\cdot}11760$

$kt = 0{\cdot}053582$

$k = 0{\cdot}26791$

$k_{76} = 0{\cdot}26050$

$k_0 = 0{\cdot}23482$

Behält man die Werthe $k_0 = 0{\cdot}24498$ und $0{\cdot}23538$ bei, so gibt dieser Versuch ein Mittel $k_0 = 0{\cdot}24018$ und der Unterschied zwischen den Werthen des Diffusionscoëfficienten in den beiden Hälften des Apparates ist $3{\cdot}5\%$.

167. Versuch, 19. November, 48 Min. 736·2 Mm. 10·7° C.

Untere Hälfte

angewandt	36·923	39·722	$Q = 56{\cdot}424$
n. d. Expl.	12·892	13·962	$Q_u = 0{\cdot}28212$
+H	98·341	103·920	$kt = 0{\cdot}053857$
n. d. Expl.	59·864	62·844	$k = 0{\cdot}26929$
H	16·021	17·148	$k_{76} = 0{\cdot}26086$
O	20·836	22·410	$k_0 = 0{\cdot}24390$
Fehler ...	+0·066	+0·164	
H	43·391	43·170	
O	56·431	56·417	
Fehler ...	0·178	0·413	

Obere Hälfte

angewandt	35·351	31·534	33·174	20·799
n. d. Expl.	9·410	8·438	8·845	—

+O	40·378	31·830	46·423	67·012
n. d. Expl.	26·140	19·386	32·962	43·482
H	26·786	23·694	25·194	15·688
O	8·647	7·699	8·110	5·111
Fehler ...	—0·083	+0·141	—0·130	—
H	75·596	75·139	75·649	75·432
O	24·404	24·417	24·351	24·568
Fehler ...	—	0·444	—	—

$Q = 0·24435$ $kt = 0·05054$ $k_0 = 0·22887$

$Q_0 = 0·12218$ $k = 0·25270$

Q corr. $= 0·12251$ $k_{76} = 0·24480$

Im Mittel $k_0 = 0·23638$

171. Versuch, 26. November, 20 Min. 734·9 Mm. 12·4° C.

Untere Hälfte

H	15·602	15·514	15·659
O	83·700	83·661	83·874
Fehler	0·699	0·824	0·470

Nachdem in der oberen Hälfte des Apparates kein derartiger Fehler gefunden wird, so ist wahrscheinlich, dass der Sauerstoff Stickstoff enthielt. Dies ist übrigens bei der grossen Menge Sauerstoff, welche durch den Apparat geleitet wurden, einigermassen befremdend.

Eine Analyse des Sauerstoffes vom Versuche 166 (dessen Gasgemisch-Analyse verdorben wurden) ergab bis auf einige Hundertstel Procente reinen Sauerstoff.

Werden die Fehler zum Sauerstoff gerechnet, so findet man:

$Q = 84·442$ $k = 0·27253$ $k_0 = 0·24387$

$Q_u = 42·221$ $k_{76} = 0·26357$

$kt = 0·22714$

Obere Hälfte

angew. ... 44·243	angew. ... 152·28	$Q = 38·889$
+H ..... 92·432	n. d. Espl. 20·55	$Q_0 = 0·19445$
n. d. Expl. 40·539	O ..... 38·918	Q c. $= 0·19497$
+O .... 99·955	H ..... 61·082	$kt = 0·020500$
n. d. Expl. 39·036		$k = 0·24600$

O = 17·298 38·859 k_{76} = 0·23789
H = 27·217 61·141 k_0 = 0·22010
Fehler = —0·272

Im Mittel k_0 = 0·23199

174. Versuch, 3. December, 20 Min. 744·7 Mm. 8·3° C.

Untere Hälfte

H..... 14·687 14·712 Q_u = 0·42651
O..... 84·620 84·612 kt = 0·021587
Fehler... 0·693 0·677 k = 0·25904
Der Fehler zum Sauerstoff gerechnet gibt k_{76} = 0·25378
k_0 = 0·24082
Q = 0·85301

Obere Hälfte

0 = 38·970 Q corr. = 0·19547 k_0 = 0·22677
39·007 kt = 0·020326
38·989 k = 0·24391
Q_0 = 0·19495 k_{76} = 0·23897 Im Mittel k_0 = 0·23379

Die Versuche Sauerstoff—Wasserstoff geben:

Nr. d. Vers.		u. H.	o. H.	Mittel
146	48 Min.	24246	23644	23945
147		24320	23160	23740
148		24377	23524	23950
153		24498	23538	24018
167		24390	22887	23638
171	20 Min.	24387	22010	23199
174		24082	22677	23379
Im Mittel	48 Min.	24366	23551	23849
	20 Min.	24235	22343	23289
149	48 Min.	—	—	24108

Wasserstoff — Luft.

Die Luft wurde durch zufliessendes Wasser aus einer Flasche verdrängt und zuerst durch eine Kugelröhre mit Ätzkali, dann durch einen mit Chlorcalciumstücken gefüllten Absorptionsthurm geleitet und schliesslich durch den Apparat treten gelassen.

168. Versuch, 20. November 52 Min. 732·3 Mm. 10·4° C.

Untere Hälfte.

angewandt ..	57·747	70·250	$Q = 54·890$
n. d. Expl. ..	37·880	46·101	$Q_u = 27·4760$
+O	64·973	75·550	$kt = 0·055884$
n. d. Expl. ..	45·796	52·299	$k = 0·25793$
O.	11·484	11·460	$k_{76} = 0·24853$
N	43·406	43·553	$k_0 = 0·23280$
H	45·110	44·987	

Die Luft an der unteren Hälfte enthält:

O	22·944	20·878
N	86·959	79·122
	109·903	100·000

Obere Hälfte.

angew. ..	57·608	65·142	60·913	$Q = 23·674$
+Knallg.				
n. Expl. .	49·416	56·041	52·425	$Q_0 = 0·11837$
+O .	199·673	194·680	205·835	$Q\,\text{corr.} = 0·11853$
n. d. Expl.	141·864	129·240	144·600	$kt = 0·052993$
O ..	4·741	4·658	4·644	$k = 0·24458$
N ..	18·880	19·052	19·047	$k_{76} = 0·23567$
N ..	76·379	76·290	76·309	$k_0 = 0·22074$

Die Luft der oberen Hälfte enthält:

O ..	14·043	19·773	
N ..	56·979	80·227	
	71·022	100·000	Im Mittel $k_0 = 0·22677$

169. Versuch, 22. November 52 Min. 739·8 Mm. 10·3° C.

Untere Hälfte

angewandt	70·822	76·932	$Q = 55·550$
n. d. Expl.	46·472	50·438	$Q_u = 0·27749$
+O	77·169	81·294	$kt = 0·055118$
n. d. Expl.	54·299	56·370	$k = 0·25439$
O	11·462	11·479	$k_{76} = 0·24763$
N	44·088	43·965	$k_0 = 0·23210$
H	44·450	44·556	

Die Luft der unteren Hälfte enthält in Procenten:

O	20·670
N	79·330

Obere Hälfte

angewandt	49·309	52·533	$Q = 23·860$
+Knallgas in Expl.	42·216	45·019	$Q_0 = 0·11930$
+O	169·750	187·620	Q corr. $= 0·11962$
n. d. Expl.	120·445	135·225	$kt = 0·052311$
O	4·794	4·768	$k = 0·24144$
N	18·956	71·202	$k_{76} = 0·23448$
H	76·250	76·030	$k_0 = 0·21977$

Die Luft der oberen Hälfte enthält in Procenten:

O ...	20·037	
N ...	79·963	Im Mittel $k_0 = 0·22594$

172. Versuch, 28. November 24 Min. 7441·1 Mm. 10·9° C.

Untere Hälfte

angewandt	84·087	83·715	Luft aus d. u. H.	O	21·006
n. d. Expl.	60·801	60·547		N	78·994
+H	86·506	86·046	$Q = 0·81544$	$k_0 =$	0·23132
n. d. Expl.	66·541	66·236	$Q_u = 0·40772$		
H	18·453	18·449	$kt = 0·025299$		
O	17·145	17·113	$k = 0·25299$		
N	64·392	64·438	$k_{76} = 0·24770$		

Obere Hälfte

angew. .	75·144	73·967	Luft a. d. o. H.	O = 20 759	
+Knallg.				N = 79·241	
n. Expl. .	57·981	57·153			
+O	171·140	159·720	$Q = 0·36638$	$k = 0·23521$	
n. d. Expl.	116·560	106·424	$Q_0 = 0·18319$	$k_{76} = 0·23030$	
O	7·613	7·578	Q c. $= 0·18368$	$k_0 = 0·21507$	
H	63·632	63·192	$kt = 0·023521$		
N	28·755	29·230			

Im Mittel $k_0 = 0·22320$

173. Versuch, 3. December 24 Min. 745·0 Mm. 8·0° C.

Untere Hälfte				
angewandt	74·272	78·889	Luft aus d. u. H.	O = 20·821
n. d. Expl.	54.026	57·540		N = 79·179
+H.....	79·177	85·956	$Q = 0·81894$	
n. d. Expl.	61·429	66·957	$Q_u = 0·40947$	
H.....	18·172	18·041	$kt = 0·024952$	
O.....	17·052	17·050	$k = 0·24952$	$k_0 = 0·23256$
N.....	64·776	64·909	$k_{76} = 0·24460$	
Obere Hälfte				
angew.	77·068	62·494	Luft aus d. o. H.	O = 20·806
+Knallg.				N = 79·134
n. d. Expl.	59·550	48·190		
+O ...	811·440	245·265	$Q = 0·36541$	
n. d. Expl.	155·680	200·014	$Q_0 = 0·18271$	$k_{76} = 0·23217$
H	63·387	63·531	Q c. $= 0·18320$	$k_0 = 0·22075$
O	7·576	7·629	$kt = 0·023684$	
N	29·037	28·840	$k = 0·23684$	
				Im Mittel $k_0 = 0·22665$

175. Versuch, 4. December 12 Min. 731·6 Mm. 8·0°C.

angewandt	77·056	66·366	$Q = 0·71385$
n. d. Expl.	44·040	37·830	Q corr. $= 0·71480$
+H.....	58·304	51·518	$kt = 0·011982$
n. d. Expl.	57·128	50·640	$k = 0·23964$
H.....	28·565	28·665	$k_{76} = 0·23068$
O.....	14·793	14·774	$k_0 = 0·21933$
Luft im Apparate O	20·710	56·561	
N	79·290		

185. Versuch, 18. December 60 Min. 747·7 Mm. 10·4° C.

angewandt	82·788	65·508	72·154	$Q = 0·35614$
n. d. Expl.	65·262	51·280	56·321	Q corr. $= 0·35661$
+O.....	134·770	113·590	118·930	$kt = 0·062434$
n. d. Expl.	71·909	64·705	64·963	$k = 0·24974$
H.....	64·733	64·231	64·493	$k_{76} = 0·24570$
O.....	7·057	7·240	7·315	$k_0 = 0·23014$
N.....	28·210	28·529	28·192	
		Luft im Apparate n. d. Diffusion		O = 20·284
				N = 79·716

176. Versuch, 6. December 12 Min. 729·8 Mm. 8·4° C.

Untere Hälfte

H	5·982	$Q_u = 0·46981$
	6·119	$kt = 0·012843$
	6·015	$k = 0·25686$
	6·038	$k_{76} = 0·24327$
Luft	93·962	$k_0 = 0·23071$

Obere Hälfte

angewandt	46·771	64·100	$Q = 0·48300$
n. d. Expl. mit Knallg.	32·642	44·785	$Q_0 = 0·24150$
+O	89·828	83·377	Q corr. $= 0·24215$
n. d. Expl.	67·554	53·160	$kt = 0·011840$
H	51·887	51·514	$k = 0·23680$
O	10·070	10·044	$k_{76} = 0·22739$
N	38·043	38·442	$k_0 = 0·21566$

Luft aus der o. H. O = 20·822
N = 79·178

Im Mittel $k_0 = 0·22318$

177. Versuch, 7. December, 12 Min. 730·2 Mm. 8·3° C.

Untere Hälfte

angewandt	72·968	56·441	$Q = 94·040$
n. d. Expl.	66·572	51·334	$Q_u = 0·47020$
+H.....	105·615	87·096	$kt = 0·012758$
n. d. Expl.	69·360	59·100	$k = 0·25516$
H	5·887	6·033	$k_{76} = 0·24516$
O	19·506	19·550	$k_0 = 0·23264$
N	74·607	74·417	

Luft d. u. H. O = 20·766
N = 79·234

Obere Hälfte

angewandt	59·500	H = 51·746	$Q = 48·253$
n. d. Expl.	41·665	O = 9·992	$Q_0 = 0·24127$
+O.....	111·424	N = 38·262	Q corr. $= 0·24191$
n. d. Expl.	83·043		$kt = 0·011872$
	Luft d. o. H.	O = 20·703	$k = 0·23744$
		N = 79·297	$k_{76} = 0·22813$
			$k_0 = 0·21648$
			Im Mittel $k_0 = 0·22456$

182. Versuch 15. December 12 Min. 746·0 Mm. 9·3° C.

Der Wasserstrom wurde bei diesem Versuche etwas lebhafter als bei den früheren Versuchen unterhalten.

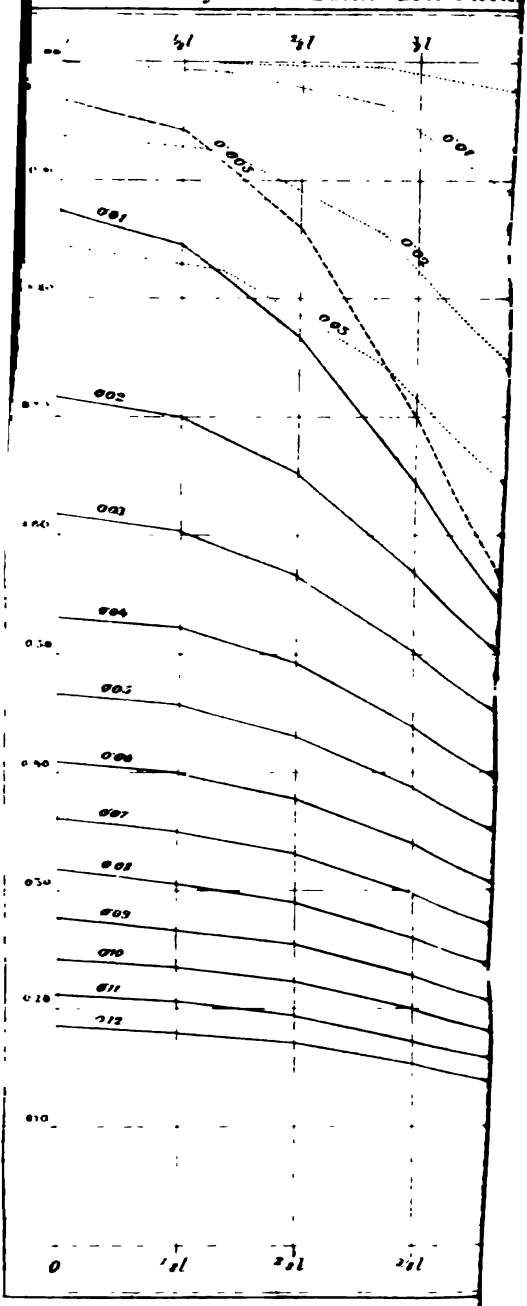
Untere Hälfte			Obere Hälfte
H 5·753	angewandt	68·848	$Q = 48·207$
5·935	n. d. Expl.	48·086	$Q_0 = 0·24104$
5·844	+O	76·916	Q corr. = 0·24168
Luft 94·156	n. d. Expl.	44·190	$kt = 0·011902$
$Q_u = 0·470078$	H	51·793	$k = 0·23804$
$kt = 0·012632$	O	10·053	$k_{65} = 0·23366$
$k = 0·25264$	N	38·154	$k_0 = 0·22036$
$k_{76} = 0·24798$	Luft O =	20·854	
$k_0 = 0·23387$	N =	79·146	
			Im Mittel $k_0 = 0·22712$

Die Versuche Luft—Wasserstoff geben somit:

Nr. d. Vers.	Zeit	u. H.	o. H.	Mittel
168	52 Min.	0·23280	0·22074	0·22677
169	52 „	0·23210	0·21977	0·22594
172	24 „	0·23132	0·21507	0·22320
173	24 „	0·23256	0·22075	0·22665
176	12 „	0 23071	0·21566	0·22318
177	12 „	0·23264	0·21648	0·22456
182	12 „	0·23387	0·22036	0·22712
Mittel	52 „	0·23245	0·22026	0·22636
	24 „	0·23194	0·21791	0·22492
	12 „	0·23241	0·21756	0·22495
175	12 „	—	—	0·21933
185	60 „	—	—	0·23014

Die Versuche zeigen untereinander ähnliche Abweichungen wie es für Wasserstoff—Sauerstoff der Fall war.

Aus den Versuchen 168, 169 und 185 von 52—60 Minuten Dauer ergibt sich in unzweifelhafter Weise, dass die Luft bei der Diffusion in Wasserstoff eine Veränderung in ihrer Zusammensetzung erfährt. In den Versuchen von 12 und 25 Minuten Dauer ist diese Erscheinung eine kaum merkbare.



Stefan'sche Methode

abgeänderte Stefan'sche Metho

1

haft

H

–

Luft

Q_w =

kt =

k =

k_{76} =

k_0 =

Nr. d

wie

Dau

Diff

setzt

ist d

Abgeänderte Stefan'sche Methode,

Apparat V.

Nachdem sich bei den Versuchen von kurzer Dauer mit dem Apparate V allerlei Unregelmässigkeiten ergaben, wollte ich untersuchen, ob die kleinen Werthe des Diffusionscoëfficienten, welche die obere Hälfte des Apparates gibt, nicht am Ende durch eine Eigenthümlichkeit des Apparates herbeigeführt seien. Es schien mir zweckmässig, noch einige Versuche nach einer anderen Methode auszuführen, welche darin besteht, dass die untere Hälfte des Apparates V mit dem Gase *A*, die obere Hälfte mit dem Gase *B* gefüllt und über das obere Ende der oberen Hälfte mit Hilfe des Diffusionshahnes das Gas *B* streichen gelassen wird.

Während des Versuches hat also das Gas *A* erst eine Schichte des Gases *B* zu passiren, ehe es aus dem Apparate in das Gas *B* austritt.

Es ist, wie aus dem Nachfolgenden erhellt, möglich, durch dieses Verfahren das mittlere Dichtigkeitsgefälle in der oberen Hälfte des Apparates herabzudrücken und dadurch die Diffusion zu beschleunigen. Die obere Hälfte des Apparates gibt dann eher etwas grössere Werthe des Diffusionscoëfficienten, als die untere Hälfte und es scheint mir dadurch bewiesen, dass die das Resultat beeinflussenden Fehler den wirklichen Vorgang nicht überdecken.

Auch bei dieser Methode zu experimentiren, kann entweder der Gesammtinhalt, oder der Inhalt jeder Hälfte für sich aufgefangen werden.

Zur Berechnung des Versuches hat man nebst der Differentialgleichung:

$$\frac{d\rho}{dt} = k\,\frac{d^2\rho}{dx^2}$$

die Bedingungsgleichungen:

für $t = 0$ von $x = 0$ bis $x = \frac{l}{2}$ $\rho = 2a$

„ $x = \frac{l}{2}$ „ $x = \frac{3l}{2}$ $\rho = a$

„ $x = \frac{3}{2}l$ „ $x = 2l$ $\rho = 0$

$$\text{für } x = 0 \quad \frac{d\rho}{dx} = 0$$

$$\text{für } x = 2l \quad \frac{d\rho}{dx} = 0$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist:

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-kt\left(\frac{n\pi}{2l}\right)^2} \cos\frac{n\pi x}{2l}$$

Nach Bestimmung der Constanten A_0 bis A_n ergibt sich der um a grössere Werth von ρ in Function von x und t. Wird a von diesem Werthe abgezogen und für $e^{\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2} = \varepsilon$ gesetzt, dann erhält man:

$$\rho = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\sin\frac{n\pi}{4} + \sin\frac{3n\pi}{4}\right) e^{-n^2kt} \cos\frac{n\pi x}{2l}$$

oder in entwickelter Form:

$$\rho = \frac{2\sqrt{2.a}}{\pi}\left\{\frac{1}{1} e^{-kt} \cos\frac{\pi x}{2l} + \frac{1}{3}\varepsilon^{-9kt} \cos\frac{3\pi x}{2l} - \frac{1}{5}\varepsilon^{-25kt} \cos\frac{5\pi x}{2l}\right\}$$

Um eine Vorstellung von der Vertheilung der Dichte im Apparate zu erlangen, habe ich für einen Apparat von der Länge 0·4331 Met. die Dichte für verschiedene Werthe von kt von Achtel zu Achtel der Länge des Apparates berechnet und in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

kt	0	1/8l	2/8l	3/8l	4/8l	5/8l	6/8l	7/8l
0·005								
0·01	0·874	846	767	645	498	348	211	094
0·02	720	702	650	569	469	366	239	116
0·03	616	602	564	503	423	329	224	113
0·04	535	524	492	441	374	292	201	103
0·05	467	459	431	388	329	258	176	091
0·06	409	402	378	340	289	227	156	079
0·07	359	352	331	298	254	199	137	070
0·08	315	309	290	261	222	175	120	061

kt	0	$1/8l$	$2/8l$	$3/8l$	$4/8l$	$5/8l$	$6/8l$	$7/8l$
0·09	276	270	255	229	195	153	105	054
0·10	242	237	223	201	171	134	092	047
0·11	212	208	196	172	150	118	081	041
0·12	186	182	172	154	131	103	071	036

In der beigefügten Zeichnung sind diese Resultate graphisch dargestellt und zum Vergleiche sind punktirt die Curven eingezeichnet, welche die Dichtigkeitsvertheilung in dem Apparate darstellen, wenn nach der Stefan'schen Methode operirt wird.

Bei dem Anblicke dieser Zeichnung erkennt man sofort, dass die Dichtigkeitsgefälle in der oberen Hälfte bei der in Rede stehenden Methode erheblich kleiner ausfallen, als wenn nach der Stefan'schen Methode operirt wird.

Um über die Dichtigkeitsgefälle noch weiteren Aufschluss zu erhalten, wurde das mittlere Dichtigkeitsgefälle nach der Formel:

$$\overline{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)} = \frac{\int_0^t \int_{x0}^{x1} \left(\frac{d\rho}{dx}\right) dx\,dt}{t(x_1 - x_0)}$$

für die beiden Hälften des Apparates und für die beiden, in dem Diagramme zur Vergleichung kommenden Methoden gerechnet. Es ergibt sich, wenn bei zwei Gliedern der Entwicklung stehen geblieben und $e^{\left(\frac{\pi}{2l}\right)^2} = \varepsilon$ gesetzt wird,
für die Stefan'sche Methode:

von $x = 0$ bis $x = l$ $\quad \overline{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)} = \frac{16}{\pi^3} \frac{l}{kt} \left(\frac{1}{1} \varepsilon^{-kt} - \frac{1}{27} \varepsilon^{-9kt}\right)$

$x = 0$ $\quad x = \frac{l}{2}$ $\quad \overline{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)} = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^3} \frac{l}{kt} \left(\frac{1}{1} (\sqrt{2}-1) \varepsilon^{-kt} - \right.$

$\left. - \frac{1}{27} (\sqrt{2}+1) \varepsilon^{-9kt}\right)$

$x = \frac{l}{2}$ $\quad x = l$ $\quad \overline{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)} = \frac{16\sqrt{2}}{\pi^3} \frac{l}{kt} \left(\frac{1}{1} \varepsilon^{-kt} + \frac{1}{27} \varepsilon^{-9kt}\right)$

für die abgeänderte Stefan'sche Methode:

$$\text{von } x = 0 \text{ bis } x = l \qquad \overline{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)} = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^3}\,\frac{l}{kt}\left\{\frac{1}{1}\,\varepsilon^{-kt} + \frac{1}{27}\,\varepsilon^{-9kt}\right\}$$

$$x = 0 \qquad x = \frac{l}{2} \qquad \overline{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)} = \frac{16}{\pi^3}\,\frac{l}{kt}\left\{\frac{1}{1}\,(\sqrt{2}-1)\,\varepsilon^{-kt} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{27}\,(\sqrt{2}+1)\,\varepsilon^{-kt}\right\}$$

$$x = \frac{l}{2} \qquad x = l \qquad \overline{\left(\frac{d\rho}{dx}\right)} = \frac{16}{\pi^3}\,\frac{l}{kt}\left\{\frac{1}{1}\,\varepsilon^{-9kt} - \frac{1}{27}\,\varepsilon^{-9kt}\right\}$$

Diese Formeln wurden nun auf den Apparat V von 0·8661 Met. Länge, unter der Voraussetzung von $kt = 0{\cdot}22$, welches im Apparate von 0·4331 Met. Länge, für welchen die Dichtenvertheilung gerechnet ist, einem Werthe $kt = 0{\cdot}054$ entspricht, angewendet. Es wird so das mittlere Dichtigkeitsgefälle gefunden:

Für die Stefan'sche Methode:

$x = 0$ bis $x = l$	$x = 0$ bis $x = \frac{l}{2}$	$x = \frac{l}{2}$ bis $x = l$
0·9854	0·5772	1·3937

Für die abgeänderte Stefan'sche Methode:

0·6968	0·4081	0·9852

Zur Berechnung der Versuche ist es nöthig, den Gesammtinhalt einer Hälfte oder des ganzen Apparates an Gas zu rechnen. Setzt man $a = 1$, so dienen hiezu die Formeln:

$$Q = \int_0^l \rho dx = \frac{8}{\pi^2}\sin\frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{1}\,\varepsilon^{-kt} - \frac{1}{9}\,\varepsilon^{-9kt} - \frac{1}{25}\,\varepsilon^{-25kt} + \ldots\right\}$$

$$Q_u = \int_0^{\frac{l}{2}} \rho dx = \frac{4}{\pi^2}\left\{\frac{1}{1}\,\varepsilon^{-kt} + \frac{1}{9}\,\varepsilon^{-9kt} + \frac{1}{25}\,\varepsilon^{-25kt} + \frac{1}{49}\,\varepsilon^{-49kt} + \ldots\right\}$$

$$Q_o = \int_{\frac{l}{2}}^{l} \rho dx = Q - Q_u.$$

Zur Berechnung der Werthe von kt aus den gefundenen Procentgehalten Q, Q_u oder Q_o, ist es nicht nöthig, neue Tabellen abzuleiten.

Zur Berechnung von kt aus dem Procentgehalte Q, welcher von dem ursprünglich im Apparate enthaltenen Gase im Gesammtinhalte, noch vorgefunden wird, dient die Formel, welche für Q_u für den Apparat V Seite 40 dieser Abhandlung gegeben ist, wenn der Inhalt der unteren Hälfte allein aufgefangen wird.

Zur Berechnung von kt aus Q_u dienen die in den früheren Abhandlungen mitgetheilten Tabellen. Dabei ist zu beachten, dass die Analyse des Inhaltes der unteren Hälfte des Apparates $2Q_u$ gibt. Zu diesem Werthe ist also in der entsprechenden Tabelle des kt zu suchen.

Zur Berechnung von kt aus Q_o endlich muss aus den beiden angeführten Tabellen eine Hilfstabelle abgeleitet werden.

Alle Werthe von kt, welche aus den mitgetheilten Tabellen entnommen werden, müssen mit Vier multiplicirt werden, um dieselben für den Apparat V umzurechnen, da die Tabellen für einen Apparat von der halben Länge gerechnet sind.

Wasserstoff — Kohlensäure.

Die Versuche wurden mit der Gascombination Wasserstoff—Kohlensäure durchgeführt.

Die Absorption der Kohlensäure geschah mit 7% Natronlauge.

Nach jeder Analyse wurde der Quecksilber- und Laugeninhalt der Absorptionsröhre in einen Quecksilber-Waschapparat entleert und so das Quecksilber stets rein erhalten.

Zur Berechnung der Analysen wird an der Ablesung für die angewandte Gasmenge die Meniskencorrection angebracht. Bei der Ablesung des, durch die Lauge begrenzten, nach der Absorption zurückbleibenden Volumens entfällt diese Correction.

Die gänzliche Ausserachtlassung dieser Correction hat zur Folge, dass die durch solche Absorptionsanalysen gefundenen Kohlensäuregehalte um mehrere Zehntelprocent kleiner gefunden werden, als dies bei Anwendung von Ätzkalikugeln der Fall ist.

Nachdem die zu untersuchenden Gasmengen feucht angewendet werden, herrscht auch nach der Absorption die Spannung des reinen Wasserdampfes in den Absorptionsröhren. Die Concentration der Lauge ist eigentlich gleichgiltig; nur das spe-

cifische Gewicht muss bekannt sein, um die Flüssigkeitssäulenlänge in die Quecksilbersäulenlänge verwandeln zu können.

Versuch 187, 20. December.

25 Min., 754·3 Mm. 10·1° C.

Anal. mit KHO	Anal. mit NHO
0·42974	0·42791
0·42878	0·42895
0·42926	0·42843
$Q = 0·42885$	$k = 0·20173$
Q corr. $= 0·42942$	$k_{76} = 0·20022$
$kt = 0·021014$	$k_0 = 0·18788$

Versuch 191, 23. December.

65 Min. 727·7 Mm. 10·1° C.

0·26791
0·26575
0·26683
Q corr. $= 0·26718$
$kt = 0·058004$
$k = 0·21418$
$k_{76} = 0·20507$
$k_0 = 0·19245$

Versuch 189, 22. December.

65 Min. 743·4 Mm. 9·7° C.

unt. Hälfte	ob. Hälfte
0·39084	0·16012
0·38971	0·16002
0·39013	0·16007
	$Q = 0·08004$
	Q corr. $= 0·08025$
$kt = 0·055615$	0·055979
$k = 0·20531$	0·20669
$k_{76} = 0·20086$	0·20218
$k_0 = 0·18896$	0·19020

Versuch 190, 23. December.

65 Min. 729·1 Mm. 9·0° C.

	unt. Hälfte	ob. Hälfte
	0·38644	0·15575
	0·38701	0·15414
	0·38673	0·15495
		0·07748
		0·077688
kt	= 0·056280	0·058465
k	= 0·20780	0·21588
k_{76}	= 0·19923	0·20710
k_0	= 0·18837	0·19568

Versuch 192, 26. December.

65 Min, 729·4 Mm. 8·9° C.

	unt. Hälfte	ob. Hälfte
	0·38248	0·15799
	0·38647	0·15942
	38448	0·15870
Q		0·07935
Q corr.		0·07956
kt	= 0·056722	0·056634
k	= 0·20943	0·20912
k_{76}	= 0·20100	0·20069
k_0	= 0·19003	0·18974

Diese Versuche ergaben somit:

Nr. d. Vers.	Zeit	unt. Hälfte	ob. Hälfte	Mittel
189		0·18896	0·19029	0·18958
190	65 Min.	0·18837	0·19568	0·19202
192		0·19002	0·18974	0·18909
Mittel	65 Min.	0·18912	0·19187	0·19050

Das kleinere Dichtigkeitsgefälle in der oberen Hälfte bringt thatsächlich etwas grössere Werthe des Diffusionscoëfficienten in der oberen Hälfte des Apparates mit sich.

Über algebraische Gleichungen, welche eine bestimmte Anzahl complexer Wurzeln besitzen.

Von **Leopold Gegenbauer.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 14. December 1882.)

Sind alle Coëfficienten α_k von x in den einzelnen Theilnennern einer regulären Kettenbruchentwicklung, deren sämmtliche Theilzähler den Werth -1 haben, positiv, so sind die Wurzeln aller Näherungszähler $\varphi_k(x)$ und Näherungsnenner $\psi_k(x)$ reell und ungleich, es liegt keine Wurzel eines Näherungszählers beziehungsweise Näherungsnenners ausserhalb des Intervalles, in welchem die Wurzeln irgend eines späteren Näherungszählers beziehungsweise Näherungsnenners liegen, und es werden die Wurzeln jedes Näherungszählers beziehungsweise Näherungsnenners durch die Wurzeln des unmittelbar vorhergehenden von einander getrennt. Ein ganz analoger Satz gilt auch für die Wurzeln der Gleichungen:

$$\varphi_{k,\lambda}(x) = \begin{vmatrix} \varphi_\lambda(x), & \varphi_k(x) \\ \psi_\lambda(x), & \psi_k(x) \end{vmatrix} = 0 \quad [\lambda \geqq k].$$

Beachtet man nämlich die Relationen:

$$\varphi_{k,\lambda+1}(x) = (\alpha_{\lambda+1}x + \beta_{\lambda+1})\varphi_{k,\lambda}(x) - \varphi_{k,\lambda-1}(x)$$
$$\varphi_{k,k}(x) = 0$$
$$\varphi_{k,k+1}(x) = 1$$

so sieht man, dass die Functionen $\varphi_{k,\lambda}(x)$ die Näherungszähler einer regulären Kettenbruchentwicklung sind, bei welcher die Coëfficienten von x in den einzelnen Theilnennern positiv und die einzelnen Theilzähler gleich -1 sind.

Es sind daher die Wurzeln der Gleichungen $\varphi_{k,\lambda}(x) = 0$ reell und ungleich, es liegt keine Wurzel einer Function $\varphi_{k,\lambda}(x)$ ausserhalb des Intervalles, in welchem die Wurzeln einer späteren

Function $\varphi_{k,\lambda_1}[\lambda_1 > \lambda]$ liegen, und es trennen die Wurzeln zweier unmittelbar aufeinanderfolgender Functionen sich gegenseitig von einander.

Man hat ferner, wie Herr Kronecker gezeigt hat, die Relation:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{p,r}(x), & \varphi_{p,s}(x) \\ \varphi_{q,r}(x), & \varphi_{q,s}(x) \end{vmatrix} = \varphi_{p,q}(x)\,\varphi_{r,s}(x) \quad [p \leqq q \leqq r \leqq s]$$

und sieht demnach, dass auch die auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Determinante nur reelle Wurzeln besitzt.

Es soll nun ein Satz über die Natur der Wurzeln der Gleichungen:

$$\psi_{k,\lambda}(x) = \begin{vmatrix} \psi'_\lambda(x), & \psi'_k(x) \\ \psi_\lambda(x), & \psi_k(x) \end{vmatrix} = 0 \quad [\lambda > k]$$

unter der Voraussetzung abgeleitet werden, dass die Functionen $\psi_\lambda(x)$ die Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrals:

$$\int_a^b \frac{f(z)\,dz}{x - z}$$

sind, wo a und b reelle Constanten bezeichnen und die Function $f(z)$ innerhalb des Intervalles $a \ldots b$ reell, endlich von demselben Zeichen und überdies so beschaffen ist, dass die Näherungsnenner $\psi_\lambda(x)$ den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$[(x-a)(x-b)f(x)y']' = c_\lambda f(x) y \qquad [\lambda = 0, 1, 2, \ldots; c_\lambda > c_k,\ \lambda > k]$$

genügen.

Jeder der Näherungsnenner wird ein particuläres Integral einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung von der angegebenen Gestalt sein, wenn nur $f(x)$ so beschaffen ist, dass bei jedem gegebenen Werthe von λ die Differentialgleichung ein particuläres Integral $\chi_\lambda(x)$ besitzt, welches eine ganze Function von x vom Grade λ ist.

Die ganzen Functionen $\chi_0(x)$, $\chi_1(x)$, $\chi_2(x)$, ... von den Graden $0, 1, 2, \ldots$ besitzen bekanntlich folgende Eigenschaften:

1. Die Wurzeln der Gleichung $\chi_\lambda(x) = 0$ sind reell und ungleich und liegen in dem Intervalle $a \ldots b$.

2. Zwischen je drei aufeinanderfolgenden Functionen $\chi_{\lambda+1}(x), \chi_\lambda(x), \chi_{\lambda-1}(x)$ besteht eine lineare Relation von der Form:

$$\chi_{\lambda+1}(x) = (B_\lambda x + C_\lambda)\chi_\lambda(x) - D_\lambda \chi_{\lambda-1}(x).$$

3. Es ist:

$$\int_a f(x)\chi_\lambda(x)\chi_k(x)dx = \delta_{k,\lambda}E_\lambda \quad [\delta_{k,\lambda} = o, k \gtrless \lambda;\ \delta_{\lambda,\lambda} = 1;\ E_\lambda \gtrless 0].$$

Existirt ein System von ganzen Functionen $F_\lambda(x)$ der Veränderlichen x von den Graden $\lambda(\lambda = 0, 1, 2, \ldots)$, welche den Relationen:

$$\int_a^b f(x) F_\lambda(x) F_k(x)dx = \delta_{k,\lambda}E_\lambda \quad [E_\lambda \gtrless 0]$$

genügen, so können sich dieselben von den Functionen $\chi_\lambda(x)$ nur durch constante Factoren unterscheiden.

Entwickelt man nämlich $F_\lambda(x)$ in eine nach den Functionen $\chi_k(x)$ fortschreitende Reihe von der Gestalt:

$$F_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{k=\lambda} a_{\lambda,k}\chi_k(x)$$

so erhält man:

$$\int_a^b f(x) F_\lambda(x) F_k(x)dx = \sum_{\sigma=0,\tau=0}^{\sigma=\lambda,\tau=k} a_{\lambda,\sigma}a_{k,\tau}\delta_{\sigma,\tau}E_\sigma$$

und daher:

$$\sum_{\sigma=0}^{\sigma=\lambda} a_{\lambda,\sigma}a_{k,\sigma}E_\sigma = \delta_{\lambda,k}E_\lambda \quad [\lambda = 0, 1, 2, \ldots]$$

woraus sofort folgt:

$$a_{\lambda,\sigma} = 0 \quad [\lambda \gtrless \sigma]$$
$$a_{\lambda,\lambda} \gtrless 0.$$

Nach den über die Natur der Function $f(x)$ gemachten Voraussetzungen existiren Näherungsnenner $\psi_\lambda(x)$ von allen Graden, welche den Relationen:

$$\int_a^b f(x)\psi_\lambda(x)\psi_k(x)dx = \delta_{k,\lambda}\overline{E}_\lambda \quad [\overline{E}_\lambda \gtrless 0]$$

genügen; diese Näherungsnenner $\psi_\lambda(x)$ unterscheiden sich daher von den Functionen $\chi_\lambda(x)$ nur durch constante Factoren.

Bezeichnet man nun die Anzahl der reellen Wurzeln der Gleichung $\Phi(x) = 0$, welche gleich b oder grösser als b sind, mit $\mathfrak{A}_b\{\Phi(x)\}$ und die Anzahl derjenigen reellen Wurzeln dieser Gleichung, welche gleich a oder kleiner als a sind mit $\mathfrak{A}'_a\{\Phi(x)\}$, so erhält man aus der Gleichung:

$$[(x-a)(x-b)f(x)\{\psi_k(x)\psi'_\lambda(x)-\psi_\lambda(x)\psi'_k(x)\}]' = c_{k,\lambda}\psi_k(x)\psi_\lambda(x)$$

welche sich unmittelbar aus der obigen Differentialgleichung ergibt, durch Anwendung des Rolle'schen Theorems die Relationen:

$$\mathfrak{A}_b\{\psi_k(x)\psi'_\lambda(x)-\psi_\lambda(x)\psi'_k(x)\} \leqq \mathfrak{A}_b\{\psi_k(x)\psi_\lambda(x)\}$$
$$\mathfrak{A}'_a\{\psi_k(x)\psi'_\lambda(x)-\psi_\lambda(x)\psi'_k(x)\} \leqq \mathfrak{A}'_a\{\psi_k(x)\psi_\lambda(x)\}$$

oder da:

$$\mathfrak{A}_b\{\psi_k(x)\psi_\lambda(x)\} = \mathfrak{A}'_a\{\psi_k(x)\psi_\lambda(x)\} = 0$$

ist:

$$\mathfrak{A}_b\{\psi_k(x)\psi'_\lambda(x)-\psi_\lambda(x)\psi'_k(x)\} = 0$$
$$\mathfrak{A}'_a\{\psi_k(x)\psi'_\lambda(x)-\psi_\lambda(x)\psi'_k(x)\} = 0.$$

Es liegen demnach alle reellen Wurzeln der Gleichungen:

$$\psi_{k,\lambda}(x) = 0 \quad [\lambda \geqq k]$$

innerhalb des Intervalles $a \ldots b$.

Sind die Functionen $\psi_k(x)$ und $\psi_\lambda(x)$ so gewählt, dass sie keine gemeinsame Wurzel besitzen, so hat die Function $\psi_{k,\lambda}(x)$ keine mehrfache Wurzel. Dass stets Functionen $\psi_k(x)$ und $\psi_\lambda(x)$ ohne gemeinsamen Theiler existiren, folgt aus der zweiten der oben angeführten Eigenschaften dieser Functionen; denn nach derselben können niemals zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Functionen des Systems einen gemeinsamen Theiler haben.

Hätte $\psi_{k,\lambda}(x)$ eine mehrfache Wurzel, so müsste für dieselbe nicht nur $\psi_{k,\lambda}(x)$, sondern auch $\psi'_{k,\lambda}(x)$ verschwinden, also müsste für dieselbe auch das Product $\psi_k(x)\psi_\lambda(x)$ gleich Null sein. Hat nun $\psi_{k,\lambda}(x)$ eine Wurzel mit $\psi_k(x)$ gemein, welche nach den gemachten Voraussetzungen nicht auch eine Wurzel der Gleichung $\psi_\lambda(x) = 0$ sein kann, so muss dieselbe auch der Gleichung $\psi_k(x)=0$ genügen. Da aber alle Wurzeln der Gleichung $\psi_k(x)=0$

von einander verschieden sind, so ist dies unmöglich. Es besitzt demnach auch die Gleichung $\psi_{k,\lambda}(x)=0$ nur ungleiche Wurzeln.

Es ist nun nur noch die Anzahl der innerhalb des Intervalles $a\ldots b$ liegenden, ungleichen Wurzeln von $\psi_{k,\lambda}(x)=0$ zu bestimmen. Nun gilt bekanntlich folgender Satz:

Hat man zwei ganze Functionen $F(x)$ und $F_1(x)$, von denen die zweite für alle im Intervalle $a\ldots b$ befindlichen Wurzeln der ersten dasselbe Zeichen besitzt, wie $F(x)$, so ist die Anzahl der innerhalb des Intervalles $a\ldots b$ liegenden Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$, welche mit $A\{F(x)\}$ bezeichnet werden möge, durch folgende Gleichung gegeben:

$$A\{F(x)\}=-\sum_{\xi}[F_1(\xi)F(\xi)]-\frac{1}{2}[F(a)F_1(a)]+\frac{1}{2}[F(b)F_1(b)]$$

wo die Summation sich über alle Wurzeln ξ der Gleichung $F_1(x)=0$ erstreckt, welche innerhalb des Intervalles $a\ldots b$ liegen, und $[B]$ das Zeichen der reellen Grösse B bedeutet.

Es ist daher, da $\psi'_{k,\lambda}(x)$ und $-\psi_k(x)\psi_\lambda(x)$ an den Nullstellen von $\psi_{k,\lambda}(x)$ im Intervalle $a\ldots b$ gleiches Zeichen haben:

$$A\{\psi_{k,\lambda}(x)\}=\sum_{\xi}[\psi'^2_\lambda(\xi)\psi^2_k(\xi)-\psi'^2_\lambda(\xi)\psi^2_\lambda(\xi)]+\frac{1}{2}[\psi_k(a)\psi_\lambda(a)\psi_{k,\lambda}(a)]-$$
$$-\frac{1}{2}[\psi_k(b)\psi_\lambda(b)\psi_{k,\lambda}(b)]$$

wo die Grössen ξ die Wurzeln der beiden Gleichungen $\psi_k(x)=0$ und $\psi_\lambda(x)=0$ sind. Nun ist

$$[\psi_k(a)\psi_\lambda(a)\psi_{k,\lambda}(a)]=[\psi_k(-\infty)\psi_\lambda(-\infty)\psi_{k,\lambda}(-\infty)]=-1$$
$$[\psi_k(b)\psi_\lambda(b)\psi_{k,\lambda}(b)]=[\psi_k(+\infty)\psi_\lambda(+\infty)\psi_{k,\lambda}(+\infty)]=+1$$

und daher:

$$A\{\psi_{k,\lambda}(x)\}=\lambda-k-1.$$

Man hat daher schliesslich das Theorem:

Ist $f(x)$ in dem reellen Intervalle $a\ldots b$ reell, endlich, von demselben Zeichen und so beschaffen, dass die Näherungsnenner $\psi_\lambda(x)$ der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrals:

$$\int_a^b \frac{f(z)dz}{x-z}$$

den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung:

$$[(x-a)(x-b)f(x)y']' = c_\lambda f(x)y \qquad [\lambda = 0, 1, 2, \ldots; c_\lambda > c_k, \lambda > k]$$

genügen, sind ferner $\psi_k(x)$ und $\psi_\lambda(x)$ zwei Näherungsnenner ohne gemeinsamen Theiler, so hat die Gleichung:

$$\psi_{k,\lambda}(x) = \begin{vmatrix} \psi'_\lambda(x), & \psi'_k(x) \\ \psi_\lambda(x), & \psi_k(x) \end{vmatrix} = 0 \quad [\lambda > k]$$

$\lambda - k - 1$ reelle, ungleiche, innerhalb des Intervalles $a \ldots b$ liegende und $2k$ complexe Wurzeln.

Ein specieller Fall dieses Theorems ist der von Herrn E. Laguerre in den Schriften der Pariser Akademie der Wissenschaften („Sur la détermination d'équations numériques ayant un nombre donné de racines imaginaires." C. R. Tome XC, pag. 180) mitgetheilte Satz:

Ist $\psi_n(x)$ der $n$te Näherungsnenner der regulären Kettenbruchentwicklung des Integrals:

$$\int_x^\infty \frac{e^{x-z}dz}{z}$$

so hat die Gleichung

$$\begin{vmatrix} \psi'_m(x), & \psi'_n(x) \\ \psi_m(x), & \psi_n(x) \end{vmatrix} = 0 \quad [m > n]$$

$m - n - 1$ reelle, ungleiche, negative und $2n$ complexe Wurzeln.

Falls λ und k nur um eine Einheit von einander verschieden sind, lässt sich die eben bewiesene Eigenschaft der Näherungsnenner für alle regulären Kettenbruchentwicklungen, deren sämmtliche Theilnenner positive Coëfficienten von x besitzen, in höchst einfacher Weise ableiten.

Aus der Relation:

$$\psi_{k+1}(x) = (\alpha_{k+1}x + \beta_{k+1})\psi_k(x) - \psi_{k-1}(x)$$

folgt sofort die Gleichung:

$$\psi_{k,k+1}(x) = \alpha_{k+1}\psi_k^2(x) + \psi_{k-1,k}(x)$$

und daher:

$$\psi_{k,k+1}(x) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k+1} \alpha_\lambda \psi_{\lambda-1}^2(x).$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung als Summe von positiven Grössen für keinen reellen Werth von x verschwinden kann, so hat die Gleichung $\psi_{k,k+1}(x) = 0$ keine reelle Wurzel.

Bestimmung der Bahn des Planeten (114) Cassandra.

Von **Ferdinand Anton**,

Observator der k. k. österreichischen Gradmessung.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Jänner 1883.

Seitdem in den letzten Jahren die Zahl der kleinen Planeten durch den Fleiss der Entdecker derart zugenommen hat, dass es nachgerade schwer wird, die Bahnen aller dieser Himmelskörper durch die Rechnung zu sichern, wird es Aufgabe der astronomischen Rechner, diejenigen Bahnen, für welche genügendes Beobachtungsmateriale vorliegt, wenigstens insoweit einer definitiven Bestimmung zuzuführen, dass dieselben mindestens für die nächsten Jahrzehnte als gesichert betrachtet werden können.

In diesem Sinne ist nachstehend für den Planeten (114) Cassandra nahezu das gesammte, mir bekannt gewordene Beobachtungsmaterial zu einer Bahnbestimmung benützt worden, welche auf die Beobachtungsdaten von sieben Oppositionen des Planeten gegründet und mit Rücksicht auf erste Potenzen der Störungen durch Jupiter und Saturn durchgeführt ist.

Die Normalorte, welche dem schliesslichen Systeme von Bahnelementen zu Grunde liegen, sind über einen Zeitraum von 2881 Tagen vertheilt, indem die beiden der Zeit nach äussersten aller benützten Normalorte den Epochen: 1871 Juli 26·5 und 1879 Juni 15·5 entsprechen, während welcher Zeit der Planet nahezu zwei Umläufe vollführt hat. Da mit jenem Elementensysteme die Störungsrechnung, sowie die Vorausberechnung des geocentrischen Laufes des Planeten bis zum Ende des Jahres 1884 fortgesetzt wurde, so umfasst die vorliegende Arbeit im Ganzen einen Zeitraum von 13·5 Jahren, und, entsprechend einer mittleren täglichen Bewegung von 810 Bogensecunden, einen dreimaligen Umlauf des Planeten um die Sonne.

Die Arbeit selbst theilt sich der Natur der Sache gemäss, und bei der Art und Weise, wie vollständige Bahnbestimmungen durchgeführt zu werden pflegen, von selbst in drei Abtheilungen.

In der ersten Abtheilung, welche die Bahn des Planeten in ihrer ungestörten Form behandelt, habe ich das gesammte Beobachtungsmaterial zusammengetragen und fast durchgängig einer genauen Nachrechnung unterzogen, um für die zu ermittelnden Normal-Positionen möglichst verlässliche Angaben zu gewinnen. Während in dieser Hinsicht besonders ausführlich vorgegangen wurde, sind die successiven Elementenverbesserungen für die Oppositionen der ersten Jahre, insolange von der Berücksichtigung der Störungen abgesehen wurde, nur cursorisch behandelt, und Ephemeriden für den Lauf des Planeten und für den Vergleich zwischen Beobachtung und Rechnung nur insoweit gegeben, als sich dieselben nicht anderswo, also namentlich im Berliner astronomischen Jahrbuche und den zugehörigen Circularen publicirt vorfinden.

Mit den in der ersten Abtheilung ermittelten Elementen wird zunächst die Störungsrechnung durchgeführt. Ich hatte dieselbe nach der Methode der Variation der Constanten schon vor Langem und zwar zu einer Zeit begonnen, als der Planet erst in drei Oppositionen beobachtet worden war; die Rechnung erfuhr jedoch, als die Störungen der Elemente bereits für diesen Zeitraum ermittelt waren, namentlich wegen der auswärtigen Arbeiten, die mir für die Zwecke der k. k. österreichischen Gradmessung oblagen, eine mehrjährige Unterbrechung und ich konnte dieselbe erst wieder aufnehmen, als schon die Beobachtungen von sechs Oppositionen des Planeten vorlagen.

Inzwischen war durch Professor v. Oppolzer eine Methode bekannt gemacht worden, welche die Störungen der polaren Coordinaten in der von Hansen gewählten Form in dem Falle, wo man sich mit den ersten Potenzen dieser Störungen begnügt, in äusserst einfacher und übersichtlicher Weise zu berechnen gestattet, und welche sich desshalb für erste Störungsrechnungen ganz besonders empfiehlt. Von dieser Methode, welche ich bereits gelegentlich einer Bahnbestimmung für den Planeten (154) Bertha (LXXX. Band der Sitzungsberichte der kais. Akademie der Wissenschaften in Wien, II. Abth., Nov.789-Heft. 1) benützte

habe ich auch hier wieder Gebrauch gemacht. Da nämlich die Neurechnung der Störungen nach dieser Methode nur einen sehr geringen Zeitaufwand erfordert, so schien mir eine solche Neurechnung einfacher, als eine detaillirte Revision jener bereits vordem erwähnten, und mehrere Jahre früher zu Stande gekommenen Störungsrechnung nach der Methode der Variation der Constanten und hatte zudem ein höheres Interesse für sich. Um die Resultate beider Rechnungsmethoden vergleichen zu können, habe ich der letzteren Störungsrechnung dasselbe Elementensystem zu Grunde gelegt, wie der ursprünglich durchgeführten, obwohl dieses System eben nur die drei dem Beginne der ursprünglichen Störungsrechnung vorangehenden Oppositionen gut darstellt, und wenn nicht jener Vergleich der Resultate beabsichtigt gewesen wäre, leicht durch ein anderes, ein grösseres Bahnstück darstellendes Elementensystem hätte ersetzt werden können.

In dieser Weise habe ich fünf Oppositionen mittelst der Ergebnisse beider Störungsrechnungen dargestellt, und die so aus beiden Methoden gewonnenen, sehr gut übereinstimmenden Resultate bilden die Grundlage für die nunmehr folgende erste Verbesserung der Bahnelemente, welcher unter Zuziehung zweier weiterer Oppositionen dann eine nochmalige Verbesserung dieser Elemente folgte.

Das durch diesen letzten Ausgleich gewonnene Elementensystem liegt dann der Vorausberechnung der Störungen und der Ephemeriden für den geocentrischen Lauf des Planeten zu Grunde, wie dieselben in der dritten Abtheilung gegeben sind.

I. Abtheilung.

Der Planet (114) Cassandra wurde in der Nacht des 23. Juli 1871 von Professor C. H. F. Peters in Clinton, N. Y. am Litchfield Observatory of Hamilton College entdeckt. Als erstes, auf die Beobachtungen:

1871	Mittl. Ortszeit	app α	app δ
Clinton . . . Juli 24	$15^h44^m45^s$	$21^h43^m27^s\cdot44$	$-10°12'17''\cdot1$
Leipzig . . Aug. 21	12 12 54	21 21 27·86	−12 32 17·5
Clinton . . Sept. 18	9 26 59	21 4 18·71	−14 37 44·0
Lund . . . . Oct. 17	7 36 36	21 3 45·56	−15 27 14·0

basirtes Elementensystem erhielt ich:

(114) **Cassandra.**

Epoche: 1871 Juli 24·0 mittl. Berl. Zeit.
Mittlere Ekliptik und Äquinoctium 1871·0.

$$\begin{aligned} L &= 311°38'10'31 \\ M &= 157\ 23\ 55·86 \\ \pi &= 154\ 14\ 14·45 \\ \Omega &= 164\ 22\ 30·17 \\ i &= \ \ 4\ 54\ 23·06 \\ \varphi &= \ \ 8\ \ 8\ 12·78 \\ \mu &= 811'2287 \\ \log a &= 0·4272422 \end{aligned}$$

und aus diesen Elementen für die Ableitung einer Ephemeride die Relationen:

$$\begin{aligned} x &= 9·9998847 \sin(244°17'30'51 + v) \\ y &= 9·9763825 \sin(154\ 44\ 21·63 + v) \\ z &= 9·5076556 \sin(150\ 24\ 18·52 + v), \end{aligned}$$

welche die rechtwinkligen Äquatorcoordinaten als Functionen der wahren Anomalie darstellen, und in denen die Zahlencoëfficienten logarithmisch angesetzt sind.

Das Elementensystem, welches den vier aus den obigen Beobachtungen resultirenden Längen und den beiden äusseren Breiten angeschlossen ist, stellt die zu Grunde liegenden Beobachtungen sehr befriedigend dar, indem die Rückrechnung folgende Fehler in Länge und Breite und zwar im Sinne „Beobachtung—Rechnung" übrig lässt:

$d\lambda$	—0'04	—0'08	—0'06	—0'01
$d\beta$ ...	0·00	(+3·22)	(—1·03)	0·00;

es sind somit auch die mittleren, nicht verwendeten Breiten recht gut dargestellt.

Die obigen Elemente geben zunächst für den Vergleich der sehr zahlreichen Beobachtungen der ersten Opposition mit der Rechnung die nachstehende Ephemeride:

12h Berl. Zeit		(114) app α	app δ	log ρ	Lichtzeit
1871 Juli	23	21h 44m 24·25	−10° 6′ 22″93	0·31743	17m 15s
	24	21 43 43·65	−10 10 34·08	0·31637	17 12
	25	21 43 2·19	−10 14 50·96	0·31536	17 9
	26	21 42 19·91	−10 19 13·51	0·31440	17 7
	27	21 41 36·84	−10 23 41·41	0·31350	17 5
	28	21 40 53·02	−10 28 14·45	0·31265	17 3
	29	21 40 8·48	−10 32 52·41	0·31185	17 1
	30	21 39 23·26	−10 37 35·07	0·31111	16 59
	31	21 38 37·41	−10 42 22·17	0·31043	16 57
Aug.	1	21 37 50·96	−10 47 13·49	0·30980	16 56
Aug.	2	21 37 3·95	−10 52 8·77	0·30922	16 55
	3	21 36 16·43	−10 57 7·78	0·30871	16 54
	4	21 35 28·44	−11 2 10·26	0·30825	16 53
	5	21 34 40·02	−11 7 15·96	0·30786	16 52
	6	21 33 51·22	−11 12 24·61	0.30752	16 51
	7	21 33 2·08	−11 17 35·96	0·30724	16 50
	8	21 32 12·67	−11 22 49·71	0·30702	16 49
	9	21 31 23·02	−11 28 5·61	0·30686	16 49
	10	21 30 33·19	−11 33 23·35	0·30676	16 49
	11	21 27 43·23	−11 38 42·64	0·30672	16 49
Aug.	12	21 28 53·18	−11 44 3 20	0·30675	16 49
	13	21 28 3·11	−11 49 24·72	0·30684	16 49
	14	21 27 13·07	−11 54 46·92	0·30699	16 50
	15	21 26 23·10	−12 0 9·50	0·30720	16 50
	16	21 25 33·26	−12 5 32.19	0.30748	16 51
	17	21 24 43·61	−12 10 54·67	0·30782	16 51
	18	21 23 54·20	−12 16 16·68	0·30821	16 52
	19	21 23 5·08	−12 21 37·90	0·30867	16 53
	20	21 22 16·31	−12 26 58·07	0·30918	16 55
	21	21 21 27·93	−12 32 16·87	0·30976	16 56
Aug.	22	21 20 40.01	−12 37 34·08	0·31039	16 57
	23	21 19 52·57	−12 12 49·40	0·31108	16 59
	24	21 19 5·68	−12 48 2·60	0·31184	17 1
	25	21 18 19·38	−12 53 13·40	0·31265	17 3
	26	21 17 33·70	−12 58 21·85	0·31351	17 5
	27	21 16 48·70	−13 3 26·91	0·31443	17 7
	28	21 16 4·41	−13 8 29·19	0·31541	17 9
	29	21 15 20·87	−13 12 28·17	0·31644	17 12
	30	21 14 38·12	−13 18 23·68	0 31752	17 14
	31	21 13 56·21	−13 23 15·51	0·31865	17 17

(114)

12ʰ Berl. Zeit	app α	app δ	log ρ	Lichtzeit
Sept. 1	21ʰ 13ᵐ 15ˢ·16	−13° 28′ 3″·49	0·31984	17ᵐ 20ˢ
2	21 12 35·02	−13 32 47·41	0·32108	17 23
3	21 11 55·82	−13 37 27·12	0·32236	17 26
4	21 11 17·59	−13 42 2·43	0·32369	17 29
5	21 10 40·36	−13 46 33·18	0·32507	17 32
6	21 10 4·18	−13 50 59·21	0·32650	17 36
7	21 9 29·07	−13 55 20·39	0·32797	17 39
8	21 8 55·06	−13 59 36·54	0·32948	17 43
9	21 8 22·18	−14 3 47·54	0·33104	17 47
10	21 7 50·46	−14 7 53·24	0·33264	17 51
Sept. 11	21 7 19·93	−14 11 53·52	0·33428	17 55
12	21 6 50·61	−14 15 48·26	0·33596	17 59
13	21 6 22·53	−14 19 37·37	0·33767	18 3
14	21 5 55·70	−14 23 20·71	0·33942	18 7
15	21 5 30·15	−14 26 58·21	0·34121	18 12
16	21 5 5·90	−14 30 29·74	0·34303	18 17
17	21 4 42·97	−14 33 55·25	0·34489	18 22
18	21 4 21·36	−14 37 14·63	0·34678	18 26
19	21 4 1·10	−14 40 27·83	0·34869	18 31
20	21 3 42·19	−14 43 34·79	0·35063	18 36
Sept. 21	21 3 24·65	−14 46 35·47	0·35260	18 41
22	21 3 8·47	−14 49 29·80	0·35460	18 46
23	21 2 53·67	−14 52 17·77	0·35662	18 52
24	21 2 40·25	−14 54 59·34	0·35867	18 57
25	21 2 28·21	−14 57 34·49	0·36074	19 3
26	21 2 17·55	−15 0 3·19	0·36283	19 8
27	21 2 8·27	−15 2 25·44	0·36494	19 14
28	21 2 0·37	−15 4 41·21	0·36706	19 20
29	21 1 53·86	−15 6 50·51	0·36921	19 26
30	21 1 48·72	−15 8 53·33	0·37137	19 31
Oct. 1	21 1 44 97	−15 10 49·67	0·37355	19 37
2	21 1 42·59	−15 12 39·53	0·37574	19 43
3	21 1 41·60	−15 14 22·92	0·37795	19 49
4	21 1 41·97	−15 15 59·83	0·38017	19 55
5	21 1 43·71	−15 17 30·27	0·38240	20 1
6	21 1 46·82	−15 18 54·23	0·38465	20 7
7	21 1 51·28	−15 20 11·73	0·38690	20 13
8	21 1 57·09	−15 21 22·75	0·38917	20 20
9	21 2 4·25	−15 22 27·31	0·39144	20 26
10	21 2 12·76	−15 23 25·41	0·39372	20 32

(114)

12h Berl. Zeit	app α	app δ	log ρ	Lichtzeit
Oct. 11	21h 2m22·59	−15°24′17″07	0·39600	20m39·
12	21 2 33·76	−15 25 2·32	0·39829	20 45
13	21 2 46·24	−15 25 41·18	0·40058	20 52
14	21 3 0·03	−15 26 13·65	0·40287	20 58
15	21 3 15·12	−15 26 39·76	0·40517	21 5
16	21 3 31·49	−15 26 59·48	0·40747	21 12
17	21 3 49·14	−15 27 12·91	0·40978	21 19
18	21 4 8·06	−15 27 20·01	0·41208	21 26
19	21 4 28·22	−15 27 20·85	0·41438	21 33
20	21 4 49·61	−15 27 15·45	0·41668	21 40
Oct. 21	21 5 12·22	−15 27 3·85	0·41898	21 47
22	21 5 36·04	−15 26 46·07	0·42127	21 54

Für die Vergleichung dieser Ephemeride mit den Beobachtungen habe ich die letzteren grösstentheils neu reduzirt und ein besonderes Gewicht auf die Ermittlung guter Vergleichsternpositionen gelegt.

Es wurde hiebei das Princip befolgt, die mittleren Orte der Vergleichsterne für 1871·0, wie dieselben nach den „Astronomischen Nachrichten“ den einzelnen Beobachtungen zu Grunde liegen, hier nur als „genäherte Orte für 1871·0“, zu betrachten, und unter Zugrundelegung dieser Angaben, sowie der von den einzelnen Sternkatalogen für die Katalogsepochen gegebenen Positionen, die für die Mitte der Zeit „1871·0—Katalogsepoche“ geltenden Positionen und mit diesen die Präcessionswerthe zur Übertragung der einzelnen Katalogsangaben auf 1871·0 abzuleiten, so dass die in einer der folgenden Zusammenstellungen auftretenden Columnen „Reduction auf 1871·0 in α und in δ“ bis auf Glieder zweiter Ordnung richtig sind.

Nachstehend folgt zunächst, aus den Angaben der astronomischen Nachrichten zusammengestellt, das fortlaufende Verzeichniss der für die erste Opposition in Betracht kommenden Vergleichsterne.

Nr.		Epoche der Kataloge:	Angabe der Kataloge: α	δ	(*)	Genäherter Ort für 1871·0 α	δ
1	1850	Arg. Öltz. Südl. Zonen 21146	21ʰ 0ᵐ 7ˢ·13	−15°30′18″·5	*a*	21ʰ 1ᵐ17ˢ·1	−15°25′20″·0
2	1860	Santini 1940 (3)	21 1 51·75	−14 40 55·5	*b*	21 2 28·2	−14 38 16·0
3	1860	Santini 1943 (2)	21 3 20·05	−14 37 43·2	*c*	21 3 56·5	−14 35 4·0
4	1836	Rümker Nachtrag 12	21 2 49·95	−15 37 26·3	*d*	21 4 46·6	−15 29 0·0
5	1850	Arg. Öltz. S. Z. 21303	21 3 36·71	−15 34 2·9			
6	1871	Berl. Merid. Beob.	21 4 47·86	−14 13 51·1	*e*	21 4 47·86	−14 13 51·1
7	1860	Santini	21 4 11·44	−14 16 27·5			
8	1871	Berl. Merid. Beob.	21 6 9·03	−14 23 44·6	*f*	21 6 9·03	−14 23 44·6
9	1825	Weisse 21ʰ78	21 3 36·75	−14 34 51·6			
10	1836	Rümker Nachtrag 25	21 7 0·11	−13 52 37·9	*g*	21 8 55·5	−13 44 4·0
11	1860	Santini 1954 (2)	21 8 19·29	−13 46 47·9			
12	1871	Berl. Merid. Beob.	21 8 55·46	−13 44 7·6		21 8 55 46	−13 44 7·6
13	1860	Santini 1955 (2)	21 8 21·31	−14 2 29·8	*h*	21 8 57·8	−13 59 46·0
14	1871	Berl. Merid. Beob.	21 8 57·79	−13 59 51·0		21 8 57·79	−13 59 51·0
15	1860	Santini 1956 (2)	21 8 35·43	−14 8 37·8	*i*	21 9 11·7	−14 5 54·0
16	1836	Rümker 9065	21 8 14·20	−13 57 39·4	*j*	21 10 9·5	−13 49 0·0
17	1871	Berl. Merid. Beob.	21 10 9·46	−13 48 59·9			
18	1860	Santini 1967 (2)	21 11 40·74	−13 58 5·3	*k*	21 12 17·0	−13 35 23·0
19	1865	Schjellerup 8613	21 11 57·27	−13 36 52·4			
20	1871	Yarnals Washingt. Merid. Beob.	21 12 17·05	−13 35 23·0		21 12 17·05	−13 35 23·0
21	1825	Weisse 21ʰ258	21 10 27·49	−13 43 16·1	*l*	21 12 58·78	−13 31 58·2
22	1836	Rümker Nachtrag 44	21 11 49·10	−13 34 34·5	*m*	21 13 44·0	−13 25 52·5
23	1871	Berl. Merid. Beob.	21 13 43·96	−13 25 49·7		21 13 43·96	−13 25 49·7

24	1860	Santini 1978 (2)	21ʰ 14ᵐ 11ˢ·96	−13° 57′ 36″·7	n	21ʰ 14ᵐ 48ˢ·0	−13° 54′ 53″·0
25	1871	Berl. Merid. Beob.	21 14 48·21	−13 54 52·0		21 14 48·21	−12 54 52·0
26	1835	Taylor 9939	21 17 27.03	−12 47 39·9	o	21 19 24·4	−12 38 36·0
27	1860	Santini 1982 et 2404 (5)	21 18 48·51	−12 41 24·8			
28	1865	Berl. Merid. Beob. Ast. N. 1637	21 19 4·91	−12 40 7·8			
29	1836	Rümker Nachtrag 69	21 17 34.86	−11 37 18·5	p	21 19 28·5	−11 28 22·0
30	1855	Bonn. Beob.	21 18 36·56	−11 32 27·1			
31	1860	Santini 2405	21 18 52·47	−11 31 11·1			
32	1865	Copenh. Mer. Beob. Ast. N. 1552	21 19 9·16	−11 29 51·3			
33	1835	Taylor 9945	21 18 41·92	−12 22 31·9	q	21 20 38·9	−12 13 24·0
34	1836	Rümker 9180	21 18 44·89	−12 22 20.8			
35	1855	Bonn. Beob.	21 19 46·78	−12 17 26·8			
36	1860	Santini 2407 (2)	21 20 2·70	−12 16 8·9			
37	1865	Berl. Merid. Beob. Ast. N. 1637	21 20 19·35	−12 14 56·3			
38	1865	Copenh. Merid. Beob. Art. N. 1552	21 20 19·41	−12 14 55·6			
39	1835	Taylor 9958	21 19 7·77	−12 38 27·2	r	21 21 5·1	−12 29 14·0
40	1860	Santini 2408 (4)	21 20 28·83	−12 32 2·8			
41	1865	Berl. Merid. Beob. Ast. N. 1637	21 20 45·50	−12 30 47·3			
42	1871	Berl. Merid. Beob.	21 21 5·02	−12 29 14·8		21 21 5·02	−12 29 14·8
43	1835	Taylor 9954	21 19 10·78	−12 48 2·6	s	21 21 8·01	−12 38 54·0
44	1855	Bonn. Beob.	21 20 15·84	−12 43 1·2			
45	1855	Bonn. Beob.	21 20 18·11	−12 23 32·5	t	21 21 10·3	−12 19 26·0
46	1860	Santini 2409 (1)	21 20 33·84	−12 22 19·2			
47	1835	Taylor 9957	21 19 17·53	−12 16 45·7	u	21 21 14·8	−12 7 34·0
48	1855	Bonn. Beob.	21 20 22·68	−12 11 41·0			
49	1860	Santini 2410 (2)	21 20 38·59	−12 10 22·6			
50	1871	Berl. Merid. Beob.	21 21 14·60	−12 7 36·5		21 21 14·60	−12 7 36·5

Nr.		Epoche der Kataloge:	Angabe der Kataloge α	Angabe der Kataloge δ	(*)	Genäherter Ort für 1871·0 α	Genäherter Ort für 1871·0 δ
51	1836	Rümker 9334	21ʰ 31ᵐ 20ˢ·46	−11° 32′ 20″·4	*v*	21ʰ 33ᵐ 13ˢ·7	−11° 22′ 58″·0
52	1860	Santini 2436 (3)	21 32 38·03	−11 25 55·7			
53	1865	Schjellerup 8787	21 32 54·25	−11 24 34·0			
54	1860	Santini 2442 (1)	21 34 56·19	−11 42 12·3	*w*	21 35 31·8	−11 39 19·0
55	1865	Schjellerup 8807	21 35 12·39	−11 40 56·0			
56	1860	Santini 2456 (4)	21 39 58·12	−10 24 6·8	*x*	21 40 33·1	−10 21 6·0
57	1865	Schjellerup 8845—7	21 40 42·74	−10 29 14·0	*y*	21 41 2·0	−10 27 35·0
58	1836	Rümker 9639	21 47 40·04	−10 21 41·3	*z*	21 49 32·6	−10 11 49·0
59	1860	Santini 2471 (3)	21 48 57·16	−10 14 56·4			
60	1865	Schjellerup 8925	21 49 13·39	−10 13 30·7			

In dem voranstehenden Verzeichnisse von 60 Positionsangaben verschiedener Sternkataloge sind diejenigen Angaben, welche sich auf einen und denselben Stern beziehen, in mit den fortlaufenden Buchstaben des Alphabets bezeichnete Gruppen zusammengefasst, so dass diese Buchstaben die Bezeichnung der Vergleichsterne bilden, wie dieselben später zur Verwendung kommen. Man sieht, dass nur einige wenige derselben, nämlich die unter den Bezeichnungen *a*, *b*, *c*, *i*, *l*, *x*, *y* angeführten, auf den Angaben von nur je einem Kataloge beruhen; für alle übrigen liegen mehrfache Bestimmungen vor, welche in ein Mittel zu vereinigen sind. Demgemäss enthält das folgende Verzeichniss in drei Doppelcolumnen zuerst die Resultate der Übertragung der Positionsangaben von den Epochen der einzelnen Kataloge auf die gemeinsame Epoche 1871·0 (inclusive Glieder zweiter Ordnung der Präcession), dann den mittleren Ort für 1871·0 für jede einzelne der benützten Katalogsangaben, endlich als angenommene Vergleichsternpositionen die Mittelwerthe aus allen für denselben Stern zur Verfügung stehenden Positionsbestimmungen.

Nr.	Reduction auf 1871·0 in α	in δ	Mittl. Ort für 1871·0 α	δ		Angenommene Position (*)	α	δ
1	+1ᵐ 9ˢ·961	+ 4′58″·64	21ʰ 1ᵐ17′·09	−15°25′19″·9		*a*	21ʰ 1ᵐ17′·09	−15°25′19″·9
2	+0 36·474	+ 2 37·42	21 2 28·22	−14 38 18·1		*b*	21 2 28·22	−14 38 18·1
3	+0 36·446	+ 2 38·40	21 3 56·50	−14 35 4·8		*c*	21 3 56·50	−14 35 4·8
4	+1 56·528	+ 8 24·39	21 4 46·48	−15 29 1·9	}			
5	+1 9·899	+ 5 3·13	46·61	28 59·8	}			
			angenommen:			*d*	21 4 46·54	−15 29 0·8
6			21 4 47·86	−14 13 51·1	}			
7	+0 36·369	+ 2 38·98	47·81	48·5	}			
			angenommen:			*e*	21 4 47·83	−14 13 49·8
8			21 6 9·03	−14 23 44·6	}			
9	+2 32·267	+11 4·60	9·02	47·0	}			
			angenommen:			*f*	21 6 9·03	−14 13 45·8
10	+1 55·316	+ 8 33·17	21 8 55·43	−13 44 4·7	}			
11	+0 36·228	+ 2 41·71	55·52	6·2	}			
12			55·46	7·6	}			
			angenommen:			*g*	21 8 55·47	−13 44 6·2
13	+0 36·276	+ 2 41·73	21 8 57·59	−13 59 48·1	}			
14			57·79	51·0	}			
			angenommen:			*h*	21 8 57·69	−13 59 49·5
15	+0 36·292	+ 2 41·88	21 9 11·72	−14 5 55·9		*i*	21 9 11·72	−14 5 55·9
16	+1 55·319	+ 8 35·74	21 10 9·52	−13 49 3·6	}			
17			9·46	48 59·9	}			
			angenommen:			*j*	21 10 9·49	−13 49 1·7

Nr.	Reduction auf 1871·0 in α	Reduction auf 1871·0 in δ	Mittl. Ort für 1871·0 α	Mittl. Ort für 1871·0 δ	(*)	Angenommene Position α	Angenommene Position δ
18	+0ᵐ36ˢ168	+ 2′43″89	21ʰ12ᵐ16ˢ91	−13°35′21″6			
19	+0 19·724	+ 1 29·44	16·99	23·0			
20			17·05	23·0			
			angenommen:		*k*	21ʰ12ᵐ16ˢ98	−13°35′22″5
21	+2 31·234	+11 24·70	21 12 58·72	−13 31 51·4		21 12 58·72	−13 31 51·4
22	+1 54·964	+ 8 43·12	21 13 44·06	−13 25 51·4			
23			43·96	49·7			
			angenommen:		*m*	21 13 44·01	−13 25 50·5
24	+0 36·012	+ 2 45·50	21 14 47·97	−12 54 51·2			
25			48·21	52·0			
			angenommen:		*n*	21 14 48·09	−12 54 51·6
26	+1 57·583	+ 9 9·78	21 19 24·61	−12 38 30·1			
27	+0 35·914	+ 2 48·40	24·42	36·4			
28	+0 19·588	+ 1 31·90	24·50	35·9			
			angenommen:		*o*	21 19 24·51	−12 38 34·1
29	+1 53·665	+ 8 54·69	21 19 28·53	−11 28 23·8			
30	+0 51·947	+ 4 4·81	28·51	22·3			
31	+0 35·711	+ 2 48·43	28·18	22·7			
32	+0 19·477	+ 1 31·92	28·64	19·4			
			angenommen:		*p*	21 19 28·46	−11 28 22·1

33	+1m57s·300	+ 9' 12"·31	21h 20m 39s·22	−12° 13' 19"·6			
34	+1 54·040	+ 8 57·01	38·93	23·8			
35	+0 52·117	+ 4 5·94	38·90	20·9			
36	+0 35·828	+ 2 49·16	38·53	19·7			
37	+0 19·541	+ 1 32.32	38·89	24·0			
38	+0 19·541	+ 1 32·32	38·95	23·3			
			angenommen:		*q*	21h 20m 38s·90	−12° 13' 21"·9
39	+1 57·435	+ 9 13·27	21 21 5·21	−12 29 14·0			
40	+0 35·869	+ 2 49·43	4·70	13·4			
41	+0 19·564	+ 1 32.46	5·46	14·8			
42			5·02	14·8			
			angenommen:		*r*	21 21 5·10	−12 29 14·2
43	+1 57·524	+ 9 13·27	21 21 8·30	−12 38 49·3			
44	+0 52·217	+ 4 6·37	8·06	54·8			
			angenommen:		*s*	21 21 8·18	−12 38 52·0
45	+0 52·134	+ 4 6·41	21 21 10·24	−12 19 26·1			
46	+0 35·840	+ 2 49·48	9·68	29·7			
			angenommen:		*t*	21 21 9·96	−12 19 27·9
47	+1 57·225	+ 9 13·51	21 21 14·76	−12 7 32·4			
48	+0 52·083	+ 4 6·48	14·76	34·5			
49	+0 35·805	+ 2 49·53	14·40	33·1			
50			14·60	36·5			
			angenommen:		*u*	21 21 14·63	−12 7 34·1

Nr.	Reduction auf 1871·0 in α	Reduction auf 1871·0 in δ	Mittl. Ort für 1871·0 α	Mittl. Ort für 1871·0 δ	(*)	Angenommene Position α	Angenommene Position δ
51	+1 53·174	+ 9 20·99	21 33 13·63	−11 22 59·4			
52	+0 35·556	+ 2 56·67	13·59	59·0			
53	+0 19·393	+ 1 36·41	13·64	57·6			
			angenommen:		*v*	21 33 13·62	−11 22 58·6
54	+0 35·575	+ 2 57·99	21 35 31·77	−11 39 14·3			
55	+0 19·403	+ 1 37·13	31·79	18·9			
			angenommen:		*w*	21 35 31·78	−11 39 16·6
56	+0 35·322	+ 3 0·81	21 40 33·44	−10 21 6·0	*x*	21 40 32·44	−10 31 6·0
57	+0 19·272	+ 1 38·81	21 41 2·01	−10 27 35·2	*y*	21 41 2·01	−10 27 35·2
58	+1 52·076	+ 9 49·56	21 49 (32·12)	−10 11 51·7			
59	+0 35·212	+ 3 5·61	32·37	50·8			
60	+0 19·205	+ 1 41·29	32·60	49·4			
			angenommen:		*z*	21 49 32·48	−10 11 50·1

Die folgenden zwei Zusammenstellungen enthalten nunmehr alle diejenigen Beobachtungsdaten und Reductionsgrössen, welche den Übergang von den eben ermittelten Vergleichsternpositionen auf die Ephemeridenfehler, d. h. auf die den einzelnen Beobachtungen entsprechenden Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung ermöglichen.

Die erste mit *A* bezeichnete Zusammenstellung gibt die Beobachtungsorte und Beobachtungszeiten, die für die einzelnen Beobachtungen benützten Vergleichsterne, dann die Reduction von 1871·0 auf das wahre Äquinoctium des jeweiligen Beobachtungsdatums, endlich, da die Beobachtungen durchgängig relative Ortsbestimmungen sind, die beobachteten Positionsunterschiede zwischen Planet und Vergleichstern, sowie mit Hilfe der bisher ermittelten Daten die scheinbaren Orte des Planeten zur Zeit der einzelnen Beobachtungen.

Die mit *B* bezeichnete Zusammenstellung, deren Zeitangaben in Tagesbruchtheilen und in Berliner Zeit zu verstehen sind, gibt für den Übergang auf den geocentrischen Ort die Correctionen für Parallaxe und dann unmittelbar als Resultat aller bisherigen Reductionen die Unterschiede: „Beobachtung—Rechnung" in Rectascension und Declination, also die den einzelnen Beobachtungen entsprechenden Ephemeridencorrectionen.

A.

Ort	1871	Ortszeit	(*)	Reduction $d\alpha$	Reduction $d\delta$	(114) − ✳ $\Delta\alpha$	(114) − ✳ $\Delta\delta$	(114) app α	(114) app δ
Clinton	Juli 24	15ʰ 14ᵐ 44ˢ·6	*z*	+1ˢ·98	+ 9ˢ·79	−1ᵐ 54ˢ·14	−0ˢ 44ˢ·3	21ʰ 43ᵐ 27ˢ·31	−10° 12′ 17″·8
„	26	12 17 57·0	*x*	+2·03	+10·00	+1 33·26	+0 29·8	21 42 8·73	−10 20 26·2
„	28	12 11 0·6	*y*	+2·06	+10·11	−0 22·50	−2 2·0	21 40 41·57	−10 29 27·1
„	Aug. 7	11 42 59·0	*v*	+2·22	+10·68	−0 24·95	+3 55·7	21 32 50·89	−11 18 52·2
„	8	13 21 12·4	*v*	+2·23	+10·69	+0 14·45	+0 31·0	21 31 57·95	−11 24 25·5
„	9	11 19 33·1	*p*	+2·25	+10·73	−0 2·47	−0 45·9	21 31 12·33	−11 29 14·3
„	10	10 24 28·6	*w*	+2·26	+10·86	−0 15·03	+1 34·0	21 30 24·48	−11 34 19·4
Berlin	16	12 30 14·0	*u*	+2·32	+10·7	+4 15·61	+1 42·5	21 25 32·56	−12 5 41·2
Clinton	16	11 6 43·5	*u*	+2·32	+10·67	+4 6·44	+0 45·4	21 25 23·54	−12 6 38·0
„	17	10 19 34·5	*q*	+2·32	+10·67	+3 54·31	+1 22·9	21 24 35 53	−12 11 48·3
„	18	10 17 35·1	*t*	+2·33	+10·71	+2 33·70	+2 5·8	21 23 45·99	−12 17 11·4
Berlin	20	11 12 55·0	*r*	+2·34	+10·8	+1 11·19	+2 15·1	21 22 18·63	−12 26 48·3
Leipzig	20	12 38 3·0	*r*	+2·34	+10·75	+1 8·52	+2 0·6	21 22 15·96	−12 27 3·8
„	21	12 12 55·0	*r*	+2·34	+10·76	+0 20·36	−8 13·8	21 21 27·86	−12 32 17·2

Ort	1871	Ortszeit	(*)	Reduction $d\alpha$	Reduction $d\delta$	(114) − ✳ $\Delta\alpha$	(114) − ✳ $\Delta\delta$	(114) app α	(114) app δ
Clinton	Aug. 22	$10^h38^m22^s4$	*s*	+2ˢ35	+10′77	−0ᵐ38ˢ95	+0′ 9″0	21ʰ20ᵐ31ˢ58	−12°38′32″2
„	22	10 38 51·0	*o*	+2·35	+10·69	+1 4·74	−0 4·5	21 20 31·60	−12 38 27·9
Leipzig	23	11 33 15·0	*o*	+2·35	+10·72	+0 27·24	−4 9·5	21 19 54·10	−12 42 32·9
Berlin	26	9 35 9·0	*n*	+2·36	+10·6	+2 48·47	−3 9·9	21 17 38·92	−12 57 50·9
Leipzig	26	12 7 26·0	*n*	+2·36	+10·54	+2 43·21	−3 39·7	21 17 33·68	−12 58 20·8
Lund	31	11 29 15·0	*m*	+2·36	+10·45	+0 10·87	+2 29·0	21 13 57·24	−13 23 11·0
„	Sept. 1	9 52 25·0	*m*	+2·36	+10·44	−0 27·08	−2 1·6	21 13 19·29	−13 27 41·7
Berlin	1	10 34 9·0	*m*	+2·36	+10·5	−0 28·29	−2 8·0	21 13 18·08	−13 27 48·0
Clinton	1	8 12 1·8	*l*	+2·36	+10.43	+0 10·84	+3 8·8	21 13 11·92	−13 28 32·2
„	2	8 19 31·3	*k*	+2·34	+10·35	+0 12·70	+1 59·6	21 12 32·02	−13 33 12·5
„	3	8 25 35·0	*k*	+2·35	+10·34	−0 26·68	−2 42·9	21 11 52·65	−13 37 55·1
Berlin	4	8 55 1·0	*g*	+2·35	+10·2	+2 25·13	+2 27·6	21 11 22·95	−13 41 28·4
Washington	4	8 57 16·0	*k*	+2·35	+10·33	−1 5·81	−7 22·0	21 11 13·52	−13 42 34·2
Clinton	4	9 38 43·8	*g*	+2·35	+10·17	+2 14·59	+1 14·0	21 11 12·41	−13 42 42·0
Washington	5	8 28 39·0	*j*	+2·35	+10·18	+0 25·23	+1 48·6	21 10 37·07	−13 47 2·9
Clinton	5	8 39 42·5	*j*	+2·35	+10·19	+0 25·08	+1 45·7	21 10 36·92	−13 47 5·8
Berlin	6	8 58 42·0	*j*	+2·34	+10·2	−0 2·62	−1 41·8	21 10 9·21	−13 50 33·3
„	7	10 41 39·0	*h*	+2·34	+10·1	+0 31·04	+4 33·4	21 9 31.07	−13 55 6·0
Leipzig	7	10 10 32·0	*h*	+2·34	+10·07	+0 30·27	+4 30·3	21 9 30·30	−13 55 9·1

Berlin	8	10h 38m 27·0	*h*	+2·33	+10·1	−0m 2·19	+0° 28' 9	21h	8m 57·12	−13° 59' 15·5
Leipzig	8	12 51 19·0	*h*	+2·33	+10·04	−0 6·22	−0 6·7	21	8 53·80	−13 59 46·2
Washington	8	8 41 53·0	*h*	+2·33	+10·04	−0 8·33	−0 27·2	21	8 51·69	−14 0 6·7
Berlin	9	10 37 8·0	*h*	+2·33	+10·0	−0 35·66	−3 54·1	21	8 24·86	−14 3 33·6
Washington	9	8 25 5·0	*i*	+2·33	+10·02	−0 55·00	+1 35·0	21	8 19·05	−14 4 10·9
Clinton	9	10 4 1·2	*i*	+2·33	+10·02	−0 57·02	+1 18·3	21	8 17·03	−14 4 27·6
Berlin	11	9 7 27·0	*e*	+2·30	+ 9·7	+2 33·26	+2 9·3	21	7 28·39	−14 11 30·8
„	12	8 35 18·0	*e*	+2.30	+ 9·7	+2 4·83	−1 40·0	21	6 54·96	−14 15 20·1
„	15	8 13 14·0	*f*	+2·30	+ 9·4	−0 37·88	−2 52·9	21	5 33·45	−14 26 29·3
Leipzig	16	11 11 22·0	*e*	+2·27	+ 9·48	+1 8·11	+4 34·3	21	5 6·88	−14 30 21·0
Clinton	18	9 26 58·6	*b*	+2·25	+ 9·31	+1 48·26	+0 23·1	21	4 18·73	−14 37 45·7
Lund ..... Octb.	8	8 7 24·0	*a*	+2·02	+ 8·13	+0 36·76	+3 56·5	21	1 55·87	−15 21 15·3
„	9	7 46 13·0	*a*	+2·01	+ 8·07	+0 43·58	+2 54·4	21	2 2·68	−15 22 17·4
Clinton	10	8 25 31·0	*a*	+1·99	+ 8·05	+0 10·34	+0 37·0	21	2 13·53	−15 23 33·8
Lund	11	7 25 0·0	*a*	+1·98	+ 7·96	+1 1·63	+1 0·9	21	2 20·70	−15 24 11·0
Clinton	12	8 11 52·5	*a*	+1·97	+ 7·97	−0 28·28	−0 6·2	21	2 34·96	−15 25 11·8
Lund	17	7 36 36·0	*d*	+1·90	+ 7·68	+0 20·20	+2 29·4	21	3 45·44	−15 27 14·6

B.

Ort	Berl. Zeit	Parallaxe in α	Parallaxe in δ	Beob. − Rech. $\alpha' - \alpha$	Beob. − Rech. $\delta' - \delta$
Clinton	Juli 24ᵈ87	+0ˢ09	+3″4	−1ˢ01	− 6″0
„	26·75	−0·06	+3·4	−0·66	− 3·5
„	28·75	−0·06	+3·4	−0·77	− 2·4
„	Aug. 7·71	−0·04	+3·5	−0·22	− 2·9
„	8·79	+0·05	+3·5	−0·22	− 0·4
„	9·71	−0·06	+3·5	−0·45	+ 0·4
„	10·66	−0·10	+3·5	−0·34	+ 1·2
Berlin	16·50	+0·03	+3·9	−0·21	− 2·1
Clinton	16·71	−0·04	+3·6	−0·11	+ 1·7
„	17·66	−0·07	+3·5	+0·03	+ 3·1
„	18·66	−0·07	+3·5	−0·21	+ 1·5
Berlin	20·42	−0·01	+3·9	+0·15	− 0·2
Leipzig	20·50	+0·05	+3·9	+0·04	+ 0·4
„	21·50	+0·04	+3·8	−0·03	+ 3·5
Clinton	22·66	−0·04	+3·6	+0·02	+ 1·8
„	22·66	−0·04	+3·6	+0·06	+ 6·2
Leipzig	23·46	+0·02	+3·8	+0·24	(+11·6)
Berlin	26·37	−0·06	+3·9	+0·06	+ 0·4
Leipzig	26·50	+0·06	+3·8	+0·17	+ 5·5
Lund	31·46	+0·04	+3·9	0·00	+ 0·9
„	Sept. 1·41	−0·03	+3·9	+0·03	− 2·9
Berlin	1·41	0·00	+3·9	+0·01	− 1·1
Clinton	1·58	−0·12	+3·5	−0·26	− 3·4
„	2·58	−0·11	+3·4	+0 12	+ 1·3
„	3·58	−0·10	+3·4	+0·04	− 0·8
Berlin	4·33	−0·06	+3·8	−0·01	− 0·6
Washington	4·62	−0·08	+3·3	+0·07	+ 2·1
Clinton	4·62	−0·03	+3·5	−0·07	+ 1·1
Washington	5·58	−0·10	+3·2	−0·01	− 2·0
Clinton	5·58	−0·08	+3·4	−0·02	− 3·6
Berlin	6·33	−0·05	+3·8	+0·05	− 6·7
„	7·42	+0·03	+3·8	−0·26	+ 1·1
Leipzig	7·46	+0·05	+3·7	−0·21	+ 3·8
Berlin	8·42	+0·03	+3·8	−0·19	+ 7·5
Leipzig	8·54	+0·12	+3·6	−0·27	+ 0·6
Washington	8·58	−0·07	+3·3	−0·06	− 1·1
Berlin	9·42	+0·03	+3·8	−0·05	+ 0·4

Ort	Berl. Zeit	Parallaxe in α	Parallaxe in δ	Beob.—Rech. $\alpha'-\alpha$	Beob.—Rech. $\delta'-\delta$
Washington	9·58	−0·08	+3·2	−0·32	+2·0
Clinton	9·62	+0·01	+3·5	−0·19	+1·6
Berlin	11·37	−0·03	+3·8	−0·53	−4·9
„	12·33	−0·05	+3·7	−0·15	−4·1
„	15·33	−0·05	+3·7	(−1·00)	−3·9
Leipzig	16·46	+0·08	+3·6	+0·07	+3·2
Clinton	18·62	+0·01	+3·4	+0·04	7·—2
Lund	Oct. 8·33	+0·08	+3·4	−0·03	−1·1
„	9·33	−0·02	+3·4	−0·13	+1 5
Clinton	10·58	+0·03	+3 0	+0·04	−0 8
Lund	11·29	−0·11	+3·4	+0·12	−0·6
Clinton	12·58	+0·03	+3·0	+0·35	−3·4
Lund	17·30	+0·09	+3·3	−0·08	−0·5

In der letzteren Zusammenstellung sind die Ephemeridenfehler in sechs durch Horizontalstriche abgetheilte Gruppen zusammengefasst; bildet man für jede Gruppe das Zeitmittel und zwar, was vollkommen genügend ist, abgerundet auf die dem genauen Zeitmittel zunächst liegende Mitternacht, und, als diesem Zeitmittel entsprechend das Mittel der Ephemeridenfehler, so hat man das folgende Fehlertableau:

		$\alpha'-\alpha$	$\delta'-\delta$
1871	Juli 26·5	−0·81	−3·9
	Aug. 9·5	−0·31	−0·4
	„ 21·5	+0·02	+1·7
	Sept. 5·5	−0·08	0·0
	„ 14·5	−0·11	+2·5
	Oct. 11·5	+0·04	−0·8;

es sind hiebei nur die beiden im Verzeichnisse *B* in Klammern angesetzten Grössen: Leipzig Aug. 23·46 $\delta'-\delta = +11'6$ und Berlin Sept. 15·33 $\alpha'-\alpha = -1'00$, als von den Nachbarwerthen zu stark abweichend ausgeschlossen worden.

Die diesen Fehlerepochen entsprechenden Angaben der früher mitgetheilten Ephemeride, corrigirt um die hier ermittelten Fehlerbeträge, geben unter Reduction auf ein fixes Äquinoctium, als welches hier vorläufig das mittlere Äquinoctium 1871·0

gewählt ist, nunmehr die folgenden, aus den sämmtlichen Beobachtungen der ersten Opposition des Planeten resultirenden Normalorte:

	Ephemeride + Correction.		Red. auf 1871·0		Normalort 1871·0	
	α	δ	in α	in δ	α	δ
1871 Juli 26·5	325°34'46"50	−10°19'17"4	−11"84	−4"1	325°34'34"66	−10°19'21"5
Aug. 9·5	322 50 40·65	−11 28 6·0	−13·94	−4·4	322 50 26·71	−11 28 10·4
„ 21·5	320 21 59·25	−12 32 15·2	−15·56	−4·4	320 21 43·69	−12 32 19·6
Sept. 5·5	317 40 4·20	−13 46 38·2	−17·41	−4·5	317 39 46·79	−13 46 37·7
„ 14·5	316 28 53·85	−14 23 18·2	−18·39	−4·5	316 28 35·46	−14 23 22·7
Oct. 11·5	315 35 39·45	−15 24 17·9	−21·18	−5·1	315 35 18·27	−15 24 23·0

II. Opposition (1872).

Auf Grund der bisher gewonnenen Resultate war zunächst eine Ephemeride für die Aufsuchung des Planeten während der Opposition des Jahres 1872 zu berechnen. Es würde genügt haben, für diesen Zweck die obigen Elemente zu benützen, da dieselben alle Beobachtungen recht gut dargestellt haben; ich habe indess aus vier äquidistanten Normalorten, die ich durch ein graphisches Verfahren aus dem obigen Fehlerverzeichnisse ermittelte, ein neues Elementensystem und erst mit diesem eine Ephemeride für die zweite Opposition abgeleitet.

Werden die Zeitepochen des obigen Fehlerverzeichnisses als Abscissen und die Fehler in jeder der beiden Coordinaten (Rectascension und Declination) als zu diesen Abscissen gehörige Ordinaten aufgefasst, so lässt sich der Zusammenhang zwischen der Zeit und den Fehlern in Rectascension und Declination graphisch leicht durch je eine Fehlercurve darstellen und diese Curve gibt dann ihrerseits für eine beliebige, innerhalb der obigen Epochen gelegene Zeit die zugehörigen Fehler, oder Ephemeridencorrectionen. Man findet durch dieses Verfahren:

		$\alpha'-\alpha$	$\delta'-\delta$	Ephemeride + Correct. α	Ephemeride + Correct. δ	Red. auf 1871·0 in α	Red. auf 1871·0 in δ
1871	Juli 27·5	−0·75	−3·2	325°24′ 1·35	−10°23′44·6	−12·00	−4·1
	Aug. 22·5	−0.10	+0·5	320 9 58·65	−12 37 33·6	−15·68	−4·4
	Sept. 17·5	+0·09	+1·4	316 10 45·90	−14 33 53·9	−18·71	−4·5
	Oct. 13·5	+0·04	+0·5	315 41 34·20	−15 25 40·7	−21·39	−5·2

somit die Normalorte:

		Mittl. Äquin. 1871·0 α	Mittl. Äquin. 1871·0 δ
1871	Juli 27·5	325°23′49·35	−10°23′48·7
	Aug. 22·5	320 9 42·97	−12 37 38·0
	Sept. 17·5	316 10 27·19	−14 33 58·4
	Oct. 13·5	315 41 12·81	−15 25 45·9,

und aus diesen die folgenden Elemente:

(114) Cassandra.

Epoche 1871 Juli 24·0 mittl. Äqu. 1871·0.

$$L = 311°49'25''63 \qquad i = 4°54'\ 8''12$$
$$M = 158\ 6\ 22·65 \qquad \varphi = 8\ 5\ 19·32$$
$$\pi = 153\ 43\ 2·98 \qquad \mu = 810''6619$$
$$\Omega = 164\ 24\ 10·29 \qquad \log a = 0·4274446.$$

Die Rückrechnung der diesem Systeme zu Grunde liegenden vier Normalorte zeigt in Retascension und Declination die Fehler:

$d\alpha$.....	—0'07	+1'15	+1'12	+0'01
$d\delta$.....	0·00	—2·3	—3·6	—1·2

und die Darstellung der sechs unabhängigen Normalorte gibt der obigen Reihenfolge nach:

$d\alpha$	—0'54	+1'13	+2'62	—1'06	—2'14	—0'07
$d\delta$	—0·5	—0·5	—0·7	—4·4	—2·3	—5·0

und zwar sind alle diese Differenzen im Sinne: „Beobachtung—Rechnung" angesetzt. Hiermit ist das Elementensystem genügend geprüft und kann der Vorausberechnung einer Ephemeride zu Grunde gelegt werden.

Für die Übertragung der Elemente auf das mittlere Äquinoctium 1872·0 findet man

$$\Delta\pi = +50'24$$
$$\Delta\Omega = +49\cdot39$$
$$\Delta i = -\ 0\cdot47$$

und aus den übertragenen Elementen die Relationen:

$$x = 9\cdot9998856 \sin(243°47'\ 8'50+v)$$
$$y = 9\cdot9763742 \sin(154\ 13\ 54\cdot26+v)$$
$$z = 9\cdot5077162 \sin(149\ 54\ 47\cdot15+v)$$

zur Berechnung der rechtwinkligen äquatorealen Coordinaten des Planeten. Ich gebe die hieraus resultirende Ephemeride, welche nirgends publicirt ist, sondern seinerzeit von mir einzelnen Beobachtern nur privatim mitgetheilt wurde, hier für den Zeitraum, für welchen thatsächlich Beobachtungen des Planeten vorliegen.

(114)

12h Berl. Zeit		app α	app δ	log ρ	Lichtzeit
1872 Sept.	30	3h 8m 5'90	+12° 0'58'74	0·29547	16'23'
Oct.	1	3 7 44·23	+11 56 59·50	0·29334	16 18
	2	3 7 21·05	+11 52 54·77	0·29124	16 14
	3	3 6 56·41	+11 48 44·67	0·28918	16 9
	4	3 6 30·33	+11 44 29·33	0·28716	16 5

12h Berl. Zeit		app α	app δ	log ρ	Lichtzeit
Oct.	5	3h 6m 2·82	+11°40' 8"94	0·28517	16m 0s
	6	3 5 33·91	+11 35 43·65	0·28328	15 56
	7	3 5 3·62	+11 31 13·65	0·28132	15 52
	8	3 4 31·97	+11 26 39·09	0·27946	15 48
	9	3 3 59·00	+11 22 0·17	0·27765	15 44
Oct.	10	3 3 24·73	+11 17 17·05	0·27588	15 40
	11	3 2 49·18	+11 12 29·93	0·27416	15 36
	12	3 2 12·38	+11 7 39·00	0·27249	15 32
	13	3 1 34·37	+11 2 44·50	0·27087	15 29
	14	3 0 55·18	+10 57 46·60	0·26930	15 26
	15	3 0 14·85	+10 52 45·49	0·26779	15 22
	16	2 59 33·41	+10 47 41·42	0·26633	15 19
	17	2 58 50·89	+10 42 34·62	0·26492	15 16
	18	2 58 7·33	+10 37 25·28	0·26357	15 14
	19	2 57 22·78	+10 32 13·68	0·26228	15 11
Oct.	20	2 56 37·28	+10 27 0·07	0·26105	15 9
	21	2 55 50·88	+10 21 44·72	0·25988	15 6
	22	2 55 3·62	+10 16 27·88	0·25878	15 4
	23	2 54 15·53	+10 11 9·86	0·25773	15 1
	24	2 53 26·68	+10 5 50·94	0·25675	14 59
	25	2 52 37·14	+10 0 31·44	0 25584	14 57
	26	2 51 46·93	+ 9 55 11·63	0·25499	14 55
	27	2 50 56·13	+ 9 49 51·87	0·25420	14 54
	28	2 50 4·78	+ 9 44 32·49	0·25349	14 52
	29	2 49 12·96	+ 9 39 13·81	0 25285	14 51
Oct.	30	2 48 20·72	+ 9 33 56·17	0·25227	14 50
	31	2 47 28·11	+ 9 28 39·92	0·25176	14 49
Nov.	1	2 46 35·21	+ 9 23 25·36	0·25133	14 48
	2	2 45 42·09	+ 9 18 12·88	0·25096	14 47
	3	2 44 48·81	+ 9 13 2·87	0·25067	14 47
	4	2 43 55·43	+ 9 7 55·65	0·25045	14 47
	5	2 43 2·02	+ 9 2 51·56	0·25029	14 46
	6	2 42 8·63	+ 8 57 50·96	0·25021	14 46
	7	2 41 15·34	+ 8 52 54·19	0·25020	14 46
	8	2 40 22·21	+ 8 48 1.55	0·25026	14 46

Nach dieser Ephemeride wurde der Planet am 1. October auf der Sternwarte in Hamburg aufgefunden und folgendermassen beobachtet:

	mittl. Ortszeit	app α	app δ
1872 Oct. 1	$13^h34^m29^s$	$3^h8^m54^s45$	$+12°0'10''3$

Der Zeit nach liegt diese Beobachtung von den sonstigen Beobachtungen dieser Opposition ziemlich weit entfernt; da dieselbe ausserdem von dem Beobachter wegen theilweiser Bewölkung für weniger sicher gehalten wird, so habe ich dieselbe der Bildung eines Normalortes nicht beigezogen.

Für die weiteren Beobachtungen hat man folgende für 1872·0 geltenden Vergleichssternpositionen:

(*)	Katalog:			Mittlerer Ort 1872·0 α	δ
a	Schjellerup 836 (= W 2^h 880)			$2^h51^m29^s73$	$+9°41'23''7$
b	Mittel aus Weisse 2^h 848	$2^h49^m35^s82$	$+9°36'25''7$		
	Rümker 1507	35·60	27·1		
	angenommen			2 49 35·71	+9 36 26·4
c	Pola'er Mikrometer-Vergleich			2 48 46·91	+9 30 6·2
d	Bonner Verz. +9°368			2 45 12·14	+9 21 29·7
e	Weisse 2^h 828			2 48 29·78	+9 17 38·8
f	Schjellerup 813 (= Weisse 2^h 805)			2 47 22·31	+9 14 58·5

Die für die Bildung eines Normalortes zu verwendenden Beobachtungen dieser Opposition sind nun die folgenden:

	1872	(*)	mittl. Ortszeit	Reduction $d\alpha$	$d\delta$	(114) − * $\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	(114) app α	app δ
Clinton	Oct. 29	*a*	$12^h59^m40^s$	+2'88	+16'4	−1m14'43	+0' 4'1	$2^h50^m18''18$	$+9°41'44''2$
„	„ 30	*b*	12 47 56	+2·88	+16·4	−0 12 42	−0 12·8	2 49 26.17	+9 36 30 0

Pola	Oct.	31	*b*	8ʰ 12ᵐ 44ˢ	+2·89	+16′4	−0ᵐ 41′76	−3′ 11′5	2ʰ 48ᵐ 56′79	+9° 33′ 29·9
„	Nov.	1	*c*	8 52 51	+2·90	+16·4	−0 47·17	−2 19·7	2 48 2·64	+9 28 2·9
„	„	2	*d*	10 5 48	+2·91	+16·5	+1 51·70	+0 51·4	2 47 6·75	+9 22 37·6
„	„	3	*e*	13 22 56	+2·92	+16·4	−2 36·72	−1 11·6	2 46 5·98	+9 16 43·6
Clinton	„	3	*f*	12 34 26	+2·93	+16·5	−1 40·65	+0 26·1	2 45 54·59	+9 15 41·1

Die Vergleichung dieser Beobachtungen mit der Ephemeride gibt

	1872		Parallaxe in α	Parallaxe in δ	Beob.—Ephem. α′—α	Beob.—Ephem. δ′—δ
Clinton	Oct.	29·7	+0ᵐ05	+2′7	+1ᵐ 19′74	+4′ 1″5
„	„	30·7	+0·04	+2·7	+1 19·65	+4 2·0
Pola	„	31·7	−0·20	+3·1	+1 19·50	+3 59·2
„	Nov.	1·3	−0·17	+3·1	+1 19·76	+3 56·3
„	„	2·4	−0·11	+2·9	+1 19·74	+3 59·3
„	„	3·6	+0·07	+2·9	+1 19·72	+3 57·8
Clinton	„	3·7	+0 05	+2·8	+1 19·71	+4 1·2

Man kann demnach als Ephemeriden-Correction für Nov. 1·5 annehmen:

$$\alpha' - \alpha = +1^{m}19^{s}69$$
$$\delta' - \delta = +3\ 59''5$$

und findet

Ephemeride + Corr. 1872 Nov. 1·5	41° 58′ 43″50	+9° 27′ 24″9
Reduction auf 1872·0	−23·80	−10·27
—einjährige Präcession	−48·29	−14·90

somit, vorläufig auf das mittlere Äquinoctium 1871·0 bezogen, folgenden aus den Beobachtungen der zweiten Opposition des Planeten resultirenden Normalort:

	$\alpha\,(1871{\cdot}0)$	$\delta\,(1871{\cdot}0)$
1872 Nov. 1·5....	41°57′31″31	+9°26′59″7,

III. Opposition (1874).

Für eine weitere Elementenverbesserung habe ich die bekannte Methode benützt, aus zwei Normalorten und aus entsprechenden Annahmen für die zugehörigen geocentrischen Distanzen des Planeten ein System von Bahnelementen abzuleiten, sowie die Fehler zu bestimmen, welche dieses System in allen übrigen Normalorten übrig lässt; dann aber die geocentrischen Distanzen so zu variiren, dass alle Normalorte möglichst genau dargestellt werden.

Für die Durchführung dieser Rechnung wurden die beiden Normalorte 1871 Juli 26·5 und 1872 Nov. 1·5, als der Zeit nach am weitesten von einander entfernt liegend, benützt, und die Annahme für die zugehörigen geocentrischen Distanzen den Berechnungen der oben gegebenen Ephemeriden entnommen. Es wurde also auf die Daten:

$$\left.\begin{array}{lll} 1871\ \text{Juli}\ 26{\cdot}5\ .. & 325°34′34″7 & -10°19′21″5 \\ & \log\rho_{\mathrm{I}} = 0{\cdot}314405 & \\ 1072\ \text{Nov.}\ 1{\cdot}5\ \ldots & 41°57′31″4 & +\ 9°26′59″7 \\ & \log\rho_{\mathrm{II}} = 0{\cdot}251328 & \end{array}\right\}\ \mathrm{I}$$

zunächst ein Elementensystem gegründet, das hier mit I bezeichnet werden soll, und mit diesem die Darstellung aller übrigen Normalorte gerechnet.

Die Fehler, welche in diesen Normalorten übrig bleiben, und von denen ein beliebiger ebenfalls mit I bezeichnet werden möge, können, wenn dieses überhaupt möglich sein soll, nur durch entsprechende Änderungen der Werthe von $\log\rho_{\mathrm{I}}$ und $\log\rho_{\mathrm{II}}$ zum Verschwinden gebracht werden, da von den obigen Rechnungsdaten nur diese beiden Grössen variabel sein können, indem die Beobachtungsdaten der Natur der Sache gemäss Constanten sind. Jede der geocentrischen Polarcoordinaten (α, δ) irgend eines

Normalortes kann also als Function der beiden Variablen $\log \rho_{\text{I}}$ und $\log \rho_{\text{II}}$ aufgefasst werden und die totale Änderung dieser Function für bestimmte Änderungen der Variablen wird die Summe der entsprechenden partiellen Änderungen sein. Durch diese Überlegung ist der Rechnungsvorgang vorgezeichnet.

Es mögen $\Delta \log \rho_{\text{I}}$ und $\Delta \log \rho_{\text{II}}$ bestimmte, willkürlich angenommene Änderungen oder Variationen von $\log \rho_{\text{I}}$, beziehungsweise von $\log \rho_{\text{II}}$ bezeichnen.

Wird ein Elementensystem II mit den Werthen

$$\left.\begin{array}{l} \log \rho_{\text{I}} + \Delta \log \rho_{\text{I}} \\ \log \rho_{\text{II}} \end{array}\right\} \quad \text{II}$$

der geocentrischen Distanzen gerechnet und mit diesem System wieder die Darstellung aller Normalorte, das heisst also ein Fehlersystem II ermittelt, so werden die Unterschiede der durch das System I bedingten Fehler gegen die entsprechenden Fehler des Systems II (im Sinne: II—I) die durch jene bestimmte Änderung $\Delta \log \rho_{\text{I}}$ der einen Variablen $\log \rho_{\text{I}}$ bewirkten partiellen Änderungen der geocentrischen Coordinaten (das heisst der Function) sein.

In analoger Weise werden die Unterschiede (III—I) in den Darstellungen der Normalorte durch das System I gegen ein mit den geocentrischen Distanzen

$$\begin{array}{l} \log \rho_{\text{I}} \\ \log \rho_{\text{II}} + \Delta \log \rho_{\text{II}} \end{array}$$

gerechnetes System III die partiellen Änderungen der geocentrischen Coordinaten in Bezug auf die Änderung $\Delta \log \rho_{\text{II}}$ der zweiten Variablen $\log \rho_{\text{II}}$ vorstellen.

Ist also, kurz zusammengefasst, I die Grösse des vom Systeme I in irgend einer Coordinate übrig gelassenen Fehlers, so ist (II—I) die partielle durch die Variation $\Delta \log \rho_{\text{I}}$, und (III—I) die partielle durch die Variation $\Delta \log \rho_{\text{II}}$ bewirkte Änderung dieses Fehlers; wenn daher x und y beziehungsweise aliquote Theile der Variationen $\Delta \log \rho_{\text{I}}$ und $\Delta \log \rho_{\text{II}}$ bezeichnen, so werden $(\text{II}—\text{I})x$ und $(\text{III}—\text{I})y$ die diesen aliquoten Theilen entsprechenden partiellen Fehleränderungen sein und die Summe

$$(\text{II}-\text{I})x+(\text{III}-\text{I})y$$

wird die entsprechende Totaländerung des Fehlers darstellen.

Sind die beliebigen Variationen $\Delta \log \rho_{\text{I}}$ und $\Delta \log \rho_{\text{II}}$ der Grösse der wegzuschaffenden Fehler entsprechend, genügend gross angenommen worden, so wird ein bestimmter aliquoter Theil x der Grösse $\Delta \log \rho_{\text{I}}$ in Verbindung mit einem bestimmten aliquoten Theil y der Grösse $\Delta \log \rho_{\text{II}}$ genügen, um die Fehler des Systems I wegzuschaffen, und zwar werden sich x und y aus zwei Gleichungen von der Form

$$\text{I}+(\text{II}-\text{I})x+(\text{III}-\text{I})y=0$$

bestimmen lassen, in welcher Gleichungsform eben nur die Bedingung ausgesprochen ist, dass die durch die Variationen x und y bedingte Totaländerung in der Darstellung irgend eines Normalortes dem vom Systeme I in diesem Normalorte übrig gelassenen Fehler dem absoluten Werthe nach gleich, aber dem Zeichen nach entgegengesetzt sein soll.

Da jede Rectascension und jede Declination eine solche Gleichung gibt, so würde bei absoluter Verlässlichkeit ein Normalort zur Bestimmung von x und y genügen; um also alle zur Verfügung stehenden Normalorte der Rechnung beizuziehen, ist die Bestimmung von x und y aus allen vorhandenen Gleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate vorzunehmen; ausserdem ist noch zu berücksichtigen, dass x und y aliquote Theile von $\Delta \log \rho_{\text{I}}$ und $\Delta \log \rho_{\text{II}}$ sind; man hat also $\Delta \log \rho_{\text{I}}$ als die Einheit für die Variation x, $\Delta \log \rho_{\text{II}}$ als Einheit für die Variation y anzusetzen und x und y in diesen Einheiten auszudrücken.

Für den hier vorliegenden Rechnungsfall wurde

$$\Delta \log \rho_{\text{I}} = \Delta \log \rho_{\text{II}} = +0{\cdot}005$$

angenommen, und damit fanden sich die folgenden mit I, II, III bezeichneten und auf den mittleren Äquator 1871·0 bezogenen Elementensysteme, für welche der zweite zur Elementenrechnung benützte Normalort, nämlich der Normalort 1872 Nov. 1·5 die gemeinsame Epoche bildet.

Elemente:	I	II	III	II—I	III—I
$\log \rho_I$	0·314405	0·319405	0·314405		
$\log \rho_{II}$	0·251328	0·251328	0·256328		
1872 Nov. 1·5 ..... M	263°31'24'2	266°43'38'2	261°59'39'7	+11534'0	—5504'5
π'	153 34 48·0	150 15 45·8	154 9 22·1	—11937·2	+2079·1
Ω'	4 7 17·8	4 5 52·6	4 9 33·9	— 58·2	+ 136·1
i'	18 46 11·7	18 45 36·1	18 45 29·9	— 35·6	— 41·8
φ	7 55 55·8	7 45 32·8	7 27 59·2	— 623·0	—1676·6
$\log \mu$	2·9077230	2·9024923	2 9030925	—52307	—46305
a	9·999884	9·999885	9·999882	+ 1	— 2
b	9·976396	9·976419	9 976428	+ 23	+ 32
c	9·507544	9·507323	9·507284	— 221	— 260
A'	243°21'36'3	240° 2'44'5	243°56' 9'3	—11931'8	+2073'0
B'	153 48 33·3	150 29 30·5	154 23 18·9	—11942·8	+2095·6
C'	149 27 25·1	146 9 53·2	149 59 48 2	—11851·9	+1943·1

In der voranstehenden Zusammenstellung sind jedem Elementensystem die Constanten a, b, c, A', B', C' zur Berechnung der rechtwinkligen Äquatorcoordinaten nach den Formeln

$$x = a \sin(A' + v)$$
$$y = b \sin(B' + v)$$
$$z = c \sin(C' + v)$$

beigegeben. Die mit II—I und III—I überschriebenen Columnen, welche erst später einmal Verwendung finden

geben die Differenzen der Systeme I, II, III gegeneinander und zwar für die Bogengrössen in Secunden, für die Zahlengrössen in Einheiten der letzten Stellen.

Diese drei Etementensysteme stellen nun die beiden zu Grunde liegenden Normalorte innerhalb der Unsicherheit der Rechnung vollständig dar, indem in den beiden Orten nur folgende Fehler im Sinne: „Beobachtung—Rechnung“ übrig bleiben.

	1871 Juli 26·5		1872 Nov. 1·5	
	$\alpha'-\alpha$	$\delta'-\delta$	$\alpha'-\alpha$	$\delta'-\delta$
I . . .	+0'9	+0'8	+0'2	+0'0
II . . .	—0·6	0·0	+0·4	—0·3
III . . .	0·0	—0·1	0·0	+0·1

Die Darstellung aller übrigen verfügbaren Normalorte: mit diesen drei Systemen dagegen gibt, ebenfalls im Sinne „Beobachtung—Rechnung“ nachstehendes Fehler-Tableau:

Normalort 1871:	Aug. 9·5	Aug. 21·5	Sept. 5·5	Sept. 14·5	Oct. 11·5
cos δ	9·99124	9·98952	9·98732	9·98616	9·98411
Rectascensionen:					
I	—17'2	— 27'0	— 45'5	— 52'4	— 70'4
II	—97·5	—172·8	—236·1	—248·8	—149·3
III	—79·6	—142·3	—218·1	—255·5	—343·0
II—I	—80·3	—145·8	—190·6	—196·4	— 78·9
III—I	—62·4	—115·3	—172·6	—203·1	—272·6
Declinationen:					
I	— 1'3	— 1'4	— 4'0	— 0'7	— 5'0
II	—43·5	— 77·2	—108·4	—114·2	—122·8
III	—13·4	— 21·7	— 31·0	— 31·3	— 42·5
II—I	—42·2	— 75·8	—104·4	—113·5	—117·8
III—I	—12·1	— 20·3	— 27·0	— 30·6	— 37·5

Da, um Alles homogen auszudrücken, jede der aus den Rectascensionen resultirenden Bedingungsgleichungen für die Ermittlung von x und y die Form

$$\text{I} \cos\delta + (\text{II}-\text{I}) \cos\delta . x + (\text{III}-\text{I}) \cos\delta . y = 0$$

und jede den auf einer Declination beruhenden Gleichungen die Form

$$\mathrm{I}+(\mathrm{II}-\mathrm{I})x+(\mathrm{III}-\mathrm{I})y=0$$

hat, so ist in der vorangehenden Zusammenstellung jedem Normalorte der zugehörige Werth von $\cos\delta$ (dabei δ die Declination des Normalortes) beigegeben, und das System der Bedingungsgleichungen ist somit, wenn alle Zahlengrössen logarithmisch angesetzt werden, das folgende:

Rectascensionen:

$$\begin{aligned}
1_n22677 &= 1\cdot89596\,x+1\cdot78642\,y\\
1_n42088 &= 2\cdot15328\,x+2\cdot05135\,y\\
1_n64533 &= 2\cdot26744\,x+2\cdot22486\,y\\
1_n70549 &= 2\cdot27930\,x+2\cdot29387\,y\\
1_n83168 &= 1\cdot88119\,x+2\cdot41964\,y
\end{aligned}$$

Declinationen:

$$\begin{aligned}
0_n11394 &= 1\cdot62531\,x+1\cdot08297\,y\\
0_n14613 &= 1\cdot87967\,x+1\cdot30700\,y\\
0_n60206 &= 2\cdot01870\,x+1\cdot43136\,y\\
9_n84510 &= 2\cdot05500\,x+1\cdot48572\,y\\
0_n73239 &= 2\cdot07115\,x+1\cdot57403\,y.
\end{aligned}$$

Aus diesem Systeme von Gleichungen, deren jede die Form

$$n=ax+by$$

hat, findet man, wenn man das System nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt

$$\begin{aligned}
[aa] &= +147879 & [bb] &= +156266\\
[ab] &= +122210 & [bn] &= -39649\\
[na] &= -29371
\end{aligned}$$

und mit diesen Werthen gibt die Auflösung der Gleichungen

$$\begin{aligned}
[aa]x+[ab]y &= [an]\\
[ab]x+[bb]y &= [bn]
\end{aligned}$$

die Werthe der Unbekannten x und y. Man findet

$$\begin{aligned}
\log x &= 8\cdot49548\\
\log y &= 9_n44436,
\end{aligned}$$

dabei log der Einheit für x und $y = 7{\cdot}69897$ (Einheit $= +0{\cdot}005$), man findet also, in dieser Einheit ausgedrückt, für x und y die Werthe

$$x = +0{\cdot}000156.\ y = -0{\cdot}001391,$$

um welche man die ursprünglichen Annahmen über $\log \rho_{\text{I}}$ und $\log \rho_{\text{II}}$ zu corrigiren hat, damit die aus den so corrigirten Werthen von $\log \rho_{\text{I}}$ und $\log \rho_{\text{II}}$ resultirenden Elemente alle Normalorte gleich gut darstellen.

Man hat demnach für die Berechnung dieser verbesserten Elemente anzunehmen

$$\log \rho_{\text{I}} = 0{\cdot}315561$$
$$\log \rho_{\text{II}} = 0{\cdot}249937$$

und diese Annahmen ergeben in Verbindung mit den beiden Normalorten 1871 Juli 26·5 und 1872 Nov. 1·5 folgendes auf den mittleren Äquator 1871·0 sich beziehende Elementensystem, welches mit IV bezeichnet werden möge:

IV

Epoche 1872 Nov. 1·5

$$M = 264^\circ\ 1'54''5$$
$$\pi' = 153\ 19\ 41{\cdot}5$$
$$\Omega' = 4\ 6\ 37{\cdot}3$$
$$i' = 18\ 46\ 22{\cdot}0$$
$$\varphi = 8\ 3\ 15{\cdot}6$$
$$\log \mu = 2{\cdot}9088223$$

Für die Darstellung der Normalorte mit diesen Elementen, welche Darstellung die Probe der soeben durchgeführten Elementenverbesserung bildet, findet man zunächst die Relationen

$$x = 9{\cdot}999885 \sin(243^\circ\ 6'36''8 + v)$$
$$y = 9{\cdot}976389 \sin(153\ 33\ 29{\cdot}8 + v)$$
$$z = 9{\cdot}507607 \sin(149\ 13\ 4{\cdot}2 + v)$$

und mit diesen, im Sinne: „Beobachtung—Rechnung“ folgende, in den einzelnen Normalorten noch übrig bleibende Fehler:

		Normalort—Rechnung	
		$\alpha' - \alpha$	$\delta' - \delta$
1871	Juli 26·5	$+0''9$	$+0''3$
	Aug. 9·5	$-0''3$	$+0.3$

		Normalort—Rechnung $\alpha'-\alpha$	$\delta'-\delta$
1871	Aug. 21·5	+0'1	+1'4
	Sept. 5·5	—2·0	+0·4
	14·5	—1·7	+3·9
	Oct. 11·5	+2·7	+2·6
1872	Nov. 1·5	—0·2	0·0.

Man sieht, dass alle Normalorte recht gut dargestellt werden, und es kann daher das so gewonnene Elementensystem ohne weiters der Vorausberechnung des Laufes des Planeten während der Opposition des Jahres 1874 zu Grunde gelegt werden.

Die Verwandlung der auf den Äquator 1871·0 bezüglichen Elemente π', Ω', i' in ekliptikale ergibt zunächst

$$\pi = 153^\circ\ 3'20'4$$
$$\Omega = 164\ 21\ 43\cdot9$$
$$i = 4\ 54\ 32\cdot6$$

und die Übertragung dieser auf die mittlere Ekliptik 1871·0 sich beziehenden Elemente auf das mittlere Äquinoctium 1874·0 führt zu den Correctionsgrössen:

$$\Delta\pi = +2'30'73$$
$$\Delta\Omega = +2\ 28\cdot15$$
$$\Delta i = -\ 1\cdot42;$$

demnach hat man zur Berechnung einer Ephemeride für die Opposition des Jahres 1874 folgende Daten:

IV.

(114) Cassandra.

Epoche 1372 Nov. 1·5
Mittlere Ekliptik 1874·0.

$$M = 264^\circ\ 1'54'5$$
$$\pi = 153\ 5\ 51\cdot1$$
$$\Omega = 164\ 24\ 12\cdot1$$
$$i = 4\ 54\ 31\cdot2$$
$$\varphi = 8\ 3\ 15\cdot6$$
$$\mu = 810''62916$$
$$\log a = 0\cdot4274562$$

$$x = 9{\cdot}999884 \sin(243^\circ\ 9'\ 7{\cdot}0 + v)$$
$$y = 9{\cdot}976390 \sin(153\ 35\ 55{\cdot}7 + v)$$
$$z = 9{\cdot}507580 \sin(149\ 16\ 10{\cdot}6 + v).$$

Die mit diesen Elementen von mir für das Berliner astronomische Jahrbuch gerechnete und ebendort und zwar im Jahrgange 1876 publicirte Ephemeride beginnt mit dem 1. März; es sind jedoch auf Grund einer etwas weiter ausgedehnten Ephemeride schon vor diesem Datum mehrere Beobachtungen des Planeten gemacht worden, und ich gebe hier demgemäss die Ephemeride für die Zeit vor dem 1. März, innerhalb welcher Beobachtungen vorliegen, so dass die Ephemeride des Berliner Jahrbuches die Fortsetzung der hier mitgetheilten bildet.

12^h Berl. Zeit	app α	app δ	log ρ	Lichtzeit
1874 Feb. 10	$12^h\ 1^m 54{\cdot}81^s$	$-0^\circ\ 6'\ 26{\cdot}6''$	0·16140	$12^m\ 2^s$
11	12 1 40·37	−0 2 9·8	0·15919	11 58
12	12 1 24·28	+0 2 19·4	0·15702	11 55
13	12 1 6·56	+0 7 0·6	0·15490	11 51
14	12 0 47·23	+0 11 53 9	0·15283	11 48
15	12 0 36·30	+0 16 59·0	0·15081	11 44
16	12 0 3·81	+0 22 15·7	0·14885	11 41
17	11 59 39·79	+0 27 43·6	0·14694	11 38
18	11 59 14·26	+0 33 22·6	0·14509	11 35
19	11 58 47·26	+0 39 12·3	0·14331	11 31
20	11 58 18·83	+0 45 12·4	0·14159	11 30
21	11 57 49·01	+0 51 22·4	0·13993	11 27
22	11 57 17·85	+0 57 42·1	0·13834	11 24
23	11 56 45·40	+1 4 11·0	0·13681	11 22
24	11 56 11·69	+1 10 48·8	0·13536	11 20
25	11 55 36·79	+1 17 35·0	0·13397	11 18
26	11 55 0·74	+1 24 29·1	0·13266	11 16
27	11 54 23·59	+1 31 30·8	0·13142	11 14
28	11 53 45·39	+1 38 39·6	0·13026	11 12
März 1	11 53 6·19	+1 45 55·0	0·12918	11 10

Die Beobachtungen, welche während dieser Opposition des Planeten gemacht wurden, theile ich hier in zwei Gruppen gesondert mit, deren erste die mikrometrischen, relativen Positionsbestimmungen (Refractorbeobachtungen) umfasst, während die Beobachtungen der zweiten Gruppe Meridiankreisbeobachtungen sind.

Relative Bestimmungen.

Ort	1874	Ortszeit	(114) − ✳ Δα	(114) − ✳ Δδ	(114) app α	(114) app δ	Parallaxe in α	Parallaxe in δ	Beob.—Ephem. α′—α	Beob.—Ephem. δ′—δ	(✳)
Bilk.....	Feb. 11	10ʰ 51ᵐ 37ˢ·1	−0ᵐ 36ˢ·15	− 2′ 42″·1	12ʰ 2ᵐ 23ˢ·72	−0° 6′ 8″·0	−0ˢ·23	+5″·2	+42″·55	−3′ 43″·4	*a*
Wien....	„ 13	10 33 5·1	+1 5·70	− 1 21·0	12 1 51·11	+0 2 50·5	−0·25	+4·9	+42·81	−3 43·2	*b*
Berlin...	„ 17	11 36 13·0	−1 17·22	+ 5 18·9	12 0 24·39	+0 23 22·3					*c*
„ ...	„ 19	12 44 4·0	+1 8.92	+ 5 55·5	11 59 31·40	+0 24 23·0					*d*
Clinton..	„ 28	13 37 39·0	+2 33·24	+ 2 33·6	11 54 20·42	+1 36 46·8					*e*
Lund....	März 12	11 36 2·0	+2 32·23	+ 2 53·9	11 45 55·69	+3 6 21·0	−0·05	+5·3	+48·64	−4 2·6	*f*
„	„ 15	10 47 58·0	+2 36·30	− 6 33·5	11 43 37·84	+3 29 48·8	−0·09	+5·3	+48·73	−4 2·1	*g*
Wien....	„ 23	9 24 49·8	+1 24·59	+ 3 34·4	11 37 34·31	+4 30 49·0			+48·73	−3 54·2	*h*
Berlin...	„ 28	9 58 17·0	+0 7·97	+ 1 55·9	11 33 59·54	+5 6 20·4	−0·08	+4·8	+47·83	−3 56·8	*i*
Lund....	Apr. 4	9 53 37·0	−1 2·13	+10 32.1	11 29 40·21	+5 20 2·6	−0·05	+4·9	+47·14	−3 41·1	*k*

Meridiankreis-Beobachtungen.

Berlin...	März 15	12ʰ 10ᵐ 3ˢ·0	11ʰ 43ᵐ 35ˢ·06	+3° 30′ 12″·6	+5″·0	+48″·67	−4 5′·4	
„ ...	„ 21	11 41 52·0	11 38 58·92	+4 16 33·9	+5·0	+48·61	−4 1·2	
„ ...	„ 23	11 32 32·0	11 37 29·60	+4 31 28·0	+4·9	+48·46	−3 57·9	
„ ...	„ 24	11 27 52·0	11 36 45·90	+4 38 43·4	+4·9	+48·51	−3 59·0	
Krems-münster	März 26	11 18 35·6	11 35 20·56	+4 52 59 9	+4·4	+48·52	−3 58·9	
	Apr. 3	10 42 2·1	11 30 13·47	+5 44 21·7	+4·2	+47·88	−3 54·7	

Mittlere Örter der Vergleichssterne für 1874·0:

		α	δ
a) Schjellerup N. 4386		12ʰ 2ᵐ59ˢ·10	−0° 3'20"·8
b) Mittel aus:	α (1874·0) δ (1874·0) Gew.		
Santini 140	12ʰ 0ᵐ44ˢ·65 +0°4'16"·8 1		
Lamont 3576	44 71 18·9 1		
Harv. Z. 4.6.7	44·41 13·8 1		
Paris Ann. XIV	44·54 17·9 1		
Mosk. „ 604	44·79 15·8 2		
Yarnall 5050	44·47 16·7 2		
	angenommen	12 0 44·60	+0 4 16·7
	α (1870·0) δ (1870·0)		
c) Astr. N. N. 2007, 102 :	12ʰ 1ᵐ28ˢ·43 +0°19'30"·0		
	28·48 28·4		
	12ʰ 1ᵐ28ˢ·45 +0°19'29"·2		
Einjährige Präcession	+3·071 −20·05	12 1 40·73	+0 18 9·0
d) Astr. N. N. 2007, 101 :	11ʰ 58ᵐ 9ˢ·29 +0°29'54"·0		
	9·25 53·0		
	11ʰ 58ᵐ 9ˢ·27 +0°29'53"·5		
Einjährige Präcession	+3·071 −20·05	11 58 21·55	+0 28 33·3
e) Mittel aus: W 11ʰ 868 und Lamont 3511		11 51 46 06	+1 34 20·1
f) Arg. Merid. 3° 2561		11 43 22·19	+3 3 34·6
g) Lamont 701		11 41 0·25	+3 26 29·9

h) Anschluss an Astr. N. :	1373	11ʰ37ᵐ31ˢ·59	+4°48'40"5			
	: 1691	31·76	40·5			
		11ʰ37ᵐ31ˢ·68	+4°48'40"5	11 36 8·38	+4 27 22·1	
		α (1870·0)	δ (1870·0)			
i) Astr. N. N. 2007, 96		11ʰ33ᵐ37ˢ·91	+5° 5'51"1			
		37·86	51·7			
		11ʰ33ᵐ37ˢ·88	+5° 5'51"4			
Einjährige Präcession		+ 3·085	−19·92	11 33 50·22	+5 4 31·7	
k) Lamont 643				11 30 44·99	+5 39 37·5	

Zu dem voranstehenden Verzeichnisse von Beobachtungen habe ich zu bemerken, dass mir die beiden ersten derselben, nämlich Bilk Feb. 11 und Wien Feb. 13 zuerst auf privatem Wege und zwar lange vor der Publication der übrigen Beobachtungen in den astronomischen Nachrichten bekannt wurden. Ich hatte desshalb, um ungesäumt eine nochmalige Verbesserung der Elemente auszuführen, diese beiden Beobachtungen zu einem Normalorte vereinigt und dieser Normalort wurde dann auch später ungeändert beibehalten.

Nichtsdestoweniger habe ich, um das auf den hier behandelten Planeten bezügliche Beobachtungsmateriale möglichst vollständig zusammenzutragen, auch die übrigen Beobachtungen dieser Opposition und zwar ganz in der Form, wie dieselben von den einzelnen Sternwarten publicirt wurden, hier angesetzt.

Vereinigt man also die beiden aus den Beobachtungen: Bilk 1774 Feb. 11 und Wien 1874 Feb. 13 sich ergebenden Ephemeriden-Correctionen in ein Mittel und lässt dieses für Feb. 12·5 gelten, so hat man für die Bildung eines Normalortes 1874 Feb. 12·5 folgende Daten, wenn man den Normalort vorläufig, wie alle übrigen auf das mittlere Aquinoctium 1871·0 bezieht:

Ephemeride, 1874 Feb. 12·5	12ʰ 1ᵐ 24ˢ·28	+0° 2' 19"·4
Ephemeriden-Correction	+42·68	−3 43·3
	180° 31' 44"·40	+0° 1' 23"·9
Red. auf 1874·0	+3·19	−1·31
— dreijährige Präcession	−2 18·20	−1 0·15

der auf das mittlere Äquinoctium 1871·0 bezügliche Normalort ist demnach:

1874 Feb. 12·5 . . . . . 180° 29' 29"·39 −0° 0' 25"·1.

IV. Opposition (1875).

Da der in der dritten Opposition auftretende Fehler der Elemente mit den bisher geschaffenen Hilfsmitteln auf ziemlich einfache Weise weggeschafft werden kann, so möge nun zunächst ein nochmaliger Fehlerausgleich vorgenommen werden, damit die endlich resultirenden, für die Berechnung des Laufes des Planeten während der vierten Opposition bestimmten Elemente sich an die Normalorte von drei Oppositionen gut anschliessen.

Man hat zu dem Zwecke nur den Normalort 1874 Feb. 12·5 der dritten Opposition mittelst der oben ermittelten Elementensysteme I, II und III darzustellen, um die Relationen zwischen der geocentrischen Darstellung dieses Normalortes und den angenommenen Variationen von $\log \rho_{\text{I}}$ und $\log \rho_{\text{II}}$ zu erhalten. Man findet so:

	Normalort—Rechnung	
	$\alpha' - \alpha$	$\delta' - \delta$
I	+ 5360"·5	−1837"·3
II	+10722·0	−3647·3
III	+22997·3	−7832·8
II—I	+ 5361·5	−1810·0
III—I	+17636·8	−5995·5.

so dass zu dem früher aufgestellten Systeme der Bedingungsgleichungen für x und y die beiden Gleichungen hinzutreten:

für den Rectascensionsfehler

$$+5360{\cdot}5 = -5361{\cdot}5\,x - 17636{\cdot}8\,y$$

für den Declinationsfehler

$$-1837{\cdot}3 = +1810{\cdot}0\,x + 5995{\cdot}5\,y,$$

indem $\cos\delta$, mit welcher Grösse die Rectascensionsgleichung noch durchzumultipliciren wäre, für diesen Normalort der Einheit gleich ist.

Wird nun das so mit Rücksicht auf den Normalort 1874 Feb. 12·5 vervollständigte Gleichungssystem (die beiden hier eben aufgestellten neuen Gleichungen wären logarithmisch anzusetzen) wieder nach der Methode der kleinsten Quadrate aufgelöst, so findet man zunächst

$$x = +0\cdot000346 \quad y = -0\cdot001625,$$

daher als Grundlage für die Berechnung neuer Elemente:

$$\log\rho_{\text{I}} = 0\cdot314751,\ \log\rho_{\text{II}} = 0\cdot249703$$

und mit diesen Werthen für die geocentrischen Distanzen des Planeten das folgende auf den mittleren Äquator 1871·0 bezügliche und mit V zu bezeichnende Elementensystem:

V

Epoche 1872 Nov. 1·5

$$\begin{aligned} M &= 264^\circ 12' 48''2 \\ \pi' &= 153\ 11\ 12\cdot2 \\ \Omega' &= 4\ 6\ 28\cdot1 \\ i' &= 18\ 46\ 22\cdot6 \\ \varphi &= 8\ 4\ 9\cdot6 \\ \log\mu &= 2\cdot9088434; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 9\cdot999884 \sin(242^\circ 58'\ 8''0 + v) \\ y &= 9\cdot976388 \sin(153\ 25\ \ 0\cdot0 + v) \\ z &= 9\cdot507611 \sin(149\ \ 4\ 44\cdot1 + v). \end{aligned}$$

Da die Fehler $\alpha' - \alpha = +5360''5$, $\delta' - \delta = -1837''3$, welche das System I in dem Normalorte 1874 Feb. 12·5 übrig lässt, so beträchtlich sind, so lässt sich nicht erwarten, dass dieser Normalort nach einem einmaligen Ausgleiche vollkommen dargestellt werde. In der That gibt die Rückrechnung aller Normalorte mit dem Systeme V noch folgende unausgeglichene Fehler:

		Normalort—Rechnung	
		$\alpha'-\alpha$	$\delta'-\delta$
1871	Juli 26·5	+ 0'2	+ 0'2
	Aug. 9·5	— 1·8	— 0·7
	„ 21·5	— 1·3	— 0·7
	Sept. 5·5	— 2·7	— 2·5
	„ 14·5	— 1·0	+ 0·9
	Oct. 11·5	+ 9·0	+ 0·1
1872	Nov. 1·5	— 0·7	— 0·1
1874	Feb. 12·5	+18·7	—10·1.

Strenge genommen müsste nun eine nochmalige Ausgleichung dieses Fehlersystemes V mit den obigen Coëfficienten von x und y nach dem Schema:

in Rectascension: $V\cos\delta+(II-I)\cos\delta.x+(III-I)\cos\delta.y=0$
in Declination: $V+(II-I)x+(III-I)y=0$

vorgenommen werden, um eine vollständige Darstellung der Normalorte zu erzielen. Ich habe mich aber, da ohnehin nun mehr sehr kleine Correctionen in $\log\rho_I$ und $\log\rho_{II}$ zu erwarten sind, begnügt, diese Correctionen aus zwei einzelnen Gleichungen des vollständigen Systems, welches in Verwendung hätte kommen sollen, zu bestimmen und hiefür die gut dargestellte Rectascension des Normalortes 1871 Sept. 14·5 und die am fehlerhaftesten dargestellte Rectascension von 1874 Feb. 12·5 gewählt, so dass die beiden Gleichungen

für Rectascension: 1871 Sept. 14·5

$$-1\cdot0=+196\cdot4x+203\cdot1y,$$

für Rectascension 1874 Feb. 12·5

$$+18\cdot7=-5361\cdot4x-17636\cdot89y$$

allein in Betracht kommen. Es ist dieses nicht ganz strenge Verfahren im vorliegenden Falle wohl auch durch den Umstand zu rechtfertigen, dass die hier zu ermittelnden Elemente eben nur die Grundlage und die Ausgangswerthe für eine strenge und systematische Verbesserung derselben mit Rücksicht auf Störungen, von welchen bis jetzt ganz abgesehen wurde, bilden sollen.

Die Auflösung der obigen beiden Gleichungen nun gibt

$$\log x = 7{,}76543$$
$$\log y = 6{\cdot}85188$$

oder in Einheiten der sechsten Decimale von $\log \rho_{\text{I}}$ und $\log \rho_{\text{II}}$ wäre $x = -29$, $y = +4$.

Bei so geringen Änderungen nun wird es nicht mehr nöthig sein, das neue Elementensystem aus den um diese Correctionsgrössen verbesserten Werthen von $\log \rho_{\text{I}}$ und $\log \rho_{\text{II}}$ direct in der Art abzuleiten, wie in allen bisherigen Fällen, sondern es wird ein Interpolationsverfahren genügen, um die neuen Elemente aus den partiellen, von den Variationen $\Delta \log \rho_{\text{I}}$ und $\Delta \log \rho_{\text{II}}$ abhängigen Elementenänderungen und den hier gefundenen Werthen von x und y abzuleiten. Jene partiellen Änderungen der Elemente, für die Änderungseinheit $\Delta \log \rho_{\text{I}} = \Delta \log \rho_{\text{II}}$ geltend, sind oben dem Grössenschema der Elementensysteme I, II und III (p. 299) unter den Bezeichnungen II—I und III—I beigefügt und zwar für die in Gradmaass gegebenen Grössen in Bogensecunden, für $\log \mu$ in Einheiten der siebenten, dann für die Äquatorconstanten a, b, c in Einheiten der sechsten Decimale angesetzt.

Den Änderungen x und y in den Werthen von $\log \rho_{\text{I}}$ und $\log \rho_{\text{II}}$ werden Änderungen $(\text{II}-\text{I})x$ und $(\text{III}-\text{I})y$ in den Elementen entsprechen, da in dem vorliegenden Falle wegen der Kleinheit von x und y der Zusammenhang zwischen den beiden Werthsystemen jedenfalls ein linearer ist und da x und y in eben diesem Falle Änderungen von $\log \rho_{\text{I}}$ und $\log \rho_{\text{II}}$ des Systems V sind, so werden die daraus resultirenden Elementenänderungen sich ebenfalls auf das System V beziehen, das heisst das den corrigirten Annahmen von $\log \rho_{\text{I}}$ und $\log \rho_{\text{II}}$ entsprechende Elementensystem wird, wenn man dasselbe mit VI bezeichnet, die Werthe

$$\text{VI} = \text{V} + (\text{II}-\text{I})x + (\text{III}-\text{I})y$$

haben. Die in dieser Art durchgeführte Elementenverbesserung ist demnach bei Verbindung der in der obigen Zusammenstellung enthaltenen Zahlen mit den hier gefundenen Werthen $\log x = 7{,}76534$, $\log y = 6{\cdot}85188$ ihrem ganzen Umfange nach durch folgende Zahlen gegeben:

	M	π'	Ω'	i'	φ	$\log\mu$
log (II—I)	4·06198	4_n07689	1_n93044	1_n55145	2_n79449	4_n71856
log (III—I)	3_n74072	3·31785	2·13386	1_n62118	3_n22443	4_n66562
(II—I) x	−67′21	+69′54	+0′497	+0′207	+3′63	+305
(III—I) y	− 3·91	+ 1·48	+0·097	−0·030	−1·19	− 33
Correct. d. Elem. V	−71·12	+71·02	+0·59	+0·18	+2·44	+272

Demgemäss hat man folgendes auf den mittleren Äquator 1871·0 bezügliche neue Elementensystem:

VI.

Epoche 1872 Nov. 1·5.

$$M = 264°\,11'\,37'1$$
$$\pi' = 153\;\;12\;\;23\cdot1$$
$$\Omega' = \;\;4\;\;\;6\;\;28\cdot7$$
$$i' = \;18\;\;46\;\;22\cdot8$$
$$\varphi = \;\;8\;\;\;4\;\;12\cdot0$$
$$\log\mu = 2\cdot9088706$$

$$x = 9\cdot999885\sin(242°59'18'9+v)$$
$$y = 9\cdot976387\sin(153\;\;26\;\;11\cdot0+v)$$
$$z = 9\cdot507612\sin(149\;\;\;5\;\;54\cdot4+v),$$

mit welchem man im Sinne: „Beobachtung—Rechnung“ nachstehende Darstellung aller Normalorte erhält:

Normalort		Norm.—Rech. $\alpha'-\alpha$	$\delta'-\delta$
1871	Juli 26·5	−1′7	−0′2
	Aug. 9·5	−2·6	−0·6
	„ 21·5	−1·8	−0·2
	Sept. 5·5	−3·2	−2·1
	„ 14·5	−1·5	+0·5
	Oct. 11·5	+9·3	+2·6
1872	Nov. 1·5	−0·5	−0·1
1874	Feb. 12·5	−1·1	−3·4.

Abgesehen von dem Normalorte 1871 Oct. 11·5 ist die Darstellung eine ganz befriedigende; aber auch die minder gute Darstellung dieses Normalortes ist nicht durch die Methode bedingt, sondern die Folge eines im Verlaufe der vorangehenden Rechnungen begangenen Abschreibfehlers, welcher, wie hier, um den thatsächlichen Verhältnissen Rechnung zu tragen, bemerkt werden muss, erst bei der Schlusszusammenstellung aller Resultate der vorliegenden Arbeit aufgefunden wurde. Für die Folge ist diese an sich kleine Ungenauigkeit ohne jeden Belang, da die eben ermittelten Elemente eben nur einen provisorischen Charakter haben, und für die erste Berechnung der Störungen, sowie zur Bildung der weiteren Normalorte eine mehr als genügende Genauigkeit besitzen.

Es sollen demnach die eben gefundenen Elemente die Ausgangswerthe für alle späteren Rechnungen bilden; zunächst jedoch ist mit denselben eine Ephemeride für die vierte Opposition (1875) des Planeten abzuleiten.

Die Übertragung der Elemente π', Ω', i' auf die mittlere Ekliptik 1871·0 gibt zunächst

$$\left.\begin{aligned} \pi &= 152^\circ 56' \ 2''5 \\ \Omega &= 164 \ 22 \ 11\cdot3 \\ i &= \ 4 \ 54 \ 31\cdot0 \end{aligned}\right\} \text{ mittl. Ekliptik } 1871\cdot0$$

und damit findet man für

	1870·0	1880·0
π	...152°55'12''30	153° 3'34''69
Ω	...164 21 21·90	164 29 35·82
i	.... 4 54 31·40	4 54 26·70,

von welchen Angaben vorläufig nur die für das mittlere Aquinoctium 1880·0 geltenden Verwendung finden; überträgt man endlich noch die mittlere Anomalie auf die Epoche 1874 Nov. 16·0, und sieht die Elemente zum Zwecke der später folgenden Störungsberechnung als für diese Epoche osculirend an, so hat man folgendes System:

(114) Cassandra.

Epoche und Oscnlation 1874 Nov. 16·0.
Mittlere Ekliptik 1880·0.

$$
\begin{aligned}
L &= 224°54'52''38 \\
M &= 71\ 51\ 17\cdot69 \\
\pi &= 153\ 3\ 34\cdot69 \\
\Omega &= 164\ 29\ 35\cdot82 \\
i &= 4\ 54\ 26\cdot70 \\
\varphi &= 8\ 4\ 12\cdot00 \\
\mu &= 810''71944 \\
\log a &= 0\cdot4274240,
\end{aligned}
$$

und damit für die Ephemeridenrechnung die nachstehenden, ebenfalls auf das mittlere Äquinoctium 1880·0 sich beziehenden Relationen:

$$
\begin{aligned}
x &= 9\cdot9998863 \sin(243°\ 6'49''51 + v) \\
y &= 9\cdot9763946 \sin(153\ 33\ 28\cdot58 + v) \\
z &= 9\cdot5075328 \sin(149\ 15\ 13\cdot70 + v).
\end{aligned}
$$

Nach diesen Angaben hat man folgende Ephemeride für die Opposition des Jahres 1875 (Circ. Nr. 26):

(114)

12h Berl. Zeit	app α	app δ	log ρ	Lichtzeit
1875 Juni 24	19h 40m 54'06	−15° 8'18''2	0·28779	16m 6s
25	19 40 7·47	−15 10 9·5	0·28694	16 4
26	19 39 20.02	−15 12 5·3	0·28614	16 3
27	19 38 31·76	−15 14 5·5	0·28540	16 1
28	19 37 42·72	−15 16 9·9	0·28472	16 0
29	19 36 52·96	−15 18 18·4	0·28409	15 58
30	19 36 2·52	−15 20 31·0	0·28352	15 57
Juli 1	19 35 11·46	−15 22 47·6	0·28301	15 55
2	19 34 19·83	−15 25 7·9	0·28257	15 54
3	19 33 27·68	−15 27 31·7	0·28218	15 53

12h Berl. Zeit		(114) app α	(114) app δ	log ρ	Lichtzeit
1875 Juli	4	19h 32m 35·08	−15° 29′ 59″·1	0·28186	15m 53s
	5	19 31 42·07	−15 32 29·9	0·28159	15 52
	6	19 30 48·72	−15 35 3·8	0·28139	15 52
	7	19 29 55·08	−15 37 40·7	0·28126	15 51
	8	19 29 1·22	−15 40 20·5	0·28118	15 51
	9	19 28 7·17	−15 43 3·0	0·28117	15 51
	10	19 27 13·01	−15 45 48·1	0·28122	15 51
	11	19 26 18·78	−15 48 35·6	0·28134	15 52
	12	19 25 24·55	−15 51 25·4	0·28152	15 52
	13	19 24 30·38	−15 54 17·2	0·28176	15 53
	14	19 23 36·31	−15 57 11·0	0·28206	15 53
	15	19 22 42·39	−16 0 6·6	0·28243	15 54
	16	19 21 48·70	−16 3 3·9	0·28286	15 55
	17	19 20 55·27	−16 6 2·6	0·28335	15 56
	18	19 20 2·16	−16 9 2·7	0·28391	15 57
	19	19 19 9·42	−16 12 4·0	0·28452	15 59
	20	19 18 17·11	−16 15 6·4	0·28520	16 0
	21	19 17 25·28	−16 18 9·8	0·28593	16 2
	22	19 16 33·97	−16 21 14·0	0·28673	16 3
	23	19 15 43·23	−16 24 19·0	0·28759	16 5
	24	19 14 53·11	−16 27 24·5	0·28850	16 7
	25	19 14 3·67	−16 30 30·5	0·28947	16 9
	26	19 13 14·96	−16 33 36·9	0·29050	16 11
	27	19 12 27·03	−16 36 43·5	0·29159	16 14
	28	19 11 39·90	−16 39 50·2	0·29273	16 16
	29	19 10 53·64	−16 42 56·9	0·29392	16 19
	30	19 10 8·29	−16 46 3·5	0·29517	16 22
	21	19 9 23·90	−16 49 9·9	0·29647	16 25

Nach dieser Ephemeride sind nachstehende Beobachtungen des Planeten angestellt worden.

Relative Bestimmungen.

Ort	1875	Ortszeit	(114) − ✳ Δα	(114) − ✳ Δδ	(114) app α	(114) app δ	Parallaxe in α	Parallaxe in δ	Beob. − Ephem. α′−α	Beob. − Ephem. δ′−δ	(*)
Leipzig	Juni 29	13ʰ 8ᵐ18ˢ	−1ᵐ 3′76	+6′32″1	19ʰ37ᵐ 6′62	−15°18′ 3″3			+15′62	+24″5	*a*
„	Juli 1	13 19 48	−2 46·05	+2 3·7	19 35 24·36	−15 22 31·5			+15·34	+26·9	*a*
Berlin	„ 5	13 45 40	−0 54·80	−5 14·3	19 31 54·44	−15 32 19·2	+0′06	+4″8	+15·75	+25·0	*b*
Leipzig	„ 6	11 50 50	−1 44·49	−7 37·5	19 31 4·82	−15 34 39·6			+15·29	+26·1	*c*
Berlin	„ 6	13 16 40	−1 47·11	−7 47·0	19 31 2·01	−15 34 52·1	+0·04	+4·3	+15·59	+22·6	*b*
Leipzig	„ 7	12 5 5	−2 56·49	−5 12·6	19 30 9·90	−15 37 18·7			+14·94	+26·6	*d*
Berlin	„ 7	12 55 8	+1 45·76	+3 6·2	19 30 8·95	−15 37 23·8	+0·02	+4·3	+15·36	+25·5	*e*

Meridiankreis-Beobachtungen:

Paris	Juli 26	10ʰ56ᵐ39ˢ	19ʰ13ᵐ31ˢ34	−16°33′16″0	0·00	+4·1
„	„ 27	10 51 56	19 12 43·76	−16 36 24·1	0·00	+4·1
„	„ 29	10 42 31	19 11 10·14	−16 42 32·1	0·00	+4·1
„	„ 31	10 33 9	19 9 40·31	−16 48 48·2	0·00	+4·1

Mittlere Örter der Vergleichssterne für 1875·0:

a) Argel. Öltz. S. Z. 19929 ..... 19ʰ38ᵐ 7′52 −15°24′33″9

	α (1880·0)	δ (1880·0)
b) Berliner Merid. Kr. Beob.	19ʰ33ᵐ3′38	−15°26′23″1
	8·38	23·6
	19ʰ33ᵐ3′38	−15°26′28″3
Jährliche Präcession	+3·410	+7·92 ... .. 19 32 46·28 −15 27 2·9

c) Argel. Öltz. 8. Z. 19841 (identisch mit *b*)			19 32 46·32	−15 27 0·8	
d) angeschlossen an *c*			19 33 3·39	−15 32 4·9	
	α (1880·0)	δ (1880·0)			
e) Berliner Merid. Kr. Beob.	19ʰ 28ᵐ 37ˢ·18	−15° 39′ 51″·5			
	37·37	50·8			
	19ʰ 28ᵐ 37ˢ·27	−15° 39′ 51″·1			
Jährliche Präcession	+3·418	+7·56	19 28 20·18	−15 40 28·9	

Von diesen Beobachtungen habe ich die Pariser Meridiankreis-Beobachtungen, welche mir zuerst bekannt wurden, zu einem Normalorte vereinigt; die diesen Beobachtungen entsprechenden Ephemeridencorrectionen sind:

	Beob.—Ephem.	
	$\alpha'-\alpha$	$\delta'-\delta$
Juli 26·5	+15ˢ·19	+20″·4
27·5	+15·40	+18·5
29·5	+14·90	+22·5
31·5	+14·59	+18·1,

so dass man für Juli 28·5 die Correctionen $\alpha'-\alpha$ + +15ˢ·02, $\delta'-\delta$ = +19″·9 annehmen kann; demgemäss wird

Ephemeride + Corr.	287° 58′ 43″·80	−16° 39′ 30″·30
Reduct. auf 1880·0	+3 50 73	+36·01

so dass aus den Beobachtungen des Jahres 1875 folgender, auf das mittlere Äquinoctium von 1880·0 bezüglicher Normalort resultirt:

	$\alpha(1880\cdot0)$	$\delta(1880\cdot0)$
1875 Juli 28·5.....	288°2'34'53	−16°38'54'29.

V. Opposition (1876).

Die Beobachtungen des Planeten in dieser und in den beiden folgenden Oppositionen (1878 und 1879), welche der vorliegenden Bahnbestimmung noch mit zur Grundlage dienen, sind sehr wenig zahlreich, indem meines Wissens für jede dieser drei Oppositionen nur je zwei Beobachtungen vorliegen, die zu je einem Normalorte vereinigt wurden.

Von diesen Normalorten soll der aus der Opposition des Jahres 1876 resultirende gleich bei der ersten, unter Berücksichtigung der Bahnstörungen durchzuführenden Elementenverbesserung mit in Verwendung kommen, weshalb dieser Normalort noch jetzt, vor Beginn der Störungsrechnung abgeleitet werden möge, wiewohl zur Ermittlung desselben ein durch die Störungen verändertes Elementensystem verwendet wurde.

Die beiden hiebei in Betracht kommenden Beobachtungen sind folgende:

Ort	Datum	Ortszeit	(114) − ✱ $\Delta\alpha$	(114) − ✱ $\Delta\delta$	(114) app α	(114) app δ	(*)
Pola.....	1876 Oct. 7	9ʰ23ᵐ16ˢ	−3ᵐ53ˢ·80	−1'41"2	0ʰ32ᵐ31ˢ·60	+0° 2'10"0	a
	„ 9	10 26 47	0 45·41	+3 30·3	0 30 54·48	+0 10 43·9	b

Mittlere Örter der Vergleichssterne für 1876·0

	α (1876·0)	Präc.	δ (1876·0)	Präc.
a) Weisse 9ʰ 609, Astr. N. 69, 67; Gött. C. 130/131.....	0ʰ 36ᵐ 21ˢ·69	+3ˢ·71	+0° 3′ 25″·6	+25″·6
b) Gött. C. 108/109	0 31 36·11	+3·78	−0 14 39·7	+25·5.

Da sich diese beiden Beobachtungen zu einem Normalorte 1876 Oct. 8·5 werden zusammenfassen lassen, so entnehme ich anticipando der später in der zweiten Abtheilung gegebenen Tafel der Elementenstörungen als die mit dem obigen letzten Elementensysteme gerechneten und für die Epoche 1876 Oct. 8·5 geltenden Störungswerthe die Grössen:

$$\Delta L = +2'\,16''71$$
$$\Delta \pi = -6\ 24{\cdot}55$$
$$\Delta \Omega = -\ 10{\cdot}27$$
$$\Delta i = -\ 1{\cdot}74$$
$$\Delta \varphi = -1\ 24{\cdot}84$$
$$\Delta \mu = -0''1285$$

und rechne eine Ephemeride mit den um diese Störungsbeträge veränderten und auf die Epoche 1876 Oct. 8·5 übertragenen Elementen. Demgemäss ist das dieser Ephemeride zu Grunde liegende System das folgende:

(114) Cassandra.

Epoche und Osculation 1876 Oct. 8·5.
Mittlere Ekliptik 1880·0.

$$
\begin{aligned}
L &= 20°54'12''30\\
M &= 227\ 57\ 2\cdot16\\
\pi &= 152\ 57\ 10\cdot14\\
\Omega &= 164\ 29\ 25\cdot55\\
i &= 4\ 54\ 24\cdot96\\
\varphi &= 8\ 2\ 47\cdot16\\
\mu &= 810''59094\\
\log a &= 2\cdot9088017
\end{aligned}
$$

Aus diesem Elementensysteme resultiren zunächst die ebenfalls auf das mittlere Äquinoctium 1880·0 bezüglichen Relationen

$$
\begin{aligned}
x &= 9\cdot999886 \sin(243°\ 0'25''0+v)\\
y &= 9\cdot976393 \sin(153\ 27\ 4\cdot2+v)\\
z &= 9\cdot507545 \sin(149\ 8\ 48\cdot5+v)
\end{aligned}
$$

und mit diesen Relationen erhält man dann die nachstehende kurze Ephemeride:

12ʰ Berl. Zeit	app α	Diff.	app δ	Diff.	log ρ	Lichtzeit
1876 Oct. 6	8°17'29''0		+0° 7'32''73		0·29227	16ᵐ16ˢ
7	8 5 31·3	−11'57''7	+0 1 12·00	−6'20''73	0·29252	16 16
8	7 53 38·3	−11 53·0	−0 5 5·34	−6 17·34	0·29282	16 17
9	7 41 48·9	−11 49·4	−0 11 18·85	−6 13·51	0·29320	16 18.

Der Vergleich dieser Ephemeride mit den oben mitgetheilten zwei Beobachtungen führt zu den Resultaten:

	Parallaxe in α	Parallaxe in δ	Beob.—Ephem. $\alpha'-\alpha$	Beob.—Ephem. $\delta'-\delta$
Oct. 7·5	−1''62	+3''16	+54''20	+15''12
„ 9·5	−0·68	+3·17	+52·87	+ 9·40,

so dass man für Oct. 8·5 die Ephemeridenfehler: $\alpha'-\alpha = +53''53$, $\delta'-\delta = +10''76$ annehmen kann, wodurch man erhält:

Ephem. + Corr. Oct. 8·5	7°54'31'83	—0°4'54'58
Reduct. auf 1890·0	+ 2 26·34	+1 1·80.

Der aus der Opposition des Jahres 1876 resultirende, auf das mittlere Äquinoctium 1880·0 bezogene Normalort ist daher:

	$\alpha(1880\cdot0)$	$\delta(1880\cdot0)$
1876 Oct. 8·5....	7°56'58'17	—0°3'52'78.

Hiemit ist die vorliegende Arbeit am Schlusse der vorbereitenden Rechnungen angelangt, und es kann nun an eine mehr systematische Verbesserung der Bahnelemente des Planeten unter Berücksichtigung der störenden Einflüsse der grossen Planeten geschritten werden, soweit solche Einflüsse für den hier beabsichtigten Zweck in Betracht kommen können. In letzterer Hinsicht wird es vollständig genügen, die von Jupiter und Saturn herrührenden Störungen in Rechnung zu ziehen und es bilden die Berechnung dieser Störungen, sowie die auf diese Störungen basirte Bahnverbesserung den Inhalt der nächsten Abtheilung der vorliegenden Abhandlung.

Von den sechs Normalorten der ersten Opposition werde ich nur die beiden der Zeit nach von einander am weitesten abstehenden, nämlich die Normalorte 1871 Juli 16·5 und 1871 Oct. 11·5 für die weiteren Rechnungen benützen und dieselben, sowie die beiden anderen vor der Epoche 1875·0 liegenden Normalorte (der zweiten und dritten Opposition des Planeten entsprechend) auf das mittlere Äquinoctium 1870·0, dagegen die beiden nach 1875·0 fallenden Normalort (vierte und fünfte Opposition) auf das mittlere Äquinoctium 1880·0 beziehen.

Demgemäss wird man, wenn alle Resultate der bisherigen Rechnungen in der Form, wie sie in der Folge gebraucht werden sollen, nochmals zusammengestellt werden, für die Berechnung der Störungen die Elemente:

(114) **Cassandra.**

Epoche und Osculation 1874 Nov. 16·0.

	Mittlere Ekliptik 1870·0	Mittlere Ekliptik 1880·0
L_0 =	224°46'29'99	224°54'52'38
M_0 =	71 51 17·69	71 51 17·69

	Mittlere Ekliptik 1870·0	Mittlere Ekliptik 1880.0
π_0	152°55'12'30	153° 3'34'69
Ω_0	164 21 21·90	164 29 35·82
i_0	4 54 31·40	4 54 26·70

$$\varphi_0 = 8°\ 4'12'00$$
$$\mu_0 = 810'71944$$
$$\log a_0 = 0{\cdot}4274240$$

und für die Verbesserung der Elemente mit Berücksichtigung der Störungen die folgenden Normalorte haben:

Mittleres Äquinoctium 1870·0.

	α	δ	X	Y	Z
I. 1871 Juli 26·5	325°33'46'53	−10°19'38'01	−0·5594605	+0·7773296	+0·3372855
II. 1871 Oct. 11·5	315 34 28·34	−15 24 37·30	−0·9478297	−0·2854326	−0·1238448
III. 1872 Nov. 1·5	41 56 43·11	+ 9 26 44·82	−0·7614672	−0·5827650	−0·2528579
IV. 1874 Feb. 12·5	180 28 43·39	− 0 0 5·04	+0·7998560	−0·5316311	−0·2306738

Mittleres Äquinoctium 1880·0.

V. 1875 Juli 28·5	288 2 34·53	−16 38 54·29	−0·5889480	+0·7586134	+0·3291551
VI. 1876 Oct. 8·5	7 56 58·17	− 0 3 52·78	−0·9592750	−0·2531663	−0·1098429.

Der Vollständigkeit wegen sind hier die rechtwinkeligen Sonnen-Coordinaten X, Y, Z, wie dieselben den Epochen der Normalorte entsprechen und zwar ebenfalls auf das mittlere Äquinoctium 1870·0, beziehungsweise

1880·0 reducirt, beigegeben. Der den Elementen gegebene Nullindex soll dieselben als die Ausgangselemente für die weiteren Rechnungen bezeichnen.

II. Abtheilung.

Berechnung der durch Jupiter und Saturn bewirkten Störungen.

Was die Berechnung der Störungen betrifft, so wurde dieselbe durchgehends unter Annahme eines Störungsintervalles von 40 mittleren Sonnentagen mit den eben vorher angesetzten Elementen durchgeführt, und zwar derart, dass diese Elemente für den Verlauf der ganzen Störungsrechnung als constant angesehen wurden; da die Osculationsepoche dieser Elemente, 1874 Nov. 16·0 nahezu mit der Epoche des Äquinoctienwechsels derselben (1875·0) zusammenfällt, so sind die Elemente in der auf Äquinoctium 1870·0 oder 1880·0 reducirten Form zur Rechnung verwendet worden, je nachdem es sich um Zeiten vor oder nach der Osculationsepoche handelt.

Ausser den zu Grunde liegenden Elementen sind auch die gegenseitigen Lagen der Bahnen jedes der störenden Planeten gegen die Bahn des gestörten Körpers für den Verlauf der ganzen Rechnung als unveränderlich angesehen worden, so dass die so erhaltenen Störungswerthe erste Potenzen der Störungen darstellen.

Wie schon im Eingange erwähnt wurde, liegen für den die ersten fünf Oppositionen umfassenden Zeitraum die Resultate zweier, nach verschiedenen Methoden durchgeführten Störungsrechnungen vor: die Berechnung der Componenten der störenden Kräfte ist beiden Methoden gemeinsam, und desshalb stelle ich die hierauf bezüglichen Formeln den übrigen Formelsystemen voran.

Gelten für den Verlauf der Rechnung die Elemente Ω_1 und i_1 für einen störenden, Ω_0 und i_0 für den gestörten Planeten, und bezeichnet J die Neigung der Bahnebenen des störenden und des gestörten Körpers gegen einander, Φ den Winkel zwischen der Durchschnittslinie dieser Ebenen und der Knotenlinie des gestörten Planeten auf der Ekliptik, und analog Φ_1 den Winkel zwischen dieser Durchschnittslinie und der Knotenlinie des störenden Planeten, so hat man für die Bestimmung der Lage der störenden

gegen die gestörte Bahn mittelst der Grössen J, Φ und Φ_1 die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(\Phi+\Phi_1) &= \sin\tfrac{1}{2}(\Omega_1-\Omega_0)\sin\tfrac{1}{2}(i_1+i_0)\\
\sin\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(\Phi+\Phi_1) &= \cos\tfrac{1}{2}(\Omega_1-\Omega_0)\sin\tfrac{1}{2}(i_1-i_0)\\
\cos\tfrac{1}{2}J\sin\tfrac{1}{2}(\Phi-\Phi_1) &= \sin\tfrac{1}{2}(\Omega_1-\Omega_0)\cos\tfrac{1}{2}(i_1+i_0)\\
\cos\tfrac{1}{2}J\cos\tfrac{1}{2}(\Phi-\Phi_1) &= \cos\tfrac{1}{2}(\Omega_1-\Omega_0)\cos\tfrac{1}{2}(i_1-i_0);
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

die Grössen J, Φ und Φ_1 sind für den Verlauf der ganzen Störungsrechnung constant.

Ist dann weiter für irgend eine Epoche der Rechnung L die Länge in der Bahn und r_1 der Radiusvector des störenden, ferner v_0 die wahre Anomalie und r_0 der Radiusvector des gestörten Planeten und ω_0 der Abstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten für den letzteren, so erhält man die Entfernung (ρ) des störenden von dem gestörten Planeten durch Berechnung der nachstehenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda &= L-(\Omega_1+\Phi_1)\\
\operatorname{tang}\lambda_1 &= \operatorname{tang}\lambda\cos J\\
\sin B_1 &= \sin\lambda\sin J\\
L_1 &= \lambda_1+\Phi-\omega_0\\
\xi &= r_1\cos B_1\cos(L_1-v_0)\\
\eta &= r_1\cos B_1\sin(L_1-v_0)\\
\zeta &= r_1\sin B_1\\
(\rho)\cos\vartheta\cos\theta &= \xi-r_0\\
(\rho)\cos\vartheta\sin\theta &= \eta\\
(\rho)\sin\vartheta &= \zeta.
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Für die Ermittlung der Componenten der störenden Kräfte hat man noch zu rechnen:

$$\left.\begin{aligned}
K &= \frac{1}{(\rho)^3}-\frac{1}{r_1^3}\\
N &= K\frac{\xi}{r_0}-\frac{1}{(\rho)^2}\\
U_0 &= K\eta\\
W_0 &= K\zeta,
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und damit ist die Berechnung derjenigen Grössen erledigt, welche in gleicher Weise für die Ermittlung der Elementenstörungen und der Coordinatenstörungen Verwendung finden.

Elementenstörungen.

Alle Methoden zur Berechnung der speciellen Störungen der kleinen Planeten bestehen ihrem Wesen nach darin, dass die analytisch entwickelten Ausdrücke für die Differentialquotienten der Störungen, seien dies nun Störungen in den Elementen oder in gewissen Coordinaten, für äquidistante Zeitepochen (Störungsintervalle), in welche man sich den ganzen Zeitraum, den die Rechnung umfassen soll, getheilt hat, numerisch berechnet, und dass aus den numerischen Werthen der Differentialquotienten die Störungen selbst durch die sogenannte mechanische Integration ermittelt werden.

Die Methode, welche hier zunächst in Betracht gezogen werden soll, gibt auf diesem Wege direct die Störungen der Elemente unter Benützung einer Reihe von Formelgruppen, die hier der Vollständigkeit wegen angesetzt werden mögen, ohne dass auf den analytischen Ursprung derselben eingegangen werden kann.

Um die Elementenstörungen für ein 40tägiges Störungsintervall ($w = 40$) in Bogensecunden ausgedrückt zu erhalten, hat man nach (3) oben zunächst

$$R_0 = r_0 N$$

und dann für jede störende Masse m_1 gesondert eine Grösse

$$\varkappa = \frac{wk'' m_1}{\sqrt{p_0}}$$

zu rechnen, in welcher k'' die in Bogensecunden ausgedrückte Attractionsconstante und $p_0 = a_0 \cos^2 \varphi_0$ den Parameter der Bahn des gestörten Planeten bezeichnet.

Für die Componenten jeder der störenden Kräfte hat man dann die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} R &= \varkappa R_0 \\ U &= \varkappa U_0 \\ W &= \varkappa W_0 \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

anzunehmen.

Zur Berechnung der Differentialquotienten der Störungen in den einzelnen Elementen bedarf es ausser den eben ermittelten, von den störenden Massen abhängigen Grössen noch gewisser Coëfficienten, welche lediglich von dem gestörten Planeten abhängig sind.

Unter der oben gemachten Voraussetzung, dass die der Störungsrechnung zu Grunde liegenden Elemente für den Verlauf dieser ganzen Rechnung constante Werthe beibehalten sollen, wird eine Gruppe jener vom gestörten Planeten abhängigen Grössen ebenfalls für den ganzen Rechnungsverlauf constant sein. Demgemäss sind ein- für allemal zu berechnen die Grössen

$$\left.\begin{aligned}
(1) &= +\frac{1}{\sin i_0}\\
(2) &= -\frac{3kw}{\sqrt{a_0}}\sin\varphi_0\\
(3) &= -\frac{3kw}{\sqrt{a_0}}p_0\\
(4) &= -p_0\,\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\varphi_0\\
(5) &= -2\cos\varphi_0\\
(6) &= +\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}\varphi_0\\
(7) &= +\mathrm{tang}\tfrac{1}{2}i_0\\
(8) &= -\frac{p_0}{\sin\varphi_0}\\
(9) &= +\frac{1}{\sin\varphi_0}\\
(10) &= +a_0\cos\varphi_0
\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

und mit diesen für jedes einzelne Störungsintervall folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
(i) &= r_0\cos u_0\\
(\Omega) &= (1)\,r_0\sin u_0\\
(\mu_1) &= (2)\sin v_0\\
(\mu_2) &= (3)\cdot\frac{1}{r_0}
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

$$\left.\begin{aligned}
(L_1) &= (4)\cos v_0 + (5) r_0 \\
(L_2) &= (6)(p_0 + r_0)\sin v_0 \\
(L_3) &= (7)\, r_0 \sin u_0 \\
(\pi_1) &= (8)\cos v_0 \\
(\pi_2) &= (9)(p_0 + r_0)\sin v_0 \\
(\varphi_1) &= (10)\sin v_0 \\
(\varphi_2) &= (10)(\cos v_0 + \cos E_0)
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

in welchen Ausdrücken die einzelnen Buchstaben die allgemein übliche Bedeutung haben.

Die numerischen Werthe der Differentialquotienten für die Störungen der einzelnen Elemente ergeben sich dann durch die für jedes Störungsintervall durchzuführende Berechnung der folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
w\frac{di}{dt} &= (i)W \\
w\frac{d\Omega}{dt} &= (\Omega)W \\
w^2\frac{d\mu}{dt} &= (\mu_1)R + (\mu_2)U \\
w\frac{dL}{dt} &= (L_1)R + (L_2)U + (L_3)W \\
w\frac{d\pi}{dt} &= (\pi_1)R + (\pi_2)U + (L_3)W \\
w\frac{d\varphi}{dt} &= (\varphi_1)R + (\varphi_2)U
\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Die Anwendung der mechanischen Quadratur auf die nach diesen Formeln berechneten numerischen Werthe der Differentialquotienten ergibt dann die Störungen der Elemente.

Rücksichtlich der Anwendung dieser voranstehenden Formelsysteme auf die Bahn des Planeten (114) ist zunächst zu bemerken, dass die auf die obigen provisorischen Elemente basirte Störungsrechnung nach der Methode der Variation der Constanten (Elementenstörungen) den ganzen Zeitraum von 1871 bis 1880

umfasst, dass aber der auf die Zeit vor der Osculationsepoche bezügliche Theil dieser Störungsrechnung viel früher zu Stande kam, als der zweite, die Zeit nach der Osculationsepoche umfassende Theil. Desshalb sind die Annahmen für die Elemente Ω_1 und i_1 der störenden Planeten für die beiden Theile der Rechnung etwas verschieden.

Für den ersten Theil habe ich die Werthe

	♃	♄	
Ω_1	99° 3′39″1	112°32′0″0	mittl. Äquin.
i_1	1 18 39·2	2 29 36·0	1870·0

benützt, welche ungefähr der Epoche 1873·0 entsprechen, und damit für den gestörten Planeten die auf das Äquinoctium 1870·0 bezogenen Elemente:

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= 164°21'21''9 \\ i_0 &= 4\ 54\ 31\cdot4 \\ \omega_0 &= 348\ 33\ 50\cdot4 \end{aligned}$$

verbunden. Daraus resultiren für den Theil der Störungsrechnung, der von der Osculationsepoche an nach rückwärts geführt ist, die Constanten:

	♃	♄	
$\Omega_0+\Phi_1$	359°35′46″8	14°29′52·5	Mittl. Äquin.
J	4 31 12·4	3 53 42·9	1870·0
$\Phi-\omega_0$	206 43 37·7	221 39 42·5	

Als die Rechnung später auf den Zeitraum nach der Osculationsepoche ausgedehnt wurde, habe ich die für die störenden Planeten dem Berliner astronomischen Jahrbuche entnommenen Angaben:

	♃	♄	
Ω_1	99°12′30″0	112°38′0″0	Mittl. Äqu. 1880·0.
i_1	1 18 40·1	2 29 23·9	

in Verbindung mit den auf das Äquinoctium 1880·0 bezogenen Elementen für den gestörten Planeten, nämlich

$$\begin{array}{ll} \Omega_0 \ldots\ldots & 164^\circ 29' 35''8 \\ i_0 \ldots\ldots & 4\ 54\ 26\cdot 7 \\ \omega_0 \ldots\ldots & 348\ 33\ 58\cdot 9 \end{array}$$

benützt, und so die auf 1880·0 bezogenen Constanten

$$\begin{array}{lcc} & \mathfrak{A} & \mathfrak{h} \\ \Omega_1+\Phi_1 \ldots\ldots & 359^\circ 44' 24''2 & 14^\circ 35' 56''9 \\ J \ldots\ldots & 4\ 31\ \ 7\cdot 0 & 3\ 53\ 46\cdot 3 \\ \Phi-\omega_0 \ldots\ldots & 206\ 43\ 53\cdot 1 & 221\ 37\ 24\cdot 2 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\} \begin{array}{c}\text{mittl. Äqu.}\\ 1880\cdot 0.\end{array}$$

für den Theil der Störungsrechnung in Verwendung gebracht, welcher den Zeitraum nach der Osculationsepoche der Elemente umfasst.

Ich habe übrigens bei letzterer Gelegenheit die Jupiterstörungen des ersten Theiles nochmals nachgerechnet, indem die Distanzen (ρ) zwischen $\mathfrak{A}$ und (114) mit Umgehung der obigen Constanten direct aus den für die einzelnen Störungsintervalle dem Berliner astronomischen Jahrbuche entnommenen (für das Äquinoctium 1870·0 geltenden) Längen in der Bahn L und Breiten B des störenden Planeten $\mathfrak{A}$ nach dem folgenden Formelsysteme abgeleitet wurden (vergl. Oppolzer, Lehrbuch für Bahnbest., II. Theil, pag. 236):

$$\left.\begin{aligned} q \sin Q &= \sin B \\ q \cos Q &= \cos B \sin(L-\Omega_0) \\ \cos B_1 \cos L_1 &= \cos B \cos(L-\Omega_0) \\ \cos B_1 \sin L_1 &= q \cos(Q-i_0) \\ \sin B_1 &= q \sin(Q-i_0) \\ \xi &= r_1 \cos B_1 \cos(L_1-u_0) \\ \eta &= r_1 \cos B_1 \sin(L_1-u_0) \\ \zeta &= r_1 \sin B_1 \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

worin die Grösse $u_0 = v_0+\omega_0$ dem gestörten Planeten angehört. Diese strengere und umständlichere Berechnungsweise hat in den Störungswerthen keine Unterschiede gegen die ältere Rechnung ergeben.

Weiter hat man:

		♃	♄
Störende Masse in Einheiten der Sonnenmasse	m_1	$\frac{1}{1047\cdot879}$	$\frac{1}{3501\cdot6}$
für $w = 40$ Tagen . . .	$\log(wk''m_1)$	$2\cdot131757$	$1\cdot60780$
	$\log x$	$1\cdot922366$	$1\cdot39841$,

welchen Werthen von x der Werth $\log p = 0\cdot418779$ für den Parameter der Bahn des gestörten Planeten zu Grunde liegt.

Die übrigen von dem gestörten Planeten abhängigen Constanten haben, logarithmisch angesetzt, folgende Werthe:

$1870\cdot0$	$(1) = 1\cdot067685$		$(6) = 8\cdot848440$
$1880\cdot0$	$(1) = 1\cdot067801$	$1870\cdot0$	$(7) = 8\cdot632081$
	$(2) = 9_n248365$	$1880\cdot0$	$(7) = 8\cdot631966$
	$(3) = 0_n519830$		$(8) = 1_n271465$
	$(4) = 9_n267219$		$(9) = 0\cdot852686$
	$(5) = 0_n296707$		$(10) = 0\cdot423102$.

Die unmittelbaren Resultate der mit diesen Grössen durchgeführten Störungsrechnung sind nun in den folgenden drei Tafeln zusammengestellt.

Die Tafel I gibt den heliocentrischen Lauf des gestörten Planeten in seiner Bahnebene mittelst der beiden polaren Coordinaten v_0 und $\log r_0$ und die reciproken Werthe der Entfernungen desselben von den beiden störenden Planeten Jupiter und Saturn, so dass diese Tafel diejenigen Daten enthält, welche für die Grösse der störenden Einflüsse massgebend sind.

In den unmittelbar darauf folgenden Tafeln II und III sind dann weiter die numerischen Werthe der Differentialquotienten für die Störungen in den einzelnen Elementen gegeben, und zwar enthält Tafel II diese Grössen rücksichtlich Jupiter, Tafel III dieselben rücksichtlich Saturn.

Tafel I.

Heliocentrischer Lauf des Planeten (114) in seiner ungestörten Bahn.

0h mittl. Zeit Berlin	v_0	log r_0	log $\frac{1}{(\rho)2\mu}$	log $\frac{1}{(\rho)\hbar}$
1871 Juni 5	155°28'35"7	0·478124	9·104304	9·11423
Juli 15	162 29 8·8	0·481200	9·106287	9·10216
Aug. 24	169 24 44·5	0·483269	9·108997	9·08911
Oct. 3	176 17 21·2	0·484327	9·112454	9·07538
Nov. 12	183 8 55·4	0·484369	9·116698	9·06125
Dec. 22	190 1 22·5	0·483390	9·121777	9·04697
1872 Jan. 31	196 56 39·3	0·481406	9·127757	9·03276
März 11	203 56 43·5	0·478413	9·134710	9.01882
Apr. 20	211 3 36·3	0·474423	9·142723	9·00526
Mai 30	218 19 23·6	0·469455	9·151897	8·99222
Juli 9	225 46 15·5	0·463535	9·162351	8·97976
Aug. 18	233 26 27·0	0·456705	9·174218	8 96804
Sept. 27	241 22 17·6	0·449020	9·187646	8·95709
Nov. 6	249 36 10·9	0·440566	9·202811	8·94700
Dec. 16	258 10 29·0	0·431457	9·219906	8·93786
1873 Jan. 25	267 7 28·4	0·421849	9·239116	8·92977
März 6	276 29 11·2	0·411947	9·260625	8·92283
Apr. 15	286 17 13·7	0·402009	9·284595	8·91715
Mai 25	296 32 28·7	0·392357	9·311081	8·91286
Juli 4	307 14 48·8	0·383364	9·340007	8·91010
Aug. 13	318 22 45·1	0·375439	9·370988	8.90897
Sept. 22	329 53 14·9	0·369006	9·403186	8·90962
Nov. 1	341 41 31·7	0·364444	9·435088	8·91213
Dec. 11	353 41 17·6	0·362052	9·464344	8·91655
1874 Jan. 20	5 45 8·7	0·361997	9·487878	8·92292
März 1	17 45 16·0	0·364283	9·502527	8·93120
Apr. 10	29 34 14·1	0·368748	9·506122	8·94129
Mai 20	41 5 40·0	0·375104	9·498508	8·95307
Juni 29	52 14 44·3	0·382969	9·481564	8·96339
Aug. 8	62 58 18·1	0·391922	9·458247	8·98104
Sept. 17	73 14 49·1	0·401552	9·431500	8·99681
Oct. 27	83 4 6·6	0·411484	9·403596	9·01345
Dec. 6	92 27 1·1	0·421394	9·376064	9·03076
1875 Jan. 15	101 25 6·9	0·431020	9·349771	9·04842
Feb. 24	110 0 25·1	0·440157	9·325171	9·06619
Apr. 5	118 15 12·2	0·448644	9·302435	9·08374
Mai 15	126 11 50·0	0·456366	9·281574	9·10069
Juni 24	133 52 41·7	0·463238	9·262516	9·11670
Aug. 3	141 20 7·7	0·469202	9·245159	9·13135

0^h mittl. Zeit Berlin	v_0	$\log r_0$	$\log \frac{1}{(\rho)24}$	$\log \frac{1}{(\rho)\mathfrak{h}}$
Sept. 12	148 36 22·9	0·474214	9·229367	9·14421
Oct. 22	155 43 37·9	0·478249	9·215009	9·15485
Dec. 1	162 43 58·4	0·481291	9·201962	9·16291
1876 Jan. 10	169 39 25·7	0·483324	9·190111	9·16809
Feb. 19	176 31 58·2	0·484344	9·179354	9·17018
März 30	183 23 32·2	0·484350	9·169598	9·16917
Mai 9	190 16 3·4	0·483341	9·160765	9·16514
Juni 18	197 11 28·3	0·481318	9·152788	9·15809
Juli 28	204 11 44·6	0 478289	9·145610	9·14854
Sept. 6	211 18 54·7	0·474263	9·139188	9·13685
Oct. 16	218 35 3·5	0·469261	9·133487	9·12336
Nov. 25	226 2 21·2	0·463308	9·128488	9·10853
1877 Jan. 4	233 43 3·5	0·456446	9·124184	9·09274
Feb. 13	241 39 30·2	0·448733	9·120580	9·07636
März 25	249 54 4·4	0·440252	9·117694	9·05969
Mai 4	258 29 8·5	0·431124	9·115561	9·04306
Juni 13	267 26 58·4	0·521501	9·114234	9·02673
Juli 23	276 49 36·3	0·411593	9·113783	9·01093
Sept. 1	286 38 35·6	0·401659	9·114293	8·99590
Oct. 11	296 54 48·9	0·392024	9·115861	8·98184
Nov. 20	307 38 5·8	0·383060	9·118594	8·96896
Dec. 30	318 46 54·2	0·375183	9·122611	8·95747
1878 Feb. 8	330 18 7·6	0·368809	9·128013	8·94754
März 20	342 6 55·3	0·364320	9 134886	8·93933
Apr. 29	354 6 57·8	0·362011	9 143286	8·93294
Juni 8	6 10 48·9	0·362040	9·153226	8·92845
Juli 18	18 10 39·7	0·364406	9·164675	8·92588
Aug. 27	29 59 6·5	0·368944	9·177558	8·92521
Oct. 6	41 29 49·5	0·375360	9·191764	8·32639
Nov. 15	52 38 2·0	0·383271	9·207159	8·92931
Dec. 25	63 20 39·5	0·392255	9·223595	8·93385
1879 Feb. 3	73 36 12·2	0·401903	9·240932	8·93988
März 15	83 24 32·7	0·411838	9·259034	8·94728
Apr. 24	92 46 32·0	0·421742	9·377784	8·95592
Juni 3	101 43 47·3	0·431354	9·297083	8·96568
Juli 13	110 18 19·2	0·440469	9·316858	8·97647
Aug. 22	118 32 25.2	0·448931	9·337051	8·98819
Oct. 1	126 28 26·8	0·456625	9·357642	9·00078
Nov. 10	134 8 47·9	0·463466	9·378598	9·01414
Dec. 20	141 35 47·4	0·469395	9·399918	9·02817
1880 Jan. 29	148 51 41·3	0·474375	9·421610	9·04279
März 9	155 58 39·3	0·478375	9·443688	9·05796

Tafel II.

Numerische Differentialquotienten für die Störungen der Elemente durch Jupiter.

0h mittl. Zeit Berlin	$40\frac{dL}{dt}$	$40\frac{d\pi}{dt}$	$40\frac{d\Omega}{dt}$	$40\frac{di}{dt}$	$40\frac{d\varphi}{dt}$	$40^2\frac{d\mu}{dt}$
1871 Juni 5	— 8'240	+ 3'649	—3'643	+0'430	+ 7·197	+1'2131
Juli 15	— 7·567	+ 6·967	—2·956	+0·457	+ 7·503	+1·3468
Aug. 24	— 6·808	+ 10·811	—2·235	+0·473	+ 7·726	+1·4642
Oct. 3	— 5·973	+ 15·074	—1·507	+0·476	+ 7·854	+1·5653
Nov. 12	— 5·067	+ 19·593	—0·797	+0·468	+ 7·873	+1·6498
Dec. 22	— 4·096	+ 24·178	—0·130	+0·450	+ 7·776	+1·7165
1872 Jan. 31	— 3·066	+ 28·623	+0·474	+0·421	+ 7·559	+1·7637
März 11	— 1·987	+ 32·709	+0·993	+0·383	+ 7·222	+1·7892
Apr. 20	— 0·867	+ 36·188	+1·410	+0·338	+ 6·774	+1·7896
Mai 30	+ 0·283	+ 38·797	+1·710	+0·289	+ 6·226	+1·7602
Juli 9	+ 1·450	+ 40·249	+1·882	+0·236	+ 5·601	+1·6952
Aug. 18	+ 2·611	+ 40·244	+1·920	+0·182	+ 4·938	+1·5868
Sept. 27	+ 3·740	+ 38·480	+1·820	+0·131	+ 4·280	+1·4257
Nov. 6	+ 4·801	+ 34·672	+1·587	+0·084	+ 3·696	+1·2001
Dec. 16	+ 5·742	+ 28·575	+1·229	+0·045	+ 3·273	+0·8956
1873 Jan. 25	+ 6·490	+ 20·073	+0·764	+0·017	+ 3·120	+0·4965
März 6	+ 6·950	+ 9·219	+0·220	+0·002	+ 3·365	—0·0138
Apr. 15	+ 6·986	— 3·669	—0·364	+0·003	+ 4·143	—0·6502
Mai 25	+ 6·410	— 17·877	—0·935	+0·022	+ 5·572	—1·4180
Juli 4	+ 4·977	— 32·286	—1·420	+0·059	+ 7·704	—2·3026
Aug. 13	+ 2·890	— 45·404	—1·735	+0·112	+10·425	—3·2476
Sept. 22	— 1·653	— 55·767	—1·789	+0·173	+13·355	—4·1244
Nov. 1	— 7·296	— 62.766	—1·519	+0·227	+15·716	—4·7024
Dec. 11	—14·204	— 67·773	—0·947	+0·253	+16·410	—4·6561
1874 Jan. 20	—21·208	— 74·673	—0·267	+0·230	+14·418	—3·6860
März 1	—26·301	— 87·772	+0·193	+0·149	+ 9·697	—1·7689
Apr. 10	—27·588	—107·279	+0·138	+0·036	+ 3·687	—0·6482
Mai 20	—24·636	—127·206	—0·444	—0·066	— 1·441	+2·8291
Juni 29	—18·772	—139·589	—1·272	—0·126	— 4·328	+4·2238
Aug. 8	—11·964	—140·313	—2·005	—0·136	— 5·030	+4·7278
Sept. 17	— 5·694	—130·421	—2·439	—0·112	— 4·411	+4·5538
Oct. 27	— 0·638	—113·626	—2·536	—0·072	— 3·349	+3·9886
Dec. 6	+ 3·091	— 93·847	—2·350	—0·032	— 2·407	+3·2594
1875 Jan. 15	+ 5·647	— 73·989	—1·970	—0·000	— 1·829	+2·5048
Feb. 24	+ 7·262	— 55·866	—1·479	+0·019	— 1·664	+1·7971
Apr. 5	+ 8·154	— 40·388	—0·948	+0·024	— 1·858	+1·1653
Mai 15	+ 8·498	— 27·943	—0·427	+0 016	— 2·328	+0·6196
Juni 24	+ 8·440	— 18·488	+0·040	—0·003	— 2·972	—0·1541
Aug. 3	+ 8·084	— 11·825	+0·429	—0·031	— 3·717	—0·2378

0^h mittl. Zeit Berlin	$40\frac{dL}{dt}$	$40\frac{d\pi}{dt}$	$40\frac{d\Omega}{dt}$	$40\frac{di}{dt}$	$40\frac{d\varphi}{dt}$	$40^2\frac{d\mu}{dt}$
Sept. 12	+ 7·504	— 7·677	+0·719	—0·066	— 4·487	—0·5655
Oct. 22	+ 6·765	— 5·696	+0·897	—0·107	— 5·229	—0·8376
Dec. 1	+ 5·906	— 5·538	+0·959	—0·150	— 5·902	—1·0620
1876 Jan. 10	+ 4·961	— 6·859	+0·902	—0·193	— 6·470	—1·2443
Feb. 19	+ 3·955	— 9·346	+0·730	—0·234	— 6·919	—1·3904
März 30	+ 2·913	— 12·680	+0·450	—0·272	— 7 227	—1·5047
Mai 9	+ 1·845	— 16·578	+0·073	—0·305	— 7·390	—1·5897
Juni 18	+ 0·769	— 20·759	—0·389	—0·330	— 7·412	—1·6482
Juli 28	— 0·306	— 24·967	—0·918	—0·346	— 7·286	—1·6810
Sept. 6	— 1·365	— 28·959	—1·496	—0·354	— 7·026	—1·6888
Oct. 16	— 2·398	— 32·498	—2·100	—0·350	— 6·645	—1·6721
Nov. 25	— 3·396	— 35·375	—2·706	—0·336	— 6·164	—1·6285
1877 Jan. 4	— 4·341	— 37·399	—3·289	—0·310	— 5·608	—1·5581
Feb. 13	— 5·221	— 38·411	—3·822	—0·272	— 5·008	—1·4586
März 25	— 6·021	— 38 310	—4·277	—0·224	— 4·407	—1·3278
Mai 4	— 6·722	— 37·056	— 4·628	—0·168	— 3·849	—1·1633
Juni 13	— 7·306	— 34·699	—4·849	—0·103	— 3·383	—0·9633
Juli 23	— 7·752	— 31·407	—4·920	—0·034	— 3·064	—0·7263
Sept. 1	— 8·041	— 27·474	—4 827	+0·037	— 2·934	—0·4526
Oct. 11	— 8·150	— 23·344	—4·559	+0·108	— 3.025	—0·1447
Nov. 20	— 8·064	— 19·553	—4·119	+0·174	— 3·350	+0·1917
Dec. 30	— 7·765	— 16·701	—3·523	+0·230	— 3·878	+0·5460
1878 Feb. 8	— 7·245	— 15·324	—2·799	+0·274	— 4·559	+0·9047
März 20	— 6·502	— 15·752	—1·989	+0·303	— 5·286	+1·2485
Apr. 29	— 5·542	— 18·030	—1·147	+0·315	— 5·949	+1·5571
Juni 8	— 4·381	— 21·770	—0·332	+0·309	— 6·438	+1·8102
Juli 18	— 3·041	— 26·291	+0·398	+0·286	— 6·661	+1·9895
Aug. 27	— 1·555	— 30·687	+0.985	+0·251	— 6·598	+2·0838
Oct. 6	+ 0·037	— 34·003	+1·394	+0·205	— 6·265	+2·0858
Nov. 15	+ 1·696	— 35·498	+1·601	+0·156	— 5·750	+1·9962
Dec. 25	+ 3·373	— 34·670	+1·601	+0·107	— 5·164	+1·8191
1879 Feb. 3	+ 5·027	— 31·354	+1·411	+0·064	— 4·632	+1·5614
März 15	+ 6·610	— 25·704	+1·062	+0·029	— 4·286	+1·2317
Apr. 24	+ 8·082	— 18·073	+0.600	+0·008	— 4·231	+0·8369
Juni 3	+ 9·396	— 9·023	+0·079	0·000	— 4·559	+0·3834
Juli 13	+10·510	+ 0·815	—0·439	+0·006	— 5·333	—0·1243
Aug. 22	+11·377	+ 10·749	—0·894	+0·023	— 6·598	—0·6829
Oct. 1	+11·944	+ 20,071	—1·231	+0·049	— 8·379	—1·2916
Nov. 10	+12·151	+ 28·078	—1·403	+0·077	—10·682	—1·9507
Dec. 20	+11·929	+ 34·093	—1·376	+0·099	—13·501	—2·6608
1880 Jan. 29	+	+ 37·473	—1·125	+0·105	—16.810	—3·4231
	+	+ 37·572	—0·640	+0·086	—20·579	—4·2390

Tafel III.

Numerische Differentialquotienten für die Störungen der Elemente, durch Saturn.

0^h mittl. Zeit Berlin	$40\frac{dL}{dt}$	$40\frac{d\pi}{dt}$	$40\frac{d\Omega}{dt}$	$40\frac{di}{dt}$	$40\frac{d\varphi}{dt}$	$40^2\frac{d\mu}{dt}$
1871 Juni 5	−0'556	−1'163	−0'422	+0'050	+0'875	+0'1704
Juli 15	−0·318	−1·045	−0·310	+0·046	+0·851	+0·1728
Aug. 24	−0·100	−0·841	−0·196	+0·041	+0·790	+0·1633
Oct. 3	+0·086	−0·635	−0·110	+0·035	+0·702	+0·1449
Nov. 12	+0·234	−0·490	−0 047	+0·028	+0·595	+0·1205
Dec. 22	+0·340	−0·443	−0·006	+0 021	+0·478	+0·0926
1872 Jan. 31	+0·407	−0·509	+0·015	+0·014	+0·362	+0·0634
März 11	+0 436	−0·686	+0·020	+0·008	+0·251	+0·0341
Apr. 20	+0·433	−0·959	+0·010	+0·002	+0·155	+0·0061
Mai 30	+0·401	−1·301	−0·011	−0·002	+0·074	−0·0197
Juli 9	+0·345	−1·680	−0·040	−0·005	+0·013	−0·0427
Aug. 18	+0·271	−2·056	−0·072	−0·007	−0 027	−0·0619
Sept. 27	+0·185	−2·396	−0·106	−0 008	−0·048	−0·0772
Nov. 6	+0·087	−2·665	−0 139	−0·007	−0·054	−0·0879
Dec. 16	−0·012	−2·831	−0·168	−0·006	−0·047	−0·0935
1873 Jan. 25	−0·110	−2·876	−0·192	−0·004	−0·033	−0·0939
März 6	−0·210	−2 791	−0·207	−0·002	−0·018	−0·0887
Apr. 15	−0·281	−2·587	−0·213	+0 002	−0·009	−0·0777
Mai 25	−0·345	−2·288	−0·209	+0·005	−0·014	−0·0615
Juli 4	−0·391	−1·945	−0·195	+0·008	−0·035	−0·0402
Aug. 13	−0·414	−1·607	−0·171	+0·011	−0·075	−0·0153
Sept. 22	−0·412	−1·338	−0·139	+0·013	−0·128	+0·0118
Nov. 1	−0·385	−1·177	−0·100	+0·015	−0·190	+0·0388
Dec. 11	−0·332	−1·141	−0·059	+0 016	−0·249	+0·0635
1874 Jan. 20	−0·259	−1·213	−0·018	+0·015	−0·295	+0·0831
März 1	−0·167	−1·330	+0·018	+0·014	−0·319	+0·0958
Apr. 10	−0·064	−1·416	+0 046	+0·012	−0·319	+0·0998
Mai 20	+0·044	−1·383	+0·062	+0·009	−0·296	+0·0943
Juni 29	+0·149	−1·166	+0·064	+0·006	−0·259	+0·0795
Aug. 8	+0 241	−0·728	+0·049	+0·003	−0·216	+0·0562
Sept. 17	+0·311	−0·069	+0·018	+0·001	−0·179	+0·0258
Oct. 27	+0·350	+0·732	−0·029	−0·001	−0·160	−0·0099
Dec. 6	+0·351	+1·743	−0·092	−0·001	−0·162	−0·0488
1875 Jan. 15	+0·303	+2·760	−0·165	0·000	−0·188	−0·0885
Feb. 24	+0·204	+3·743	−0·245	+0·003	−0·238	−0·1264
Apr. 5	+0·051	+4·612	−0·326	+0·008	−0·300	−0·1596
Mai 15	−0·158	+5·298	−0·401	+0·016	−0·367	−0·1850
Juni 24	−0·410	+5·765	−0·461	+0·026	−0·422	−0·1998
Aug. 3	−0·688	+5·988	−0.500	+0·036	−0·449	−0·2011

0^h mittl. Zeit Berlin	$40\frac{dL}{dt}$	$40\frac{d\pi}{dt}$	$40\frac{d\Omega}{dt}$	$40\frac{di}{dt}$	$40\frac{d\varphi}{dt}$	$40^2\frac{d\mu}{dt}$
Sept. 12	−0·978	+6·005	−0·510	+0·047	−0·435	−0·1870
Oct. 22	−1·252	+5·869	−0·487	+0·058	−0·372	−0·1572
Dec. 1	−1·477	+5·650	−0·431	+0·067	−0·256	−0·1128
1876 Jan. 10	−1·626	+5·441	−0·345	+0·074	−0·100	−0·0574
Feb. 19	−1·677	+5·328	−0·239	+0·077	+0·081	+0·0041
März 30	−1·627	+5·326	−0·126	+0·076	+0·263	+0·0658
Mai 9	−1·480	+5·430	−0·018	+0·072	+0·420	+0·1209
Juni 18	−1·256	+5·578	+0·075	+0·064	+0·536	+0·1653
Juli 28	−0·983	+5·694	+0·144	+0·054	+0·598	+0·1948
Sept. 6	−0·689	+5·701	+0·187	+0·044	+0·609	+0·2087
Oct. 16	−0·405	+5·526	+0·204	+0·034	+0·574	+0·2075
Nov. 25	−0·147	+5·140	+0·198	+0·025	+0·507	+0·1929
1877 Jan. 4	+0·066	+4·535	+0·176	+0.017	+0·425	+0·1676
Feb. 13	+0·228	+3·740	+0·142	+0·010	+0·341	+0·1344
März 25	+0·332	+2·806	+0·102	+0·005	+0·269	+0·0963
Mai 4	+0·383	+1·801	+0·062	+0·002	+0.218	+0·0560
Juni 13	+0·391	+0·803	+0·025	0·000	+0·192	+0·0159
Juli 23	+0·358	−0·109	−0·007	0·000	+0·192	−0·0216
Sept. 1	+0·290	−0·869	−0·031	0·000	+0·214	−0·0545
Oct. 11	+0·195	−1·424	−0·048	+0 001	+9·249	−0·0810
Nov. 20	+0·086	−1·751	−0·055	+0·002	+0·288	−0·0994
Dec. 30	−0·031	−1·870	−0·055	+0·004	+0·318	−0·1087
1878 Feb. 8	−0·147	−1·818	−0·048	+0·005	+0·329	−0·1082
März 20	−0·253	−1·677	−0·037	+0·006	+0·316	−0·0982
Apr. 29	−0·342	−1·536	−0·023	+0·006	+0·277	−0·0797
Juni 8	−0·409	−1·469	−0·007	+0·006	+0·219	−0·9546
Juli 18	−0·451	−1·537	+0·008	+0·006	+0·151	−0·0254
Aug. 27	−0·466	−1·742	+0·022	+0·005	+0·082	+0·0054
Oct. 6	−0·452	−2·062	+0·032	+0·005	+0·026	+0·0351
Nov. 15	−0·413	−2·441	+0·038	+0·004	−0·012	+0·0616
Dec. 25	−0·349	−2·811	+0·040	+0·003	−0·029	+0·0831
1879 Feb. 3	−0·266	−3·112	+0·039	+0·001	−0·029	+0 0988
März 15	−0·167	−3·293	+0·036	+0·001	−0·016	+0·1081
Apr. 24	−0·058	−3·332	+0·030	0·000	+0·003	+0·1108
Juni 3	+0·057	−3·219	+0·023	0·000	+0·018	+0·1071
Juli 13	+0·171	−2·969	+0·015	0·000	+0·023	+0·0973
Aug. 22	+0·278	−2·607	+0.009	0·000	+0·011	+0·0819
Oct. 1	+0·374	−2·169	+0·004	0·000	−0·021	+0·0613
Nov. 10	+0·453	−1·697	+0·001	0·000	−0·078	+0·0360
Dec. 20	+0·508	−1·235	0·000	0·000	−0·158	+0·0066
1880 Jan. 29	+0·533	−0·827	+0·001	0·000	−0·263	−0·0261
März 9	+0·522	−0·507	+0·005	−0·001	−0·388	−0·0612

Was die Integration dieser numerischen Differentialquotienten betrifft, so wurde dieselbe nicht für jeden der beiden störenden Planeten gesondert durchgeführt, sondern es wurden die den einzelnen Zeitepochen entsprechenden Werthe dieser Differentialquotienten vereinigt, so dass für jedes Bahnelement eine Reihe von Zahlenwerthen resultirt, welche für die einzelnen Epochen die Differentialquotienten der vereinigten störenden Wirkungen von Jupiter und Saturn darstellen.

Für die Durchführung der mechanischen Integration werden die Zeitepochen als Argumente und die Differentialquotienten als Functionen dieser Argumente betrachtet, und wenn man ein bestimmtes Argument a als Ausgangsargument für die Integrationsoperationen annimmt, so dass die Reihe der Argumente die Form:

$$\ldots\ldots a-2w,\quad a-w,\quad a,\quad a+w,\quad a+2w\ldots\ldots$$

und die Reihe der Functionswerthe (Differentialquotienten) die Form:

$$\ldots\ldots f(a-2w),\quad f(a-w),\quad f(a),\quad f(a+w),\quad f(a+2w)\ldots\ldots$$

annimmt (w das Störungsintervall), so hat man für die numerische Bestimmung eines einfachen Integrales noch eine sogenannte einfach summirte Reihe, für die Bestimmung eines Doppelintegrales ausserdem noch eine doppelt summirte Reihe zu bilden, welche beiden Reihen dadurch definirt sind, dass die Reihe der Functionswerthe die erste Differenzreihe der einfach summirten, und die zweite Differenzreihe der doppelt summirten Reihe ist. Die Glieder der summirten Reihen bilden dann die Hauptglieder der für die einzelnen Argumente sich ergebenden numerischen Integralwerthe.

Für die Bildung der summirten Reihen, welche an und für sich mit einem beliebigen Anfangsgliede eingeleitet werden könnten, wird bei Berechnung der speciellen Störungen stets von dem Umstande Gebrauch gemacht, dass osculirende Bahnelemente für die Epoche der Osculation den Ort des Planeten in der ungestörten und in der gestörten Bahn identisch finden lassen sollen, dass also für diese Epoche die Störungen sämmtlich der Null gleich sind. Dieser Bedingung gemäss werden die summirten Reihen gebildet, indem man das willkürliche Anfangsglied der

Reihe so bestimmt, dass die Anwendung der Integrationsformeln auf das Grössenschema für die Osculationsepoche thatsächlich die Werthe aller Integrale der Null gleich gibt.

In dem hier vorliegenden Falle liegt die Osculationsepoche der Elemente (1874 Nov. 16·0) der Zeit nach in der Mitte zwischen den beiden Zeitargumenten 1874 Oct. 27·0 und Dec. 6·0; betrachtet man diese beiden Argumente als die Argumente $a-w$ und a, so hat man nach den Principien der mechanischen Quadratur für die Bestimmung der Anfangsglieder der einfach, und der doppelt summirten Reihe in der gebräuchlichen symbolischen Bezeichnungsweise die Formeln:

$$\left.\begin{aligned} {}'f(a-\tfrac{1}{2}w) &= -\frac{1}{24}f'(a-\tfrac{1}{2}w)+\frac{17}{5760}f'''(a-\tfrac{1}{2}w)-\ldots. \\ {}''f(a-w) &= +\frac{1}{24}f(a)-\frac{17}{5760}\{2f''(a)+f''(a-w)\}+\ldots \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

und durch diese Bestimmung der Anfangsconstanten für die summirten Reihen ist der obigen Forderung entsprochen, dass für die Oculationsepoche die Störungen verschwinden sollen. Unter dieser Voraussetzung haben dann die Formeln für die Bildung der zu dem beliebigen Argumente $a+iw$ gehörigen Integrale, in derselben symbolischen Bezeichnungsweise die Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} \int_{a-\frac{1}{2}w}^{a+iw} f(x)\,dx &= {}'f(a+iw)-\frac{1}{12}f'(a+iw)+\frac{11}{720}f'''(a+iw)- \\ &\quad -\frac{191}{60480}f^{V}(a+iw)+\ldots. \\ \iint_{a-\frac{1}{2}w}^{a+iw} f(x)\,dx^2 &= {}''f(a+iw)+\frac{1}{12}f'(a+iw)-\frac{1}{240}f''(a+iw)+ \\ &\quad +\frac{31}{60480}f^{IV}(a+iw)-\ldots. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Die gemeinschaftliche untere Grenze dieser beiden bestimmten Integrale ist die Zeit der Osculation der Bahnelemente, die obere Grenze eine beliebige der Zeitepochen der Störungsrechnung.

Bezeichnet man in diesem Sinne der Kürze halber mit t_0 die Osculationsepoche der Elemente des gestörten Planeten und mit t

eine beliebige jener Zeitepochen, ferner mit ΔL, $\Delta\pi$, $\Delta\Omega$, Δi $\Delta\varphi$ und $\Delta\mu$ die Störungen der einzelnen Elemente, so sind die Integrationen, welche für die wirkliche, numerische Ermittlung dieser Störungen auszuführen sind, durch das folgende Schema angezeigt:

$$\left.\begin{aligned}
\Delta L &= \int_{t_0}^{t} w\left(\frac{dL}{dt}\right)dt + \iint_{t_0}^{t} w^2\left(\frac{d\mu}{dt}\right)dt^2,\\
\Delta\pi &= \int_{t_0}^{t} w\left(\frac{d\pi}{dt}\right)dt,\\
\Delta\Omega &= \int_{t_0}^{t} w\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)dt,\\
\Delta i &= \int_{t_0}^{t} w\left(\frac{di}{dt}\right)dt,\\
\Delta\varphi &= \int_{t_0}^{t} w\left(\frac{di}{dt}\right)dt,\\
\Delta\mu &= \frac{1}{w}\int_{t_0}^{t} w^2\left(\frac{d\mu}{dt}\right)dt.
\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Diese Integrationen wurden nun für alle Epochen der Störungsrechnung mittelst der obigen Formeln (10) thatsächlich durchgeführt, nachdem sich für die Anfangsconstanten zur Bildung der summirten Reihen rücksichtlich der einzelnen Elemente die nachstehenden Werthe ergeben hatten:

	$'f(a-\frac{1}{2}w)$	$''f(a-w)$
L	$-0'155$	
π	$-0\cdot875$	
Ω	$-0\cdot005$	
i	$-0\cdot002$	
φ	$-0\cdot040$	
μ	$+0\cdot0324$	$+0'1345.$

Die auf solche Art gewonnenen Resultate der Störungsrechnung sind nun in der folgenden Tafel IV vollständig mitgetheilt. Die Columne $t-t_0$ gibt für jede einzelne Epoche der Tafel die seit der Osculationsepoche verflossene Zeit in Tagen,

welche Zeit also für die vor der Osculation liegenden Epochen negativ ausfällt. Unter ΔL_1 und ΔL_2 sind die beiden Bestandtheile der Störung des Elementes L, nämlich

$$\Delta L_1 = \int_{t_0}^{t} w \left(\frac{dL}{dt}\right) dt,$$

$$\Delta L_2 = \iint_{t_0}^{t} w^2 \left(\frac{d\mu}{dt}\right) dt^2$$

verstanden, so dass man

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2$$

hat. Zu bemerken ist ausserdem noch, dass die in Tafel IV mitgetheilten Störungen sich auf die Ekliptik als Fundamentalebene beziehen, das heisst Störungen der ekliptikalen Bahnelemente des Planeten (114) sind, was bei den späteren Rechnungen zu berücksichtigen kommt.

Tafel IV.

Störungen der Elemente.

Vereinigte Wirkungen von ♀ und ♄.

(Osculationsepoche $t_0 = 1874$ Nov. 16·0).

0h mittl. Zeit Berlin	$t-t_0$	ΔL_1	ΔL_2	$\Delta\pi$	$\Delta\Omega$	Δi	$\Delta\varphi$	$\Delta\mu$
1871 Juni 5	−1260	+2'20"20	+3'25"27	+13'42"46	+15"34	−5"73	−3' 2"76	−0"4474
Juli 15	−1220	+2 17·85	+3 8·09	+13 46·60	+11·68	−5·24	−2 54·54	0·4110
Aug. 24	−1180	+2 10·45	+2 52·43	+13 54·48	+ 8·84	−4·73	−2 46·09	0·3716
Oct. 3	−1140	+2 4·05	+2 38·39	+14 6·68	+ 6·81	−4·22	−2 37·54	0·3298
Nov. 12	−1100	+1 58·68	+2 26·06	+14 23·45	+ 5·59	−3·71	−2 29·02	0·2863

	Dec. 22	—1060	+1 54·39	+2 15·50	+14 44·87	+ 5·10	—3·23	—2 20·65	—0·2415
1872	Jan. 31	—1020	+1 51·18	+2 6·75	+15 10·83	+ 5·29	—2·77	—2 12·55	—0·1960
	März 11	— 980	+1 49·07	+1 59·83	+15 40·95	+ 6·05	—2·36	—2 4·85	—0·1503
	Apr. 20	— 940	+1 48·08	+1 54·72	+16 14·64	+ 7·27	—1·99	—1 57·64	—0·1050
	Mai 30	— 900	+1 48·21	+1 51·41	+16 51·09	+ 8·84	—1·68	—1 51·02	—0·0608
	Juli 9	— 860	+1 49·45	+1 49·82	+17 29·24	+10·63	—1·42	—1 45·06	—0·0183
	Aug. 18	— 820	+1 51·79	+1 49·91	+18 7·75	+12·48	—1·22	—1 39·80	+0·0215
	Sept. 27	— 780	+1 55·20	+1 51·50	+18 45·04	+14·28	—1·07	—1 35·23	+0·0575
	Nov. 6	— 740	+1 59·61	+1 54·44	+19 19·26	+15·87	—0·97	—1 31·30	+0·0884
	Dec, 16	— 700	+2 4·98	+1 58·49	+19 48·32	+17·13	—0·91	—1 27 89	+0·1125
1873	Jan. 25	— 660	+2 11.01	+2 3·32	+20 9·98	+17·96	—0·89	—1 24·76	+0·1278
	März 6	— 620	+2 17·68	+2 8 56	+20 21·97	+18·25	—0·88	—1 21·58	+0·1318
	Apr. 15	— 580	+2 24·37	+2 13·68	+20 22.19	+17·97	—0·88	—1 17·89	+0·1216
	Mai 25	— 540	+2 30·81	+2 18·07	+20 9·05	+17·11	—0·87	—1 13·10	+0·0943
	Juli 4	— 500	+2 26·22	+2 20·96	+19 41·81	+15·72	—0·82	—1 6·54	+0·0467
	Aug. 13	— 460	+2 39·61	+2 21·51	+19 1·01	+13·94	—0·73	— 57·57	—0·0233
	Sept. 22	— 420	+2 39·69	+2 18·80	+18 8·68	+11·99	—0·57	— 45·77	—0·1158
	Nov. 1	— 380	+2 34·95	+2 12·00	+17 7·91	+10·19	—0·36	— 31·30	—0·2265
	Dec. 11	— 340	+2 23·91	+2 0·58	+16 1·47	+ 8·86	—0·10	— 15·27	—0·3438
1874	Jan. 20	— 300	+2 5·83	+1 44·66	+14 49·44	+ 8·22	+0·16	+ 0·12	—0·4484
	März 1	— 260	+1 41·62	+1 25·21	+13 27·55	+ 8·21	+0·37	+ 12·06	—0·5160
	Apr. 10	— 220	+1 14·19	+1 4·13	+11 48·99	+ 8·46	+0·48	+ 18·43	—0·5278
	Mai 20	— 180	+ 47·76	+ 43·78	+ 9 50·03	+ 8·40	+0·47	+ 19·10	—0·4807
	Juni 29	— 140	+ 25·99	+ 26·28	+ 7 34·47	+ 7·61	+0·38	+ 15·74	—0·3884
	Aug. 8	— 100	+ 10·81	+ 13·01	+ 5 12·56	+ 6·01	+0·25	+ 10·67	—0·2731
	Sept. 17	— 60	+ 2·34	+ 4·46	+ 2 56·03	+ 3·70	+0·12	+ 5·68	—0·1550
	Oct. 27	— 20	— 0·38	+ 0·47	+ 53·92	+ 1 28	+0·03	+ 1·62	—0·0474
	Dec. 6	+ 20	+ 1·31	+ 0·43	— 48·70	— 1·24	—0·02	— 1·39	+0·0426
1875	Jan. 15	+ 60	+ 6·09	+ 3·61	— 2 10·28	— 3·54	—0·04	— 3·65	+0.1129
	Feb. 24	+ 100	+ 12·88	+ 9·21	— 3 11·76	— 5·48	—0·03	— 5·57	+0·1638
	Apr. 5	+ 140	+ 20 77	+ 16·48	— 3 55·45	— 6·98	+0·01	— 7·57	+0·1971
	Mai 15	+ 180	+ 29·09	+ 24·77	— 4 24·39	— 8·03	+0·04	— 9·98	+0·2149

0^h mittl. Zeit Berlin	$t-t_0$	ΔL_1	ΔL_2	$\Delta\pi$	$\Delta\Omega$	Δi	$\Delta\varphi$	$\Delta\mu$
1875 Juni 24	+ 220	+ 37·30	+ 33.50	— 4 41·81	— 8 65	+0·06	— 13·02	+0·2196
Aug. 3	+ 260	+ 45·04	+ 42·19	— 4 50·85	— 8·89	+0·08	— 16·80	+0·2134
Sept. 12	+ 300	+ 52·01	+ 50·45	— 4 54·39	— 8·82	+0·08	— 21·36	+0·1983
Oct. 22	+ 340	+ 58·04	+ 57·97	— 4 54·97	— 8 50	+0·03	— 26·61	+0·1763
Dec. 1	+ 380	+1 3·02	+1 4·49	— 4 54·68	— 8·02	+0·04	— 32·50	+0·1491
1876 Jan. 10	+ 420	+1 6 90	+1 9·84	— 4 55·23	— 7·47	+0 13	— 38·88	+0·1180
Feb. 19	+ 460	+1 9·70	+1 13·90	— 4 57·87	— 6·64	+0·26	— 45·59	+0·0843
März 30	+ 500	+1 11·48	+1 16·57	— 5 3·51	— 6·52	—0·44	— 52·51	+0·0490
Mai 9	+ 540	+1 12·29	+1 17·80	— 5 12·74	— 6·33	—0·66	— 59·48	+0·0126
Juni 18	+ 580	+1 12·23	+1 17·57	— 5 25·89	— 6·45	—0·91	—1 6·41	—0·0243
Juli 28	+ 620	+1 11·34	+1 15·86	— 5 43·11	— 6·99	—1·19	—1 13·21	—0·0614
Sept. 6	+ 660	+1 9·69	+1 12·65	— 6 4·40	— 8·02	-1·49	—1 19·76	—0·0985
Oct. 16	+ 700	+1 7·24	+1 7·97	— 6 29·54	— 9·61	-1·80	—1 26·01	—0·1354
Nov. 25	+ 740	+1 4·06	+1 1·83	— 6 58·19	—11·82	—2·12	—1 31·88	—0·1717
1877 Jan. 4	+ 780	+1 0·15	+ 54·25	— 7 29·81	—14·63	—2·42	—1 37·31	—0·2070
Feb. 13	+ 820	+ 55·52	+ 45·29	— 8 3 64	—18·04	—2·70	—1 42·23	—0·2410
März 25	+ 860	+ 50·17	+ 35·00	— 8 38·82	—21·96	—2·94	—1 46·64	—0·2730
Mai 4	+ 900	+ 44·15	+ 23·48	— 9 14·29	—26·35	—3·13	—1 50·52	—0·3023
Juni 13	+ 940	+ 37·52	+ 10·86	— 9 48·95	—31·06	—3·27	—1 53·02	—0·3281
Juli 23	+ 980	+ 30·36	— 2·71	—10 21·74	—35·95	—3·34	—1 56·94	—0.3494
Sept 1	+1020	+ 22·77	— 17·02	—10 51·72	—40·85	—3·33	—1 59·72	—0·3652
Oct. 11	+1060	+ 14·91	— 31·83	—11 18·29	—45·60	—3·26	—2 2·45	—0·3744

1877 Nov. 20	+1100	+ 6·92	— 46·87	—11 41·29	—50·01	—3·12	—2 5·35	—0·3761
Dec. 30	+1140	— 0·98	— 1 1·81	—12 1·14	—53·90	—2·91	—2 8·64	—0·3695
1878 Feb. 8	+1180	— 8·59	—1 16·31	—12 18·87	—57·12	—2·66	—2 12·53	—0·3541
März 20	+1220	— 15·69	—1 30·02	—12 36·00	—59·56	—2·36	—2 17·13	—0·3298
Apr. 29	+1260	— 22·03	— 1 42·58	—12 54·35	—61·16	—2·04	—2 22·46	—0·2968
Juni 8	+1300	— 27·39	—1 53·67	—13 15·65	—61·29	—1·72	—2 28·42	—0·2563
Juli 18	+1340	— 31·54	— 2 3·00	—13 41·14	—61 86	—1·41	—2 34·81	—0·2096
Aug. 27	+1380	— 34·31	—2 10·38	—14 11·30	—61·14	—1·14	—2 41·34	—0·1588
Oct. 6	+1420	— 35·53	—2 15·68	—14 45·67	—59·91	—0·91	—2 47·74	—0·1060
Nov. 15	+1460	— 35·11	—2 18·87	—15 22·85	—58·36	—0·73	—2 53·75	—0·0535
Dec. 25	+1500	— 32·95	—2 20·00	—16 0·77	—56·70	—0·59	—2 59·24	—0·0038
1879 Feb. 3	+1540	— 29·06	—2 19·24	—16 36·95	—55·14	—0·20	—3 4·15	+0·0409
März 15	+1580	— 23·45	—2 16·83	—17 8·88	—53·86	—0·46	—3 8·65	+0·0785
Apr. 24	+1620	— 16·21	—2 13·08	—17 34·24	—52·99	—0·44	—3 12·85	+0 1072
Juni 3	+1660	— 7·45	—2 8·39	—17 51·16	—52·62	—0·43	—3 17·20	+0·1253
Juli 13	+1700	+ 2·63	—2 3·21	—17 58·41	—52·78	—0·43	—3 22·09	+0·1313
Aug. 22	+1740	+ 13·82	—1 58·07	—17 55·40	—53·44	—0·42	—3 27·99	+0·1235
Oct. 1	+1780	+ 25·84	—1 53·53	—17 42·31	—54·51	—0·39	—3 35·44	+0·1008
Nov. 10	+1820	+ 38·33	—1 50·23	—17 20·03	—55·84	—0·32	—3 44·97	+0·0616
Dec. 20	+1860	+ 50·90	—1 48·84	—16 50·21	—57·25	—0·23	—3 57·14	+0·0046
1880 Jan. 29	+1900	+ 63·04	—1 50·12	—16 15·20	—58·52	—0·13	—4 42·46	—0·0716
März 9	+1940	+ 74·11	—1 54·85	—15 38·04	—59·42	—0·04	—4 31 49	—0·1683

Die Verbesserung der Elemente, wie dieselbe nunmehr mit Rücksicht auf die eben ermittelten Störungen vorgenommen werden soll, beruht auf der Voraussetzung, dass die zu erwartenden Änderungen der Elemente

genügend klein, also ohne wesentlichen Einfluss auf die Grösse der Störungen sein werden, das heisst, dass eine Störungsrechnung, die man neuerdings mit den verbesserten Elementen durchführen würde, dieselben oder wenigstens nahezu dieselben Resultate ergeben würde, wie sie mit den provisorischen Elementen erhalten wurden, und wie sie oben in der Tafel IV zusammengestellt sind.

Bezeichnet man mit L_0, M_0, π_0, Ω_0, i_0, φ_0, μ_0 diese provisorischen Elemente, so wird man für jeden Normalort das der Epoche desselben entsprechende gestörte Elementensystem nach dem Schema:

$$\left.\begin{aligned} L &= L_0+\mu_0(t-t_0)+\Delta L \\ M &= M_0+\mu_0(t-t_0)+\Delta L-\Delta\pi \\ \pi &= \pi_0+\Delta\pi \\ \Omega &= \Omega_0+\Delta\Omega \\ i &= i_0+\Delta i \\ \varphi &= \varphi_0+\Delta\varphi \\ \mu &= \mu_0+\Delta\mu, \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

wobei t die Epoche des Normalortes und t_0 die Osculationsepoche jener provisorischen Elemente bezeichnet, zu bilden, und mit dem so gewonnenen Systeme die geocentrischen Coordinaten des Normalortes darzustellen haben. Die Fehler, welche sich auf diese Art in der Darstellung der Normalorte zeigen, werden dann die Grundlage für die Ermittlung eines Systems von Correctionsgrössen dL, $d\pi$, $d\Omega$, di, $d\varphi$, $d\mu$ für die Elemente sein, welche Correctionsgrössen so zu bestimmen sind, dass jeder beliebige der Normalorte durch das auf seine Epoche bezügliche System:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= (L_0+dL)+(\mu_0+d\mu)(t-t_0)+\Delta L \\ M_1 &= (M_0+dM)+(\mu_0+d\mu)(t-t_0)+\Delta L-\Delta\pi \\ \pi_1 &= (\pi_0+d\pi)+\Delta\pi \\ \Omega_1 &= (\Omega_0+d\Omega)+\Delta\Omega \\ i_1 &= (i_0+di)+\Delta i \\ \varphi_1 &= (\varphi_0+d\varphi)+\Delta\varphi \\ \mu_1 &= (\mu_0+d\mu)+\Delta\mu, \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

in welchem $dM = dL-d\pi$ ist, vollkommen dargestellt wird.

Um die den Epochen der einzelnen Normalorte entsprechenden Elementensysteme nach dem Schema (12) aufzustellen, sind die Störungen für diese Epochen der Tafel IV mittelst Interpolation zu entnehmen, und mit dem Systeme der Ausgangselemente zu verbinden, wobei auf den Umstand Rücksicht zu nehmen ist, dass sich die Normalorte I, II, III, IV auf das mittlere Äquinoctium 1870·0, dagegen V und VI auf das Äquinoctium 1880·0 beziehen; das System der hier mehrfach als Ausgangselemente bezeichneten provisorischen Elemente (pag. 351) ist daher für die ersten vier Normalorte in der auf 1870·0, für die beiden letzten in der auf 1880·0 reducirten Form zu verwenden.

Die Resultate der Interpolation der Störungen aus Tafel IV finden sich in der nachstehenden Zusammenstellung, in welcher der Übersichtlichkeit wegen die Ausgangselemente selbst, dann alle zur Bildung des Schema (12) für die einzelnen Normalorte nöthigen Zahlen, endlich die für die Epochen der Normalorte resultirenden Elementensysteme aufgenommen sind.

Ausgangselemente:

(114) Cassandra.

Mittlere Ekliptik	1870·0	1880·0
Epoche und Osculation t_0	1874 Nov. 16·0	1874 Nov. 16·0
L_0	224°46'29"99	224°54'52"38
M_0	71 51 17·69	71 51 17·69
π_0	152 55 12·30	153 3 34·69
Ω_0	164 21 21·90	164 29 35·82
i_0	4 54 31·40	4 54 26·70
φ_0	8° 4'12"00	
μ_0	810"71944.	

Ekliptikale Störungen und Elemente für die Epochen der Normalorte.

	1870·0				1880·0	
Normalort	I	II	III	IV	V	VI
Epoche t	1871 Juli 26·5	1871 Oct. 11·5	1872 Nov. 1·5	1874 Feb. 12·5	1875 Juli 28·5	1876 Oct. 8·5
$t-t_0$	−1208·5	−1131·5	−744·5	−276·5	+254·5	+692·5
$\mu_0(t-t_0)$	−272° 9′14″44	−254°48′49″05	−167°39′40″62	−62°16′ 3″93	+57°18′48″09	+155°57′ 3″21
ΔL	+ 5 19·05	+ 4 38·44	+ 3 53·12	+ 3 35·76	+ 1 25·03	+ 2 16·71
$\Delta\pi$	+ 13 48·46	+ 14 9·86	+ 19 15·62	+ 14 2·94	− 4 49·97	− 6 24·55
$\Delta\Omega$	+ 10·78	+ 6·49	+ 15·71	+ 8·16	− 8·88	− 9·27
Δi	− 5·09	− 4·11	− 0·98	+ 0·29	+ 0·08	− 1·74
$\Delta\varphi$	− 2 52·13	− 2 35·73	− 1 31·72	+ 7·73	− 16·23	− 1 24·84
$\Delta\mu$	−0″3999	−0″3207	−0″0852	−0″4940	+0″2148	−0″1285
L	312°42′34″60	330° 2′19″38	57°10′42″49	162°33′51″82	282°15′ 5″50	20°54′12″30
M	159 33 33·84	176 52 57·22	263 56 14·57	9 24 36·58	129 16 20·78	227 57 2·16
π	153 9 0·76	153 9 22·16	153 14 27·92	153 9 15·24	152 58 44·72	152 57 10·14
Ω	164 21 32·68	164 21 28·39	164 21 37·61	164 21 30·06	164 29 26·94	164 29 25·55
i	4 54 26·31	4 54 27·29	4 54 30·42	4 54 31·69	4 54 26·78	4 54 24·96
φ	8 1 19·87	8 1 36·27	8 2 40·28	8 4 19·73	8 3 55·77	8 2 47·16
μ	810″31954	810″39874	810″80464	810″22544	810″93424	810″59094

Den in der vorangehenden Zusammenstellung enthaltenen Störungswerthen und Elementensystemen liegt als Fundamentalebene die Ekliptik zu Grunde, und es könnte mit den für die Epochen der einzelnen Normalorte in dieser Art ermittelten Elementen sofort die geocentrische Darstellung der Normalorte in der bekannten Weise gerechnet werden.

Wenn man indess, wie es hier der Fall ist, die Elementenverbesserung auf die Darstellung geocentrischer äquatorealer Coordinaten (Rectascensionen und Declinationen) gründen will, so ist es einfacher, für die ganze Rechnung gleich als Fundamentalebene den Äquator einzuführen, und in diesem Sinne mögen für den Äquator rücksichtlich derjenigen Elemente, die mit der Fundamentalebene sich ändern, folgende Bezeichnungen gelten:

für die Ausgangselemente: $L'_0,\ \pi'_0,\ \Omega'_0,\ i'_0$
für beliebige Elemente: $L',\ \pi',\ \Omega',\ i'$
für die äquatorealen Störungen: $\Delta L',\ \Delta\pi',\ \Delta\Omega',\ \Delta i'$.

Das oben für ekliptikale Elemente aufgestellte Schema (12) wird demnach, wenn der Äquator als Fundamentalebene gilt, die Gestalt haben:

$$\left.\begin{aligned} L' &= L'_0+\mu_0(t-t_0)+\Delta L' \\ M &= M_0+\mu_0(t-t_0)+\Delta L'-\Delta\pi' \\ \pi &= \pi'_0+\Delta\pi' \\ \Omega' &= \Omega'_0+\Delta\Omega' \\ i' &= i'_0+\Delta i' \\ \varphi &= \varphi_0+\Delta\varphi \\ \mu &= \mu_0+\Delta\mu \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

und da hiebei die mittlere Anomalie M als Element nicht von der Fundamentalebene abhängig ist, sondern bei gleicher Epoche für ein ekliptikales Elementensystem denselben Werth hat, wie für das entsprechende äquatoreale System, so folgt:

$$\Delta L'-\Delta\pi' = \Delta L-\Delta\pi,$$

das heisst

$$\Delta L' = \Delta L + \Delta\pi' - \Delta\pi$$

als eine Relation, die später benützt wird.

Durch directe Übertragung der obigen ekliptikalen Ausgangselemente π_0, Ω_0, i_0, sowie der in der vorangehenden Zusammenstellung für die Epochen der Normalorte gegebenen ebenfalls auf die Ekliptik bezüglichen Elemente π, Ω, i auf den Äquator als Fundamentalebene, und unter Benützung der Relationen

$$L_0' = M_0 + \pi_0', \quad L' = M + \pi'$$

für die Ermittlung der Elemente L_0' und L' hat sich für den Äquator die folgende, der obigen analoge Zusammenstellung von Elementensystemen ergeben, welche ebenfalls ganz vollständig angesetzt ist:

Ausgangselemente.

(114) **Cassandra.**

Mittlerer Äquator	1870·0	1880·0
Epoche und Osculation t_0	1874 Nov. 16·0	1874 Nov. 16·0
L_0'	225° 2′51″·44	225°11′ 5″·13
M_0	71 51 17·69	71 51 17·69
π_1'	153 11 33·75	153 19 47·44
Ω_0'	4 6 41·44	4 4 33·72
i_0'	18 46 24·29	18 46 9·96

φ....8°4′12″·00

μ....810″·71944.

Äquatoreale Elemente und Störungen für die Epochen der Normalorte.

	1870·0				1880·0	
Normalort	I	II	III	IV	V	VI
Epoche t	1871 Juli 26·5	1871 Oct. 11·5	1872 Nov. 1·5	1874 Feb. 12·5	1875 Juli 28·5	1876 Oct. 8·5
$t-t_0$	−1208·5	−1131·5	−744·5	−276·5	+254·5	+692·5
$\mu_0(t-t_0)$	−272° 9′14″44	−254°48′49″05	−267°39′40″62	− 62°16′ 3″93	+ 57°18′44″09	+155°57′ 3″21
L'	312 58 55·61	330 18 40·50	57 27 3·64	162 50 13·15	282 31 18·41	21 10 25·12
M	159 33 33·84	176 52 57·22	263 56 14·57	9 24 36·58	129 16 20·78	227 57 2·16
π'	153 25 21·77	153 25 43·28	153 30 49·07	153 25 36·57	153 14 57·63	153 13 22·96
Ω'	4 6 33·47	4 6 35·55	4 6 36·49	4 6 39·69	4 4 36·05	4 4 34·51
i'	18 46 28·77	18 46 27·99	18 46 24·78	18 46 23·80	18 46 10·12	18 46 11·88
φ	8 1 19·87	8 1 36·27	8 2 40·28	8 4 19·73	8 3 55·77	8 2 47·16
μ	810″31954	810″39874	810″80464	810″22544	810″93424	810″59094
$\Delta L'$	+ 5′18″61	+ 4′38″11	+ 3′52″82	+ 3′25″64	+ 1′25″19	+ 2′16″78
$\Delta\pi'$	+ 13 48·02	+ 14 9·53	+ 19 15·32	+ 14 2·82	− 4 49·81	− 6 24·46
$\Delta\Omega'$	− 7·97	− 5·89	− 4·95	− 1·75	+ 2·33	+ 0·79
$\Delta i'$	+ 4·48	+ 3·70	+ 0·49	− 0·49	+ 0·16	+ 1·92
$\Delta\varphi$	− 2 52·13	− 2 35·73	− 1 31·72	+ 7·73	− 16·23	− 1 24·84
$\Delta\mu$	−0″3999	−0″3207	+0″0852	−0″4940	+0″2148	−0″1285

Die Zahlen dieser letzten Zusammenstellung liegen der nunmehr durchzuführenden Darstellung der Normalorte und der Verbesserung der Ausgangselemente zu Grunde; rücksichtlich der in dieser Zusammenstellung angesetzten äquatorealen Störungen $\Delta L'$, $\Delta\pi'$, $\Delta\Omega'$, $\Delta i'$ ist zu bemerken, dass diese Werthe sich aus den unmittelbar voranstehenden Elementensystemen, nachdem dieselben durch directe Umsetzung der entsprechenden ekliptikalen Systeme erhalten worden waren, einfach nach dem Schema

$$\Delta\pi' = \pi' - \pi_0'$$
$$\Delta\Omega' = \Omega' - \Omega_0'$$
$$\Delta i' = i' - i_0''$$
$$\Delta L' = \Delta L + \Delta\pi' - \Delta\pi$$

ergeben haben.

Um jedoch die Rechnungsoperationen, welche zu den für die folgenden Rechnungen fundamentalen Zahlen der letzten Zusammenstellung geführt haben, einer scharfen Prüfung zu unterziehen, habe ich die äquatorealen Störungswerthe nochmals unabhängig und zwar durch directe Umsetzung aus den ekliptikalen Werthen abgeleitet, wodurch die Umsetzung der obigen Elementensysteme streng mitgeprüft erscheint.

Entnimmt man nämlich der Rechnung für die Verwandlung der ekliptikalen Ausgangselemente in die entsprechenden äquatorealen Elemente die Zahlenwerthe:

	1870·0	1880·0
$\sin i_0$	8·93231	8·93220
$\mathrm{tg}\frac{1}{2} i_0$	8·63208	8·63197
$\sin i_0''$	9·50762	9·50753
$\mathrm{tg}\frac{1}{2} i_0''$	9·21830	9·21821
σ_0	160°31′2″	160°41′15″

so erhält man aus den für die Ekliptik geltenden Störungswerthen ΔL, $\Delta\pi$, $\Delta\Omega$, Δi die äquatorealen Störungen direct durch das Formelsystem:

$$\left.\begin{aligned} p\sin Q &= \Delta\Omega\sin i_0 \\ p\cos Q &= \Delta i \\ P &= Q + \sigma_0 \\ \delta\pi &= \mathrm{tang}\tfrac{1}{2} i_0 (\Delta\Omega\sin i_0) - \mathrm{tang}\tfrac{1}{2} i_0' (p\sin P) \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta\Omega' &= \frac{p \sin P}{\sin i_0''} \\ \Delta i'' &= p \cos P \\ \Delta\pi' &= \Delta\pi - \delta\pi \\ \Delta L' &= \Delta L - \delta\pi, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

welches die einfache Umkehrung eines an bekannter Stelle (Oppolzer, Lehrb. f. Bahnbest. Bd. II, pag. 395, IX) abgeleiteten Systems von Ausdrücken ist. Die Rechnung nach diesen Formeln hat für $\Delta\Omega'$, $\Delta i''$, $\Delta\pi'$ und $\Delta L'$ dieselben Werthe ergeben, wie die obige Rechnung, so dass die zuletzt vorgenommenen Operationen genügend geprüft sind.

Die Darstellung der Normalorte mit den zugehörigen äquatorealen Elementensystemen führt zu folgenden Resultaten:

Normalort	I	II	III	IV	V	VI
v	164°21' 3'14	177°37'22'77	248°28'11'16	12°35' 4'70	140°24' 6'63	217°21'11'70
$u' = v + \omega'$	313 39 51·44	326 56 30·50	37 52 23·74	161 54 1·58	289 34 28·20	6 30 0·16
$\log r$	0·4816996	0·4842438	0·4417017	0·3631734	0·4684012	0·4701054
x	+2·2366649	+2·6622344	+2·0618355	−2·2364979	+1·1691043	+2·9030400
y	−1·9211571	−1·3877879	+1·7594996	+0·5197851	−2·5464316	+0·5240834
z	−0·7058724	−0·5353967	+0·5463059	+0·2307226	−0·8914178	+0·1075257
Rechnung: α	325°42'23'82	315°41'47'50	42° 8'33'74	180°28'20'74	287°58'42'67	7°56' 4'63
Rechnung: δ	− 10 17 25·87	− 15 23 10·87	+ 9 29 56·54	+ 0 0 7·01	− 16 39 14·59	− 0 4 3·55
$\log \rho$	0·3145627	0·3952640	0·2499654	0·1573634	0·2926748	0·2928220
$\log \cos \delta$	9·99396	9·98415	9·99400	0·00000	9·98139	0·00000

Der Vergleich dieser aus den gestörten Elementen resultirenden geocentrisehen Coordinaten α und δ mit den Normalorten gibt, im Sinne „Normalort—Rechnung" angesetzt, das nachstehende Fehlerverzeichniss, welches zur Grundlage der Verbesserung der Ausgangselemente angenommen werden soll:

	$d\alpha$	$\delta\alpha \cos\delta$	$d\delta$	
Normalort I.	— 8'37'29	2_n70769	—2'12'14	
II.	— 7 19·16	2_n62677	—1 26·43	
III.	—11 50·63	2_n84564	—3 11·72	(a)
IV.	+ 0 22·65	1·35507	—0 12·05	
V.	+ 3 51·86	2·34661	+0 20·30	
VI.	+ 0 53·54	1·72868	+0 10·77.	

Bevor jedoch an diese Elementenverbesserung gegangen wird, sollen die Normalorte noch unter Zugrundelegung eines nach ganz anderen Principien berechneten Systems von Störungsgrössen, welche man als Störungen der polaren Coordinaten des Planeten bezeichnen kann, dargestellt werden, so dass hiedurch alle auf die Elementenstörungen bezüglichen Rechnungen ihrem ganzen Umfange nach eine durchgreifende Prüfung erfahren.

Coordinatenstörungen.

Der Berechnung der Coordinatenstörungen liegt dasselbe System von Bahnelementen des gestörten Planeten zu Grunde, nach welchem die Elementenstörungen berechnet wurden, nämlich das System L_0, M_0, π_0, i_0, Ω_0, φ_0, μ_0, und es sollen alle jene Grössen, welche in den folgenden Formeln aus diesem Elementensysteme sich unmittelbar ergeben, das heisst also alle der ungestörten Bewegung des Planeten angehörigen Grössen ebenfalls mit dem Nullindex versehen werden.

Als Störungen polarer Coordinaten nun wurden aus den ganz oben im Eingange der vorliegenden Arbeit erwähnten Gründen für die fünf ersten Oppositionen des Planeten neben den Elementenstörungen die Grössen

$$\Delta M,\ \Delta\omega,\ \nu,\ z$$

berechnet, für welche das nachstehende Formelsystem als Definition gelten kann, da dasselbe die gestörten heliocentrischen

Coordinaten r und (u) als Functionen der ungestörten Elemente und der vorläufig als berechnet vorausgesetzten Störungen gibt:

$$\left.\begin{aligned} M &= M_0 + \mu_0(t - t_0) + \Delta M \\ M &= E - \frac{\sin\varphi_0}{\text{arc } 1''}\sin E \\ ((r))\sin V &= a_0\cos\varphi_0\sin E \\ ((r))\cos V &= a_0(\cos E - \sin\varphi_0) \\ \omega &= \pi_0 - \Omega_0 \\ (u) &= V + \omega_0 + \Delta\omega \\ (r) &= ((r))(1+\nu) \\ r &= (r)^2 + z^2 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Es entsprechen hier $((r))$ und V einer in die ungestörte Bahnebene verlegt gedachten, gestörten mittleren Anomalie und (r) stellt die Projection des wahren gestörten Radiusvector r auf die ungestörte Bahnebene dar; die drei letzten Relationen des eben gegebenen Formelsystems vermitteln also gleichsam den Übergang von der eben gemachten Fiction einer gestörten mittleren Anomalie in der ungestörten Bahn auf den wirklichen Ort des Planeten, und es stellt dabei z die Störung in der zur ungestörten Bahnebene senkrechten Coordinate vor.

Die wirkliche Berechnung der hier auftretenden Störungsgrössen ist nach den folgenden Formelgruppen vorgenommen worden, deren analytische Entwicklung hier selbstverständlich zu übergehen ist (vergl. Oppolzer, Lehrb. f. Bahnbest., Bd. II, Abschnitt *E*, pag. 257).

Im Anschlusse an das oben gelegentlich der Berechnung der Elementenstörungen gegebene Formelsystem (3) ist für jeden der beiden störenden Planeten zunächst zu rechnen:

$$\left.\begin{aligned} (\varkappa) &= (wk)10^7 m_1 \frac{a_0^2}{\sqrt{p_0^2}} \\ U &= r_0(\varkappa)U_0 \\ R &= (\varkappa)N \\ W &= (\varkappa)W_0, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

und falls die Rechnung nicht für jeden störenden Planeten

gesondert durchgeführt werden soll, sondern nur verlangt wird, dass die Schlussresultate die vereinigten Wirkungen der störenden Kräfte darstellen, so kann die Summation gleich hier für die Störungscomponenten ausgeführt werden, indem man die Summenausdrücke

$$\left.\begin{aligned}\Sigma(U) &= U\mathfrak{Q} + U\mathfrak{h}\\ \Sigma(R) &= R\mathfrak{Q} + R\mathfrak{h}\\ \Sigma(W) &= W\mathfrak{Q} + W\mathfrak{h}\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

bildet. Wird dann noch ein System von Hilfsgrössen mittelst der Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}((U)) &= \int \Sigma(U)\,dt\\ ((R)) &= \Sigma(R) + \frac{2(wk)\sqrt{p_0}}{r_0^4}((U))\\ \frac{d(Ns)}{dt} &= ((R))(\cos E_0 - \sin\varphi_0)\\ \frac{d(Nc)}{dt} &= ((R))\cos\varphi_0 \sin E_0\\ \frac{d(Zs)}{dt} &= \Sigma(W)(\cos E_0 - \sin\varphi_0)\\ \frac{d(Zc)}{dt} &= \Sigma(W)\cos\varphi_0 \sin E^0\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

berechnet, indem man die Werthe von *Ns*, *Nc*, *Zs*, *Zc* aus den nach diesen Formeln leicht sich ergebenden numerischen Werthen der Differentialquotienten durch mechanische Quadratur bestimmt, so hat man dann schliesslich:

$$\left.\begin{aligned}\nu &= Ns\cos\varphi_0 \sin E_0 - Nc(\cos E_0 - \sin\varphi_0)\\ z &= Zs\cos\varphi_0 \sin E_0 - Zc(\cos E_0 - \sin\varphi_0)\\ \Delta M &= -\frac{2w\mu_0}{10^7}\int \nu\,dt\\ \Delta w &= -\frac{(wk)\sqrt{p_0}}{a_0^2 10^7 \operatorname{arc} 1''}\int \frac{((U))}{r_0^2}\,dt.\end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Die constanten Zahlencoëfficienten sind hier so angesetzt, dass ΔM und $\Delta\omega$ in Bogensecunden, ν und z in Einheiten der siebenten Decimale erhalten werden.

Für die Anwendung auf den vorliegenden Fall haben diese Zahlencoëfficienten folgende Werthe:

$$
\begin{array}{ll}
(\varkappa)\mathfrak{A} \ldots . 4\cdot 462789 & \dfrac{(wk)\sqrt{p_0}}{a^2 10^7 \operatorname{arc} 1''} \ldots . 7\cdot 506607 \\
(\varkappa)\mathfrak{h} \ldots . 3\cdot 93883 & \omega_0(1870\cdot 0) \ldots . 348^\circ 33' 50'' 40 \\
2(wk)\sqrt{p_0} \ldots . 0\cdot 348060 & \omega_0(1880\cdot 0) \ldots . 348\ 33\ 58\cdot 87. \\
-\dfrac{2w\mu_0}{10^7} \ldots . 7^n 811961 &
\end{array}
$$

Als Osculationsepoche wurde für die Ermittlung der Coordinatenstörungen selbstverständlich dieselbe Zeitepoche angenommen, wie oben bei der Berechnung der Elementenstörungen, und die Anfangsconstanten für die Bildung der summirten Reihen ebenfalls gemäss der Bedingung bestimmt, dass die Störungen für die Zeit der Osculation der Elemente sämmtlich verschwinden sollen. Nach der ersten der oben gegebenen Formeln (9) hat man dann als Anfangsconstanten anzunehmen

$$
\left.\begin{array}{rl}
\text{für } ((U)) \ldots . & -21\cdot 9 \\
Ns \ldots . & -\ 0\cdot 2 \\
Nc \ldots . & +\ 8\cdot 5 \\
Zs \ldots . & -\ 0\cdot 2 \\
Zc \ldots . & -\ 0\cdot 1
\end{array}\right\} \text{in Einheiten der siebenten Decimale.}
$$

$$
\left.\begin{array}{rl}
\Delta M \ldots . & 0''000 \\
\Delta w \ldots . & +0.049
\end{array}\right\} \text{in Bogensecunden.}
$$

Die Resultate der auf diese Art durchgeführten Störungsrechnung sind in den folgenden beiden Tafeln zusammengestellt, von denen Tafel V der Hauptsache nach den Verlauf der Rechnung zeigt, während Tafel VI in ihren vier Hauptcolumnen die Schlussresultate der Rechnung, nämlich die Störungswerthe selbst gibt.

Tafel V.

0h mittl. Zeit Berlin	$\Sigma(U)$	$\Sigma(R)$	$\Sigma(W)$	$((U))$	Ns	Nc	Zs	Zc
1871 Juni 5	−1419·1	+170·8	−68·5	+22165·2	−4077·8	−4013·4	−762·9	+ 19·6
Juli 15	−1530·6	+151·5	−66·0	+20688·2	−4852·9	−3714·6	−692·1	− 7·6
Aug. 24	−1616·9	+132·5	−63·3	+19112·4	−5583·4	−3531·1	−621·0	− 25·5
Oct. 3	−1679·5	+113·5	−60·3	+17462·3	−6256·3	−3446·0	−551·2	− 34·2
Nov. 12	−1719·4	+ 94·5	−57·1	+15761·0	−6861·9	−3442·4	−484·2	− 34·6
Dec. 22	−1737·5	+ 75·5	−53·6	+14030·8	−7393·4	−3503·0	−421·6	− 27·3
1872 Jan. 31	−1734·3	+ 56·1	−50·0	+12293·1	−7846·4	−3610·9	−364·5	− 13·7
März 11	−1709·6	+ 36·2	−46·2	+10569·3	−8219·1	−3748·8	−313·6	+ 5·2
Apr. 20	−1662·4	+ 15·6	−42·1	+ 8881·4	−8512·1	−3900·4	−269·7	+ 28·0
Mai 30	−1590·8	− 6·3	−37·8	+ 7252·6	−8728·5	−4049·4	−233·2	+ 53·1
Juli 9	−1492·4	− 29·2	−33·4	+ 5708·6	−8874·0	−4179·4	−204·2	+ 79·1
Aug. 18	−1363·8	− 53·4	−38·7	+ 4277·8	−8957·6	−4276·4	−182·5	+101·6
Sept. 27	−1200·6	− 78·9	−23·6	+ 2992·6	−8991·6	−4328·2	−167·5	+128·0
Nov. 6	− 997·7	−105·2	−18·3	+ 1889·8	−8991·3	−4325·5	−158·3	+147·8
Dec. 16	− 748·9	−131·5	−12·7	+ 1012·4	−8974·8	−4265·4	−153·9	+163·0
1873 Jan. 25	− 448·2	−156·0	− 6·7	+ 409·3	−8960·8	−4152·7	−152·6	+172·6
März 6	− 89·3	−175·8	− 0·2	+ 135·5	−8965·8	−4001·6	−152·6	+176·3
Apr. 15	+ 332·3	−186·3	+ 6·8	+ 251·9	−8998·3	−3839·6	−151·8	+173·0
Mai 25	+ 815·0	−180·3	+14·3	+ 820·6	−9050·7	−3704·1	−148·2	+163·9
Juli 4	+1346·6	−147·9	+22·1	+ 1898·4	−9089·9	−3638·1	−139·3	+149·9
Aug. 13	+1891·7	− 76·2	+29·9	+ 3518·7	−9048·4	−3678·8	−123·5	−132·9

1873	Sept. 22	+ 2375·5	+ 47·8	+37·0	+ 5662·0	- 8824·6	−3835·5	— 99·5	+115·7
	Nov. 1	+2667·4	+230·4	+41·9	+ 8206·4	-8299·0	-4065·7	— 68·0	+101·7
	Dec. 11	+2584·2	+458·2	+42·6	+10871·8	−7376·3	−4259·8	— 32·2	+ 93·9
1874	Jan. 20	+1956·1	+685·5	+37·1	+13191·6	−6059·7	−4259·2	+ 2·5	+ 93·6
	März 1	+ 769·7	+837·8	+24·7	+14594·3	−4183·1	−3927·2	+ 28·9	+ 98·9
	Apr. 10	— 716·1	+ 852·5	+ 7·5	+14628·6	−2908·7	−3236·8	+ 42·0	+104·3
	Mai 20	−2065·7	+726·5	— 9·6	+13209·0	−1603·9	−2316·1	+ 41·3	+103·4
	Juni 29	- -2940·9	+517·6	−22·7	+10659·1	— 715·9	−1382·8	+ 31·3	+ 92·5
	Aug. 8	−3262·0	+297·6	- 30·0	+ 7514·1	— 232·7	— 632·3	+ 18·3	+ 73·8
	Sept. 17	−3144·0	+112·6	−32·4	+ 4281·5	— 40·1	— 166·4	+ 7·4	+ 44·6
	Oct. 27	−2755·1	— 22·1	−31·2	+ 1316·0	+ 0·3	+ 7·6	+ 1·2	+ 13·8
	Dec. 6	−2236·1	−109·8	−27·8	— 1185·9	+ 0·5	— 58·6	0·0	— 14·1
1875	Jan. 15	−1678·8	−160·5	−23·5	— 3143·8	+ 30·5	— 290·2	+ 3·1	— 39·5
	Feb. 24	−1135·8	−184·5	−18·8	— 4548·6	+ 122·8	— 615·0	+ 8·9	— 60·2
	Apr. 5	— 633·4	−190·3	−14·1	— 5429·0	+ 282·8	— 971·4	+ 15·8	— 75·8
	Mai 15	— 187·2	−183·7	— 9·5	— 5834·3	+ 499·4	−1314·6	+ 22·4	— 86·4
	Juni 24	+ 200·5	−169·4	— 5·2	— 5822·8	+ 752·9	−1616·5	+ 27·5	— 92·5
	Aug. 3	+ 528·0	−150·5	— 1·0	- 5453·5	+1021·0	−1861·6	+ 30.0	— 94·8
	Sept. 12	+ 796·2	-129·2	+ 3·1	— 4786·5	+1282·4	−2045·4	+ 29·0	— 94·2
	Oct. 22	+1007 8	-106·7	+ 7·0	— 3880·0	+1518·3	−2170·5	+ 24·0	— 91·6
	Dec. 1	+1167·3	— 84·4	+10·7	--- 2788·3	+1713·5	−2245·2	+ 14·6	— 88·1
1876	Jan. 10	+1281·1	— 63·3	+14·6	— 1560·6	+1857·7	−2281·3	+ 0·6	— 84·7
	Feb. 19	+1356·5	— 43·7	+18·6	— 238·9	+1944·4	−2292·1	— 18·1	— 82·5
	März 30	+1401.5	— 25·6	+22·6	+ 1142·2	+1970·6	−2292·8	— 41·6	— 82·5
	Mai 9	+1424·0	— 9·1	+26·6	+ 2556·6	+1936·2	−2297·7	— 69·4	— 85·4
	Juni 18	+1429·6	+ 6·4	+30·6	+ 3984·6	+1843·3	−2321·0	−100·9	— 93·6
	Juli 28	+1422·6	+ 21·2	+34·5	+ 5411·6	+1695·9	−2377·3	−135·3	−106·5
	Sept. 6	+1404·9	+ 35·9	+38·3	+ 6826·3	+1500·0	−2481·1	−171·3	−125·6
	Oct. 16	+1376·2	+ 51·0	+41·8	+ 8217·9	+1263·8	−2647·1	−207·6	−151·0
	Nov. 25	+1334·7	+ 67·1	+45·1	+ 9574·4	+ 998·0	−2890·0	−242·7	−183·0

Tafel VI.
Coordinaten-Störungen.

0^h mittl. Zeit Berlin	log $(\cos E_0 - \sin\gamma_0)$	log $\cos\gamma_0 \sin E_0$	ΔM	$\Delta\omega$	ν	z
1871 Juni 5	$0_n009642$	9·668815	+546″21	−118″48	−6006	−336
Juli 15	$0_n033161$	9·532258	+548·16	−110·92	−5662	−244
Aug. 24	$0_n048388$	9·320046	+619·21	−103·99	−5114	−158
Oct. 3	$0_n055991$	8·867939	+650·10	− 97·66	−4382	− 80
Nov. 12	$0_n056288$	$8_n796736$	+675·70	− 91·94	−3489	− 9
Dec. 22	$0_n049290$	$9_n296624$	+695·06	− 86·78	−3460	+ 53
1872 Jan. 31	$0_n034707$	$9_n518532$	+707·38	− 82·20	−1322	+105
März 11	$0_n011903$	$9_n659371$	+712·03	− 78·18	− 101	+148
Apr. 20	$9_n979790$	$9_n759596$	+708·58	− 74·70	+1171	+182
Mai 30	$9_n936638$	$9_n834490$	+696·80	− 71·76	+2463	+205
Juli 9	$9_n879673$	$9_n891361$	+676·66	− 69·34	+3742	+214
Aug. 18	$9_n804273$	$9_n934126$	+648·37	− 67·42	+4922	+223
Sept. 27	$9_n702047$	$9_n964963$	+612·36	− 65 97	+6115	+219
Nov. 6	$9_n555373$	$9_n985020$	+569·33	− 64·97	+7132	+206
Dec. 16	$9_n315635$	$9_n994716$	+520·20	− 64·36	+7984	+186
1873 Jan. 25	$8_n694827$	$9_n993877$	+466·20	− 64·05	+8630	+159
März 6	9·037480	$9_n981733$	+408·78	− 63·94	+9033	+127
Apr. 15	9·422443	$9_n956796$	+349·62	− 63·86	+9162	+ 92
Mai 25	9·615088	$9_n916567$	+290·58	− 63·62	+8996	+ 55
Juli 4	9·737875	$9_n856871$	+233·59	− 62·89	+8527	+ 18
Aug. 13	9·821659	$9_n770311$	+180·59	− 61·40	+7772	− 15
Sept. 22	9·878619	$9_n642025$	+133·31	− 58·76	+6770	− 44
Nov. 1	9·914461	$9_n434118$	+ 93·15	− 54·66	+5594	− 65
Dec. 11	9·931988	$8_n975778$	+ 60·94	− 48·90	+4340	− 77
1874 Jan. 20	9·932380	8·935569	+ 36·78	− 41·57	+3123	− 80
März 1	9·915666	9·421070	+ 20·10	− 33·12	+2052	− 74
Apr. 10	9·880718	9·634606	+ 9·67	− 24·37	+1205	− 61
Mai 20	9·824837	9·765445	+ 3·91	− 16·24	+ 613	− 45
Juni 29	9·742493	9·853524	+ 1·22	− 9·50	+ 253	− 29
Aug. 8	9·621965	9·914268	+ 0·23	− 4·57	+ 74	− 16
Sept. 17	9·433892	9·955291	+ 0·01	− 1·53	+ 9	− 5
Oct. 27	9·065705	9·980873	0·00	− 0·16	− 1	0
Dec. 6	$8_n624937$	9·993572	0·00	− 0·14	− 2	− 1
1875 Jan. 15	$9_n300207$	9·994913	+ 0·08	− 1·13	− 28	− 5
Feb. 24	$9_n546929$	9·985698	+ 0·46	− 2·81	− 98	− 13
Apr. 5	$9_n696422$	9·966127	+ 1·47	− 4·90	− 221	− 23
Mai 15	$9_n800211$	9·935809	+ 3·45	− 7·16	− 399	− 35
Juni 24	$9_n876627$	9·893636	+ 6·75	− 9·42	− 627	− 48
Aug. 3	$9_n934327$	9·837489	+ 11·68	− 11·55	− 898	− 61
Sept. 12	$9_n978049$	9·763556	+ 18·47	− 13·43	−1201	− 73
Oct. 22	$0_n010629$	9 664753	+ 27·29	− 14·99	−1523	− 83
Dec. 1	$0_n033839$	9·526369	+ 38·23	− 16·17	−1851	− 90
1876 Jan. 10	$0_n048785$	9·310056	+ 51·29	+ 16·93	−2173	− 95
Feb. 19	$0_n056125$	8·838508	+ 66·38	− 17·24	−2474	− 95
März 30	$0_n056165$	$8_n829040$	+ 83·32	− 17·09	−2742	− 91
Mai 9	$0_n048906$	$9_n306936$	+101·85	− 16·45	−2964	− 81
Juni 18	$0_n034044$	$9_n524540$	+121·64	− 15·31	−3127	− 67
Juli 28	$0_n010931$	$9_n663494$	+142·26	− 13·65	−3219	− 47
Sept. 6	$9_n978460$	$9_n762629$	+163·22	− 11·46	−3220	− 20
Oct. 16	$9_n934872$	$9_n836787$	+183·95	− 8·71	−3146	+ 13
Nov. 25	$9_n877347$	$9_n893104$	+203·86	− 5·38	−2959	+ 52

Interpolirt man aus Tafel VI die Störungswerthe für die Epochen der Normalorte, so findet sich:

	ΔM	$\Delta\omega$	ν	z
I. 1871 Juli 26·5	+ 9′54″59	−1′48″87	−5524	−219
II. 1871 Oct. 11·5	+10 56·02	−1 36·40	−4205	− 64
III. 1872 Nov. 1·5	+ 9 34·50	−1 5·06	+7025	+208
VI. 1874 Feb. 12·5	+ 0 26·15	−0 36·69	+2470	− 77
V. 1875 Juli 28·5	+ 0 10·90	−0 11·26	− 859	− 59
VI. 1876 Oct. 8·5	+ 3 0·11	−0 9·27	−3169	+ 6;

mit diesen Störungswerthen ist nunmehr die Darstellung der Normalorte zu rechnen, wobei das Formelsystem (16) zur Verwendung kommt, und ausserdem nur noch Sorge zu tragen, dass die zur Bahn senkrechte Störung z entsprechend berücksichtigt wird. Am einfachsten geschieht dieses (vergl. Oppolzer, Lehrb. Bd. II, pag. 161) bei der Berechnung der rechtwinkligen Äquatorcoordinaten x, y, z des Planeten, indem man dieselbe mittelst der Relationen:

$$\left.\begin{aligned} x &= (r)\sin a \sin[A+(u)]+z\cos a \\ y &= (r)\sin b \sin[B+(u)]+z\cos b \\ z &= (r)\sin c \sin[C+(u)]+z\cos c \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

durchführt, wobei $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$, A, B, C die nach bekannten Formeln berechneten Gauss'schen Constanten sind, und die drei Cosinus sich mit Hilfe der Ausdrücke

$$\begin{aligned} \cos a &= +\sin\Omega_0 \sin i_0 \\ \cos b &= -\cos\Omega_0 \sin i_0 \cos\varepsilon - \cos i_0 \sin\varepsilon \\ \cos c &= -\cos\Omega_0 \sin i_0 \sin\varepsilon + \cos i_0 \cos\varepsilon \end{aligned}$$

ergeben, falls sich deren Werthe nicht direct mit genügender Genauigkeit aus den trigonometrischen Tafeln mittelst Übergang von $\sin a$, $\sin b$, $\sin c$ zu den entsprechenden Cosinuswerthen ergeben sollten.

Nimmt man

$$\left.\begin{aligned} m\sin M &= \cos\Omega_0 \sin i_0 \\ m\cos M &= \cos i_0, \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

so hat man einfach

$$\left.\begin{aligned}\cos a &= +\sin\Omega_0 \sin i_0\\ \cos b &= -m \sin(M+\varepsilon)\\ \cos c &= +m \cos(M+\varepsilon).\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

In der Anwendung auf den vorliegenden Fall und unter der Annahme der Werthe

$$1870{\cdot}0.....\varepsilon = 23°27'22''31$$
$$1880{\cdot}0.....\varepsilon = 23\ 27\ 17{\cdot}55$$

für die Schiefe der Ekliptik (dieselben Werthe wurden bereits oben bei der Verwandlung der ekliptikalen Elemente in äquatoreale zu Grunde gelegt) hat man also für die Darstellung der Normalorte die folgenden Relationen, in denen die Zahlenwerthe logarithmisch angesetzt sind:

Mittleres Äquinoctium 1870·0.

$$x = (r)\,9{\cdot}9998844 \sin\{254°24'38''39+(u)\} +8{\cdot}3631\,z$$
$$y = (r)\,9{\cdot}9763867 \sin\{164\ 51\ 31{\cdot}95+(u)\} +9_n5065\,z$$
$$z = (r)\,9{\cdot}5076217 \sin\{160\ 31\ 1{\cdot}91+(u)\} +9{\cdot}9763\,z$$

Mittleres Äquinoctium 1880·0.

$$x = (r)\,9{\cdot}9998864 \sin\{254°32'50''65+(u)\} +3{\cdot}8593\,z$$
$$y = (r)\,9{\cdot}9763946 \sin\{164\ 59\ 29{\cdot}73+(u)\} +9_n5064\,z$$
$$z = (r)\,9{\cdot}5075329 \sin\{160\ 41\ 14{\cdot}84+(u)\} +9{\cdot}9763\,z.$$

Die Darstellung der Normalorte führt damit zu nachstehenden Resultaten:

Normalort	I	II	III	IV	V	VI
$M_0+\mu_0(t-t_0)+\Delta M$	159°51'57'84	177°13'24'66	264°21'11'57	9°35'39'91	129°10'16'68	227°51'31'01
E	162 18 36·54	177 33 54·78	256 31 51·92	11 8 59·28	134 52 17·54	222 25 45·00
V	164 36 41·09	177 53 9·62	248 48 31·79	12 49 44·49	140 19 37·98	217 14 56·14
$V+\omega_0+\Delta\omega=(u)$	153 8 42·62	166 25 23·62	237 21 17·13	1 22 58·20	128 53 15·59	205 48 45·74
log $((r))$	0·4819393	0·4844262	0·4413973	0·3630657	0·4684386	0·4702429
log $(1+\nu)$	9·9997600	9·9998174	0·0003050	0·0001073	9·9999627	9·9998623
log (r)	0·4816993	0·4842438	0·4417023	0·3631730	0·4684013	0·4701052
α	325°42'24'76	315°41'48'21	42° 8'33'77	180°28'21'06	287°58'42'79	7°56' 4'18
δ	−10 17 25·62	−15 23 10·69	+9 29 56·55	+0 0 6·88	−16 39 14·80	−0 4 3·58
log ρ	0·3145626	0·3952638	0·2499665	0·1573631	0·2926749	0·2928217

Vergleicht man diese Resultate mit den Ergebnissen der Darstellung der Normalorte durch die Elementenstörungen (pag. 351), so zeigt sich eine nahezu vollständige Übereinstimmung, indem die Unterschiede in den Ergebnissen der beiden Rechnungen sämmtlich innerhalb einer Bogensecunde liegen; die Unterschiede sind nämlich die folgenden:

	in α	in δ		in α	in δ
I...	−0'94	−0'25	IV...	−0'32	+0'13
II...	−0·71	−0·18	V...	−0·12	+0·21
III...	−0·03	−0·01	VI...	+0·45	+0·03,

und zwar angesetzt in dem Sinne: „Darstellung mit Elementenstörungen — Darstellung mit Coordinatenstörungen“.

Elementenverbesserung.

I. Mit Rücksicht auf fünf Oppositionen (6 Normalorte).

Nach der durchgreifenden Prüfung, welche die oben in dem Fehlerschema (*a*) (pag. 352) enthaltenen Zahlen durch die Resultate der Berechnung der Elementenstörungen erfahren haben, kann endlich die Verbesserung der Ausgangselemente unternommen werden.

Hier liegen zunächst die äquatorealen Elemente L_0', π_0', Ω_0', i_0', φ_0, μ_0 zur Verbesserung vor, und die Verbesserungen dieser Elemente werden aus den durch die Fehler (*a*) gebotenen Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen sein. In Rücksicht auf letzteren Umstand nun ist es vortheilhaft, wie dieses Oppolzer im zweiten Bande seines Lehrbuches für Bahnbestimmungen vorschlägt, statt π_0' und φ_0 zwei andere Elemente Φ_0' und Ψ_0' mittelst der Relationen

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0' &= \frac{\sin\varphi_0}{\operatorname{arc} 1''} \sin\pi_0' \\ \Psi_0' &= \frac{\sin\varphi_0}{\operatorname{arc} 1''} \cos\pi_0' \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

einzuführen, da die Variationen in letzteren Elementen einen mehr linearen Zusammenhang mit den entsprechenden Variationen der geocentrischen Coordinaten zeigen, als dieses im Allgemeinen bei den Elementen π_0' und φ_0 der Fall ist; ausserdem ist noch $\Omega_0' \sin i'$ für Ω_0' eingeführt worden.

Die Umsetzung der beiden Elemente π_0' und φ_0 nach (23) gibt für den vorliegenden Fall

	1870.0	1880.0
Φ_0'	+13058·916	+12997·024
Ψ_0'	−25844·083	−25875·263

und die nunmehr zu verbessernden Elemente sind also in der Ordnung, in der dieselben in den nächsten Rechnungen immer zusammengestellt erscheinen werden: L_0', μ_0, Φ_0', Ψ_0', $\Omega_0' \sin i_0'$, i_0'.

Das Ziel der Verbesserung der Elemente ist die Aufsuchung desjenigen Elementensystems, welches die Fehler des Schema (*a*)

in den geocentrischen Coordinaten aller Normalorte gleichzeitig verschwinden macht; dieses System muss daher für die Epoche jedes der Normalorte die Rectascension α_n und die Declination δ_n des Normalortes als Resultat des mit Berücksichtigung der Störungen gemachten Überganges auf den geocentrischen Ort geben, während das Ausgangssystem unter Beiziehnng derselben Störungswerthe in dem Normalorte etwa die Rectascension α und die Declination δ ergeben hat, so dass gegen die Coordinaten α_n und δ_n des Normalortes die Fehler $\alpha_n - \alpha$ und $\delta_n - \delta$ übrig blieben; es sind also an die einzelnen Elemente des Ausgangssystems, hier an die Elemente L_0', μ_0, Φ_0', Ψ_0', $\Omega_0' \sin i_0'$, i_0' diejenigen verbessernden Incremente dL', $d\mu$, $d\Phi'$, $d\Psi'$, $d\Omega \sin i'$, di', anzubringen, welche zusammen die geocentrische Rectascension des beliebigen Normalortes um den Betrag $\alpha_n - \alpha = d\alpha$, und die geocentrische Declination um den Betrag $\delta_n - \delta = d\delta$ ändern.

Jede geocentrische Coordinate ist als Function aller Bahnelemente, daher jede Variation einer solchen Coordinate als Function entsprechender Variationen der Elemente zu betrachten; man hat also für jeden Rectascensionsfehler $d\alpha$ eine Gleichung von der Form:

$$\left.\begin{aligned} d\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial L'} dL' + \frac{\partial\alpha}{\partial\mu} d\mu + \frac{\partial\alpha}{\partial\Phi'} d\Phi' + \frac{\partial\alpha}{\partial\Psi'} d\Psi' + \\ + \frac{\partial\alpha}{\partial\Omega' \sin i'} d\Omega' \sin i' + \frac{\partial\alpha}{\partial i'} di' \end{aligned}\right\}$$

für jeden Declinationsfehler eine Gleichung (24)

$$\left.\begin{aligned} d\delta = \frac{\partial\delta}{\partial L'} dL' + \frac{\partial\delta}{\partial\mu} d\mu + \frac{\partial\delta}{\partial\Phi'} d\Phi' + \frac{\partial\delta}{\partial\Psi'} d\Psi' + \\ + \frac{\partial\delta}{\partial\Omega' \sin i'} d\Omega' \sin i' + \frac{\partial\delta}{\partial i'} di', \end{aligned}\right\}$$

und wenn die hier angesetzten partiellen Differentialquotienten irgendwie ermittelt sind, so werden die Variationen der sechs Elemente als Unbekannte aus sechs Gleichungen, das heisst aus mindestens drei Normalorten bestimmbar sein, für welche man die Fehler $d\alpha$ und $d\delta$ in der Darstellung der Normalorte zuvor berechnet hat. Aus einer grösseren Anzahl von Normalorten dagegen wird die Bestimmung jener Elementencorrectionen

(Variationen) durch Verwendung aller resultirenden Bedingungsgleichungen nach der Methode der kleinsten Quadrate vorgenommen werden müssen, und die so erhaltenen Correctionen werden, zu den Ausgangselementen hinzugelegt, ein System geben, welches alle Normalorte vollständig darstellt.

Die partiellen Differentialquotienten der Variationen in den geocentrischen Coordinaten in Bezug auf die Variationen der Elemente habe ich für die vorhandenen sechs Normalorte nach den Ausdrücken berechnet, wie sie Oppolzer in seinem mehrfach erwähnten Werke gibt, und hiefür folgende logarithmisch angesetzten Werthe erhalten.

Für die Rectascensionen:

	$\frac{\partial\alpha\cos\delta}{\partial L'}$	$\frac{\partial\alpha\cos\delta}{\partial\mu}$	$\frac{\partial\alpha\cos\delta}{\partial\Phi'}$	$\frac{\partial\alpha\cos\delta}{\partial\Psi'}$	$\frac{\partial\alpha\cos\delta}{\partial\Omega'\sin i'}$	$\frac{\partial\alpha\cos\delta}{\partial i'}$
I	0·03673	3_n11020	0_n26477	0_n20027	8·33687	9·42844
II	9·94264	3_n02163	0_n19137	0_n08716	8·47222	9·15437
III	0·14573	3_n01482	0_n28235	0·33578	8·80247	9_n38497
IV	0·29013	2_n67731	0·54847	9·70847	9·39209	9·20486
V	0·09015	2·45529	9_n87239	0_n40669	9_n31484	9·04005
VI	0·06192	2·89671	0_n38944	9·76139	9·38840	8_n73771

(*b*)

Für die Declinationen:

	$\frac{\partial\delta}{\partial L'}$	$\frac{\partial\delta}{\partial\mu}$	$\frac{\partial\delta}{\partial\Phi'}$	$\frac{\partial\delta}{\partial\Psi'}$	$\frac{\partial\delta}{\partial\Omega'\sin i'}$	$\frac{\partial\delta}{\partial i'}$
I	9·44405	2_n50792	9_n69682	9_n57937	0_n01864	0_n01313
II	9·26919	2_n35637	9_n50333	9_n44453	0_n01913	9_n81559
III	9·55721	2_n44336	9_n73764	9·72057	0_n09750	9·96498
IV	9_n81210	2·18220	0_n07494	9_n11421	0·18377	9·67437
V	8·98310	1·46795	8_n98107	9_n28162	9_n71625	0_n14839
VI	9·58745	2·41601	9_n92134	9·21143	0_n17447	9·20741

Da die Rectascensionsfehler $d\alpha$ immer in der Form $d\alpha\cos\delta$ in die Rechnung treten, so sind hier die Rectascensionscoëfficienten ebenfalls schon dieser Formel gemäss angesetzt; dabei ist, ganz elementar ausgedrückt, die Bedeutung irgend einer der voranstehenden Zahlen die, dass sie angibt, um wie viele Einheiten (Bogensecunden) eine geocentrische Coordinate (α oder δ) sich ändere, wenn sich das betreffende Element um eine Einheit (eine Bogensecunde) ändert.

Um übrigens diese für das Gelingen der Elementenverbesserung fundamentalen Zahlen scharf zu prüfen, wurden die durch willkürliche Annahmen über die Variationen der Elemente bewirkten Änderungen in den geocentrischen Coordinaten einmal durch directe Darstellung dieser Coordinaten für die Zeiten der Normalorte mittelst der willkürlich variirten Elemente und einmal durch Rechnungen nach den Gleichungen (24) mittelst der zu prüfenden Differentialquotienten ermittelt.

Es wurden nämlich die für die Epochen der einzelnen Normalorte oben aufgestellten äquatorealen Elementensysteme (pag. 349) um die Grössen

$$dL' = +100''$$
$$d\Phi' = +100$$
$$d\Psi' = +100$$
$$d\Omega' \sin i' = +100$$
$$di' = +100$$
$$d\mu = +\ 0''1 \text{ für die Normalorte I, II, III, VI}$$
$$d\mu = +\ 0''3 \text{ „ „ „ IV und V}$$

verändert (analog dem Schema (13)), und damit die gegen die ursprüngliche Darstellung (pag. 351) sich ergebenden geocentrischen Änderungen:

	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
I	−336″41	−228″84
II	−280·06	−163·03
III	+ 40·10	+ 58·34
IV	+481·15	− 54·73
V	−115·30	−167·52
VI	+ 9·29	− 34·67

erhalten, während die Benützung der Gleichungen (24) zu den folgenden Resultaten führt:

			Unterschiede	
	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$	$dd\alpha \cos\delta$	$dd\delta$
I	−335″10	−228″78	−1″31	−0″06
II	−278·32	−162·86	−1·74	−0·17
III	+ 39·26	+ 58·17	+0·84	+0·17
IV	+480·99	− 54·70	+0·16	−0·03
V	−116·64	−167·74	+1·34	+0·22
VI	+ 9·12	− 34·39	+0·17	−0·28.

Die hier (im Sinne: directe — differentielle Darstellung) gleich mit angesetzten Unterschiede beider Resultatreihen sind also klein genug, um die oben gegebenen numerischen Werthe der partiellen Differentialquotienten als genügend scharf bestimmt betrachten zu können.

Zur Ermittlung der Elementencorrectionen ergeben sich jetzt nach dem Schema (24) aus den Zahlensystemen (*a*) und (*b*) folgende Bedingungsgleichungen:

Für die Rectascensionen:

I	$2_n70769 = 0{\cdot}03673\,dL' + 3_n11020\,d\mu + 0_n26477\,d\Phi' + 0_n20027\,d\Psi' + 8{\cdot}33687\,d\Omega' \sin i' + 9{\cdot}42844\,di'$					
II	$2_n62677 = 9{\cdot}94264$	3_n02163	0_n19137	0_n08716	$8{\cdot}47222$	$9{\cdot}15437$
III	$2_n84564 = 0{\cdot}14573$	3_n01482	0_n28235	$0{\cdot}33578$	$8{\cdot}80247$	9_n38497
IV	$1{\cdot}35507 = 0{\cdot}29013$	2_n67731	$0{\cdot}54847$	$9{\cdot}70847$	$9{\cdot}39209$	$9{\cdot}20486$
V	$2{\cdot}34661 = 0{\cdot}09015$	$2{\cdot}45529$	9_n87239	0_n40669	9_n31484	$9{\cdot}04005$
VI	$1{\cdot}72868 = 0{\cdot}06192$	$2{\cdot}89671$	0_n38944	$9{\cdot}76139$	$9{\cdot}38840$	8_n73771

Für die Declinationen:

I	$2_n12103 = 9{\cdot}44405\,dL' + 2_n50792\,d\mu + 9_n69682\,d\Phi' + 9_n57937\,d\Psi' + 0_n01864\,d\Omega' \sin i' + 0_n01313\,di'$					
II	$1_n93666 = 9\ 26919$	2_n35637	9_n50333	9_n44153	0_n01913	9_n81559
III	$2_n28267 = 9{\cdot}55721$	2_n44336	9_n73764	$9{\cdot}72057$	0_n09750	$9{\cdot}96498$
IV	$1_n08099 = 9_n81210$	$2{\cdot}18220$	0_n07494	9_n11421	$0{\cdot}18377$	$9{\cdot}67437$
V	$1{\cdot}30750 = 8{\cdot}98310$	$1{\cdot}46795$	8_n98107	9_n28162	9_n71625	0_n14839
VI	$1{\cdot}03222 = 9{\cdot}58745$	$2{\cdot}41601$	9_n92134	$9{\cdot}21143$	0_n17447	$9{\cdot}20741.$

(*c*)

Diese Bedingungsgleichungen wären zunächst mit den Quadratwurzeln der entsprechenden Gewichte durchzumultipliciren; da hier jedoch allen Normalorten gleiches Gewicht zugestanden werden soll, so fällt diese

Operation weg und es kann gleich an die Aufstellung der Normalgleichungen gegangen werden. Zuvor aber möge dem vorliegenden Systeme von Bedingungsgleichungen durch Einführung eines Systems von neuen Unbekannten eine für die Rechnungsdurchführung bequemere Form gegeben werden. Setzt man nämlich:

$$\left.\begin{aligned} 0\cdot29013\,dL' &= x\\ 3\cdot11020\,d\mu &= y\\ 0\cdot54847\,d\Phi' &= z\\ 0\cdot40669\,d\Psi' &= u\\ 0\cdot18377\,d\Omega'\sin i'' &= v\\ 0\cdot14839\,di'' &= w\\ 2\cdot84564 &= \log \text{ der Fehlereinheit,} \end{aligned}\right\} \qquad (d)$$

so wird in dem neuen Gleichungssystemе für jede Unbekannte der grösste Coëfficient der Einheit gleich und zugleich ist der grösste Fehler als Fehlereinheit angenommen. Wenn nun die Gleichungsgruppe der Rectascensionen von jener der Declinationen nicht mehr weiter gesondert wird, so hat man schliesslich die folgenden, logarithmisch angesetzten Bedingungsgleichungen für die Bestimmung der Elementencorrectionen:

$$\left.\begin{aligned} 9_n86205 &= 9\cdot74660\,x + 0_n00000\,y + 9_n71630\,z + 9_n79358\,u + 8\cdot15310\,v + 9\cdot28005\,w\\ 9_n78113 &= 9\cdot65251 \quad 9_n91143 \quad 9_n64290 \quad 9_n68047 \quad 8\cdot28845 \quad 9\cdot00598\\ 0_n00000 &= 9\cdot85560 \quad 9_n90462 \quad 9_n73388 \quad 9_n92909 \quad 8\cdot61870 \quad 9_n23658\\ 8\cdot50943 &= 0\cdot00000 \quad 9_n56711 \quad 0\cdot00000 \quad 9\cdot30178 \quad 9\cdot20832 \quad 9\cdot05647\\ 9\cdot50097 &= 9\cdot80002 \quad 9\cdot34509 \quad 9\cdot32392 \quad 0_n00000 \quad 9_n13107 \quad 8\cdot89166\\ 8\cdot88304 &= 9\cdot77179 \quad 9\cdot78651 \quad 9_n84097 \quad 9\cdot35470 \quad 9\cdot20463 \quad 8\ 58932\\ 9_n27539 &= 9\cdot15392 \quad 9_n39772 \quad 9_n14835 \quad 9_n17268 \quad 9_n83487 \quad 9_n86474\\ 9_n09102 &= 8\cdot97906 \quad 9_n24617 \quad 8_n95486 \quad 9_n03784 \quad 9_n83536 \quad 9_n66720 \end{aligned}\right\} \qquad (e)$$

$$\left.\begin{array}{llllll} 9_n43703 = 9\cdot26708 & 9_n33316 & 9_n18917 & 9\cdot31388 & 9_n91373 & 9\cdot81659 \\ 8_n23535 = 9_n52197 & 9\cdot07200 & 9_n52647 & 8_n70752 & 0\cdot00000 & 9\cdot52598 \\ 8\cdot46186 = 8\cdot69297 & 8\cdot35775 & 8_n43260 & 8_n87493 & 9_n53248 & 0_n00000 \\ 8\cdot18658 = 9\cdot29732 & 9\cdot30581 & 9_n37287 & 8\cdot80474 & 9_n99070 & 9\cdot05902. \end{array}\right\} \quad (e)$$

Die Vereinigung dieser Bedingungsgleichungen nach den Principien der Methode der kleinsten Quadrate führt zunächst auf die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} +2\cdot9911\,x & -1\cdot4579\,y & -0\cdot4129\,z & -0\cdot2174\,u & -0\cdot6403\,v & +0\cdot0028\,w & = -1\cdot1961 \\ -1\cdot4579 & +3\cdot0641 & +0\cdot4701 & +0\cdot1909 & +0\cdot3253 & -0\cdot0197 & = +2\cdot2579 \\ -0\cdot4129 & +0\cdot4701 & +2\cdot5039 & +0\cdot3311 & +0\cdot2292 & +0\cdot0048 & = +1\cdot1798 \\ -0.2174 & +0\cdot1909 & +0\cdot3311 & +2\cdot5175 & +0\cdot1406 & -0\cdot0175 & = -0\cdot4157 \\ -0\cdot6403 & +0\cdot3253 & +0\cdot2292 & +0\cdot1406 & +3\cdot7547 & +0\cdot8448 & = +0\cdot3064 \\ +0\cdot0028 & -0\cdot0197 & +0\cdot0018 & -0\cdot0175 & +0\cdot8448 & +2\cdot4048 & = -0\cdot0194 \end{array}\right\} \quad (f)$$

und diese endlich geben nach geschehener Elimination für die wirkliche successive Bestimmung der Unbekannten die folgenden Bestimmungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} +2\cdot99110\,x & -1\cdot45790\,y & -0\cdot41290\,z & -0\cdot21740\,u & -0\cdot64030\,v & +0\cdot00280\,w & = -1\cdot19610 \\ & +2\cdot35350 & +0\cdot26885 & +0\cdot08494 & +0\cdot01321 & -0\cdot01830 & = +1\cdot67490 \\ & & +2\cdot41619 & +0\cdot29139 & +0\cdot13930 & +0\cdot00728 & = +0\cdot82336 \\ & & & +2\cdot46349 & +0\cdot07678 & -0\cdot01752 & = -0\cdot66238 \\ & & & & +3\cdot60714 & +0\cdot84563 & = +0\cdot01412 \\ & & & & & +2\cdot20627 & = -0\cdot01576 \end{array}\right\} \quad (g)$$

Für die Unbekannten selbst erhält man hieraus folgende Werthe:

$$\left.\begin{array}{ll} \log x = 8_n55574 & \log u = 9_n42992 \\ \log y = 9\cdot83168 & \log v = 7\cdot74733 \\ \log z = 9\cdot57161 & \log w = 7_n85390, \end{array}\right\} \quad (h)$$

welche Werthe die aus der Bestimmungsgleichung (g) durch Addition derselben resultirende Probegleichung

$$+2\cdot99110\,x+0\cdot89560\,y+2\cdot27214\,z+2\cdot62242\,u+3\cdot19613\,v+3\cdot02616\,w = +0\cdot63814$$

vollständig erfüllen.

Führt man die Werthe (h) der Unbekannten in die Relationen (d) ein, so erhält man die Correctionen der Elemente zunächst ausgedrückt in der hier zu Grunde liegenden Einheit, als welche die dem grössten Fehler gleiche Anzahl von Bogensecunden (log der Einheit = 2·84564) angenommen wurde; es sind diese Correctionen daher noch mit dieser Einheit zu multipliciren, um dieselben in Bogensecunden ausgedrückt zu erhalten. So findet man:

$$\left.\begin{array}{ll} \log dL' = 1^n11125 & \left\{\begin{array}{r} \log d\Omega' \sin i' = 0\cdot40920 \\ \log d\Omega' = 0\cdot90162 \end{array}\right. \\ \log d\mu = 9\cdot56712 & \log di = 0_n55115 \\ \log d\Phi' = 1\cdot86878 & \\ \log d\Psi' = 1_n86887 & \end{array}\right\} \quad (i)$$

und hat für die Bildung der neuen, verbesserten Elemente somit folgende Zahlen als Grundlage zu nehmen:

		L'	Φ'	Ψ'	Ω'	i'	μ
Ausgangs-Elemente	1870·0	225° 2'51"44	+13058"916	−25844"083	4°6'41"44	18°46'24"29	810"71944
	1880·0	225 11 5·13	+12997·024	−25875·263	4 4 33·71	18 46 9·95	
Verbesserungen		−12·92	+73·923	−73·938	+7·97	−3·56	+0·36908

Man erhält hieraus zunächst durch Vereinigung der Ausgangselemente mit den Correctionen

	1870·0	1880·0
Φ'.....	+13132'839	+13070'947
Ψ'.....	−25918·021	−25949·201
$\sin\varphi$.....	9·1488015	9·1488003
π'.....	153° 7'42'10	153°15'54·08
L'.....	225 2 38·52	225 10 52·21
M.....	71 54 56·42	71 54 58·13,

somit für die vom Äquinoctium unabhängigen Elemente φ und M etwas verschiedene Werthe, was bei den bedeutenden Correctionen in Φ' und Ψ' kaum anders zu erwarten war. Ich habe daher für das Weitere die Mittelwerthe, nämlich

$$\sin\varphi = 9\cdot1488009$$
$$M = 71°54'57'27$$

angenommen und π' für beide Äquinoctien diesem Werthe M entsprechend corrigirt.

Auf diese Weise erhält man endlich das folgende, mit Rücksicht auf sechs Normalorte und mit Rücksicht auf die ersten Potenzen der Störungen durch Jupiter und Saturn verbesserte (äquatoreale) Elementensystem:

(114) **Cassandra.**

Epoche und Osculation 1874 Nov. 16·0.

Mittlerer Äquator

	1870·0	1880·0	
$L'=$	225° 2'38'52	225°10'52'21	(k)
$M=$	71 54 57·27	71 54 57·27	
$\pi'=$	153 7 41·25	153 15 54·94	
$\Omega'=$	4 6 49·41	4 4 41·68	
$i'=$	18 46 20·73	18 46 6·39	
	$\varphi = 8°5'52'30$		
	$\mu = 811'08852$		
	$\log a = 0\cdot4272923,$		

und dieses Elementensystem soll alle Normalorte möglichst gut darstellen.

In wie weit dies der Fall sein wird, dafür geben die bei der Elimination der Unbekannten aus den Normalgleichungen auftretenden Zahlen einen vorläufigen Anhaltspunkt, indem mit Hilfe derselben angegeben werden kann, um wie viel die ursprüngliche Summe der Fehlerquadrate durch die Verbesserung der Elemente vermindert werden wird.

Im vorliegenden Falle geben jene Zahlen jedoch keinen ziffermässigen Anhaltspunkt, da nach denselben die Quadratsumme der Fehler von dem Betrage $+2\cdot1288$ (log der dieser Zahl zu Grunde liegenden Fehlereinheit ist $2\cdot84564$) auf den negativen Betrag $-0\cdot0003$ herabgehen sollte, was einen Widerspruch bedeuten würde, wenn die letztere Grösse nicht unterhalb der Verlässlichkeitsgrenze der hier geführten Rechnung liegen würde, insofern die Coëfficienten in den Normalgleichungen bloss vierstellig angesetzt sind. Man kann also nur ungefähr annehmen, dass die Fehler fast ganz ausgeglichen werden dürften.

Die Einführung der durch (*i*) gegebenen Werthe für die Elementencorrectionen in die ursprünglichen Bedingungsgleichungen (*c*) dagegen lässt gleich im kurzen Wege erkennen, welche Fehler in den einzelnen Normalorten noch zu erwarten sind. Die Ausführung dieser Substitution gibt nämlich für die zu erwartenden Fehler die Werthe:

	$d\alpha\cos\delta$	$d\delta$	
I	$-0''77$	$-1''97$	
II	$+0\cdot74$	$+3\cdot15$	
III	$-0\cdot11$	$+1\cdot12$	
IV	$-0\cdot23$	$-0\cdot59$	(*l*)
V	$+0\cdot14$	$-0\cdot04$	
VI	$+0\cdot57$	$-2\cdot31$,	

welche Werthe durch die directe Darstellung der Normalorte mit den verbesserten Elementen (Schema (13) für äquatoreale Elemente) zu bestätigen sind.

Verwendet man zu dem Ende also die neuen Elemente (*k*) in derselben Weise, wie früher (pag. 349) die auf pag. 348 gegebenen provisorischen oder sogenannten Ausgangselemente, indem man unter Beibehaltung der den einzelnen Normalorten entsprechenden äquatorealen Störungswerthe auf die Epochen

der Normalorte mittelst der nunmehr verbesserten mittleren täglichen Bewegung übergeht, so gelangt man zu folgenden für die einzelnen Normalorte geltenden Elementensystemen und mit denselben zu den gleich beigesetzten geocentrischen Coordinaten für die Normalortepochen:

	1870·0				1880·0	
Normalort	I	II	III	IV	V	VI
Epoche t	1871 Juli 26·5	1871 Oct. 11·5	1872 Nov. 1·5	1874 Feb. 12·5	1875 Juli 28·5	1876 Oct. 8·5
$t-t_0$	−1208·5	−1131·5	−744·5	−276·5	+254·5	+692·5
$\mu_0(t-t_0)$	−272°16′40″48	−254°55′46″66	−167°44′15″40	− 62°17′45″98	57°20′22″03	156° 1′18″80
L'	312 51 16·65	330 11 29·97	57 22 15·94	162 48 18·18	282 32 39·43	21 14 27·79
M	159 29 47·38	176 49 39·19	263 55 19·37	9 26 34·11	129 21 34·30	228 4 57·31
π'	153 21 29·27	153 21 50·78	153 26 56·57	153 21 44·07	153 11 5·13	153 9 30·48
Ω'	4 6 41·44	4 6 43·52	4 6 44 46	4 6 47·66	4 4 44·01	4 4 42·47
i'	18 46 25·21	15 46 24·43	18 46 21·22	18 46 20·24	18 46 6 55	18 46 8·31
φ	8 3 0 17	8 3 16·57	8 4 20·58	8 6 0·03	8 5 36·07	8 4 27·46
μ	810″68862	810″76782	811″17372	810″59152	811″30332	810″96002
v	164°18′59″47	177°34′59″70	248°24′16″42	12°38′28″61	140°30′25″42	217°25′42″05
u'	313 33 47·30	326 50 6·96	37 44 28·53	161 53 25·02	289 36 46·54	6 30 30·06
$\log r$	0·4817293	0·4842930	0·4416590	0·3628138	0·4684704	0·4700463
x	+2·2332785	+2·6598226	+2·0658005	−2·2345674	+1·1711992	+2·9025477
y	−1·9249792	−1·3925599	+1·7549438	+0·5196483	−2·5460510	+0·5245241
z	−0·7070729	−0·5369590	+0·5446051	+0·2306450	−0·8913016	+0·1076423
α	325°33′48″98	315°34′28″70	41°56′43″50	180°28′42″70	288° 2′34″18	7°56′57″70
δ	−10 19 35·36	−15 24 40·32	+9 26 43·95	−0 0 4·14	−16 38 54·26	−0 3 51·33
$\log \rho$	0·3144757	0·3956081	0·2498713	0·1567798	0·2927281	0·2927275
$\log \cos \delta$	9·99291	9·98410	9·99407	0·00000	9·98140	0·00000

Der Vergleich dieser Rechnungsergebnisse mit den Normalortspositionen selbst gibt also, wenn man die Rectascensionsunterschiede gleich mit den entsprechenden Cosinusfactoren multiplicirt, als Resultate der directen Darstellung der Normalorte die nachstehenden im Sinne: „Normalort—Rechnung" angesetzten Fehler:

	$\log d\alpha \cos\delta$	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$	
I	0_n38208	$-2'41$	$-2'65$	
II	9_n54040	$-0\cdot35$	$+3\cdot02$	
III	9_n58313	$-0\cdot38$	$+0\cdot87$	
IV	$9\cdot83885$	$+0\cdot69$	$-0\cdot90$	(m)
V	$9\cdot52547$	$+0\cdot35$	$-0\cdot03$	
VI	$9\cdot67210$	$+0\cdot47$	$-1\cdot45,$	

so dass die Resultate (l) der Darstellung der Normalorte mittelst der Differentialquotienten der Hauptsache nach bestätigt gefunden werden.

Es ist hiebei übrigens zu bemerken, dass die wegzuschaffenden Fehler (a) sehr bedeutende waren und demzufolge auch die Correctionen der Elemente ziemlich gross ausfallen mussten, dass aber gerade desshalb für die eben durchgeführte Elementenverbesserung der Zusammenhang zwischen jenen Fehlern und diesen Correctionen wohl nicht mehr ein so vollkommen linearer gewesen sein mag, wie ihn die Methode der kleinsten Quadrate zur Voraussetzung hat.

Diesem Umstande ist es zum grössten Theile zuzuschreiben, dass die Übereinstimmung der obigen Grössensysteme (l) und (m) keine ganz befriedigende ist und eben desshalb sollen die zuletzt gewonnenen Elemente (k) noch nicht als letztes Resultat der gegenwärtigen Arbeit gelten, sondern gleichsam als neue, genauere Ausgangselemente betrachtet und einer nochmaligen Verbesserung unterzogen werden, jedoch mit Rücksicht auf die Beobachtungsergebnisse zweier weiterer Oppositionen des Planeten, welche demnach noch vorher der Bearbeitung zu unterziehen sind.

Um übrigens nichts unerwähnt zu lassen, sei an dieser Stelle bemerkt, dass bei Gelegenheit der Zusammenstellung

dieser Arbeit aus den fertiggestellten Rechnungen in den für den Normalort I geltenden Differentialquotienten ein Fehler entdeckt wurde, in der Art, dass alle diese Quotienten um eine Einheit in der dritten Decimale ihrer Logarithmen zu vermindern wären, da bei Berechnung derselben durch ein Versehen, wie solche bei so weitläufigen Rechnungen kaum immer ganz zu vermeiden sind, der Logarithmus der geocentrischen Distanz für diesen Normalort um jenen Betrag zu klein angenommen wurde. Mit den richtig gestellten Differentialquotienten findet man für den ersten Normalort im Systeme (*l*)

$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
−1'90	−2'27,

was mit den entsprechenden Werthen des Systems (*m*)

−2'41	−2'65

eine bessere Übereinstimmung gibt.

Zum Theile mögen bei der hier eben ausgeführten ersten Elementenverbesserung aus diesem Umstande auch kleine Ungenauigkeiten für die übrigen Resultate erwachsen sein, welche aber für die Sache selbst ohne Belang bleiben, da die erhaltenen Elemente eben nur als Ausgangswerthe für eine neuerliche Verbesserung verwendet werden sollen.

Für diese zweite Verbesserung aber hat der hier berührte kleine Fehler durchaus keinen Einfluss mehr, indem die neuerlichen Elementencorrectionen viel zu klein ausfallen, um von der dritten Decimale in den Logarithmen der zu Grunde liegenden Differentialquotienten mehr afficirt werden zu können, wie dieses durch das schöne Übereinstimmen aller Resultate der zweiten Verbesserung später genügend bestätigt werden wird.

VI. Opposition (1878).

Die Tafel IV enthält die Störungen der ekliptikalen Elemente bis zum Beginne des Jahres 1880, so dass die zur Bildung osculirender Elemente für die Oppositionen 1878 und 1879 nöthigen Störungswerthe sich noch unmittelbar aus dieser Tafel ergeben. Die Zahl der Beobachtungen während dieser beiden Oppositionen ist eine sehr geringe und es sind dieselben so

vertheilt, dass die zu bildenden Normalorte den Epochen 1878 Jan. 28·5 und 1879 Juni 15·5 entsprechen werden.

Die Tafel IV gibt nun für diese Zeitepochen rücksichtlich der von der Fundamentalebene abhängigen Elemente zunächst die eklipticalen Störungswerthe

	1878 Jän. 28·5	1879 Juni 15·5
ΔL	— 1′19″20	— 2′11″23
$\Delta\pi$	—12 14·32	—17 54·51
$\Delta\Omega$	— 0 56·35	— 0 52·61
Δi	— 0 2·73	— 0 0·43,

deren Verwandlung in äquatoreale Störungen (Formeln (15)) unter gleichzeitiger Beifügung der für die Elemente φ und μ aus Tafel IV sich ergebenden Störungswerthe zu folgenden Resultaten führt:

	1878 Jän. 15·5	1879 Juni 15·5
$\Delta L'$	— 1′18″41	— 2′10″37
$\Delta\pi'$	—12 13·53	—17 53·65
$\Delta\Omega'$	+ 0 11·34	+ 0 12·77
$\Delta i'$	+ 0 4·15	+ 0 1·90
$\Delta\varphi$	— 2 11·44	— 3 18·64
$\Delta\mu$	—0″3590	+0″1286.

Für die Opposition 1878 gibt demnach die Übertragung der äquatorealen Elemente (k) auf die Epoche 1878 Jän. 28·5 (Zwischenzeit $t-t_0 = +1169{\cdot}5$ Tage) und gleichzeitige Vereinigung der dieser Epoche entsprechenden äquatorealen Störungen mit jenen Elementen das System:

(114) **Cassandra.**

Epoche und Osculation 1878 Jän. 28·5.
Mittlerer Äquator 1880·0.

$$L' = 128°39'\ 1''82$$
$$M = 335\ 35\ 20{\cdot}41$$
$$\pi' = 153\ 3\ 41{\cdot}41$$
$$\Omega' = 4\ 4\ 53{\cdot}02$$
$$i' = 18\ 46\ 10{\cdot}54$$

$$\varphi = 8^\circ\ 3'40''86$$
$$\mu = 810''72952$$
$$\log a = 0{\cdot}4274205,$$

aus welcher man dann die ebenfalls auf 1880·0 bezüglichen Relationen

$$x = 9{\cdot}9998861 \sin(242^\circ 50'42''47 + v)$$
$$y = 9{\cdot}9763945 \sin(153\ 17\ 23{\cdot}64 + v)$$
$$z = 9{\cdot}5075364 \sin(148\ 58\ 48{\cdot}39 + v)$$

und weiter die folgende Ephemeride erhält:

Mittl. Zeit Berlin	app α (114)	app δ (114)	log ρ	Lichtzeit
1878 Jan. 27·5	$7^h 42^m 41''34$	$+15^\circ 26' 26''9$	0·13948	$11^m 26^s$
Jan. 28·5	7 41 49·35	+15 31 8·2	0.14010	11 27
Jan. 29·5	7 40 58·25	+15 35 49·9	0·14081	11 28
Jan. 30·5	7 40 8·09	+15 40 31·9	0·14160	11 30.

Der Planet wurde in dieser Opposition in Berlin und Leipzig je einmal beobachtet; die Resultate der Beobachtungen sind:

1878	Mittl. Ortszeit	(114) − ✳ $\Delta\alpha$	(114) − ✳ $\Delta\delta$	(114) app α	(114) app δ	(*)
Berlin Jan. 28	$11^h 39^m 10$	$+0^m 16''51$	$+0'46''1$	$7^h 41^m 50''55$	$+15^\circ 31' 3''6$	*a*
Leipzig Jan. 28	11 59 23	+0 15·57	+0 51·1	7 41 49 48	+15 31 5·2	*b*

Mittlere Orte der Vergleichsterne für 1878·0:

	α (1878·0)	δ (1878·0)
a) Meridianbeobachtung Kremsmünster	$7^h 41^m 31''60$	$+15^\circ 30' 17''5$
b) Bonner Beob. VI, +15° 1665.....	7 41 31·46	+15 30 14·1,

also *a* mit *b* identisch.

Die Vergleichung der Ephemeride mit diesen Beobachtungen gibt:

		Parallaxe in α	Parallaxe in δ	Beob.—Ephem. $\alpha'-\alpha$	Beob.—Ephem. $\delta'-\delta$
Berlin	1878 Jan. 28	+0''03	+3''8	+0''08	+5''5
Leipzig ..	1878 Jan. 28	+0·06	+3·7	−0·10	+2·3,

so dass man als Ephemeridencorrection für 1878 Jän. 28·5 annehmen kann:

$$\alpha' - \alpha = -0^s\cdot 01$$
$$\delta' - \delta = +3''9,$$

unter welchen Annahmen man für die Bildung eines Normalortes folgende Daten hat:

	α	δ
1878 Jan. 28·5 Ephem. + Corr. d. Ephem.....	$7^h\,41^m\,49^s\cdot 34$	$+15°\,31'\,12''1$
Reduction auf 1880·0.....	$+5^s\cdot 71$	$-21''1.$

Der aus der Opposition 1878 resultirende Normalort ist daher:

	α (1880·0)	δ (1880·0)
VIII. 1878 Jan. 28·5	$115°\,28'\,45''75$	$+15°\,30'\,51''0,$

welchen Angaben die derselben Epoche und demselben Äquinoctium entsprechenden rechtwinkligen Sonnencoordinaten hier gleich beigegeben werden mögen; dieselben sind:

$$X = +0\cdot 6199196,\quad Y = -0\cdot 7023961,\quad Z = -0\cdot 3047609.$$

VII. Opposition (1879).

Ich habe den Planeten in dieser Opposition nach einer von dem Berliner astronomischen Jahrbuche (Jahrgang 1881) gegebenen Ephemeride mit dem siebenzölligen Refractor der Privatsternwarte des Herrn Professor von Oppolzer in Wien (Josephstadt) aufgesucht und am Ringmikrometer beobachtet (Mai 28); nach dieser Beobachtung betrug die Correction der Ephemeride des Berliner Jahrbuches $-61^s\cdot 28$ in A. R. und $+90''3$ in Declination. Für die spätere Zeit liegen nur noch zwei Beobachtungen von der Leipziger Sternwarte vor, welche ich zu einem Normalorte vereinigt habe, da meine Wiener Beobachtung der Zeit nach zu weit von den letzteren Beobachtungen entfernt liegt. Der Bildung des Normalortes lege ich ein für 1879 Juni 15·5 osculirendes Elementensystem zu Grunde, welches aus dem obigen Systeme (k) durch Übertragung desselben auf die eben genannte Epoche ($t - t_0 = +1672\cdot 5$ Tagen) und durch Zufügung der dieser Epoche

entsprechenden äquatorealen Störungen der Elemente entsteht. Das osculirende System ist demnach das nachstehende:

(114) **Cassandra.**

Epoche und Osculation 1879 Juni 15·5.
Mittlerer Äquator 1880·0.

$$\begin{aligned} L' &= 241°57'47''39 \\ M &= 88\ 59\ 46\cdot10 \\ \pi' &= 152\ 58\ 1\cdot29 \\ \Omega' &= 4\ 4\ 54\cdot45 \\ i' &= 18\ 46\ 8\cdot29 \\ \varphi &= 8\ 2\ 33\cdot66 \\ \mu &= 811''21712 \\ \log a &= 0\cdot4272463. \end{aligned}$$

Dasselbe gibt mittelst der ebenfalls auf das Äquinoctium 1880·0 bezüglichen Relationen

$$\begin{aligned} x &= 9\cdot9998861 \sin(242°45'\ 2''33+v) \\ y &= 9\cdot9763961 \sin(153\ 11\ 43\cdot54+v) \\ z &= 9\cdot5075225 \sin(148\ 53\ 6\cdot84+v) \end{aligned}$$

die folgende Ephemeride, welche hier, um Raum zu sparen, bruchstücksweise nur für jene Zeiten angesetzt werden soll, innerhalb welcher die mir bekannt gewordenen Beobachtungen liegen:

12h Berl. Zeit	(114) app α	app δ	log ρ	Lichtzeit
1879 Mai 28	17h 8m44''87	−15° 5'32''2	0·22943	14m 4s
29	17 7 50·98	−15 3 50·1	0·22920	14 3
30	17 6 56·67	−15 2 11·3	0·22904	14 3
Juni 13	16 54 7·40	−14 45 17·6	0·23402	14 13
14	16 53 14·20	−14 44 34·8	0·23488	14 15
15	16 52 21·59	−14 43 56·5	0·23580	12 17
16	16 51 29·61	−14 43 22·5	0·23680	14 19
17	16 50 38·28	−14 42 53·3	0·23785	14 21
18	16 49 47·64	−14 42 28·7	0·23895	14 23

Beobachtungen:

	1879	mittl. Ortszeit	(114) − ✳ Δα	(114) − ✳ Δδ	app α (114)	app δ (114)	(*)
Wien (Josephstadt)	Mai 28	13ʰ 12ᵐ 31ˢ	−0ᵐ 41ˢ·54	−0′ 12″·8	17ʰ 8ᵐ 43ˢ·44	−15° 5′ 33″·2	*a*
Leipzig	Juni 14	10 59 42	+1 23·83	−3 44·2	16 53 16·43	−14 44 43·7	*b*
Leipzig	Juni 17	13 2 22	−1 16·59	−1 56·8	16 50 36·04	−14 42 56·1	*b*

Mittlere Positionen der Vergleichssterne für 1879:

		α (1879·0)	δ (1879·0)
a) Mittel aus:	Weisse 17ʰ 114	17ʰ 9ᵐ 21ˢ·30	−15° 5′ 13″·72
	Santini 1536	17 9 21·20	−15 5 8·77
	angenommen	17ʰ 9ᵐ 21ˢ·25	−15° 5′ 11″·24
b) Mittel aus:	Weisse I 16ʰ 949	16ʰ 51ᵐ 48ˢ·84	−14° 40′ 49″·8
	Arg. Öltz. S. Z. 16171	16 51 48·95	− 14 40 47·9
	Lamont 2037	16 51 48·68	−14 40 52·9
	Santini 1518	16 51 48·48	−14 40 48·9
	angenommen	16ʰ 51ᵐ 48ˢ·74	−14° 40′ 49″·9.

Wegen viel späterer Publication (astr. N. 2326) konnten folgende zwei Meridiankreisbeobachtungen der Sternwarte Kremsmünster für die Bildung des Normalortes nicht mehr benützt werden, sollen hier aber der Vollständigkeit wegen mit angeführt werden:

	1879	Ortszeit	app α	app δ	Parallaxe in α	Parallaxe in δ
Krems-münster	Juni 11	11h 36m 22·76	16h 55m 57·00	−14° 46′ 57·4	0·00	+4·6
	Juni 15	11 17 6·52	16 52 23·83	−14 44 0·5	0·00	+4·6.

Der Vergleich der ersten drei Beobachtungen mit der obigen Ephemeride führt zu folgenden Resultaten:

	1779	Parallaxe in α	Parallaxe in δ	Beob.—Ephem. $\alpha'-\alpha$	Beob.—Ephem. $\delta'-\delta$
Wien (Josephstadt)	Mai 28	−0·21	+4·2	−0·28	+0·60
Leipzig	Juni 14	−0·02	+4·7	−0·38	−2·91
Leipzig	Juni 17	+0·11	+4·5	−0·30	+0·74.

Wie schon erwähnt, sollen nur die beiden Leipziger Beobachtungen zu einem Normalorte verbunden werden; nimmt man demgemäss für Juni 15·5 die Correctionen:

$$\alpha'-\alpha = -0^s\cdot 36$$
$$\delta'-\delta = -1''\cdot 10$$

an, so hat man:

1879 Juni 15·5 Ephem.+Corr.	16h 52m 21·23	−14° 43′ 57·60
Reduction auf 1880·0	+0·855	+2·05,

und es ergibt sich somit folgender Normalort, für dessen Epoche sogleich die auf 1880·0 bezogenen rechtwinkligen Sonnencoordinaten mit angesetzt sind:

	α (1880·0)	δ (1880·0)
VIII. 1879 Juni 15·5	253° 5′ 31·27	−14° 43′ 55·55

$$X = +0\cdot 0988739,\ Y = +0\cdot 9276842,\ Z = +0\cdot 4025061.$$

Elementenverbesserung.

II. Mit Rücksicht auf sieben Oppositionen (8 Normalorte).

Die beiden eben gebildeten Normalorte nun sollen einer nochmaligen Verbesserung des Elementensystems (k) beigezogen werden, so dass dieser neuerlichen Verbesserung acht Normalorte zu Grunde liegen werden. Zu dem Ende sind die beiden Grössen-

systeme (*b*) und (*m*) rücksichtlich der beiden neuen Normalorte VII und VIII zu vervollständigen.

Die Differentialquotienten (*b*) sind, um ganz gleiche Grundlagen beizubehalten, auch für die neuen Normalorte mit den ursprünglichen Elementen (inclusive Störungen) berechnet und hiefür die nachstehenden Werthe erhalten worden, welche sich also an die Werthe (*b*) (pag. 364) anschliessen:

Für die Rectascensionen:

	$\frac{\partial\alpha\cos\delta}{\partial L'}$	$\frac{\partial\alpha\cos\delta}{\partial\mu}$	$\frac{\partial\alpha\cos\delta}{\partial\Phi'}$	$\frac{\partial\alpha\cos\delta}{\partial\Psi'}$	$\frac{\partial\alpha\cos\delta}{\partial\Omega'\sin i'}$	$\frac{\partial\alpha\cos\delta}{\partial i'}$
VII.	0·33138	3·39389	0·30518	0·53130	9_n27303	9·25079
VIII.	0·17994	3·40036	0·02261	0_n46184	9_n31785	9_n24260

Für die Declinationen: (*b*)

	$\frac{\partial\delta}{\partial L'}$	$\frac{\partial\delta}{\partial\mu}$	$\frac{\partial\delta}{\partial\Phi'}$	$\frac{\partial\delta}{\partial\Psi'}$	$\frac{\partial\delta}{\partial\Omega'\sin i'}$	$\frac{\partial\delta}{\partial i'}$
VII.	9_n42682	2_n50375	9_n48667	9_n57941	9·89799	0·17781
VIII.	9_n25787	2_n45861	9_n29124	9·49045	9.67034	0_n17754.

Da die willkürlichen Änderungen:

$$dL' = +100''$$
$$d\Phi' = +100$$
$$d\Psi' = +100$$
$$d\Omega' = +100$$
$$di' = +100$$
$$d\mu = +0''1$$

der für die Berechnung der oben angesetzten Differentialquotienten verwendeten Elemente in den geocentrischen Coordinaten der beiden betrachteten Normalorte die Änderungen:

	$d\alpha\cos\delta$	$d\delta$
VII.....	+1014″52	+48″51
VIII.....	+ 192·02	—170·57

hervorbringen, und die Differentialquotienten, nach dem Schema (24) benützt, für diese Änderungen die Werthe

	$d\alpha\cos\delta$	$d\delta$
VII.....	+1015″73	+ 48″78
VIII.....	+ 194·28	—170·92

geben, so besitzen die neu berechneten Differentialquotienten die genügende numerische Genauigkeit, um für die neuerliche Verbesserung der Elemente ohne Weiteres verwendet werden zu können.

Das Verzeichniss (m) gibt die Fehler, welche das zu verbessernde Elementensystem (k) in den ursprünglichen sechs Normalorten übrig lässt, und ist durch siebenstellige Rechnung gewonnen. Um dieses Fehlersystem für die beiden Normalorte VII und VIII zu vervollständigen, hat man im vorliegenden Falle offenbar für jeden der Normalorte mit demselben Elementensysteme auf die geocentrischen Coordinaten überzugehen, mit welchem die zur Ermittlung des Normalortes verwendete Ephemeride gerechnet wurde und man wird somit Fehler in den geocentrischen Coordinaten zu erwarten haben, die mit den bei Bildung der Normalorte für die Epochen derselben angenommenen Ephemeridencorrectionen identisch sind; ein kleiner Unterschied wird nur daraus entstehen, dass die Ephemeriden für die Bildung der Normalorte auf einer sechsstelligen Rechnung beruhen, während, um alle Fehlergrössen im Verzeichnisse (m) conform zu haben, der Übergang auf die geocentrischen Coordinaten für die beiden neuen Normalorte ebenfalls siebenstellig zu machen ist. Man erhält auf diese Weise für die beiden Normalorte die Fehler

	$d\alpha$	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$	
VII.....	$-0^s\cdot56$	9_n73207	$+3''\cdot91$	(m)
VIII.....	$-5\cdot87$	0_u75412	$-1\cdot01$	

und diese Fehler sind dem oben gegebenen Verzeichnisse (m) anzureihen.

Und nun geben die wegzuschaffenden Fehler (m) und die Differentialquotienten (b) für alle acht Normalorte nach dem Schema (24) zusammengestellt, endlich folgende Bedingungsgleichungen für die Correctionen der Elemente (k):

Für die Rectascensionen:

I.	$0_n38208 = 0{\cdot}03673\ dL'$	$+ 3_n11020\ d\mu$	$+ 0_n26477\ d\Phi'$	$+ 0_n20027\ d\Psi'$	$+ 8{\cdot}33687\ d\Omega' \sin i'$	$+ 9{\cdot}42844\ di'$	((c))
II.	$9_n54040 = 9{\cdot}94264$	3_n02163	0_n19137	0_n08716	$8{\cdot}47222$	$9{\cdot}15437$	
III.	$9_n58513 = 0{\cdot}14573$	3_n01482	0_n28235	$0{\cdot}33578$	$8{\cdot}80247$	9_n88497	
IV.	$9{\cdot}83885 = 0{\cdot}29013$	2_n67731	$0{\cdot}54847$	$9{\cdot}70847$	$9{\cdot}39209$	$9{\cdot}20486$	
V.	$9{\cdot}52547 = 0{\cdot}09015$	$2{\cdot}45529$	9_n87239	0_n40669	9_n31484	$9{\cdot}04005$	
VI.	$9{\cdot}67210 = 0{\cdot}06192$	$2{\cdot}89671$	0_n58944	$9{\cdot}76139$	$9{\cdot}38840$	8_n78771	
VII.	$9_n73207 = 0{\cdot}33138$	$3{\cdot}39389$	$0{\cdot}30518$	$0{\cdot}53130$	9_n27303	$9{\cdot}25079$	
VIII.	$0_n75412 = 0{\cdot}17994$	$3{\cdot}40036$	$0{\cdot}02261$	0_n46184	9_n31785	9_n24260	

Für die Declinationen:

I.	$0_n42325 = 9{\cdot}44405\ dL'$	$+ 2_n50792\ d\mu$	$+ 9_n69682\ d\Phi'$	$+ 9_n57937\Psi d'$	$+ 0_n01864\ d\Omega' \sin i'$	$+ 0_n01313\ di'$	((c))
II.	$0{\cdot}48001 = 9{\cdot}26919$	2_n35637	9_n50333	9_n44453	0_n01913	9_n81559	
III.	$9{\cdot}93952 = 9{\cdot}55721$	2_n44336	9_n73764	$9{\cdot}72057$	0_n09750	$9{\cdot}96498$	
IV.	$9_n95424 = 9_n81210$	$2{\cdot}18220$	0_n07494	$9{\cdot}11421$	$0{\cdot}18377$	$9{\cdot}67437$	
V.	$8_n47712 = 8{\cdot}98310$	$1{\cdot}46795$	8_n98107	9_n28162	9_n71625	0_n14839	
VI.	$0_n16137 = 9{\cdot}58745$	$2{\cdot}41601$	9_n92134	$9{\cdot}21143$	0_n17447	$9{\cdot}20741$	
VII.	$0{\cdot}59218 = 9_n42683$	2_n50375	9_n48667	9_n57941	$9{\cdot}89799$	$0{\cdot}17781$	
VIII.	$0_n00432 = 9_n25787$	2_n45861	9_n29124	$9{\cdot}49045$	$9{\cdot}67034$	0_n17754	

Von hier ab verläuft die weitere Rechnung in ganz analoger Weise, wie bei der Elementenverbesserung nach sechs Normalorten; die aus den eben angesetzten Bedingungsgleichungen zunächst folgenden Resultate sollen daher hier in ihrer Aufeinanderfolge ohne weitere Bemerkungen angesetzt, und der Hinweis auf die successiven Operationen bei der früheren Verbesserung dadurch gegeben werden, dass die analogen Resultate

hier mit denselben Buchstaben, wie dort, bezeichnet werden; dabei mögen die neuen Bezeichnungen von den früheren durch eine Doppelklammer unterschieden werden, wie dies eben schon bei dem Gleichungssysteme ((*c*)) geschehen ist.

Durch Einführung der neuen Unbekannten:

$$\left.\begin{array}{llll} 0{\cdot}33138\,dL' = x & & 0{\cdot}18377\,d\Omega' \sin i' = v & \\ 3{\cdot}40036\,d\mu = y & & 0{\cdot}17781\,di' & = w \\ 0{\cdot}54847\,d\Phi' = z & & 0{\cdot}75412 & = \log \text{ der Fehlereinheit.} \\ 0{\cdot}53130\,d\Psi' = u & & & \end{array}\right\} \quad ((d))$$

geht das Gleichungssystem ((*c*)) in das folgende über:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} 9_n62796 = 9{\cdot}70535\,x + & 9_n70984\,y + & 9_n71630\,z + & 9_n66897\,u + & 8{\cdot}15310\,v + & 9{\cdot}25063\,w \\ 8_n78628 = 9{\cdot}61126 & 9_n62127 & 9_n64290 & 9_n55586 & 8{\cdot}28845 & 8{\cdot}97656 \\ 8_n83101 = 9{\cdot}81435 & 9_n61446 & 9_n73388 & 9{\cdot}80448 & 8{\cdot}61870 & 9_n20716 \\ 9{\cdot}08473 = 9{\cdot}95875 & 9_n27695 & 0{\cdot}00000 & 9{\cdot}17717 & 9{\cdot}20832 & 9{\cdot}02705 \\ 8{\cdot}77135 = 9.75877 & 9{\cdot}05493 & 9_n32392 & 9_n87539 & 9_n13107 & 8{\cdot}86224 \\ 8{\cdot}91798 = 9{\cdot}93054 & 9{\cdot}49635 & 9_n84097 & 9{\cdot}23009 & 9{\cdot}20463 & 8_n55990 \\ 8_n97795 = 0{\cdot}00000 & 9{\cdot}99353 & 9{\cdot}75671 & 0{\cdot}00000 & 9_n08926 & 9{\cdot}07298 \\ 0_n00000 = 9{\cdot}84856 & 0{\cdot}00000 & 9{\cdot}47414 & 9_n93054 & 9_n13408 & 9_n06479 \\ 9_n66913 = 9{\cdot}11267 & 9_n10756 & 9_n14835 & 9_n04807 & 9_n83487 & 9_n83532 \\ 9{\cdot}72589 = 9.93781 & 8_n95601 & 8_n95486 & 8_n91323 & 9_n83535 & 9_n63778 \\ 9{\cdot}18540 = 9{\cdot}22583 & 9_n04300 & 9_n18987 & 9{\cdot}18927 & 9_n91373 & 9{\cdot}78717 \\ 9_n20012 = 9_n48072 & 8{\cdot}78184 & 9_n52647 & 8_n58291 & 0{\cdot}00000 & 9{\cdot}49656 \\ 7_n72300 = 8{\cdot}65172 & 8{\cdot}06759 & 8_n43260 & 8_n75032 & 9_n53248 & 9_n97058 \\ 9_n40725 = 9{\cdot}25607 & 9{\cdot}01565 & 9_n37287 & 8{\cdot}68013 & 9_n99070 & 9{\cdot}02960 \\ 9{\cdot}83806 = 9_n09545 & 9_n10339 & 8_n93820 & 9_n04811 & 9{\cdot}71422 & 0{\cdot}00000 \\ 9_n25020 = 8_n92649 & 9_n05825 & 8_n74277 & 8{\cdot}95915 & 9{\cdot}48657 & 9_n99973 \end{array}\right\} \quad ((e))$$

Daraus folgen die Normalgleichungen:

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr}
+3\cdot9942\,x & +1\cdot0364\,y & +0\cdot4213\,z & +0\cdot2565\,u & -0\cdot8916\,v & -0\cdot0015\,w & = -0\cdot9540 \\
+1\cdot0364 & +2\cdot8052 & +1\cdot1190 & +0\cdot2101 & -0\cdot1912 & -0\cdot0215 & = -0\cdot9213 \\
+0\cdot4213 & +1\cdot1190 & +2\cdot9292 & +0\cdot5704 & +0\cdot0567 & +0\cdot0061 & = +0\cdot0420 \\
+0\cdot2565 & +0\cdot2101 & +0\cdot5704 & +3\cdot1655 & +0\cdot0688 & +0\cdot0023 & = +0\cdot8553 \\
-0\cdot8916 & -0\cdot1912 & +0\cdot0567 & +0\cdot0688 & +4\cdot1506 & +1\cdot0021 & = +0\cdot3875 \\
-0\cdot0015 & -0\cdot0215 & +0\cdot0061 & +0\cdot0023 & +1\cdot0021 & +4\cdot1264 & = +1\cdot0252.
\end{array}\right\} \qquad ((f))$$

dann weiter die Bestimmungsgleichungen

$$\left.\begin{array}{rrrrrr}
+3\cdot99420\,x & +1\cdot03640\,y & +0\cdot42130\,z & +0\cdot25650\,u & -0\cdot89160\,v & -0\cdot00150\,w = -0\cdot95400 \\
 & +2\cdot53628 & +1\cdot00968 & +0\cdot14354 & +0\cdot04015 & -0\cdot02111 \quad -0\cdot67366 \\
 & & +2\cdot48282 & +0\cdot48621 & +0\cdot13477 & +0\cdot01466 \quad +0\cdot41081 \\
 & & & +3\cdot04570 & +0\cdot09740 & +0\cdot00072 \quad +0\cdot87423 \\
 & & & & +3\cdot94052 & +1\cdot00128 \quad +0\cdot13494 \\
 & & & & & +3\cdot87170 \quad +0\cdot98231
\end{array}\right\} \qquad ((g))$$

für die Unbekannten, und aus diesen für die Unbekannten selbst die folgenden Werthe:

$$\left.\begin{array}{ll}
\log x = 9{,}28274 & \log u = 9\cdot45930 \\
\log y = 9{,}50892 & \log v = 8{,}48036 \\
\log z = 9\cdot03828 & \log w = 9\cdot40435
\end{array}\right\} \qquad ((h))$$

welche bei Substitution in die Probegleichung:

$$+3\cdot99420\,x+3\cdot57268\,y+3\cdot91380\,z+3\cdot93195\,u+3\cdot32124\,v+4\cdot86575\,w = +0\cdot77463$$

deren linke Seite auf den Werth +0·77465 reduciren, dieselbe also fast vollständig erfüllen. Aus ((*h*)) folgen nun endlich die nachstehenden Correctionen der Elemente (*k*):

$$\left.\begin{array}{ll} \log dL' = 9_n70548 & \log d\Omega' \sin i' = 9_n05071 \\ \log d\mu = 6_n86268 & \log d\Omega' = 9_n54313 \\ \log d\Phi' = 9\cdot24393 & \log di' = 9\cdot98066, \\ \log d\Psi' = 9\cdot68212 & \end{array}\right\} \quad ((i))$$

so dass sich die neuen Elemente aus der Verbindung der folgenden Grössen ergeben werden:

		L'	Φ'	Ψ'	Ω'	i'	μ
Elemente (*k*):	1870·0	225° 2'38'52	+13132'927	−25917'935	4°6'49'41	18°46'20'73	811'08852
	1880·0	225 10 52·21	+13070·852	−25949·292	4 4 41·68	18 46 6·39	
Verbesserungen:		−0·51	+0·175	+0·481	−0·35	+0·96	−0·00072.

Man hat demnach zunächst:

	1870·0	1880·0
Φ'.....	+13133'102	+13071'027
Ψ'.....	−25917·454	−25948·811
$\sin\varphi$	9·1487957	9·1487956
π'.....	153° 7'38'58	153'15'52'29
L'.....	225 2 38·01	225 10 51·70
M.....	71 54 59·43	71 54 59·41,

also für φ und M Werthe, die nunmehr sehr gut übereinstimmen. Die mit Rücksicht auf acht Normalorte,

und mit Rücksicht auf die ersten Potenzen der Störungen durch Jupiter und Saturn verbesserten äquatorealen Elemente sind daher die folgenden:

(114) **Cassandra.**

Epoche und Osculation 1874 Nov. 16·0.

Mittlerer Äquator

	1870·0	1880·0	
$L' =$	225° 2′38″01	225°10′51″70	
$M =$	71 54 59·42	71 54 59·42	
$\pi' =$	153 7 38·59	153 15 52·28	
$\Omega' =$	4 6 49·06	4 4 41·33	((k))
$i' =$	18 46 21·69	18 46 ·7·35	
	$\varphi = 8°5′51″953$		
	$\mu = 811″08779$		
	$\log a = 0·4272925.$		

Die bei der Elimination der Unbekannten sich ergebenden Zahlen führen für die vorläufige Beurtheilung der Genauigkeit dieses Elementensystems zu dem Resultate, dass die Summe der Quadrate der durch dieses System in allen acht Normalorten übrig gelassenen Fehler von dem Betrage +2·34340 auf den Betrag +1·36385 herabgemindert werden soll. Mit Rücksicht auf die hier gewählte Fehlereinheit (log der Fehlereinheit = 0·75412) hat man also

$$\log (1·36385) = 0·13475$$
$$\log (\text{Einheit})^2 = 1·50824$$
$$\log [nn] = 1·64299,$$

das heisst, man erhält für die Quadratsumme der übrig bleibenden Fehler $[nn]$ den Werth

$$[nn] = 43·95.$$

Die in den einzelnen Normalorten übrig bleibenden Fehler selbst kann man nun in zweifacher Weise, nämlich einmal durch Substitution der Werthe ((i)) in die Bedingungsgleichungen ((c)), und dann auch durch directen Übergang auf die geocentrischen Coordinaten für die einzelnen Normalorte mittelst der verbesserten Elemente ((k)) finden.

Die Substitution von ((*i*)) in ((*c*)) nun gibt das Fehlersystem

	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$	
I.....	—1'97	—1'60	((*l*))
II.....	+0·05	+3·65	
III.....	—0·89	—0·33	
IV.....	+0·34	—1·13	
V.....	+2·41	+1·44	
VI.....	+1·86	—1·32	
VII.....	+0·17	+2·43	
VIII..	—1·73	+0·07	

1870·0

Normalort	I	II	III	IV
$t-t_0$	—1208·5	—1131·5	—744·5	—276·5
$\mu_0(t-t_0)$	—272°16'39'59	—254°55'45"83	—167°44'14'86	— 62°17'45'77
L'	312 51 17·03	330 11 30·29	57 22 15·97	162 48 17·88
M	159 29 50·42	176 49 42·17	263 55 22·06	9 26 36·47
π'	153 21 26·61	153 21 48·12	153 26 53·91	153 21 41·41
Ω'	4 6 41·09	4 6 43·17	4 6 44·11	4 6 47·31
i'	18 46 26·17	18 46 25·39	18 46 22·18	18 46 21·20
φ	8 2 59·82	8 3 16·22	8 4 20·23	8 5 59·68
μ	810'68789	810'76709	811'17299	810'59379
v	164°19' 1'65	177°35' 1'94	248°24'19'54	12°38'31'59
u'	313 33 47·17	326 50 6·89	37 44 29·34	161 53 25·69
$\log r$	0·4817293	0·4842928	0·4416583	0·3628152
α	325°33'48'55	315°34'28'33	41°56'43'93	180°28'43'02
δ	— 10 19 36·44	— 15 24 40·94	+ 9 26 45·13	— 0 0 3·91
$\log \rho$	0·3144754	0·3956083	0·2498703	0·1567822
$\log \cos\delta$	9·99291	9·98410	9·99407	0·00000

und die Summe der Quadrate dieser Fehler ist

$$[nn] = 44 \cdot 07,$$

wodurch der oben für diese Summe gegebene Werth bereits eine Bestätigung erfährt; die schärfste Probe jedoch gewährt die directe Darstellung der Normalorte; diese führt unter Benützung der den Epochen der Normalorte entsprechenden äquatorealen Störungswerthe zu folgenden Ergebnissen, welche der besseren Übersichtlichkeit wegen auf der vorliegenden Doppelseite neben einander gestellt sind:

1880·0			
V	VI	VII	VIII
+254·5	+692·5	+1169·5	+1672·5
57°20'21"84	156° 1'18"29	263°29'27"17	16°49' 4"33
282 32 38·73	21 14 26·77	128 39 0·46	241 57 45·66
129 21 36·26	228 4 58·95	335 35 21·71	88 59 47·53
153 11 2·47	153 9 27·82	153 3 38·75	152 57 58·63
4 4 43·66	4 4 42·12	4 4 52·67	4 4 54·10
18 46 7·51	18 46 9·27	18 46 11·50	18 46 9·25
8 5 35·72	8 4 27·11	8 3 40·51	8 2 33·31
811"32059	810"95929	810"72879	811"21639
140°30'26"63	217°25'43"79	327°43'25"83	104°52'12"33
289 36 45·44	6 30 29·49	116 42 11·91	253 45 16·86
0·4684706	0·4700457	0·3701346	0·4345412
288° 2'32"10	7°56'56"25	115°28'45"63	253° 5'33"00
— 16 38 55·74	— 0 3 51·47	+ 15 30 48·56	— 14 43 55·62
0·2927286	0·2927267	0·1401068	0·2358068
9·98140	0·00000	9·98388	9·98548

Der Vergleich dieser Rechnungsresultate mit den Normalorten endlich gibt das Fehlersystem:

	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$	
I.....	−1″99	−1″57	((m))
II.....	+0·01	+3·64	
III.....	−0·81	−0·31	
IV.....	+0·37	−1·13	
V.....	+2·33	+1·45	
VI.....	+1·92	−1·31	
VII.....	+0·12	+2·44	
VIII.....	−1·67	+2·07,	

für welches in sehr guter Übereinstimmung mit den obigen Werthen

$$[nn] = 43 \cdot 55$$

ist. Aber auch die einzelnen Fehler der Systeme ((*l*)) nnd ((*m*)) stimmen sehr gut überein, indem die Unterschiede

in	$d\alpha \cos\delta$	$d\delta$
I.....	+0″02	−0″03
II.....	+0·04	+0·01
III.....	−0·07	−0·02
IV.....	−0·03	0·00
V.....	+0·08	−0·01
VI.....	−0·06	−0·01
VII.....	+0·05	−0·01
VIII.....	−0·06	0·00,

welche hier im Sinne: „Differentielle — directe Rechnung" angesetzt sind, durchgängig innerhalb der Unsicherheit der Rechnung gelegen sind.

Damit ist man rücksichtlich der Ermittlung der besten Bahnelemente für den hier behandelten Planeten (114) wohl an der Grenze angelangt, über welche hinaus die Rechnung nichts weiter zu leisten vermag, so lange nicht die Grundlagen der Rechnung einer neuerlichen und schärferen Bearbeitung unterzogen werden.

In letzterer Hinsicht müsste vor Allem die Berechnung der Störungen in der Art wiederholt werden, dass man derselben nicht ein constantes, sondern ein von Intervall zu Intervall variables Elementensystem für den gestörten Planeten zu Grunde legt, welches variable Elementensystem sich mit den hier bereits vorliegenden Resultaten auf einfache Weise nach Schema (12) durch Verbindung des auf die Ekliptik übertragenen besten Systems ((*k*)) mit den Störungswerthen der Tafel IV ergeben würde. Dadurch würden die Grössen (5) aufhören, Constanten zu sein, und sich ebenfalls von Intervall zu Intervall ändern, und die Distanzen des gestörten von jedem der störenden Planeten müssten unter Zugrundelegung der Formeln (8) berechnet werden. Um ganz strenge zu sein, würde man etwa auch noch die partiellen Differentialquotienten (*b*) der Änderungen in den geocentrischen Coordinaten in Bezug auf die Änderungen in den Elementen einer neuen Berechnung unterziehen können, indem man für diese Rechnung diejenigen den einzelnen Normalorten entsprechenden Elementensysteme verwenden würde, auf welchen die letzte Darstellung der Normalorte beruht. Ein neuer Fehlerausgleich nach den bisher verfolgten Principien würde dann auf ganz strenge Resultate führen.

Für die vorliegende Arbeit jedoch sollen die Verbesserungen nach Ermittlung des Systemes ((*k*)) als abgeschlossen betrachtet werden, und es soll dieses Elementensystem der Vorausberechnung des geocentrischen Laufes des Planeten (114) zur Grundlage dienen und zwar wiederum unter Berücksichtigung der ersten Potenzen der Störungen durch Jupiter und Saturn. Für diesen Zweck sind die Elemente ((*k*)) vorerst noch auf die Ekliptik zu übertragen, wodurch man schliesslich zu dem folgenden Systeme gelangt, welches demnach als das Resultat aller bisherigen und als die Grundlage aller folgenden Rechnungen zu betrachten ist:

(114) **Cassandra.**

Epoche und Osculation 1874 Nov. 16·0.

Mittlere Ekliptik

	1870·0	1880·0
$L =$	224°46′16″07	224°54′38″45
$M =$	71 54 59·42	71 54 59·42
$\pi =$	152 51 16·65	152 59 39·03

Mittlere Ekliptik

1870·0	1880·0
$\Omega = 164°21'\ 5''01$	$164°29'18''84$
$i = 4\ 54\ 34{\cdot}67$	$4\ 54\ 29{\cdot}96$

$$\varphi = 8°5'59''153$$
$$\mu = 811''08779$$
$$\log a = 0{\cdot}4272925$$
$$\text{Grösse} = 7{\cdot}84 + 5\log(r\rho)$$
$$\log \text{ der Lichtstärke} = 1{\cdot}304 - 2\log(r\rho).$$

III. Abtheilung.

Fortsetzung der Störungsrechnung mit verbesserten Elementen.

Zunächst verlege ich die Osculationsepoche der oben angesetzten Elemente auf 1880 Jän. 9·0, für welchen Zeitpunkt die Störungen noch aus der Tafel IV entnommen werden können, und leite die Störungsrechnung selbst so ein, dass die Osculationsepoche der Zeit nach wieder in die Mitte eines Störungsintervalles fällt.

Die Tafel IV gibt für die neue Epoche 1880 Jän. 9·0 die Störungen:

$$\Delta L = -\ 0'52''04$$
$$\Delta\pi = -16\ 33{\cdot}18$$
$$\Delta\Omega = -\ 0\ 57{\cdot}85$$
$$\Delta i = -\ 0\ \ 0{\cdot}18$$
$$\Delta\varphi = -\ 4\ \ 4{\cdot}37$$
$$\Delta\mu = -0''03104;$$

ferner wird, da die Zwischenzeit 1880 Jän. 9·0—1874 Nov. 16·0 oder $t - t_0 = +1880$ Tagen ist,

$$\mu_0(t - t_0) = 811''08779 \times 1880 = 63°34'5''05;$$

und da die Elemente für die folgenden Rechnungen sich nur auf das mittlere Äquinoctium 1880·0 zu beziehen haben werden, so erhält man nach Schema (12) das nachstehende Elementensystem als Ausgangssystem für die neue Störungsrechnung:

(114) Cassandra.

Epoche und Osculation 1880 Jän. 9·0.
Mittlere Ekliptik 1880·0.

$L_0 = 288°27'51''46$	$i_0 = 4\ 54\ 29·78$
$M_0 = 135\ 44\ 45·61$	$\varphi_0 = 8\ 1\ 47·58$
$\pi_0 = 152\ 43\ 5·85$	$\mu_0 = 811''05675$
$\Omega_0 = 164\ 28\ 20·99$	$\log a_0 = 0·4273036.$

Die constanten Zahlenwerthe für die neue Störungsrechnung weichen von den früheren Werthen nur unbedeutend ab. Für die beiden störenden Planeten wurden die früheren auf 1880·0 bezogenen Werthe von Ω_0 und i_1 hier beibehalten und durch Verbindung mit den neuen Elementen des gestörten Planeten erhalten:

	♃	♄
$\Omega_1+\Phi_1$	359°42'55''0	14°34'13''2
J	4 31 8·3	3 53 45·8
$\Phi-\omega_0$	207 2 52·9	221 56 9·1
$\varkappa$	1·922382	1·39843;

die neuen, vom gestörten Planeten allein abhängigen Werthe dagegen erhalten folgende Werthe:

$(1) = 1·067725$	$(6) = 8·846268$
$(2) = 9_n246275$	$(7) = 8·632042$
$(3) = 0_n519857$	$(8) = 1_n273582$
$(4) = 9_n265014$	$(9) = 0·854836$
$(5) = 0_n296751$	$(10) = 0·423025.$

Die Resultate der mit diesen Zahlenwerthen durchgeführten Störungsrechnung gebe ich nun in den nachstehenden Tafeln ganz in derselben Form und Aufeinanderfolge wie früher, und bemerke nur noch, dass die Differentialquotienten der Störungen durch Jupiter und Saturn für die einzelnen Epochen hier ebenfalls vor der Integration vereinigt wurden, und dass sich für die Anfangswerthe der summirten Reihen folgende Werthe ergaben:

$'f(a-\frac{1}{2}w)$	$''f(a-w)$	$'f(a-\frac{1}{2}w)$	$''f(a-w)$
L....+0''030	—	i..... 0·000	—
π....—0·153	—	φ.....+0·143	—
Ω....—0·010	—	μ.....—0·0332	—0''1437.

Tafel VII.

Heliocentrischer Lauf des Planeten (114) in seiner ungestörten Bahn.

0^h mittl. Zeit Berlin	v_0	$\log r_0$	$\log \frac{1}{(\rho)\odot}$	$\log \frac{1}{(\rho)\mathfrak{h}}$
1879 Nov. 10	134°31' 7".4	0·463512	9·378749	9·01423
Dec. 20	141 58 5·5	0·469370	9·400082	9·02826
1880 Jan. 29	149 14 5·4	0·474279	9·421793	9·04290
März 9	156 21 18·2	0·478211	9·443896	9·05805
Apr. 18	163 21 47·9	0·481148	9·466391	9·07360
Mai 28	170 17 36·3	0·483082	9·489262	9·08939
Juli 7	177 10 41·1	0·484005	9·512456	9·10520
Aug. 16	184 2 58·4	0·483915	9·535860	9·12086
Sept. 25	190 56 23·8	0·482812	9·559252	9·13603
Nov. 4	197 52 53·6	0·480698	9·582258	9·15036
Dec. 14	204 54 26 7	0·477581	9·604295	9·16337
1881 Jan. 23	212 3 4·3	0·473474	9·624506	9·17458
März 4	219 20 52·1	0·468393	9·641683	9·18343
Apr. 13	226 50 0·7	0·462369	9·654334	9·18937
Mai 23	234 32 46·1	0·455443	9·660809	9·19185
Juli 2	242 31 27·8	0·447677	9·659634	9·19062
Aug. 11	250 48 27·9	0·439161	9·649932	9·18540
Sept. 20	259 26 8·4	0·430014	9·631716	9·17636
Oct. 30	268 26 42·7	0·420395	9·605956	9·16380
Dec. 9	277 52 9·3	0·410518	9·574282	9·14823
1882 Jan. 18	287 43 58·2	0·400650	9·538558	9·13033
Feb. 27	298 2 53·7	0·391118	9·500564	9·11081
Apr. 8	308 48 37·9	0·382296	9·461787	9·09038
Mai 18	319 59 29·8	0·374600	9·423385	9·06974
Juni 27	331 32 13·0	0·368442	9·386238	9·04949
Aug. 6	343 21 48·3	0·364193	9·350939	9·03014
Sept. 15	355 21 49·6	0·362134	9·317913	9·01210
Oct. 25	7 24 50·2	0·362404	9·287405	8·99568
Dec. 4	19 23 5·1	0·364987	9 259541	8·98109
1883 Jan. 13	31 9 18·3	0·369705	9·234327	8·96842
Feb. 22	42 37 21·4	0·376254	9·211695	8·95771
Apr. 3	53 42 39·1	0·384247	9·191100	8·94891
Mai 13	64 22 18·0	0·393268	9·173600	8·94194
Juni 22	74 34 57·5	0·402910	9·157780	8·93669
Aug. 1	84 20 35·7	0·412807	9·143862	8·93306
Sept. 10	93 40 8·7	0·422645	9·131662	8·93088
Oct. 20	102 35 14·9	0·432172	9·121007	8·93006
Nov. 29	111 7 56·8	0·441187	9·111753	8·93049
1884 Jan. 8	119 20 31·0	0·449539	9·103764	8·93208
Feb. 17	127 15 19·1	0·457118	9·096936	8·93474
März 28	134 54 44 2	0·463840	9·091174	8·93845
Mai 7	142 21 3·6	0·469649	9·086405	8·94313
Juni 16	149 36 33·3	0·474508	9 082569	8·94874
Juli 26	156 43 21·9	0·478388	9·079621	8·95527
Sept. 4	163 43 34·4	0·481274	9·077527	8·96272
Oct. 14	170 39 11·1	0·483156	9·076268	8·97104
Nov. 23	177 32 9·3	0·484026	9·075836	8·98026
1885 Jan. 2	184 24 28·5	0·483883	9·076231	8·99040

Tafel VIII.

Numerische Differentialquotienten für die Störungen der Elemente durch Jupiter.

0h mittl. Zeit Berlin	$40\frac{dL}{dt}$	$40\frac{d\pi}{dt}$	$40\frac{d\Omega}{dt}$	$40\frac{di}{dt}$	$40\frac{d\varphi}{dt}$	$40^2\frac{d\mu}{dt}$
1879 Nov. 10	+12'147	+ 27'829	— 1'403	+0'078	—10'725	—1'9587
Dec. 20	+11·913	+ 33·742	— 1·375	+0·099	—13·554	—2·6700
1880 Jan. 29	+11·156	+ 36·971	— 1·139	+0·106	—16·872	—3·4341
März 9	+ 9·764	+ 36·917	— 0·715	+0·086	—20·642	—4·2512
Apr. 18	+ 7·604	+ 33·033	— 0·160	+0·025	—24·805	—5·1187
Mai 28	+ 4·505	+ 24·913	+ 0·418	—0·091	—29·269	—6·0282
Juli 7	+ 0·267	+ 12·364	+ 0·846	—0·279	—33·910	—6·9613
Aug. 16	— 5·329	— 4·421	+ 0·873	—0·552	—38·549	—7·8833
Sept. 25	—12·508	— 24·597	+ 0·153	—0·922	—42·930	—8·7326
Nov. 4	—21·428	— 46·345	— 1·741	—1·391	—46·712	—9·4091
Dec. 14	—32·074	— 66·378	— 5·303	—1·942	—49·465	—9·7635
1881 Jan. 23	—44·072	— 79·708	—10·931	—2·529	—50·714	—9·5947
März 4	—56·439	— 79·937	—18·740	—3·068	—50·033	—8·6739
Apr. 13	—67·442	— 60·915	—28·216	—3·438	—47·271	—6·8227
Mai 23	—74·761	— 20·028	—37·966	—3·509	—42·757	—4·0396
Juli 2	—76·229	+ 38·129	—45·866	—3·204	—37·365	—0·6206
Aug. 11	—70·956	+101·032	—49·845	—2·557	—32·213	+2·8532
Sept. 20	—59·997	+152·941	—48·916	—1·718	—28·118	+5·7269
Oct. 30	—45 922	+182·406	—43·667	—0·884	—25·224	+7·5560
Dec. 9	—31·553	+186·732	—35·779	—0·208	—23·097	+8·2482
1882 Jan 18	—18·922	+170·781	—27·112	+0·243	—21·119	+7·9928
Feb. 27	— 8·966	+142·806	—19·057	+0·477	—18·826	+7·0933
Apr. 8	— 1·795	+110·829	—12·364	+0·540	—16·028	+5·8428
Mai 18	+ 2·934	+ 80·862	— 7·310	+0·493	—12·772	+4·4628
Juni 27	+ 5·711	+ 56·607	— 3·730	+0·377	— 9·267	+3·1040
Aug. 6	+ 7·018	+ 39·687	— 1·507	+0·239	— 5·782	+1·8565
Sept. 15	+ 7·262	+ 30·172	— 0·346	+0·101	— 2·593	+0·7729
Oct. 25	+ 6·765	+ 27·020	+ 0 018	—0·020	+ 0·081	—0·1227
Dec. 4	+ 5·773	+ 28·565	— 0·178	—0·114	+ 2·102	—0·8253
1883 Jan. 13	+ 4·474	+ 32·938	— 0·728	—0·177	+ 3·437	—1·3141
Feb. 22	+ 2·999	+ 38·430	— 1·467	—0·210	+ 4·134	—1·6976
Apr. 3	+ 1·451	+ 43·710	— 2·264	—0·216	+ 4·307	—1·9096
Mai 13	— 0·098	+ 47·917	— 3·025	—0·198	+ 4·096	—2·0060
Juni 22	— 1.597	+ 50·630	— 3·682	—0·162	+ 3·641	—2·0117
Aug. 1	— 3·010	+ 51·769	— 4·194	—0·113	+ 3·065	—1·9483
Sept. 10	— 4·313	+ 51·489	— 4·542	—0·055	+ 2·466	—1·8362
Oct. 20	— 5·491	+ 50·069	— 4·719	+0·006	+ 1·911	—1·6885
Nov. 29	— 6·535	+ 47·838	— 4·732	+0·067	+ 1·443	—1·5172
1884 Jan. 8	— 7·444	+ 45·125	— 4·596	+0·125	+ 1·084	—1·3311
Feb. 17	— 8·213	+ 42·220	— 4·330	+0·177	+ 0·842	—1·1362
März 28	— 8·849	+ 39·372	— 3·958	+0·221	+ 0·711	—0·9371
Mai 7	— 9·351	+ 36·780	— 3·504	+0·257	+ 0·680	—0·7366
Juni 16	— 9·724	+ 34·595	— 2·994	+0·282	+ 0·734	—0·5368
Juli 26	— 9·972	+ 32·926	— 2 453	+0·299	+ 0·853	—0·3389
Sept. 4	—10·096	+ 31·847	— 1·904	+0·306	+ 1·019	—0·1438
Oct. 14	—10·101	+ 31·404	— 1·368	+0·303	+ 1·211	+0·0481
Nov. 23	— 9·989	+ 31·589	— 0·866	+0·292	+ 1·409	+0·2364
1885 Jan. 2	— 9·762	+ 32·406	— 0.413	+0·280	+ 1·595	+0·4207

Tafel IX.

Numerische Differentialquotienten für die Störungen der Elemente durch Saturn.

0^h mittl. Zeit Berlin	$40\frac{dL}{dt}$	$40\frac{d\pi}{dt}$	$40\frac{d\vartheta}{dt}$	$40\frac{di}{dt}$	$40\frac{d\varphi}{dt}$	$40^2\frac{d\mu}{dt}$
1879 Nov. 10	+0'454	−1'707	+0'001	0·000	−0'076	+0'0358
Dec. 20	+0·508	−1·245	0·000	0·000	−0·157	+0·0064
1880 Jan. 29	+0·533	−0·839	+0·002	0·000	−0·262	−0·0263
März 9	+0·522	−0·524	+0·005	−0·001	−0·389	−0·0616
Apr. 18	+0·469	−0·333	+0·009	−0·001	−0·530	−0·0980
Mai 28	+0·367	−0·282	+0·014	−0·003	−0·679	−0·1345
Juli 7	+0·216	−0·374	+0·015	−0·005	−0·828	−0·1686
Aug. 16	+0·013	−0·581	+0·012	−0·008	−0·962	−0·1982
Sept. 25	−0·239	−0·855	+0·003	−0·011	−1·073	−0 2200
Nov. 4	−0·533	−1·112	−0·018	−0·015	−1·146	−0·2306
Dec. 14	−0·849	−1·245	−0·052	−0·019	−1·172	−0·2262
1881 Jan. 23	−1·162	−1·130	−0·098	−0·023	−1·146	−0·2035
März 4	−1·439	−0·665	−0·156	−0·026	−1·072	−0·1612
Apr. 13	−1 639	+0·208	−0·221	−0·027	−0·961	−0·1003
Mai 23	−1·729	+1·445	−0·284	−0·026	−0 833	−0·0252
Juli 2	−1·690	+2·897	−0·337	−0·024	−0·714	+0·0559
Aug. 11	−1 520	+4·322	−0·368	−0·019	−0·618	+0·1325
Sept. 20	−1·245	+5·459	−0·374	−0·013	−0·559	+0·1942
Oct. 30	−0 906	+6·092	−0·352	−0·007	−0·526	+0·2331
Dec. 9	−0·553	+6·128	−0·307	−0·002	−0·504	+0·2457
1882 Jan. 18	−0·227	+5·607	−0·246	+0·002	−0·470	+0·2323
Feb. 27	+0·039	+4·688	−0·178	+0·004	−0·407	+0·1970
Apr. 8	+0·227	+3·584	−0·113	+0·005	−0·306	+0·1463
Mai 18	+0·337	+2·522	−0·057	+0·004	−0·173	+0 0877
Juni 27	+0·371	+1·673	−0·016	+0·002	−0·018	+0 0279
Aug. 6	+0·344	+1·132	+0·008	−0·001	+0·138	−0·0269
Sept. 15	+0·264	+0·905	+0·015	−0·004	+0·274	−0·0722
Oct. 25	+0·153	+0·925	+0·007	−0·007	+0·376	−0·1051
Dec. 4	+0·025	+1·077	−0·015	−0·010	+0·436	−0·1243
1883 Jan. 13	−0·111	+1·243	−0·047	−0·011	+0·455	−0·1306
Feb. 22	−0·242	+1·325	−0·084	−0·012	+0·444	−0·1256
Apr. 3	−0·362	+1·269	−0·124	−0·012	+0·413	−0·1114
Mai 13	−0·465	+1·061	−0·164	−0·011	+0·376	−0·0907
Juni 22	−0·545	+0·726	−0 200	−0·009	+0·344	−0·0657
Aug. 1	−0·603	+0·306	−0·231	−0·006	+0·324	−0·0388
Sept. 10	−0·636	−0·149	−0·255	−0·003	+0·319	−0·0116
Oct. 20	−0·644	−0·590	−0·271	0·000	+0·330	+0·0149
Nov. 29	−0·630	−0 977	−0·279	+0·004	+0·356	+0·0395
1884 Jan. 8	−0·594	−1·281	−0·278	+0·008	+0·391	+0·0615
Feb. 17	−0·539	−1·484	−0·269	+0·011	+0·433	+0·0807
März 28	−0·467	−1·583	−0·253	+0·014	+0·477	+0·0964
Mai 7	−0·381	−1·581	−0·230	+0·017	+0·516	+0·1087
Juni 16	−0·282	−1·491	−0·201	+0 019	+0·548	+0·1174
Juli 26	−0·174	−1·335	−0·167	+0·020	+0·569	+0·1220
Sept. 4	−0·059	−1·134	−0·131	+0·021	+0·575	+0·1228
Oct. 14	+0·057	−0·918	−0 095	+0 021	+0·566	+0·1194
Nov. 23	+0·172	−0·738	−0 059	+0·020	+0·540	+0.1116
1885 Jan. 2	+0.283	−0·609	−0·027	+0·018	+0·495	+0·0992

Tafel X.

Störungen der Elemente.

Vereinigte Wirkungen von ♀ und ♄.

(Osculationsepoche t_0 = 1880 Jan. 9·0)

0ʰ mittl. Zeit Berlin	$t-t_0$	ΔL_1	ΔL_2	$\Delta\pi$	$\Delta\Omega$	Δi	$\Delta\varphi$	$\Delta\mu$
1879 Nov. 10	— 60	— 0'18'70	— 0' 3'00	— 0'46'38	+0' 2'07	— 0'14	+ 0'19'48	+0 0929
Dec. 20	— 20	— 0 6·14	— 0 0·36	— 0 16·82	+0 0·67	— 0·05	+ 0 7·26	+0·0357
1880 Jän. 29	+ 20	+ 0 5·96	— 0 0·40	+ 0 17·74	—0 0·61	+ 0·05	— 0 8·12	—0·0407
März 9	+ 60	+ 0 17·01	— 0 3 90	+ 0 54·31	—0 1·54	+ 0 15	— 0 27·16	—0·1378
Apr. 18	+ 100	+ 0 26 26	- 0 11·71	+ 1 29·20	—0 1·98	+ 0·21	— 0 50·32	—0·2568
Mai 28	+ 140	+ 0 32·83	- 0 24·75	+ 1 58·25	—0 1·84	+ 0·18	— 1 17·94	—0·3989
Juli 7	+ 180	+ 0 35·61	— 0 43·95	+ 2 16·94	—0 1·17	0·00	— 1 50·27	—0·5651
Aug. 16	+ 220	+ 0 33·32	— 1 10·28	+ 2 20·77	—0 0·25	0·42	— 2 27·41	—0·7553
Sept. 25	+ 260	+ 0 24·44	- 1 44·68	+ 2 5·77	+0 0·35	— 1·15	— 3 9·20	—0·9685
Nov. 4	+ 300	+ 0 7·23	— 2 28·02	+ 1 29·33	—0 0·33	— 2·32	— 3 55·20	—1·2014
Dec. 14	+ 340	— 0 20·07	— 3 20 98	+ 0 31·45	—0 3·73	— 3·99	- 4 44·56	—1·4477
1881 Jan. 23	+ 380	— 0 59·07	— 4 23·87	— 0 43·61	—0 11·73	— 6·25	— 5 35·96	—1·6964
März 4	+ 420	— 1 50·66	— 5 36·50	— 2 5·74	—0 26·53	— 9·08	— 6 27·62	—1 9312
Apr. 13	+ 460	— 2 54·35	— 6 57·89	— 3 18·23	—0 50·10	—12·38	— 7 17·45	—2·1302
Mai 23	+ 500	— 4 7·56	— 8 26·12	— 3 59·66	—1 23·50	—15·91	— 8 3·48	—2·2693
Juli 2	+ 540	— 5 25·32	— 9 48·36	— 3 49·46	—2 5·98	—19·32	— 8 44·34	—2·3280
Aug. 11	+ 580	— 6 41·08	—11 31·16	— 2 35·99	—2 54·58	—22·25	— 9 19·73	—2·2971
Sept. 20	+ 620	— 7 48·33	—13 1·03	— 0 22·57	—3 44·74	—24·41	— 9 50·38	—2·1839
Oct. 30	+ 660	— 8 42·50	—14 25·06	+ 2 33·04	—4 31·69	—25·71	—10 17·50	—2·0101
Dec. 9	+ 700	— 9 21·89	—15 41 41	+ 5 45·75	—5 11·89	—26·25	—10 42·14	—1·8042
1882 Jan. 18	+ 740	— 9 47·32	—16 49·34	+ 8 51·79	—5 43·61	—26·21	—11 4·75	—1·5935
Feb. 27	+ 780	—10 1·11	—17 49·10	+11 34·40	—6 6·81	—25·83	—11 25 20	—1·3985

0h mittl. Zeit Berlin	$t-t_0$	ΔL_1	ΔL_2	$\Delta\pi$	$\Delta\Omega$	Δi	$\Delta\varphi$	$\Delta\mu$
1882 Apr. 8	+ 820	−10' 6"13	−18'41"61	+13'45"40	−6'22"54	−25"31	−11'43'03	−1·2320
Mai 18	+ 860	−10 5·09	−19 28·13	+15 23·93	−6 32·33	−24·78	−11 57·70	−1·1002
Juni 27	+ 900	−10 0·26	−20 10·10	+16 34·17	−6 37·76	−24 34	−12 8·83	−1·0043
Aug. 6	+ 940	− 9 53·43	−20 48·93	+17 23·06	−6 40·28	−24·03	−12 16·28	−0·9426
Sept. 15	+ 980	− 9 45·91	−21 25·92	+17 58·40	−6 41·12	−23·86	−12 20·22	− 0·9114
Oct. 25	+1020	− 9 38·64	−22 2·19	+18 27·42	−6 41·21	−23·83	−12 21·10	−0·9059
Dec. 4	+1060	− 9 32·25	−22 38·67	+18 55·90	−6 41·26	−23·90	−12 19·54	−0·9211
1883 Jan. 13	+1100	− 9 27·15	−23 16·09	+19 27·65	−6 41·72	−24·06	−12 16·27	−0·9518
Feb. 22	+1140	− 9 23·58	−23 54·96	+20 4·60	−6 42·87	−24·27	−12 11·98	−0 9933
Apr. 3	+1180	− 9 21·65	−24 35·64	+20 47 04	−6 44·84	−24·50	−12 7·29	−1·0417
Mai 13	+1220	− 9 21·39	−25 18·34	+21 34·14	−6 47·64	−24·72	−12 2·67	−1·0934
Juni 22	+1260	− 9 22·75	−26 3·12	+22 24·45	− 6 51·18	−24·91	−11 58·43	−1·1457
Aug. 1	+1300	− 9 25·64	−26 49·98	+23 16·30	−6 55 35	− 25·06	−11 54·74	−1·1966
Sept. 10	+1340	− 9 29·93	−27 38·81	+24 8·12	−6 59·98	− 25·14	−11 51·65	−1·2447
Oct. 20	+1380	− 9 35·49	−28 29·50	+24 58·60	−7 4·88	−25·17	−11 49·15	−1·2887
Nov. 29	+1420	− 9 42·15	−29 21·85	+25 46·82	−7 9·90	−25·13	−11 47·14	−1·3282
1884 Jan. 8	+1460	− 9 49·77	−30 15·68	+26 32·19	−7 14·45	−25·03	−11 45·51	−1·3625
Feb. 17	+1500	− 9 48·17	−31 10·78	+27 14·48	−7 19·60	−24·87	−11 44·14	−1·3916
März 28	+1540	−10 7·22	−32 6·94	+27 53·72	−7 24·01	−24·66	−11 42·92	−1·4153
Mai 7	+1580	−10 16·76	−33 3·94	+28 30·18	−7 27·99	−24·40	−11 41·74	−1·4336
Juni 16	+1620	−10 26·64	−34 1·56	+29 4·28	−7 31 46	−24·11	−11 40·51	−1·4467
Juli 26	+1660	−10 36·72	−34 59·61	+29 36·58	−7 34·37	−23·81	−11 39·16	−1·4547
Sept. 4	+1700	−10 46·88	−35 57·87	+30 7·68	−7 36·70	−23·49	−11 37·65	−1·4576
Oct. 14	+1740	−10 56·99	−36 56·16	+30 38·24	−7 38·44	−23·15	−11 35·96	−1·4558
Nov. 23	+1780	−11 6·93	−37 54·27	+31 8·95	−7 39·62	−22·83	−11 34·10	−1·4493
1885 Jan. 2	+1820	−11 16·59	−38 52·04	+31 40·33	−7 40·30	−22·53	−11 32·08	−1·4385

Die voranstehende Tafel X umfasst die Störungswerthe für vier weitere Oppositionen des hier behandelten Planeten, von denen die Oppositionen der beiden Jahre 1883 und 1884 der Zukunft angehören.

Um zunächst die Oppositionszeiten, das heisst die Momente zu ermitteln, für welche die Gleichung

$$180+l = \odot$$

stattfindet, unter l die heliocentrische Länge des Planeten und unter $\odot$ die geocentrische Länge der Sonne verstanden, habe ich für den hier betrachteten Zeitraum die folgende kleine Tafel zusammengestellt, wobei die Grösse l mittelst der Formel

$$\text{tang}(l-\Omega) = \text{tg}\, u \cos i$$

der Störungsrechnung entnommen wurde.

0^h Berl. Zeit	$180°+l$	Diff.	$\odot$	Diff.
1880 Jan. 29	122°1		309°0	
März 9	129·2	+ 7·1	349·3	+40·3
Apr. 18	136·2	+ 7·0	28·8	+39·5
Mai 28	143·1	+ 6·9	67·5	+38·7
Juli 7	150·0	+ 6·9	105·6	+38·1
Aug. 16	156·8	+ 6·8	143·9	+38·3
Sept. 25	163·7	+ 6·9	182·7	+38·8
Nov. 4	170·6	+ 6·9	222·4	+39·7
Dec. 14	177·6	+ 7·0	262·9	+40·5
1881 Jan. 23	184·7	+ 7·1	303·7	+40·8
März 4	192·0	+ 7·3	340·0	+40·3
Apr. 13	199·5	+ 7·5	23·6	+39·6
Mai 23	207·2	+ 7·7	62·4	+38·8
Juli 2	215·2	+ 8·0	100·6	+38·2
Aug. 11	223·5	+ 8·3	138·9	+38·3
Sept. 20	232·1	+ 8·6	177·6	+38·7
Oct. 30	241·1	+ 9·0	217·2	+39·6
Dec. 9	250·6	+ 9·5	257·6	+40·4
1882 Jan. 18	260·5	+ 9·9	298·3	+40·7
Feb. 27	270·8	+10·3	338·8	+40·5
Apr. 8	281·6	+10·8	18·5	+39·7
Mai 18	292·9	+11·3	57·4	+38·9
Juni 27	304·4	+11·5	95·6	+38·2
Aug. 6	316·2	+11·8	133.8	+38·2
Sept. 15	328·2	+12·0	172·5	+38·7

0h Berl. Zeit		180° + l	Diff.	⊙	Diff.
1882	Sept. 15	328°2		172°5	
	Oct. 25	340·2	+12·0	211·9	+39·4
	Dec. 4	352·1	+11·9	252·2	+40·3
1883	Jan. 13	3·8	+11·7	293·0	+40·8
	Feb. 22	15·3	+11·5	333·5	+40·5
	Apr. 3	26·2	+10·9	13·4	+39·9
	Mai 13	37·0	+10·8	52·3	+38·9
	Juni 22	47·2	+10·2	90·6	+38·3
	Aug. 1	57·0	+ 9·8	128·8	+38·2
	Sept. 10	66·4	+ 9·4	167·4	+38·6
	Oct. 20	75·3	+ 8·9	206·7	+39·3
	Nov. 29	83·9	+ 8·6	246·9	+40·2
1884	Jan. 8	92·2	+ 8·3	287·6	+40·7
	Feb. 17	100·1	+ 7·9	328·2	+40·6
	März 28	107·8	+ 7·7	8·2	+40·0
	Mai 7	115·2	+ 7·4	47 4	+39·1
	Juni 16	122·5	+ 7·3	85·6	+38·3
	Juli 26	129·6	+ 7·1	123·8	+38·2
	Sept. 4	136·6	+ 7·0	162·3	+38·5
	Oct. 14	143·5	+ 6·9	201·5	+39·2
	Nov. 23	150·3	+ 6·8	241·6	+40·1

Der Anblick dieser Tafel zeigt, dass die obige Gleichung $180° + l = \odot$ innerhalb der durch die Horizontalstriche bezeichneten Zeitintervalle zur Erfüllung kommen müsse; für die hier in Betracht kommenden vier speciellen Fälle erhält diese Gleichung die Zahlenwerthe:

$$\begin{aligned} 156{\cdot}8 + 6{\cdot}9x &= 143{\cdot}9 + 38{\cdot}8x \\ 241{\cdot}1 + 9{\cdot}5x &= 217{\cdot}2 + 40{\cdot}4x \\ 26{\cdot}2 + 10{\cdot}8x &= 13{\cdot}4 + 38{\cdot}9x \\ 129{\cdot}6 + 7{\cdot}0x &= 123{\cdot}8 + 38{\cdot}5x, \end{aligned}$$

wobei x immer denjenigen Bruchtheil des 40tägigen Intervalles vorstellt, welcher dem Oppositionsmomente entspricht; gleich in Tagen ausgedrückt, hat man also

$$\text{für } 1880 \ldots\ldots x = 40 . \frac{129}{319} = 16{\cdot}2$$

$$\text{„ } 1881 \ldots\ldots x = 40 . \frac{239}{309} = 30{\cdot}9$$

$$\text{für } 1883 \ldots\ldots x = 40 . \frac{128}{281} = 18 \cdot 1$$

$$\text{„ } 1884 \ldots\ldots x = 40 . \frac{58}{315} = 7 \cdot 4$$

das heisst der Planet tritt zu folgenden Zeiten in Opposition zur Sonne:

1880 Aug. $16 \cdot 0 + 16 \cdot 2 = 1880$ Sept. $1 \cdot 2$.
1881 Oct. $30 \cdot 0 + 30 \cdot 9 = 1881$ Nov. $30 \cdot 9$
1883 Apr. $3 \cdot 0 + 18 \cdot 1 = 1883$ Apr. $21 \cdot 1$
1884 Juli $26 \cdot 0 + 7 \cdot 4 = 1884$ Aug. $2 \cdot 4$.

Es möge übrigens hier gleich bemerkt werden, dass diese Zeitangaben in Folge der Störungen noch kleine Verschiebungen erfahren werden und nur zur Orientirung für die Vorausberechnung des Planetenlaufes dienen sollen.

Was nun zunächst die

VIII. Opposition (1880)

betrifft, so erledigt sich dieselbe durch die Bemerkung, dass der Planet in dieser Opposition meines Wissens überhaupt nicht beobachtet worden ist.

IX. Opposition (1881).

Aus dieser Opposition liegen zwei einzelne Beobachtungen des Planeten vor, welche dazu dienen mögen, die Genauigkeit der letzten Elemente und der damit berechneten Störungen zu prüfen.

Ich hatte für diese Opposition seinerzeit mit weniger genauen Elementen, als es die hier zuletzt ermittelten sind, eine Ephemeride berechnet, welche sich im Circular Nr. 169 zum Berliner astronomischen Jahrbuche publicirt vorfindet; nach dieser Ephemeride wurde der Planet auf der Sternwarte in Leipzig am 20. November aufgesucht und beobachtet; geraume Zeit später folgte eine zweite Beobachtung, welche auf der Privatsternwarte des Herrn Baron v. Engelhardt in Dresden angestellt wurde.

Hier excerpire ich aus der eben erwähnten Ephemeride nur die für die Reduction der beiden Beobachtungen nöthigen Daten,

und zwar sollen diese Daten nur den Übergang von den Beobachtungsmomenten auf die nächstliegende Berliner Mitternacht vermitteln.

12h Berl. Zeit	(114) app α	app δ	log ρ	Lichtzeit
1881 Nov. 19	4h41m 2·20	+14°25'53'0	0·21570	13h38s
20	4 40 8·94	+14 22 55·2	0·21463	13 36
21	4 39 14·90	+14 19 59·5	0·21362	13 34
Dec. 15	4 16 48·43	+13 28 15·7	0·21194	13 31
16	4 15 57·87	+13 27 11·1	0·21279	13 32
17	4 15 8·32	+13 26 12·9	0·21371	13 34

Die Beobachtungen sind die nachstehenden:

	1881	Ortszeit	(114) − ✳ Δα	Δδ	(114) app α	app δ	(*)
Leipzig	Nov. 20	12'12m16s	+0m19'30	+4' 3'0	4'40m14'07	+14°22'58'7	a
Dresden	Dec. 16	12 7 53	.....	−5 51·4	....	+13 27 19·2	b
„	Dec. 16	12 9 19	−1 3·17	.....	4 16 3·11	.....	b

Mittlere Positionen der Vergleichssterne für 1881·0:

	α (1881·0)	δ (1881·0)
a Yarnall II 2015.....	4h39m49'35	+14'18'47'5
b Schjellerup 1392.....	4 17 0·66	+13 33 0·6

Der Vergleich dieser Beobachtungen mit der obigen Ephemeride gibt:

	Parallaxe in α	Parallaxe in δ	Beob.—Ephem. α'—α	Beob.—Ephem. δ'—δ
Nov. 20	−0'03	+3'2	+5'20	+ 7'0
Dec. 16	+0·10	+3·4	+5·14	+11·2,

daher hat man:

	Nov. 20·5 α	Nov. 20·5 δ	Dec. 16·5 α	Dec. 16·5 δ
Ephem. + Correct...	4h40m14'14	+14°23' 2'2	4h16m3'01	13°27'23'3
Reduct. auf 1880·0..	−7·45	−11·8	−7·67	−16·5

das heisst die auf das mittlere Äquinoctium 1880·0 (und auf die Berliner Mitternacht) reducirten Beobachtungsergebnisse sind die folgenden:

	Nov. 20·5	Dec. 16·5
$\alpha(1880\cdot0)$	$4^h40^m\ 6\cdot69$	$4^h15^m55\cdot34$
$\delta(1880\cdot0)$	$+14°22'50'4$	$+13°27'\ 5'8$

Die Tafel X gibt für diese Epochen die Störungswerthe:

1881	Nov. 20·5	Dec. 16·5
ΔL	$-24'12'65$	$-25'22'46$
$\Delta\pi$	$+\ 4\ 16\cdot54$	$+\ 6\ 21\cdot78$
$\Delta\Omega$	$-\ 4\ 54\cdot29$	$-\ 5\ 18\cdot51$
Δi	$-\ 0\ 26\cdot08$	$-\ 0\ 26\cdot27$
$\Delta\varphi$	$-10\ 31\cdot01$	$-10\ 46\cdot53$
$\Delta\mu$	$-1'9016$	$-1'7644$

und die Verbindung dieser Störungswerthe mit dem besten Elementensysteme (pag. 391) nach Schema (12) führt zu zwei osculirenden Systemen für die Darstellung der obigen beiden Beobachtungen; man erhält mittelst siebenstelliger Rechnung:

	1881	1881
Epoche t	Nov. 20·5	Dec. 16·5
$t-t_0$	$+681\cdot5$	$+707\cdot5$
$\mu_0(t-t_0)$	$153°32'15'18$	$159°23'42'65$
L	$81\ 35\ 53\cdot99$	$87\ 26\ 11\cdot65$
M	$288\ 48\ 32\cdot10$	$294\ 36\ 44\cdot02$
π	$152\ 47\ 21\cdot89$	$152\ 49\ 27\cdot63$
Ω	$164\ 23\ 26\cdot70$	$164\ 23\ 2\cdot48$
i	$4\ 54\ 3\cdot70$	$4\ 54\ 3\cdot51$
φ	$7\ 51\ 16\cdot57$	$7\ 51\ 1\cdot05$
μ	$809'15515$	$809'29235$
$\log a$	$0\cdot4279832$	$0\cdot4279341$
v	$273°18'55\cdot74$	$279°28'35'54$
u	$261\ 42\ 50\cdot93$	$267\ 55\ 0\cdot69$
$\log r$	$0\cdot4163767$	$0\cdot4100975$
x	$+1\cdot0540342$	$+0\cdot7790956$
y	$+2\cdot2672291$	$+2\cdot3259728$
z	$+0\cdot7433115$	$+0\cdot7699111$
$\alpha(1880\cdot0)$	$4^h40^m\ 6'14$	$4^h15^m54'80$
$\delta(1880\cdot0)$	$+14°22'50'26$	$+13°27'\ 3'28$
$\log\rho$ ...	$0\cdot2146538$	$0\cdot2217914$

Die aus der letzten Verbesserung resultirenden Elemente stellen daher in Verbindung mit den aus denselben sich ergebenden Störungen die Beobachtungen dieser Opposition bis auf die im Sinne: „Beobachtung—Rechnung“ angesetzten Fehlerbeträge:

	$\alpha'-\alpha$	$\delta'-\delta$
Nov. 20.....	+0·55	+0″1
Dec. 16.....	+0·54	+2·5

dar, welche Darstellung in Anbetracht des Umstandes, dass nur erste Potenzen der Störungen berücksichtigt wurden und dass die beiden Beobachtungen von der Osculationsepoche der Elemente (1880 Jän. 9·0) nahezu zwei Jahre entfernt liegen, als ganz befriedigend bezeichnet werden muss.

Ephemeriden.

Hiermit ist das für den Planeten (114) Cassandra vorliegende Beobachtungsmateriale, soweit mir dasselbe bekannt geworden ist, erschöpft und da die schliesslichen Elemente, welche das Resultat der vorliegenden Arbeit bilden, durch die eben behandelten Beobachtungen der Opposition des Jahres 1881 eine von allen vorangehenden Rechnungsoperationen unabhängige Probe erfahren haben, so verwende ich diese Elemente jetzt zur Vorausberechnung des geocentrischen Laufes des Planeten für zwei weitere Jahre.

Diese Vorausberechnung wird hier in der Art durchgeführt, dass für eine der Oppositionszeit sehr nahe gelegene Epoche mit Hilfe der Störungstafel X osculirende Elemente gebildet werden, aus welchen dann für das betreffende Jahr eine Jahresephemeride mittelst fünfstelliger und die Oppositionsephemeride mittelst sechsstelliger Rechnung abgeleitet wird; erstere gibt die geocentrischen Polarcoordinaten des Planeten in Intervallen von 20 Tagen, letztere dieselben für einen entsprechenden, die Oppositionszeit umfassenden Zeitraum von Tag zu Tag.

Ich gebe hier zunächst die zur Bildung der osculirenden Elementensysteme für die Oppositionen der Jahre 1883 und 1884 nöthigen Zahlen, also namentlich die der Tafel X entlehnten Störungswerthe und lasse dann die osculirenden Systeme, sowie die daraus resultirenden Ephemeriden ohne weitere Bemerkungen folgen.

Jahr	1883	1884
Epoche t	April 23·0	Juli 26·0
$t-t_0$	+1200	+1660
$\mu_0(t-t_0)$	270°21′ 8″10	13°59′14″20
ΔL	−34′18″04	−45′36″33
$\Delta\pi$	+21 10·09	+29 36·58
$\Delta\Omega$	− 6 46·14	− 7 34·37
Δi	− 0 24·60	− 0 23·81
$\Delta\varphi$	−12 4·95	−11 39·16
$\Delta\mu$	−1″06729	−1″45468.

1883.

Bahnelemente.

(114) Cassandra.

Epoche und Osculation 1883 April 23·0.

Mittlere Ekliptik 1880·0.

$L = 198°14'41·52$ $\quad i = 4°54'5''18$

$M = 45\ 10\ 25·58$ $\quad \varphi = 7\ 49\ 42·63$

$\pi = 153\ 4\ 15·94$ $\quad \mu = 809''98946$

$\Omega = 164\ 21\ 34·85$ $\quad \log a = 0·4276848.$

$x = 9·999885 \sin(243°\ 7'31''8+v)$

$y = 9·976372 \sin(153\ 34\ 23·1+v)$

$z = 9·507742 \sin(149\ 14\ 23·5+v)$

Jahresephemeride für 1883.

0^h mittl. Zeit Berlin	app α	app δ	log ρ	log r
1882 Dec. 24	13ʰ17ᵐ7	− 7° 6′5	0·3886	0·3686
1883 Jan. 13	13 44·6	− 9 3·2	0·3450	0·3710
Feb. 2	14 5 6	−10 10·9	0·2961	0·3739
Feb. 22	14 18·5	−10 20·5	0·2447	0·3772
März 14	14 20·8	− 9 27·1	0·1974	0·3808
Apr. 3	14 12·0	− 7 39·1	0·1654	0·3848
Apr. 23	13 56·6	− 5 31·6	0·1607	0·3890
Mai 13	13 42·3	− 3 57·9	0·1860	0·3934
Juni 2	13 35·9	− 3 32·7	0·2325	0·3980
Juni 22	13 39·2	− 4 16·2	0·2879	0·4027
Juli 12	13 51·0	− 5 50·5	0·3435	0·4275
Aug. 1	14 9·5	− 7 56·1	0·3950	0·4123
Aug. 21	14 32·9	−10 16·8	0·4404	0·4171
Sept. 10	15 0·2	−12 39·0	0·4794	0·4219
Sept. 30	15 30·4	−14 52·7	0·5117	0·4266
Oct. 20	16 2·9	−16 49·0	0·5375	0·4313
Nov. 9	16 37·1	−18 21·0	0·5567	0·4357
Nov. 29	17 12·4	−19 23·5	0·5694	0·4401
Dec. 19	17 48·1	−19 53·6	0·5755	0·4443
1884 Jan. 8	18 23·4	−19 50·2	0·5751	0·4483

Ephemeride für die Opposition 1883.

12h mittl. Zeit Berlin	app α	app δ	log ρ	Lichtzeit
1883 April 6	14h 9m40ˢ95	−7°16′45″8	0·162400	12m 3ˢ5
7	14 8 57·28	−7 10 17·7	0·161690	12 2·4
8	14 8 12·77	−7 3 48·2	0·161056	12 1·4
9	14 7 27·50	−6 57 17·7	0·160499	12 0·4
10	14 6 41·53	−6 50 46·8	0·160019	11 59·5
11	14 5 54·94	−6 44 15·9	0·159617	11 58·9
12	14 5 7·79	−6 37 45·3	0·159293	11 58·4
13	14 4 20·15	−6 31 15·6	0·159048	11 58·0
14	14 3 32·09	−6 24 47·1	0·158881	11 57·7
15	14 2 43·67	−6 18 20·4	0·158793	11 57·6
April 16	14 1 54·97	−6 11 55·9	0·158784	11 57·5
17	14 1 6·04	−6 5 34·0	0·158854	11 57·7
18	14 0 16·96	−5 59 15·1	0·159004	11 57·9
19	13 59 27·79	−5 52 59·9	0·159235	11 58·3
20	13 58 38·60	−5 46 48·4	0·159545	11 58·8
21	13 57 49·46	−5 40 41·2	0·159934	11 59·5
22	13 57 0·41	−5 34 38·7	0·160401	12 0·2
23	13 56 11·54	−5 28 41·4	0·160946	12 1·2
24	13 55 22·91	−5 22 49·6	0·161569	12 2·2
25	13 54 34·59	−5 17 3·7	0·162269	12 3·4
April 26	13 53 46·64	−5 11·24·0	0·163045	12 4·6
27	13 52 59·15	−5 5 51·0	0·163900	12 6·1
28	13 52 12·16	−5 0 24·9	0·164829	12 7·6
29	13 51 25·71	−4 55 6·2	0·165829	12 9·3
30	13 50 39·84	−4 49 55·2	0·166902	12 11·0
Mai 1	13 49 54·59	−4 44 52·3	0·168048	12 12·8
2	13 49 10·05	−4 39 57·7	0·169265	12 14·7
3	13 48 26·27	−4 35 11·7	0·170551	12 17·1
4	13 47 43·33	−4 30 34·8	0 171904	12 19·5
5	13 47 1·31	−4 26 7·2	0·173322	12 22·0
Mai 6	13 46 20·25	−4 21 29·2	0·174805	12 24·5
7	13 45 40·18	−4 17 41·0	0·176353	12 27·2
8	13 45 1·15	−4 13 42·7	0·177965	12 29·9
9	13 44 23·23	−4 9 54·9	0·179641	12 32·8
10	13 43 46·45	−4 6 17·2	0·181380	12 35·8
11	13 43 10·87	−4 2 49·6	0·183182	12 39·0
12	13 42 36·50	−3 59 32·2	0·185046	12 42·2

Opposition: April 19·7, Grösse 10·6, Lichtstärke 1·62.

1884.

Bahnelemente.

(114) Cassandra.

Epoche und Osculation 1884 Juli 26·0.
Mittlere Ekliptik 1880·0.

$$L = 301°41'29''33$$
$$M = 148\ 28\ 46\cdot90$$
$$\pi = 153\ 12\ 42\cdot43$$
$$\Omega = 164\ 20\ 46\cdot62$$
$$i = 4\ 54\ 5\cdot97$$
$$\varphi = 7\ 50\ 8\cdot42$$
$$\mu = 809''60207$$
$$\log a = 0\cdot4278233$$

$$x = 9\cdot999885 \sin(243°15'58''4 + v)$$
$$y = 9\cdot976371 \sin(153\ 42\ 51\cdot4 + v)$$
$$z = 9\cdot507747 \sin(149\ 22\ 38\cdot3 + v)$$

Jahresephemeride für 1884.

0^h mittl. Zeit Berlin	app α	app δ	log ρ	log r
1884 Jan. 8	18^h23^m4	−19°50'2	0·5751	0·4483
Jan. 28	18 57·6	−19 16·1	0·5680	0·4522
Feb. 17	19 29·8	−18 15·5	0·5542	0·4559
März 8	19 59·3	−16 55·4	0·5336	0·4593
März 28	20 25·5	−15 24·7	0·5064	0·4626
Apr. 17	20 47·2	−13 53·5	0·4729	0·4656
Mai 7	21 3·4	−12 34·1	0·4338	0·4684
Mai 27	21 12 8	−11 40·0	0·3914	0·4710
Juni 16	21 14·6	−11 24·7	0·3497	0·4733
Juli 6	21 6·2	−11 57·2	0·3160	0·4754
Juli 26	20 51·4	−13 11·2	0·2997	0·4772
Aug. 15	20 34·7	−14 43·6	0·3067	0·4789
Sept. 4	20 22·5	−16 4·3	0·3355	0·4802
Sept. 24	20 18·8	−16 55·7	0·3777	0·4813
Oct. 14	20 24·4	−17 12·4	0·4242	0·4822
Nov. 3	20 37·6	−16 54·6	0·4690	0·4828
Nov. 23	20 56·7	−16 4·1	0·5089	0·4832
Dec. 13	21 19·8	−14 43·6	0·5422	0·4833
1885 Jan. 2	21 45·5	−12 56·0	0·5684	0·4832

Ephemeride für die Opposition 1884.

12ʰ mittl. Zeit Berlin	app α	app δ	log ρ	Lichtzeit
1884 Juli 15	20ʰ 59ᵐ 48ˢ·11	−12° 28′ 15″·2	0·305570	16ᵐ 46ˢ·0
16	20 59 3·06	−12 32 0·9	0·304733	16 44·1
17	20 58 17·22	−12 35 51·9	0·303951	16 42·3
18	20 57 30·66	−12 39 47·8	0·303224	16 40·6
19	20 56 43·41	−12 43 48·2	0·302553	16 39·1
20	20 55 55·54	−12 47 52·6	0·301939	16 37·7
21	20 55 7·09	−12 52 1·0	0·301384	16 36·7
22	20 54 18·11	−12 56 13·2	0·300887	16 35·2
23	20 53 28·64	−13 0 29·1	0·300450	16 34·2
24	20 52 38·74	−13 4 48·5	0·300073	16 33·3
Juli 25	20 51 48·46	−13 9 11·0	0·299756	16 32·6
26	20 50 57·85	−13 13 36·4	0·299500	16 32·0
27	20 50 6·98	−13 18 4·4	0·299306	16 31·5
28	20 49 15·89	−13 22 34·7	0·299174	16 31·2
29	20 48 24·64	−13 27 7·0	0·299104	16 31·1
30	20 47 33·28	−13 31 41·2	0·299095	16 31·1
31	20 46 41·85	−13 36 17·1	0·299148	16 31·3
Aug. 1	20 45 50·42	−13 40 54·4	0·299262	16 31·6
2	20 44 59·04	−13 45 32·9	0·299437	16 31·9
3	20 44 7·75	−13 50 12·3	0·299674	16 32·4
Aug. 4	20 43 16·59	−13 54 52·4	0·299972	16 33·1
5	20 42 25·61	−13 59 33·2	0·300331	16 33·9
6	20 41 34·87	−14 4 13·8	0·300753	16 34·9
7	20 40 44·42	−14 8 54·6	0·301233	16 36·0
8	20 39 54·33	−14 13 35·1	0·301772	16 37·3
9	20 39 4 66	−14 18 15·1	0·302373	16 38·7
10	20 38 15·44	−14 22 54·3	0·303033	16 40.2
11	20 37 26·71	−14 27 32·6	0·303752	16 41·8
12	20 36 38·50	−14 32 9·8	0·304530	16 43·6
13	20 35 50·86	−14 36 45·7	0·305365	16 45·5
Aug. 14	20 35 3·85	−14 41 20·1	0·306257	16 47·6
15	20 34 17·51	−14 45 52·8	0·307205	16 49·8
16	20 33 31·89	−14 50 23·5	0·308209	16 52·2
17	20 32 47·03	−14 54 52·1	0·309268	16 54·7
18	20 32 2·98	−14 59 18·2	0·310380	16 57·3
19	20 31 19·79	−15 3 41·7	0·311545	17 0·0
20	20 30 37·51	−15 8 2·4	0·312761	17 2·8

Opposition: Aug. 1·5, Grösse 11·7, Lichtstärke 0·56.

III. SITZUNG VOM 18. JÄNNER 1883.

Die Direction des k. k. militär-geographischen Institutes übermittelt 17 Blätter Fortsetzungen (22. Lief.) der neuen Specialkarte der österr.-ungar. Monarchie (1:75000).

Das w. M. Herr Hofrath Dr. C. Langer übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Beiträge zur Entwicklungsgeschichte der Prosobranchien," von Herrn Dr. Carl Rabl, Prosector am anatomischen Institute der Universität in Wien.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Friedr. Brauer in Wien übersendet eine grössere Abhandlung über die Zweiflügler des kaiserlichen Museums zu Wien, als III. Fortsetzung der im XLII. und XLIV. Bande der Denkschriften der kais. Akademie der Wissenschaften erschienenen Arbeiten, betitelt: „Systematische Studien auf Grundlage der Dipteren-Larven nebst einer Zusammenstellung von Beispielen aus der Literatur über dieselben und Beschreibung neuer Formen."

Das c. M. Herr Prof. Dr. Rich. Maly in Graz übersendet zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Untersuchungen:

1. „Über die Oxydation der aus Thioharnstoffen durch Einwirkung von Halogenverbindungen entstehenden Basen", von Herrn Rudolf Andreasch, Assistent und Privatdocent für Chemie in Graz.
2. „Notiz über die trockene Destillation von Weinsäure und Citronensäure mit überschüssigem Kalk", von Herrn Julian Freydl.

Herr Prof. C. Pelz in Graz übersendet eine Abhandlung: „Zur Contourbestimmung windschiefer Schraubenflächen."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über Potenzreihen, deren Glieder mit den aufeinanderfolgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe r-ten Ranges multiplicirt oder durch letztere dividirt werden", von Herrn Reinhard Mildner, Professor an der Landes-Unterrealschule zu Römerstadt.
2. „Über eine neue Bildungsweise des Amyl-Benzols", von Herrn F. W. Dafert in Wien.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn H. Zacherl in Wien vor.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht zwei in seinem Laboratorium von Herrn Dr. Guido Goldschmiedt ausgeführte Arbeiten:

1. „Über die Zersetzungsproducte der Salicylsäureanhydride bei der Destillation."

2. „Zur Kenntniss der Destillationsproducte des paraoxybenzoësauren Kalkes."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin, 47e année, 1e série, tome XII. Nr. 1. Paris, 1883; 8°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXX. 1882—83. Serie terza. Transunti. Vol. VII. Fascicolo 1°. Roma, 1882; 4°.

Akademie der Wissenschaften k. b. zu München: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Classe 1882. Heft 4. München, 1882; 8°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch-deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XVIII. Nr. 23—24. Halle a. S. 1882; 4°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXI. Jahrgang. Nr. 2. Wien, 1883; 8°.

Archivio per le Scienze mediche. Volume VI, Fascicolo 3°, Torino, 1882; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3e période, tome VIII. Nr. 12. 15 décembre 1882. Genève, Lausanne, Paris, 1882; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrg. VI. Nr. 80—82. Cöthen, 1882; 4°. — Jahrg. VII. Nr. 1. Cöthen, 1883; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVI. Nr. 1. Paris, 1883; 4°.

Erlangen, Universität: Akademische Schriften vom Jahre 1881. 17 Stücke 8° & 4°.

Gesellschaft, Deutsche chemische: Berichte. XV. Jahrgang Nr. 18. Berlin, 1882; 8°.

— deutsche geologische: Zeitschrift. XXXIV. Band. 3. Heft, Juli bis September 1882. Berlin; 8°.

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XVIII. Band, Jänner-Heft 1883. Wien; 8°.

— physikalische zu Berlin: Die Fortschritte der Physik im Jahre 1877. XXXIII. Jahrgang, I., II. und III. Abtheilung. Berlin, 1882; 8°.

Journal für praktische Chemie. 1882. Nr. 21 u. 22. Band XXVI. N. F. 10. u. 11. Heft. Leipzig, 1882; 8°.

Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique. Tome I. 1882. — Nr. 2. Bruxelles; 8°.

Nature. Vol. XXVII, Nr. 689, London, 1883; 8°.

Osservatorio centrale del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri. Ser. II. Vol. II. Nr. 5. Torino, 1882; 4°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. 1882. Nr. 14. Wien, 1882; 4°.

Société malacologique de Belgique: Annales. Tome XIV. Année 1879. Bruxelles; 8°. — Tome XVI. Année 1881. Bruxelles; 8°. Procès verbal de la séance du 5 mars, du 1er avril, du 6 mai, du 3 juin et du 2 juillet 1882. Bruxelles, 1882; 8°.

Verein militär-wissenschaftlicher in Wien: Organ XXV. Band. 2. u. 3. Heft. 1882. Wien; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang. Nr. 2. Wien, 1883; 4°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. II. Jahrgang. 1882. 12. Heft: December. Berlin; 4°.

Zoologische Station zu Neapel: Mittheilungen, zugleich ein Repertorium für Mittelmeerkunde. III. Band, 4. Heft. Leipig, 1882; 8°.

Über das logarithmische Potential einer nicht isolirten elliptischen Platte.

Von **J. Haubner**,
Assistent am physikalischen Institute.

(Vorgelegt in der Sitzung am 11. Jänner 1883.)

Bei den Aufgaben, welche sich auf die stationäre Strömung in zusammengesetzten flächenförmigen Leitern beziehen, hat die Lösung des folgenden Problems einige Wichtigkeit:

„In eine unendliche Ebene ist eine Platte von einem anders leitenden Stoff eingesetzt, — es ist die Stromverzweigung für Punktelektroden zu finden.“

Anscheinend ist diese Aufgabe von rein mathematischem Interesse, indess erledigt sich mit ihrer Lösung auch die Frage nach dem Verhalten cylindrischer Körper in einem homogenen, magnetischen Felde durch den blossen Übergang von zwei logarithmischen Unstetigkeiten zu einer algebraischen Unstetigkeit erster Ordnung, die ins Unendliche fällt[1], — und bei der geringen Anzahl durchführbarer Probleme auf dem Gebiete der magnetischen Induction verdienen selbst diese, nicht streng realisirbaren Fälle Beachtung.

Bekanntlich lässt sich auch bei zusammengesetzten Leitern die Abbildungstheorie zur Gewinnung neuer Fälle verwenden. Ihrer Anwendung sind jedoch bei der oben ausgesprochenen Aufgabe sehr enge Grenzen gesteckt. Man kann wohl die Platte, wenn sie einen einfach zusammenhängenden Raum bildet, auf

---

[1] Vergl. J. Stefan: Über die magnetische Schirmwirkung des Eisens. Sitzb. der k. Akad. d. Wissensch. Bd. LXXXV, pag. 633 u. 634. — J. Haubner: Über die stationäre Strömung der Elektricität in flächenförmigen Leitern. ibid. pag. 85, Anmerkung. — Aus den pag. 95 enthaltenen Formeln liesse sich auf diese Art und mittelst der Inversion das Verhalten zweier paralleler Cylinder im magnetischen Felde gewinnen.

den Kreis und ihren Aussenraum auf den Aussenraum des Kreises conform abbilden. Die Bedingung, welche für die Grenzlinie der beiden verschieden leitenden Theile der Ebene besteht, fordert jedoch, dass die beiden Abbildungsfunctionen längs dieser Linie die gleiche Vergrösserung liefern, was stattfindet, wenn sie überhaupt identisch sind.

Allen diesen Anforderungen genügt nur die lineare, rationale Function

$$\omega = \frac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z},$$

d. h. die Methode der Inversion ist auch bei zusammengesetzten Leitern immer anwendbar.

Wird dagegen durch eine algebraische Function beispielsweise der Aussenraum einer Curve auf das Äussere eines Kreises eindeutig bezogen, so fallen in das Innere Verzweigungspunkte hinein, oder umgekehrt, und es ist dann zwar an der Grenzlinie der beiden Mittel die gewünschte Bedingung erfüllt, aber die erforderliche eindeutige Beziehung verloren gegangen.

Es fragt sich nun, ob die Abbildung durch mehrdeutige Functionen bei den angegebenen Problemen nicht doch verwendbar ist. In der That ist dies in manchen Fällen unter Benützung der Eigenschaften von den Strömungs- und Niveaulinien möglich, wofür der zu behandelnde Fall ein Beispiel bietet.

1. Die elliptische Platte in der unendlichen Ebene.

Der specifische Leitungswiderstand heisse k_2 in der elliptischen Platte, k_1 im übrigen Theile der Ebene, V_2 und V_1 seien die zugehörigen Potentiale, $w = u + vi$ ein Punkt der Ebene.

Nimmt man Punktelektroden in beliebiger Lage und Zahl an, so kann man das Problem durch Abbildung nicht direct auf bereits gelöste Aufgaben zurückführen. Man kann es selbstverständlich nicht zurückführen auf den Fall der unendlichen Ebene mit eingesetzter kreisförmiger Platte, da es keine Abbildungsfunction gibt, welche Aussen- und Innenraum der Ellipse zugleich auf den Aussen- und Innenraum des Kreises durchwegs ähnlich abbilden würde.

Wohl aber ist, wie sich zeigen wird, eine Reduction auf den Fall der unendlichen Ebene ($x+yi=z$-Ebene) mit eingesetztem, monocentrischen Ring für specielle Lagen der Elektroden möglich, womit sich zugleich der allgemeine Fall erledigt.

Setzt man nämlich zwischen der z-Ebene und w-Ebene die Beziehung fest

$$z = {}^1/_2(w+\sqrt{w^2-c^2}) \text{ oder } w = z + \frac{c^2}{4z}, \qquad 1)$$

worin c^2 eine reelle Grösse sei, so entsprechen bekanntlich den concentrischen Kreisen

$$mod z = \text{const.} = \rho$$

um den Nullpunkt der z-Ebene die confocalen Ellipsen

$${}^1/_2(\lambda+\sqrt{\lambda^2-c^2}) = \rho$$

in der w-Ebene mit den Brennpunkten $w = +c$ und $w = -c$, wenn λ die halbe grosse Axe einer Ellipse bezeichnet, und der geraden Verbindungslinie (FF') der Brennpunkte entspricht der Kreis mit dem Radius $r = {}^1/_2 c$.

Schliesst man die Punkte $w = \pm c$ durch eine sehr schmale Ellipse — der Kürze halber soll gesagt werden durch die Gerade FF' — und den vom entsprechenden Kreis (kurz: $r = {}^1/_2 c$) umschlossenen Raum von der Abbildung aus, so wird sie im Riemann'schen Sinne conform, d. h. jedem Punkt der ersten Ebene entspricht nur ein Punkt der zweiten und umgekehrt, wenn wir noch bestimmen, dass die Wurzel in (1) etwa für reelle $w > c$ mit dem positiven Zeichen genommen werden soll.

Es befinde sich nun in der z-Ebene ein Ring, dessen innerer Radius $r = {}^1/_2 c$, dessen äusserer Radius $R = {}^1/_2(a+b)$ ist, wenn a und b die grosse und kleine Halbaxe der elliptischen Platte angeben, — die Elektroden seien im äusseren Raum (Leitungswiderstand $= k_1$) oder Ringraum (k_2), die innere Kreisfläche (k_3) werde elektrodenfrei vorausgesetzt. Die Lösung solcher Strömungen ist bekannt.

A) Setzt man $k_3 = \infty$ und belegt auch die Gerade FF' mit nicht leitender Substanz, so kann man das Strömungsnetz der z-Ebene auf die w-Ebene übertragen und man wird die nicht

leitende Substanz von FF', ohne die Strömung zu ändern, wieder entfernen können, wenn diese Gerade als Theil einer Strömungslinie auftritt. Dies wird immer der Fall sein, wenn in der w-Ebene gleichartige Elektroden paarweise und in conjugirten Puncten, oder einzeln auf der reellen Axe vorkommen, oder allgemeiner, wenn letztere eine Symmetrielinie der Strömungscurven ist. Da die Function 1) nur reelle Parameter enthält, entsprechen conjugirten Punkten der w-Ebene auch conjugirte der z-Ebene, — mithin lässt sich jedes bezüglich der x-Axe symmetrische Strömungsnetz durch diese Function auf die w-Ebene übertragen.

B) Wenn $k_2 = 0$, also das Potential auf der inneren Kreisfläche constant ist, so lässt sich, einer analogen Schlussweise zu Folge, gleichfalls die im Ringraum und ausserhalb desselben stattfindende Strömung auf die w-Ebene übertragen, falls FF' dabei zu einer Niveaulinie wird, was stattfindet, wenn ungleichnamige Elektroden von gleicher Stärke in conjugirten Punkten vorhanden sind.

Aus diesen beiden Specialfällen lässt sich der allgemeine Fall für eine beliebige Lage der Elektroden durch Superposition auf ähnliche Art gewinnen, wie man ein ellyptisches Integral mit beliebig vielen logarithmischen Unstetigkeiten aus Hauptintegralen construirt.

Hat man beispielsweise eine Elektrode im Punkte $\alpha = a + bi$ der w-Ebene, so denkt man sich zunächst in diesem Punkte und im conjugirten $\alpha' = a - bi$ eine Elektrode von der halben Stärke, wofür die Lösung nach *A)* bekannt ist. Ferner denke man sich in α eine zweite Elektrode von halber Stärke und in α' eine ebensolche, aber von entgegengesetzten Zeichen, was sich unter *B)* subsumirt. Dann superponire man diese zwei Potentiale und man hat das Potential für die einzige volle Elektrode in α.

Die Ausdrücke für das Potential liessen sich unter Benützung der Formeln für den Ring, welche in meiner oben citirten Abhandlung enthalten sind, unmittelbar hinschreiben, wobei es sich empfehlen würde, statt der rechtwinkligen Coordinaten u, v, elliptische ($w = c.\cos\zeta$) einzuführen. Ich stehe hievon ab, theils wegen der ermüdenden Länge der Formeln, insbesondere aber wegen des Umstandes, dass der allgemeine Fall gar kein physikalisches Interesse hat.

Zur Illustration der gegebenen Methode mögen folgende einfache Beispiele dienen.

2. Der elliptische Cylinder im homogenen Felde.

Setzt man zur Abkürzung:

$$\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}=\sigma,\quad \frac{k_3-k_2}{k_3+k_2}=\sigma',$$

so geben die Ausdrücke[1]:

$$V_1 = A\Re\left(z+\frac{r^2\sigma'-R^2\sigma}{R^2-r^2\sigma\sigma'}\cdot\frac{R^2}{z}\right)$$

$$V_2 = A\,\frac{R^2(1-\sigma)}{R^2-r^2\sigma\sigma'}\,\Re\left(z+\frac{\sigma' r^2}{z}\right)$$

$$V_3 = A\,\frac{(1-\sigma)(1+\sigma')}{R^2-r^2\sigma\sigma'}\cdot R^2\Re(z)$$

die Magnetisirung eines Hohlcylinders mit den Radien r und R im homogenen Felde, welches mit der x-Axe gleichgerichtet ist. $\Re$ und $\Im$ bedeuten den reellen und imaginären Theil des Klammerausdrucks.

a) Für $k_3=\infty$ liefert die Übertragung von:

$$V_1' = A\Re\left(z+\frac{r^2-R^2\sigma}{R^2-r^2\sigma}\cdot\frac{R^2}{z}\right)$$

$$V_2' = A\,\frac{R^2(1-\sigma)}{R^2-r^2\sigma}\,\Re\left(z+\frac{r^2}{z}\right)$$

die Magnetisirung des elliptischen Cylinders durch eine constante der U-Axe parallele Kraft.

b) für $k_3=0$ gibt die Abbildung von:

$$V_1'' = B.\Im\left(z+\frac{r^2+R^2\sigma}{R^2+r^2\sigma}\cdot\frac{R^2}{z}\right)$$

$$V_2'' = B\,\frac{R^2(1-\sigma)}{R^2+r^2\sigma}\,\Im\left(z+\frac{r^2}{z}\right)$$

[1] Vergl: Über d. magnetische Schirmwirkung des Eisens v. J. Stefan. Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. Bd. LXXXV, 1882.

das Verhalten des elliptischen Cylinders in dem mit der V-Axe gleichgerichteten Felde.

Mithin ist durch:

$$V_1 = V_1' + V_1'' = A\Re\left(w - \sigma\frac{R^4 - r^4}{R^2 - r^2\sigma}\cdot\frac{2}{w + \sqrt{w^2 - c^2}}\right)$$

$$+ B.\Im\left(w + \sigma\frac{R^4 - r^4}{R^2 + r^2\sigma}\cdot\frac{2}{w + \sqrt{w^2 - c^2}}\right)$$

$$V_2 = V_2' + V_2'' = R^2(1-\sigma)\left[\frac{A}{R^2 - r^2\sigma}\Re(w) + \frac{B}{R^2 + r^2\sigma}\Im(w)\right]$$

die Magnetisirung eines elliptischen Cylinders durch eine transversale, gegen die Axen der Leitlinie geneigte Kraft von der Intensität $\sqrt{A^2 + B^2}$ gegeben.

V_2 ist eine lineare Function der Coordinaten, die Niveauflächen sind Ebenen innerhalb des Cylinders, die Kraftlinien Gerade.

Aber während sich V_1 für grosse Werthe von w auf

$$V_1 = Au + Bv$$

reducirt, die ursprüngliche Neigung der Kraftlinien gegen die U-Axe also durch:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}$$

bestimmt war, beträgt sie im Cylinder:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{R^2 - r^2\sigma}{R^2 + r^2\sigma}\cdot\operatorname{tg}\varphi.$$

Für positive σ, d. i. bei paramagnetischen Substanzen, welche die Kraftlinien besser leiten, nähert sich ihre Richtung der grossen Axe, — die Kraftlinien suchen den längeren Weg durch den Cylinder, das umgekehrte findet bei diamagnetischen Körpern statt.

Nur für $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ fällt die Richtung der Kraftlinien im Cylinder oder die Richtung der Magnetisirung desselben zusammen mit derjenigen der magnetisirenden Kraft.

Bezeichnet man mit k die Magnetisirungszahl der Substanz des Cylinders, so steht dieselbe mit σ in der Beziehung:

$$\sigma = \frac{2\pi k}{1+2\pi k}$$

und die magnetischen Momente der Volumeinheit parallel der U- und V-Axe sind gegeben durch:

$$\alpha = k\frac{\partial V_2}{\partial u} = \frac{Ak}{1+2\pi k\dfrac{2b}{a+b}}$$

$$\beta = k\frac{\partial V_2}{\partial v} = \frac{Bk}{1+2\pi k\dfrac{2a}{a+b}}.$$

Der elliptische Cylinder ist homogen magnetisirt, was von vornherein klar war, da sich derselbe als Grenzfall des dreiaxigen Ellipsoids auffassen lässt.

3. Der elliptische Hohlcylinder im homogenen Felde.

Für einen Hohlcylinder, welcher von zwei confocalen Cylinderflächen begrenzt ist, lässt sich auf die gleiche Art das Verhalten im homogenen Felde ermitteln. Zu Grunde zu legen ist dann in der z-Ebene ein Ring, welcher einen zweiten Ring umschliesst, während die innere Kreisfläche mit nicht leitendem oder sehr gut leitendem Stoffe ausgefüllt ist,

Bezeichnen k_1, k_2, k_3, k_4 die Leitungswiderstände, a_1, a_2, a_3, $\left(a_3 = \frac{c}{2}\right)$ die Radien der Kreise von Aussen nach Innen, so lauten die Potenziale für die Strömung parallel zur X- und Y-Axe:

$$V_i' = \Re\left(A_i' z + \frac{B_i'}{z}\right),\quad V_i'' = \Im\left(A_i'' z - \frac{B_i''}{z}\right)$$

und zwar ist —

$$\frac{k_2-k_1}{k_2+k_1} = \sigma,\quad \frac{k_3-k_2}{k_3+k_2} = \sigma',\quad \frac{k_4-k_3}{k_4+k_3} = \sigma'$$

gesetzt —,

$$B_1 = \frac{A_1 a_1^2}{N}\left(\sigma + \sigma\sigma'\sigma''\frac{a_3^2}{a_2^2} + \sigma'\frac{a_2^2}{a_1^2} + \sigma''\frac{a_3^2}{a_1^2}\right)$$

$$A_2 = \frac{A_1(1+\sigma)}{N}\left(1 + \sigma'\sigma''\frac{a_3^2}{a_2^2}\right)$$

$$B_2 = \frac{A_1(1+\sigma)}{N}a_2^2\left(\sigma' + \sigma''\frac{a_3^2}{a_2^2}\right)$$

$$A_3 = \frac{A_1(1+\sigma)(1+\sigma')}{N}$$

$$B_3 = \frac{A_1(1+\sigma)(1+\sigma')}{N}\sigma''a_3^2$$

$$A_4 = \frac{A_1(1+\sigma)(1+\sigma')(1+\sigma'')}{N}$$

$$B_4 = 0$$

$$N = 1 + \sigma\sigma'\frac{a_2^2}{a_1^2} + \sigma'\sigma''\frac{a_3^2}{a_2^2} + \sigma\sigma''\frac{a_3^2}{a_1^2}.$$

A_4 und B_4 kommen übrigens gar nicht in Betracht. $\sigma'' = 1$ liefert die mit einem, $\sigma'' = -1$ die mit zwei Strichen versehenen Coëfficienten, und die Potenziale für den elliptischen Ring resp. Cylinder sind:

$$V_i = V_i + V''_i$$

wenn man z durch w und die Radien a der Kreise durch das arithmetische Mittel der Halbaxen von den entsprechenden Ellipsen ersetzt hat. — Aus dem Potenzial erhält man die Stromfunction durch Vertauschung der Operationssymbole $\Re$ und $\Im$. —

Der elliptische Hohlcylinder wird im homogenen Felde nicht mehr gleichförmig magnetisirt. Die ursprünglich geradlinigen Kraftlinien werden bei der Annäherung an den Cylinder krummlinig, durchsetzen ihn krummlinig und nehmen im Hohlraume ihre ursprüngliche, geradlinige Gestalt, nicht aber im Allgemeinen die ursprüngliche Richtung wieder an, mag nun der Hohlraum mit dem äusseren gleiches Leitungsvermögen besitzen oder nicht, wie aus der Beziehung

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{1+\sigma\sigma'\frac{a_2^2}{a_1^2}+\sigma\frac{a_3}{a_1^2}+\sigma'\frac{a_3^2}{a_2^2}}{1+\sigma\sigma'\frac{a_2^2}{a_1^2}-\sigma\frac{a_3^2}{a_1^2}-\sigma'\frac{a_3^2}{a_2^2}}\cdot\operatorname{tg}\varphi$$

erhellt. Abgesehen von den Fällen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sind die Kraftlinien im Hohlraume für beliebige φ mit ihrer ursprünglichen Richtung parallel, wenn

$$\sigma\frac{a_3^2}{a_1^2}+\sigma'\frac{a_3^2}{a_2^2} = 0,$$

oder

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = -\frac{a_1^2}{a_2^2}$$

wäre.

Die Verschiedenheit von φ' und φ rührt daher, dass die beiden nach den Axenrichtungen der Ellipse geschätzten Componenten A'_1 und A''_1 der Intensität des magnetischen Feldes im Hohlraum in verschiedenem Verhältnisse herabgemindert erscheinen. Ist $\sigma' = -\sigma$ d. h. der Hohlraum gleich dem äusseren Raum mit Luft erfüllt, so ergeben sich als jene Verhältnisse:

$$\frac{A'_3}{A'_1} = \frac{1-\sigma^2}{1-\sigma^2\frac{a_2^2}{a_1^2}-\sigma a_3^2\left(\frac{1}{a_2^2}-\frac{1}{a_1^2}\right)}$$

$$\frac{A''_3}{A''_1} = \frac{1-\sigma^2}{1-\sigma^2\frac{a_2^2}{a_1^2}+\sigma a_3^2\left(\frac{1}{a_2^2}-\frac{1}{a_1^2}\right)}$$

Nach der jetzigen Bezeichnungsweise ist

$$\sigma = -\frac{2\pi k}{1+2\pi k},$$

also negativ für paramagnetische Körper. Bei letzteren wird daher, wie der Anblick des Divisors der Quotienten lehrt, die der grossen Axe parallele Componente in stärkerem Masse geschwächt, das Umgekehrte findet statt bei diamagnetischen Körpern.

Für $a_3 = 0$ gibt der obige Bruch das Verhältniss, in welchem beim hohlen Kreiscylinder mit den Radien a_1, a_2 die Intentität im Hohlraume herabgemindert wird.

Vergleicht man demnach einen circularen mit einem elliptischen Hohlcylinder, für welchen die arithmetischen Mittel der Halbaxen den Radien des ersteren gleichkommen, so ist die Schirmwirkung des elliptischen Hohlcylinders aus Eisen gegen Kraftlinien, welche der grossen Axe parallel gehen, vollkommener, gegen solche parallel der kleinen Axe unvollkommener als die Schirmwirkung des hohlen Kreiscylinders.

Über die Zersetzungsproducte der Salicylsäureanhydride bei der Destillation.

Von Dr. **Guido Goldschmiedt.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth.)

„In Limpricht's Lehrbuch der organischen Chemie, pag. 914, ist ein Körper C_6H_4O erwähnt, der bei trockener Destillation des Salicylsäureanhydrids auftritt. Diesen habe ich genauer untersucht". So lautet der erste Satz einer Abhandlung von Märker,[1] aus welcher zu entnehmen ist, dass bei trockener Destillation des Salicylsäureanhydrids unter 300° der Körper C_6H_4O neben Phenol übergeht, während bei noch höherer Temperatur ein „terpentinartiges" Destillat erhalten wird, welches nicht untersucht wurde. Märker hat nun durch Erwärmen den Phenylalkohol „grösstentheils" entfernt und die zurückbleibende Verbindung C_6H_4O durch Umkrystallisiren aus Weingeist unter Zusatz von Thierkohle gereinigt. Er erhielt so weisse, seideglänzende Nadeln vom Schmelzpunkt 103°, deren Analysen zur Formel C_6H_4O führten. Die von Märker aus diesem Körper dargestellten Derivate hatten die den Formeln C_6H_3BrO, $C_6H_3(NO_2)O$ und $C_6H_3(NH_2)O$ entsprechende elementare Zusammensetzung. Es schien mir im hohen Grade auffallend, dass Märker ausdrücklich schreibt, er habe den von Limpricht aufgeführten Körper genauer untersucht, welcher erst bei 156° flüssig wurde, trotzdem er für seine Substanz den Schmelzpunkt 103° angibt und ohne darauf Rücksicht zu nehmen, dass sein Körper „seidenglänzende Nadeln" Limpricht's „kleine weisse Krystalle" darstellte. Auch Kraut[2] hat in seiner nach Versuchen von Schröder und Prinzhorn

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. 124, pag. 249.

[2] Annal. d. Chem. u. Pharm. 150, pag. 1.

mitgetheilten Abhandlung: „Uber Salicylverbindungen" mehrfach des Körpers C_6H_4O Erwähnung gethan, ohne dieser Unterschiede zu gedenken und ohne selbst einen Schmelzpunkt anzugeben. Während Limpricht und Märker von dem Anhydride ausgingen, wie es nach der Angabe Gerhardt's[1] durch Einwirkung von Phosphoroxychlorid auf neutrales salicylsaures Natrium erhalten wird, hat Prinzhorn auch unter den Destillationsproducten seiner Trisalicylosalicylsäure, aus Salicylsäure durch Erhitzen mit Acetylchlorid dargestellt, die Verbindung C_6H_4O aufgefunden und für sie eine dieser Formel entsprechende Zusammensetzung aus seinen Analysen berechnet. Weitere Angaben über diese interessante Verbindung konnte ich in der Literatur nicht auffinden. Ich unternahm die Wiederholung dieser Versuche in der Hoffnung, dass es mir gelingen werde, zunächst die Widersprüche in den Angaben der genannten Forscher aufzuklären und mit der Absicht, die Verbindung C_6H_4O, für welche ich als Molecularformel ein Vielfaches für wahrscheinlich hielt, genauer zu studiren. Vorgreifend will ich gleich mittheilen, dass mir weder das Eine noch das Andere gelungen, ja dass ich, trotz der zahlreichen Versuche, die ich ausgeführt habe, weder einen Körper von der Zusammensetzung, die der Formel C_6H_4O zukömmt, je auffinden konnte, noch einen solchen, welcher den Schmelzpunkt 103° gehabt hätte, dass ich vielmehr bei allen meinen diesbezüglichen Experimenten Resultate erzielte, die mit den Angaben Märker's und Kraut's durchaus nicht in Einklang zu bringen sind.

Da es mir ferne lag, mich mit den verschiedenen Anhydriden der Salicylsäure selbst zu beschäftigen, ein Gegenstand, welcher, wie mir scheint, was deren Moleculargrösse und Constitution betrifft, noch nicht endgiltig erledigt ist, habe ich dieselben nicht analysirt, sondern mich damit begnügt, bei deren Darstellung auf das Genaueste die Vorschriften der betreffenden Autoren einzuhalten.

Zunächst wurde durch Erhitzen von Salicylsäure mit Acetylchlorid auf 240° Kraut's Trisalicylosalicylsäure dargestellt und die nur durch Auskochen mit Wasser, aber nicht weiter gereinigte

[1] Ebendaselbst 87, pag. 159.

Masse destillirt. Sie zersetzt sich unter starkem Aufblähen und in der Retorte bleibt ein nicht geringer kohliger Rückstand. Das Destillat, ein gelbes, nach Phenol riechendes Öl, wurde nochmals destillirt und das bis 190° flüchtige aufgefangen. Es erstarrte bald bei Winterkälte und konnte leicht als im Wesentlichen aus Phenol[1] bestehend erkannt werden. Der über 190° siedende Rückstand wurde mit stark verdünnter Kalilauge geschüttelt, der sich abscheidende gelbweisse, flockige Niederschlag filtrirt und bis zum Aufhören der alkalischen Reaction mit Wasser gewaschen. Nach zweimaligem Umkrystallisiren aus Alkohol war der Körper rein, denn der Schmelzpunkt 172—73° blieb nun constant. Es ist eine schöne weisse Substanz in feinen Nadeln aus Alkohol krystallisirend und bei ziemlich niederer Temperatur sublimirend.

Bei der Analyse, welche nach der Kopfer'schen Methode ausgeführt wurde, gaben:

0·2550 Grm. Substanz 0·0881 Grm. Wasser und 0·6532 Grm. Kohlensäure.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{13}H_8O_2$
C.....	79·18	79·59
H.....	4·35	4·08

Ein Körper von der Zusammensetzung $C_{13}H_8O_2$ ist kürzlich von Richter[2] durch Einwirkung von Phosphoroxychlorid auf basisch salicylsaures Natron dargestellt worden, nachdem derselbe schon früher von Merz und Weith[3] auf anderem Wege erhalten und als Carbonyldiphenyloxyd bezeichnet worden ist. Die von diesen Forschern beobachteten Schmelzpunkte (Richter 170°, Merz und Weith 174°) stimmen mit demjenigen meines Präparates sehr nahe überein. Da Richter noch mit dem Studium

[1] Durch Schütteln der ätherischen Lösung mit Kalilauge wurde derselben das ganze Phenol und etwas Salicylsäure entzogen. Der Äther hinterliess nach dem Verdampfen eine geringe Menge des später zu beschreibenden krystallisirten Körpers $C_{13}H_8O_2$. Die Salicylsäure wurde in gebräuchlicher Weise vom Phenol getrennt und beide durch die bekannten Reactionen identificirt.

[2] Journal für pract. Chemie 23, pag. 349.

[3] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. 14, pag. 187.

dieses Körpers beschäftigt ist, habe ich keine weiteren Versuche mit demselben angestellt, sondern nur zur besseren Identificirung constatirt, dass beim Verschmelzen mit Kalihydrat, wie dies Merz und Weith gezeigt haben, als Spaltungsproducte Salicylsäure und Phenol entstehen, welche in gewohnter Weise von einander getrennt und durch die charakteristischen Reactionen nachgewiesen wurden. Dass Kolbe und Lautemann's[1] lasylsaures Phenyloxyd, welches diese Forscher durch Destillation des Reactionsproductes von Phosphoroxychlorid auf neutrales salicylsaures Natron erhielten, nichts Anderes, als Carbonyldiphenyloxyd ist, darauf hat schon Richter aufmerksam gemacht.

Die von dem rohen Carbonyldiphenyloxyd abfiltrirte alkalische Flüssigkeit wurde mit Salzsäure angesäuert, mit Äther ausgeschüttelt; der Äther, mit Sodalösung geschüttelt, hinterliess nach dem Verdunsten Phenol. (Geruch, Krystallisation, Tribromphenol vom Schmelzpunkt 92° und Fichtenholzspanreaction.) Die Sodalösung wurde nach dem Ansäuern, wobei weisse, krystallinische Nadeln zur Ausscheidung kamen, mit Äther geschüttelt, der nach dem Verdunsten Salicylsäure als Rückstand zurückliess. (Schmelzpunkt, Eisenreaction.) In dieser Weise wurde bei allen folgenden Versuchen verfahren, um Salicylsäure, Phenol und das Ätherketon, eventuell das erwartete Phenylenoxyd von einander zu trennen und diese Substanzen zu erkennen. Kraut sagt in seiner Abhandlung nicht, in welcher Weise Prinzhorn sein Phenylenoxyd abschied, es geht aber aus einer Stelle derselben hervor, dass auch diese Substanz durch Kalilauge weder zersetzt, noch gelöst wurde, so dass ich dieselbe auf dem von mir eingeschlagenen Wege hätte finden müssen, falls sie bei der Destillation entstanden wäre.

Da ich von dem Vorgange Prinzhorn's insoferne abweichend verfuhr, als ich bei dem beschriebenen Versuche das Rohproduct der Einwirkung von Acetylchlorid auf Salicylsäure durch Hitze zersetzte, während er dasselbe gereinigt hatte, so wiederholte ich die Destillation mit einem Materiale, welches nach Kraut's Angabe durch Extraction des Rohproductes mit Äther und Entfärben der Lösung mit Thierkohle gereinigt worden war. In die äthe-

[1] Annal d. Chem. u. Pharm. 115, pag. 196.

rische Lösung war höchstens die Hälfte des angewandten Rohproductes übergegangen, welche nach dem Abziehen des Äthers als gelbes, zähes Öl zurückblieb. Dieses, der früher beschriebenen Behandlung unterzogen, führte zu demselben Resultate, nur war hier die Ausbeute an $C_{13}H_8O_2$ eine bessere. Auch der in Äther unlösliche Antheil des Rohproductes gab bei der Destillation nichts als Phenol, Salicylsäure und Carbonyldiphenyloxyd. Es ist mir nie gelungen, einen bei 103° schmelzenden in Kalilauge unlöslichen Körper auch nur spurenweise zu entdecken.

Es wurde ferner Schiffs[1] Tetrasalicylid, aus Salicylsäure und Phosphoroxychlorid genau nach der Vorschrift bereitet, destillirt und auch dieses Präparat gab die drei genannten Zersetzungsproducte.

Schliesslich wurde auch das Einwirkungsproduct von Phosphoroxychlorid auf neutrales salicylsaures Natron, nachdem es mit siedendem Alkohol bis zur Erschöpfung extrahirt und durch kochendes Wasser von Natronsalzen vollständig befreit worden war, der Untersuchung unterzogen. Ich konnte bei diesem Präparate, welches nach den Angaben Gerhardt's dargestellt war, welches also identisch mit jenem von Limpricht und von Märker verwendeten sein musste, und mit welchem unter Anderem auch Prinzhorn gearbeitet hatte, constatiren, dass, wie Letzterer angibt, beim Erhitzen auf 200° (im Ölbade) eine sehr langsame Zersetzung stattfindet. Der Retortenhals beschlägt sich mit einem spärlichen Sublimate, welches, nachdem die Temperatur einige Stunden auf 200° erhalten wurde, herausgenommen sich im Wesentlichen als aus Salicylsäure bestehend erwies, und nur minimale Spuren von in Kalilauge Unlöslichem enthielt; selbst bei 300° ist die Zersetzung noch äusserst langsam; erst wenn man über directem Feuer noch höher destillirt, geht ein beinahe ganz erstarrendes gelbes Öl, zuletzt ein dickes Öl, wahrscheinlich Märker's „terpentinartige" Substanz, über, welche aber auch schon beim Schütteln mit Wasser zu einer halbfesten Masse erstarrt. Das gesammte Destillat wurde mit Kalilauge geschüttelt und wie immer behandelt. In der alkalischen Lösung wurde, wie in den vorstehend beschriebenen Versuchen, Phenol

[1] Annal. d. Chem. u. Pharm. 163, pag. 218.

und Salicylsäure gefunden. Das in Kalilauge Unlösliche bestand aus Carbonyldiphenyloxyd neben einer amorphen, nach dem Schmelzen glasartig erstarrenden Substanz, wahrscheinlich Märker's „terpentinartiger" Körper. Durch Sublimation des Ersteren konnte leicht eine Trennung erzielt werden.

Vergleicht man die procentische Zusammensetzung des Carbonyldiphenyloxyds mit jener des Phenylenoxydes

	$C_{13}H_8O_2$	C_6H_4O
O.....	79·59	78·26
H.....	4·08	4·35
O.....	16·33	17·39

so wäre es bei der nicht allzu grossen Verschiedenheit derselben nahe liegend, die Resultate Limpricht's und Prinzhorn's dadurch erklären zu wollen, dass diese beiden Chemiker nicht ganz reine Substanzen in Händen hatten;[1] dieser Auslegung würde sich aber der Umstand entgegenstellen, dass Prinzhorn eine der Analysen seines Phenylenoxydes mit einem Präparat ausgeführt hat, welches fünfzehn Stunden lang mit Jodwasserstoff auf 200° erhitzt worden war, ohne seine Zusammensetzung zu verändern, eine Behandlung, bei welcher Carbonyldiphenyloxyd zu Methylendiphenyloxyd reducirt wird. Märker's Substanz zeigt einerseits eine zu grosse Differenz im Schmelzpunkt, anderseits eine zu gute Übereinstimmung in der Zusammensetzung der Derivate mit den für die procentische Zusammensetzung der Substitutionsproducte des Phenylenoxydes berechneten Zahlen, als dass man annehmen dürfte, er hätte ein unreines Präparat in Händen gehabt. Einen Grund dafür anzugeben, wesshalb ich bei möglichst genauer Einhaltung der mitgetheilten Versuchsbedingungen ein anderes Resultat erzielt habe als die genannten Forscher, ist mir nicht möglich. Vielleicht wird sich eine Aufklärung aus den noch ausstehenden ausführlichen Berichten über Richter's Untersuchungen ergeben.

[1] Ein kleiner Gehalt an Salicylsäure (C = 60·9, H = 4·3) könnte leicht den Kohlenstoffgehalt so weit herabdrücken.

Zur Kenntniss der Destillationsproducte des paraoxybenzoesauren Kalkes.

Von Dr. **Guido Goldschmiedt.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth.)

In einer vor ungefähr einem Jahre in Gemeinschaft mit Herzig[1] publicirten Arbeit „Uber das Verhalten der Kalksalze der drei isomeren Oxybenzoesäuren und der Anissäure bei der trockenen Destillation" geschah einer Substanz Erwähnung, welche bei der Destillation des entwässerten paraoxybenzoesauren Kalkes als in Kalilauge unlöslicher Rückstand im Destillate sich vorfand und in Folge dieser Unlöslichkeit leicht von dem in weitaus überwiegender Menge entstandenen Phenol getrennt werden konnte. Wir beschrieben den durch Krystallisation aus Alkohol unter Anwendung von Thierkohle gereinigten Körper, als bei 99° schmelzende meist gekrümmte Nadeln, welchen ein an Diphenylenoxyd erinnernder Geruch eigenthümlich ist, dessen Zusammensetzung und Eigenschaften wir aber damals, wegen der äusserst geringen Quantität, die uns zur Verfügung stand, nicht ermitteln konnten.

Da ich im Besitze grösserer Quantitäten Anissäure war, stellte ich mir nun Paraoxybenzoesäure dar und destillirte 240 Grm. des trockenen Kalksalzes ganz in der Weise, wie ich es früher mit Herzig gethan hatte. Das Destillat wurde durch Destillation von der Hauptmenge des entstandenen Phenols befreit und der Rückstand mit verdünnter Kalilauge behandelt. Das Unlösliche wurde abfiltrirt und gewaschen. Es wog trocken $7^1/_2$ Grm. Zur Reinigung wurde die Substanz mit Wasserdämpfen destillirt, wobei sie sich als sehr leicht flüchtig erwies

[1] Monatshefte für Chemie III., pag. 126.

und sich in Gestalt kleiner weisser Nädelchen oder Blättchen condensirte. In der Retorte blieb nur ein geringer brauner schmieriger Rückstand zurück. Die abfiltrirten Krystalle wurden nun mit wenig siedendem Weingeist behandelt, wobei eine schwere ölige Masse, die beim Abkühlen erstarrte, zurückblieb. Aus der Lösung schieden sich beim Erkalten schöne quadratische, weisse Blättchen ab, welche nach nochmaligem Umkrystallisiren den constanten Schmelzpunkt 83—84° zeigten. Auch nach dem Sublimiren, welches bei 100° schon leicht erfolgt, wurde derselbe Schmelzpunkt beobachtet. Wenn nun schon dieses Verhalten, sowie auch der charakteristische Geruch es wahrscheinlich machten, dass die vorliegende Substanz Diphenylenoxyd sei, so konnte darüber kein Zweifel mehr obwalten, als die Pikrinsäureverbindung daraus dargestellt wurde, deren Aussehen und Schmelztemperatur (93°) vollkommene Übereinstimmung ergab.

Auch die Analyse führte zur Formel des Diphenylenoxyds.

0·2548 Grm. gaben 0·1089 Grm. Wasser und 0·8014 Grm. Kohlensäure.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{12}H_8O$
C.....	85·79	85·71
H.....	4·79	4·76

Der in Weingeist schwerer lösliche Rückstand, wurde, um ihn vollständig von Diphenylenoxyd zu trennen, auf ein grösseres Uhrglas gebracht, dieses mit zwei über einander gestülpten Trichtern bedeckt und auf dem kochenden Wasserbade erwärmt, so lange noch etwas absublimirte. Das Sublimat hatte den Schmelzpunkt des Diphenylenoxydes und gab eine bei 93° flüssig werdende Pikrinsäureverbindung, während als Rückstand auf dem Uhrglase eine bei der Temperatur des siedenden Wassers fest bleibende strahlig-krystallinische Masse zurückblieb. Diese lässt sich leicht durch Sublimation reinigen, wobei sie in Gestalt feiner langer seidenglänzender Nadeln erhalten wird. Aus absolutem Alkohol schiesst der Körper in sternförmig gruppirten Nadeln an, welche in der Regel ziemlich dünn sind. Der Schmelzpunkt der reinen Substanz liegt bei 172°—73°.

Die Analyse führte zur einfachsten Formel $C_{13}H_8O_2$.

0·2722 Grm. Substanz gaben 0·1042 Grm. Wasser und 0·7920 Grm. Kohlensäure.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{13}H_8O_2$
C.....	79·35	79·59
H.....	4·25	4·08

Der Körper ist also dasselbe Carbonyldiphenyloxyd, von welchem in vorstehender Abhandlung die Rede ist. In der Kalischmelze zerfällt er, wie dieses, in Salicylsäure und Phenol.

Es blieb mir nun noch übrig, an der Hand der jetzt mit grösseren Quantitäten gemachten Erfahrungen zur Untersuchung jener kleinen Menge (etwa 80—90 Mgrm.) des in Kalilauge unlöslichen Destillates zurückzukehren, welches Herzig und ich seinerzeit erhalten hatten. Ich unterwarf auch diese der Sublimation auf kochendem Wasserbade und erhielt neben bei 82° schmelzenden Blättchen einen strahlig-krystallinischen bei 100° festen Rückstand, der bei Sublimation in ein Uhrgläschen bei 170° schmelzende Nädelchen lieferte. Es war also auch hier die Gegenwart derselben zwei Substanzen nachweisbar.

Die Zersetzung des paraoxybenzoesauren Kalkes durch Hitze liefert demnach als flüchtige Producte neben Phenol in untergeordneter Menge Diphenylenoxyd und Carbonyldiphenyloxyd. Letzteres kann als ätherartiges Anhydrid eines Dioxybenzophenons aufgefasst werden. Die Bildung eines solchen in dem vorliegenden Falle wäre eine der allgemeinen Methode der Ketondarstellung vollkommen sich anreihende Reaction und die in Gemeinschaft mit Herzig ausgeführte Untersuchung wurde, wie aus unserer Abhandlung hervorgeht, thatsächlich mit Rücksicht auf die mögliche Vervollständigung der Reihe bekannter isomerer Dioxybenzophenone in Angriff genommen. Man könnte daher vielleicht annehmen, dass ein Theil des paraoxybenzoesauren Kalkes sich in der Weise zersetze, dass aus primär gebildetem Dioxybenzophenon durch Wasseraustritt das Ätherketon entstehe.

Dann ist aber auch die Annahme einer in irgend einem Stadium der Reaction vor sich gehenden Umlagerung aus der Para- in die Orthostellung nothwendig, da für das Carbonyldiphenyloxyd, sowohl wegen seines Entstehens aus Salicylderivaten, als wegen seiner Spaltung in Salicylsäure und Phenol. Eine Orthostellung sicher gestellt, die zweite wahrscheinlich ist. Bei der bekannten Leichtigkeit solcher Übergänge aus der Para- in die Orthoreihe, namentlich bei hoher Temperatur, würde diese Annahme keine Schwierigkeit machen.

Über die Oxydation der aus Thioharnstoffen durch Einwirkung von Halogenverbindungen entstehenden Basen.

Von **Rudolf Andreasch.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. Maly in Graz.)

Vor einiger Zeit[1] habe ich durch Oxydation des Sulfhydantoïns mittelst chlorsaurem Kalium und Salzsäure das Kaliumsalz einer als Carbamidsulfonessigsäure bezeichneten Säure erhalten und näher beschrieben. Die Bildung, sowie die Eigenschaften der Verbindung liessen vermuthen, dass man es mit einem aus Harnstoff und Sulfonessigsäure gepaarten Körper zu thun habe, und es gelang in der That, durch salpetrige Säure daraus Sulfonessigsäure zu erhalten, wobei freilich das zweite Spaltungsproduct, der Harnstoff, in Kohlensäure und Stickstoff zerlegt wurde. Bewirkt man aber die Spaltung durch Barythydrat, so lässt sich auch der Harnstoff leicht in theoretischer Menge isoliren, wie folgender Versuch zeigt.

Als 6 Grm. des Kalisalzes in einem Kölbchen mit heiss gesättigtem Barytwasser zum Kochen erhitzt wurden, trat nur schwacher Geruch nach Ammoniak auf, und es schied sich alsbald ein schweres Krystallpulver ab, das unter dem Mikroskope die für den sulfonessigsauren Baryt charakteristischen von Carius[2] beschriebenen Täfelchen zeigte. Um nur eine Basis in der Lösung zu haben, wurde ohne Rücksicht auf die krystallinische Ausscheidung verdünnte Schwefelsäure in geringem Überschusse zugegeben, einige Zeit in mässiger Wärme bis zur vollständigen

---

[1] Monatshefte für Chemie I. 978.

[2] Annal. Chem. Pharm. 124, 55.

Zersetzung des abgeschiedenen Barytsalzes digerirt, vom schwefelsauren Baryt abfiltrirt und aus der verdünnten Flüssigkeit der Schwefelsäureüberschuss durch vorsichtigen Zusatz von Barytwasser ausgefällt. Die filtrirte Flüssigkeit wurde am Wasserbade eingedampft und der krystallinische, barytfreie Rückstand mit absolutem Alkohol ausgezogen. Nach dem Verdunsten desselben hinterblieben dünne Nadeln und Prismen, die, mit Salpetersäure übergossen, sofort zu den bekannten Formen des salpetersauren Harnstoffs erstarrten und auch nach dem Erhitzen im Proberöhchren mit Kupfersulfat und Lauge die Biuretreaction gaben. Eine Stickstoffbestimmung in der umkrystallisirten Verbindung lieferte die für Harnstoff erforderlichen Zahlen, nämlich 46·29% N statt der berechneten 46·67%.

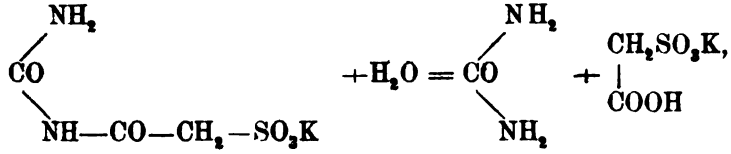
Die Gesammtmenge an Harnstoff betrug 1·3 Grm., während nach der Theorie aus 6 Grm. des Kalisalzes 1·6 Grm. erhalten werden sollten.

Der in Alkohol unlösliche Rückstand wurde in wenig Wasser aufgenommen und mit starkem Alkohol gefällt. Dadurch schied sich ein krystallinisches Pulver ab, das unter dem Mikroskope oktaëdrische Krystalle bildete und leicht als saures sulfonessigsaures Kalium erkannt wurde; die Menge desselben betrug 4·4 Grm., während sich theoretisch 4·8 Grm. ergeben sollten.

0·343 Grm. der getrockneten Verbindung gaben beim Abrauchen mit Schwefelsäure 0·164 Grm. K_2SO_4, entsprechend 0·0735 Grm. K.

Gefunden	Saures, sulfonessigsaures Kalium verlangt:
21·44% K.	21·91% K.

Das carbamidsulfonessigsaure Kalium wird also durch kurzes Erwärmen mit Barythydrat unter Wasseraufnahme quantitativ in Harnstoff und saures, sulfonessigsaures Kalium zerlegt:



wodurch ein neuer Beweis für die Richtigkeit der schon früher angenommenen Constitution dieser Verbindung erbracht ist.

Das erwähnte Auftreten von sulfonessigsaurem Baryt bei obiger Zersetzung erklärt sich leicht durch das Verhalten des sauren sulfonessigsauren Kaliums gegen Barythydrat. Versetzt man nämlich eine wässerige Lösung dieses Salzes mit überschüssigem, warm gesättigtem Barytwasser, so fällt sulfonessigsaurer Baryt als krystallinisches Pulver aus, während die filtrirte und vom Barytüberschusse durch Kohlensäure befreite Lösung nach dem Einengen und Fällen mit Alkohol neutrales sulfonessigsaures Kalium ergibt, welches unter diesen Umständen wasserfrei[1] und in dünnen Täfelchen erhalten wird.

0·287 Grm. bei 100° getrocknetes Barytsalz gaben nach dem Abrauchen mit Schwefelsäure 0·229 Grm. $BaSO_4$.

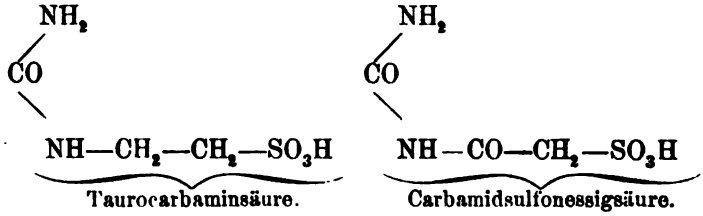
Gefunden	Berechnet für sulfonessigsauren Baryt: $C_2H_2BaSO_5+H_2O$
46·91% Ba	46·76% Ba.

0·288 Grm. im Exsiccator getrocknetes Kalisalz gaben nach dem Abrauchen mit Schwefelsäure 0·233 Grm. K_2SO_4.

Gefunden	Berechnet für sulfonessigsaures Kalium: $C_2H_2K_2SO_5$
36·25% K.	36·11% K

Oxydation des Diphenylhydrosulfhydantoïns, Bildung von Diphenyltaurocarbaminsäureanhydrid.

Schon gelegentlich meiner ersten Abhandlung über diesen Gegenstand wies ich auf den nahen Zusammenhang der von Salkowski entdeckten Taurocarbaminsäure[2] mit der Carbamidsulfonessigsäure hin, zu welcher erstere in derselben Beziehung steht, wie die Isäthionsäure zur Sulfonessigsäure:



Taurocarbaminsäure. Carbamidsulfonessigsäure.

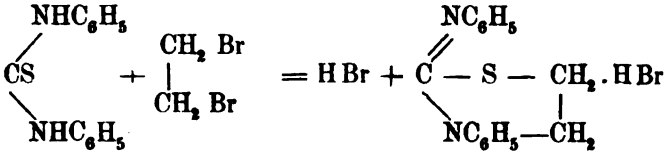
[1] Das aus Wasser krystallisirte Salz besitzt die Zusammensetzung: $C_2H_2K_2SO_5+H_2O$.

[2] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. VI, 744 u. 1191.

Es gelang mir jedoch nicht, das Kaliumsalz der Taurocarbaminsäure durch Oxydation mittelst Salpetersäure oder Kaliumchlorat und Salzsäure in jenes der Carbamidsulfonessigsäure überzuführen.

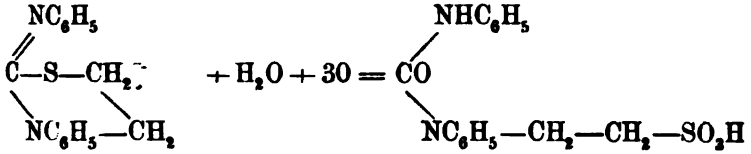
Nach dem Bekanntwerden der Versuche Fr. Carl's,[1] der aus Isäthionsäure durch Oxydation mit Chromsäure Sulfonessigsäure erhielt, versuchte ich auch dieses Oxydationsmittel, jedoch ebenfalls mit negativem Erfolge.

Es ist mir aber jetzt in anderer Weise gelungen, den experimentellen Beweis für die Zusammengehörigkeit beider Verbindungen zu erbringen. Ich benützte dazu das von Will[2] entdeckte Diphenylhydrosulfhydantoïn, das beim Erhitzen gleicher Moleküle von Sulfocarbanilid und Äthylenbromid gemäss der Gleichung:



als bromwasserstoffsaures Salz erhalten wird.

Dieser Körper musste bei der Oxydation, wenn der Process in entsprechender Weise wie beim gewöhnlichen Sulfhydantoïn abliefe, eine Diphenyltaurocarbaminsäure liefern:



Der Versuch wurde wie beim Sulfhydantoïn durch Oxydiren mit chlorsaurem Kalium und Salzsäure ausgeführt und dabei die theoretische Menge von Chlorat (d. i. ein Molekül auf ein Molekül des Hydrosulfhydantoïns) einwirken gelassen.

Die freie Base wurde zu je 5 Grm. in eine Reihe kleiner Bechergläser vertheilt mit etwa 50 C. C. eines aus gleichen Theilen rauchender Salzsäure und Wasser hergestellten Gemisches

[1] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. XIV, 63.

[2] daselbst XIV, 1490.

übergossen und, sobald sich Alles gelöst hatte, nach und nach 2·4 Grm. feingepulverten chlorsauren Kaliums eingetragen. Die Einwirkung erfolgt öfter von selbst oder es genügt gelindes Erwärmen. Vor dem Zugeben einer neuen Portion des Oxydationsmittels hat man Sorge zu tragen, dass sich das Gemisch genügend abgekühlt hat, weil sonst die Reaction sehr heftig und das Product durch zu weite gehende Oxydation verdorben wird. Ist die gewogene Menge von Kaliumchlorat eingetragen, so stellt man die Gläser an einen kühlen Ort, wobei sich nach einigen Stunden das Oxydationsproduct vollständig, theils in Form eines braunen, den Wänden anhängenden Harzes, theils als weisses, krystallinisches Pulver absetzt. Die salzsaure Mutterlauge wird abgegossen, das Product mit Wasser gewaschen, wobei man meist ein Krystallinischwerden des braunen Harzes bemerkt, und auf einem Filter gesammelt.

Die Verarbeitung der mit den Waschwässern vereinigten Mutterlaugen wird später beschrieben werden.

Das erhaltene Rohproduct wird aus heissem Alkohol umkrystallisirt, wobei man einen aus dünnen, schimmernden Blättchen bestehenden Brei erhält, den man am besten mittelst der Wasserluftpumpe trocken saugt. Die dunkelgrün gefärbten Mutterlaugen liefern bei weiterem Einengen noch ein oder zwei Krystallisationen, die minder rein sind, bis zuletzt eine dunkle, schmierige Masse in nicht unbedeutender Menge hinterbleibt.

Zur weiteren Reinigung werden die vereinten Krystallisationen mit wenig kaltem Alkohol gewaschen, gut abgepresst und noch 8 — 10 Mal aus siedendem Alkohol oder Eisessig unter Anwendung von Thierkohle umkrystallisirt.

Die Substanz enthielt Schwefel und Stickstoff, war aber frei von Kalium und Chlor; zur Analyse wurde sie zuerst im Vacuum über Schwefelsäure, später bei 100° getrocknet, wobei keine Gewichtsabnahme mehr erfolgte.

I. 0·260 Grm. Substanz gaben im Bajonnetrohr mit chromsaurem Blei verbrannt 0·566 Grm. CO_2 und 0·112 Grm. H_2O.

II. 0·245 Grm. Substanz, im Sauerstoffstrome verbrannt, lieferten 0·533 Grm. CO_2 und 0·110 Grm H_2O.

III. 0·2937 Grm. Substanz gaben 24 C. C. N bei 15° und 725·7^{mm} b.

IV. 0·209 Grm. Substanz gaben nach dem Schmelzen mit Soda und Kaliumchlorat 0·1647 Grm. Ba SO_4.

V. 0·2435 Grm. Substanz gaben im Schiffchen mit $K_2Cr_2O_7$ überschichtet und verbrannt 0·5265 Grm. CO_2 und 0·104 Grm. H_2O.

Oder in Percente umgerechnet:

	I.	II.	III.	IV.	V.	Mittel
C	59·37	59·33	—	—	59·22	59·31
H	4·79	4·99	—	—	4·75	4·84
N	—	—	9·13	—	—	9·13
S	—	—	—	10·82	—	10·82

Die Zahlen führen zur Formel $C_{15}H_{14}N_2SO_3$, welche verlangt:

	Berechnet		Gefundenes Mittel
C_{15}	180	59·60	59·31
H_{14}	14	4·64	4·84
N_2	28	9·27	9·13
S	32	10·60	10·82
O_3	48	15·89	15·90
	302	100·00	100·00

Eine solche Zusammensetzung kommt einem Körper zu, der um ein Molekül Wasser weniger enthält, als die erwartete Diphenyltaurocarbaminsäure und also als deren Anhydrid zu bezeichnen ist. Seine Bildung erfolgt gemäss der Gleichung:

$$\underset{\text{Diphenylhydrosulfhydantoïn}}{C_{15}H_{14}N_2S} + 3O = \underset{\text{Diphenyltaurocarbaminsäureanhydrid.}}{C_{15}H_{14}N_2SO_3}$$

Die Ausbeute an reiner Substanz wurde durch das häufige Umkrystallisiren allerdings ziemlich verringert, doch erhielt ich aus 80 Grm. Diphenylhydrosulfhydantoïn etwa 22 Grm. nahezu farblosen Productes.

Eigenschaften. Das Diphenyltaurocarbaminsäureanhydrid ist in Wasser, Äther und Chloroform unlöslich, ziemlich leicht wird es von siedendem Alkohol aufgenommen, aus welchem es beim raschen Erkalten in dünnen, schimmernden Blättchen, bei langsamem Abkühlen aber in farblosen, stark glänzenden Nädelchen, die mitunter zu lockeren Büscheln vereinigt sind, anschiesst. Eisessig löst die Substanz schon in der Kälte reichlich, noch leichter beim Erhitzen. Der Körper schmilzt bei 186—187° C. unter Braunfärbung und Entwicklung von schwefliger Säure und anilinartig riechenden Dämpfen.

Einwirkung von Barythydrat auf das Diphenyltaurocarbaminsäureanhydrid.

Um Spaltungsproducte zu erhalten, wurde die Einwirkung von Barythydrat im geschlossenen Rohr bei 120° versucht, später zeigte sich jedoch, dass dies gar nicht nothwendig ist, indem durch Barytwasser schon beim gelinden Sieden, selbst schon bei längerem Digeriren am Wasserbade Spaltung erfolgt. Nach einiger Zeit sind die Nadeln des Anhydrides verschwunden und im Kolben hat sich kohlensaurer Baryt abgeschieden, dem nur eine geringe Menge organischer Substanz beigemengt war. Nachdem aus dem alkalisch reagirenden Filtrate der Barytüberschuss durch Kohlensäure entfernt war, wurde die noch barythältige Flüssigkeit am Wasserbade eingeengt, wonach sie beim Erkalten oft bis auf den letzten Tropfen zu dünnen Blättchen eines Barytsalzes erstarrte. Beim Wiederauflösen machte sich häufig eine milchige Trübung bemerkbar, die aber bei weiterem Erhitzen der Lösung unter Auftreten von Anilingeruch verschwand. Dieser Befund, zusammengehalten mit der Möglichkeit, dass bei der Zersetzung des Diphenyltaurocarbaminsäureanhydrides leicht Anilin als eines der Spaltungsproducte auftreten konnte, bewog mich, bei weiteren Versuchen von vornherein darauf Rücksicht zu nehmen. Dazu wurde eine neue Partie des Anhydrides mit Barytwasser zerlegt und die Flüssigkeit nach dem Abfiltriren des Baryumcarbonates mehrere Male mit Äther ausgeschüttelt. Derselbe hinterliess beim Abdestilliren ein röthlich gelbes Öl, das sowohl den Geruch des Anilins wie dessen charakteristische Reactionen mit Chlorkalk und Kaliumbichromat zeigte und auch die Isonitrilreaction gab, somit zweifelsohne Anilin war.

Das erwähnte, neben Anilin gebildete Barytsalz wurde aus verdünntem Alkohol umkrystallisirt und in dünnen, glänzenden Schüppchen erhalten, die über Schwefelsäure Wasser abgaben und trüb wurden.

Analysen. Dieselben mit bei 100° C getrockneter Substanz ausgeführt, ergaben:

I. 0·214 Grm. Substanz lieferten, mit H_2SO_4 abgeraucht 0·093 Grm. $BaSO_4$.

II. 0·246 Grm. der Verbindung gaben im Schiffchen verbrannt 0·3235 Grm. CO_2 und 0·088 Grm. H_2O.

III. 0·2375 Grm. Substanz gaben mit Soda und Salpeter geschmolzen und mit Ba Cl_2 gefällt 0·1952 Grm. Ba SO_4.

IV. 0·2575 Grm. Substanz lieferten 11·5 C. C. Stickstoff bei 14·5° C. und 723^{mm} b.

V. 0·271 Grm. der Verbindung gaben beim Abrauchen mit H_2SO_4 0·116 Grm. Ba SO_4.

Oder in Percente umgerechnet:

	I	II	III	IV	V	Mittel.
C.....	—	35·86	—	—	—	35·86
H	—	3·97	—	—	—	3·97
N	—	—	—	5·07	—	5·07
S.....	—	—	11.34	—	—	11·34
Ba.....	25·55	—	—	—	25·17	25·36

Diese Zahlen führen zu der Formel eines phenylamidoisäthionsauren Baryums: $(C_8H_{10}NSO_3)_2$ Ba, welche verlangt:

	Berechnet:	Gefundenes Mittel:
C_{16}.... 192	35·75	35·86
H_{20}.... 20	3·72	3·97
N_2 28	5·21	5·07
S_2 64	11·92	11·34
O_6 96	17·88	18·40
Ba....137	25·51	25·36
Mol. = 537	100·00	100·00

Zu den Wasserbestimmungen ist die Substanz im lufttrockenen Zustande verwendet worden.

I. 0·350 Grm. verloren im Trockenschranke bei 110 0·0325 Grm. H_2O.

II. 0·520 Grm. verloren 0·0465 Grm. H_2O.

III. 0·284 Grm. verloren 0·0255 Grm. H_2O.

Im krystallisirten Zustande enthält mithin das phenylamidoisäthionsaure Baryum 3 Moleküle Wasser, wie aus folgender Zusammenstellung hervorgeht:

Gefunden:			Berechnet für $(C_8H_{10}NSO_3)_2$ Ba $+3H_2O$:
I.	II.	III.	
9·28	8·94	8·98	9.17% H_2O.

Es haben sich also bei der Zerlegung des Diphenyltaurocarbaminsäureanhydrides durch Barythydrat Kohlensäure, Anilin und Phenylamidoisäthionsäure als Spaltungsproducte ergeben und der Process lässt sich durch folgende Gleichung:

$$C_{15}H_{14}N_2SO_3 + 2H_2O = CO_2 + C_6H_5 . NH_2 + C_8H_{11}NSO_3$$

ausdrücken.

Die Spaltung verläuft vollständig analog der von Salkowski[1] an der gewöhnlichen Taurocarbaminsäure unter Einwirkung von heiss gesättigtem Barytwasser bei 130—140° C. beobachteten, wobei Kohlensäure, Ammoniak und Taurin auftreten:

$$C_3H_8N_2SO_4 + H_2O = CO_2 + NH_3 + C_2H_7NSO_3$$

Eigenschaften des phenylamidoisäthionsauren Baryums. Dasselbe ist in Wasser ziemlich leicht löslich und krystallisirt beim langsamen Erkalten einer heiss gesättigten Lösung in dünnen, zu warzenartigen Drusen vereinigten Blättchen, die in reinem Zustande vollkommen weiss sind, meist aber eine schwach gelblich-graue Farbe besitzen. Verdünnter Alkohol löst das Salz in der Wärme ziemlich leicht, dagegen wird es aus concentrirter wässeriger Lösung durch absoluten Alkohol in Blättchen gefällt. Mit den gewöhnlichen Metallsalzen gibt es keine Niederschläge, es scheinen demnach die meisten anderen Salze leicht löslich zu sein. Mit Silbernitrat tritt nach einigem Stehen Reduction unter Abscheidung von pulverförmigem Silber ein. Im Röhrchen erhitzt, verknistern die Krystalle; später findet unter Entwicklung von Anilingeruch Verkohlung statt, ohne dass die Substanz vorher schmelzen würde.

Versetzt man das Barytsalz mit der äquivalenten Menge von schwefelsaurem Kalium, filtrirt das Baryumsulfat ab und verdampft das Filtrat am Wasserbade, so erhält man das Kaliumsalz der Phenylamidoisäthionsäure in Gestalt dünner, lebhaft glänzender Schüppchen, die meist ebenfalls zu kleinen Warzen oder Drusen angeordnet und in Wasser sehr leicht löslich sind.

[1] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. 6, 745.

Phenylamidoisäthionsäure oder Phenyltaurin

$$\begin{array}{l} CH_2.NHC_6H_5 \\ | \\ CH_2.SO_3H \end{array}$$

Die freie Phenylamidoisäthionsäure oder das Phenyltaurin, wie man die Substanz auch nennen kann, erhält man leicht durch Zersetzen des Barytsalzes mit der berechneten Menge verdünnter Schwefelsäure und Einengen des Filtrates, wobei dieses beim Erkalten zu einem dünnen Brei von Krystallflittern erstarrt, die, abgepresst und getrocknet, farblose, stark silberglänzende Blättchen darstellen.

Zur Analyse wurde die Substanz zuerst im Vacuum über Schwefelsäure, später bei 100° getrocknet, wobei keine Gewichtsabnahme erfolgte.

I. 0·25325 Grm. Substanz gaben im Schiffchen mit chromsaurem Blei verbrannt 0·4485 Grm. CO_2 und 0·1285 Grm. H_2O.

II. 0·290 Grm. Substanz lieferten 19·3 C. C. Stickstoff bei 15° C und 720·4^{mm} b.

Der Schwefel wurde qualitativ nachgewiesen.

	Gefunden:		Berechnet für $C_8H_{11}NSO_3$:
	I.	II.	
C.....	47·76	—	47·76
H	5·64	—	5·47
N	—	6·98	6·97

Eigenschaften. Die Phenylamidoisäthionsäure löst sich mit stark saurer Reaction in Wasser und ist auch im Stande kohlensaure Salze zu zerlegen, verhält sich also wie eine ausgesprochene Säure, was den indifferenten Eigenschaften des gewöhnlichen Taurins gegenüber hervorgehoben zu werden verdient. In Alkohol und Äther ist das Phenyltaurin unlöslich; sein Schmelzpunkt liegt bei ungefähr 260° C. Am Platinblech erhitzt, schmilzt es unter Braunfärbung und hinterlässt eine glänzende, etwas schwer verbrennliche Kohle.

Die Phenylamidoisäthionsäure lässt sich auch in beträchtlicher Menge aus den früher erwähnten, von der Oxydation des Diphenylhydrosulfhydantoïns herrührenden, salzsauren Flüssigkeiten gewinnen. Dieselben wurden zunächst zur Entfernung der

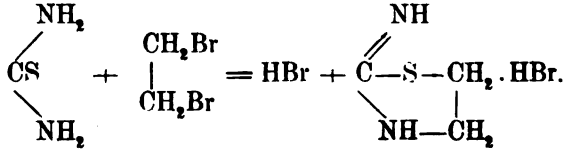
Salzsäure und Abscheidung des Chlorkaliums eingeengt, worauf die restirenden Mutterlaugen blumenkohlartige Krystallaggregate absetzten, die abgesaugt und mehrere Male aus Wasser umkrystallisirt wurden. Da aber auf diesem Wege kein farbloses Product zu erhalten war und ich anderseits die Vermuthung hatte, dass diese stark sauer reagirenden Krystalle nur verunreinigtes Phenyltaurin seien, so stellte ich durch Übersättigen mit Barytwasser und Einleiten von Kohlensäure das Barytsalz dar, welches sich leicht rein erhalten liess, da mit dem kohlensauren Baryt zugleich schmierige Verunreinigungen gefällt wurden. Dasselbe krystallisirte in eben den Schüppchen, wie das früher beschriebene Salz und gab auch bei der Analyse auf phenylamidoisäthionsaures Baryum stimmende Zahlen. (Analyse IV und V der obigen Zusammenstellung sind mit einem solchen Präparate ausgeführt.)

Es wird also bei der Bildung des Diphenyltaurocarbaminsäureanhydrides durch Oxydation des Diphenylhydrosulfhydantoïns stets ein Theil des ersteren weiter zersetzt und findet sich dann in den Mutterlaugen als Phenyltaurin vor.

Bildung und Oxydation des Imidocarbaminthiosäureäthylenesters.

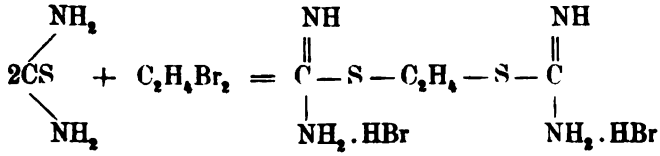
Die vorstehenden Resultate liessen es wünschenswerth erscheinen, die Oxydation auch auf das nicht substituirte Hydrosulfhydantoïn auszudehnen, wobei sich die Bildung von Taurocarbaminsäure und Taurin erwarten liess.

Das bisher noch unbekannte Hydrosulfhydantoïn wurde, analog der Bildung der diphenylirten Verbindung, durch Einwirkung von Äthylenbromid auf gewöhnlichen Thioharnstoff nach der Gleichung:



darzustellen versucht. Erhitzt man beide Körper im molecularen Verhältnisse, so bemerkt man gar keine Entwicklung vom Bromwasserstoff und es bleibt immer ein Theil des Äthylenbromides

unverbunden. Auch bei verschieden abgeänderten Versuchsbedingungen wollte es nicht gelingen, eine Reaction im Sinne obiger Gleichung zu erzielen; stets wirkte das Äthylenbromid auf den Thioharnstoff in der Weise ein, dass zwei Moleküle des letzteren sich mit einem Molekül des Bromides zu dem Bromhydrat einer Base verbanden, welche als der Äthylenester der Imidocarbaminthiosäure anzusprechen ist:



Am leichtesten erhält man diese Verbindung, wenn man feingepulverten Thioharnstoff mit Alkohol und etwas mehr Äthylenbromid, als obiger Gleichung entspricht, einige Zeit am Rückflusskühler kocht. Sobald eine herausgenommene Probe, mit ammoniakalischer Silberlösung versetzt, nicht mehr geschwärzt wird, ist die Reaction beendet. Man erhält ein weisses, schweres Krystallpulver, das aus heissem Wasser umkrystallisirt wird. Beim langsamen Erkalten schiessen grosse, oft 3—4 Cm. lange und 1 Cm. breite, weisse Prismen von meist treppenartigem Aufbau an, die in ihrem äusseren Habitus denen des Sulfoharnstoffs sehr ähnlich sehen. Mitunter werden auch besser ausgebildete, dünne, vierseitige Nadeln erhalten, die zu Sternen oder lockeren Drusen verwachsen sind und sich durch grosses Lichtbrechungsvermögen auszeichnen.

Die Verbindung ist in kaltem, noch leichter in heissem Wasser, weniger in Weingeist löslich. Im Röhrchen erhitzt, schmilzt die Substanz unter Braunfärbung und entwickelt Dämpfe von furchtbar lauchartigem Geruche.

Analysen.

0·261 Grm. der bei 100° getrockneten Substanz gaben nach dem Schmelzen mit Soda und Salpeter 0·3553 Grm. $BaSO_4$, 0·2726 Grm. Ag Br und 0·008 Grm. Ag.

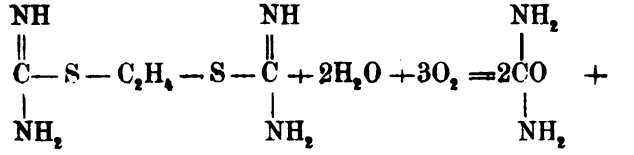
Gefunden	Berechnet für $C_4H_{12}N_4S_2Br_2$
S.....18·70%	18·82%
Br....46·74%	47·06%

Eigenschaften. Mit Silbernitrat gibt die wässerige Lösung einen Niederschlag von Bromsilber. Versetzt man eine concentrirte Lösung mit Lauge, so scheidet sich nach einiger Zeit ein flockiger, weisser Niederschlag aus, der wahrscheinlich die freie Basis darstellt, aber nicht weiter untersucht wurde. Zugleich tritt intensiver Mercaptangeruch auf, es scheint sich also unsere Basis wie die von Bernthsen und Klinger[1] dargestellten Verbindungen zu verhalten, indem sie beim Abscheiden aus ihren Salzen theilweise in Dicyandiamid und Äthylenmercaptan zerfällt. Digerirt man die Lösung des bromwasserstoffsauren Salzes mit überschüssigem Chlorsilber, so wird alles Brom gegen Chlor ausgetauscht und man erhält beim Eindampfen des Filtrates auf dem Wasserbade das entsprechende Chlorhydrat in Gestalt kugelförmiger Drusen, die sich aus feinen Nädelchen zusammensetzen. Dieses Salz ist in Wasser viel leichter löslich als das bromwasserstoffsaure; zur Analyse wurde es bei 100° C. getrocknet.

0·2765 Grm. Substanz gaben mit Silbernitrat gefällt 0·2955 Grm. AgCl und 0·0062 Grm. Ag, entsprechend 0·0791 Grm. Cl.

Gefunden:	Berechnet für $C_4H_{12}N_4S_2Cl_2$:
28·61% Cl.	28·29% Cl.

Auch der Äthylenester der Imidocarbaminthiosäure wurde der Oxydation mit chlorsaurem Kalium und Salzsäure unterworfen und dabei die Menge des Chlorates so berechnet, dass beide Schwefelatome der Verbindung in Sulfongruppen übergeführt werden konnten; denn es liess sich dabei schon von vorneherein die Bildung von Harnstoff- und Äthylendisulfonsäure erwarten:



Zur Oxydation eignet sich zweckmässiger das Chlorhydrat, aber auch das bromwasserstoffsaure Salz lässt sich verwenden, nur muss man dann die Menge des Chlorats soweit vermehren, dass das frei werdende Chlor auch zur Deplacirung des Broms hinreicht. Die Oxydation wurde in ganz gleicher Weise, wie in

[1] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. 11, 492 u. 12, 574.

den früheren Versuchen vorgenommen; wendet man das Bromhydrat an, so entweichen stets Bromdämpfe und die Flüssigkeit färbt sich von ausgeschiedenem Brom gelb. Als sie zuletzt farblos geworden und alles Kaliumchlorat eingetragen war, wurde am Wasserbade zur Trockne verdampft, um den grössten Theil der überschüssigen Salzsäure zu entfernen, der Rückstand in Wasser aufgenommen, mit Kalilauge genau neutralisirt und nach dem neuerlichen Verdampfen mit absolutem Alkohol ausgezogen. Derselbe hinterliess beim Verdunsten farblose Nadeln von Harnstoff. (Gefunden 46·55% N, berechnet 46·67% N.) Der in Alkohol unlösliche Rückstand musste neben Chlorkalium das Kaliumsalz der zu erwartenden Äthylendisulfonsäure enthalten, unter dem Mikroskope zeigten sich neben Würfeln von Chlorkalium dünne Nadeln und Prismen. Durch fractionirte Krystallisation konnte eine Trennung beider Salze nicht bewerkstelligt werden; ich versuchte daher die Abscheidnng des Chlorkaliums dadurch zu bewirken, dass ich dasselbe in ein in Alkohol lösliches Salz verwandelte, welches sich alsdann von dem darin unlöslichen äthylendisulfonsauren Kalium trennen lassen musste. Die Lösung obigen Salzgemisches wurde desshalb mit essigsaurem Silber versetzt, vom Chlorsilber abfiltrirt und der Rest des Silbers durch Schwefelwasserstoff entfernt. Der nach dem Eindampfen bleibende Rückstand konnte neben dem Salze der Äthylendisulfonsäure nur mehr Kaliumacetat enthalten; er wurde in wenig Wasser aufgenommen und die Lösung in starkem Alkohol fliessen gelassen, wodurch eine voluminöse, bald krystallinisch werdende Fällung entstand, die abfiltrirt, im Vacuum getrocknet und analysirt wurde.

0·340 Grm. Substanz hinterliessen mit Schwefelsäure abgedampft 0·196 Grm. K_2SO_4.

Gefunden	Berechnet für äthylendisulfonsaures Kalium $C_2H_4K_2S_2O_6$[1]
28·90% K	29·32% K

[1] Husemann (Annal. Chem. Pharm. 126, 274), der das Kaliumsalz der Äthylendisulfonsäure näher beschrieb, erhielt, wie ich, nur wasserfreies Salz, während J. Guareschi (Berliner Ber. 12, 682) dasselbe in einer kurzen Zusammenstellung als mit 2 Molekülen Wasser krystallisirend angibt.

Ein anderer Theil des gefällten Kaliumsalzes wurde aus Wasser umkrystallisirt und bildete darnach dicke, farblose, vierseitige Nadeln.

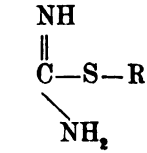
0·286 Grm. gaben mit Schwefelsäure abgeraucht 0·185 Grm. K_2SO_4.

Gefunden	Berechnet
29·00	29·32

Es wurden demnach bei der Oxydation des Äthylenesters der Imidocarbaminthiosäure in der That die erwarteten Producte: Äthylendisulfonsäure und Harnstoff gebildet.

Allgemeine Bemerkungen über die Bildung und Zersetzung der sich von der Imidocarbaminthiosäure ableitenden Basen.

Wie durch die Versuche von Bernthsen und Klinger[1] und später durch Will[2] und Rathke[3] nachgewiesen wurde, werden bei Einwirkung von Alkylhaloiden auf Thioharnstoffe Salze eigenthümlicher Basen gebildet, in welchen das eingeführte Alkyl mit dem Schwefel verbunden ist und denen daher die allgemeine Formel:



zukommt, wonach sie gemäss der neueren von Bernthsen[4] vorgeschlagenen Nomenclatur als Ester der hypothetischen Imidocarbaminthiosäure zu bezeichnen sind. Bei der Einwirkung von Alkylenhaloiden (Äthylenbromid) auf Thioharnstoffe sind jedoch zwei Fälle zu unterscheiden: Entweder verankert das Alkylen zwei Moleküle Thioharnstoff und es wird ein eigentlicher Ester der Imidocarbaminthiosäure gebildet, wie dies in dem vorbeschriebenen Versuche der Fall ist:

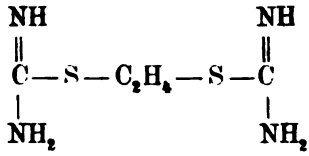
---

[1] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. 11, 492 u. 12, 574.

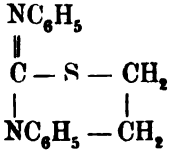
[2] Daselbst 14, 1489.

[3] Daselbst 14, 1774.

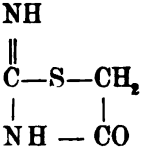
[4] Annal. Chem. Pharm. 211, 85.



oder es wirken beide Substanzen zu gleichen Molekülen auf einander ein, indem einerseits eine Bindung des Alkylens mit dem Schwefel, anderseits aber unter Abspaltung von Halogenwasserstoff mit der Amidogruppe eintritt, wodurch es zur Bildung von Basen kommt, für welche das Diphenylhydrosulfhydantoïn Will's den Typus abgibt:



In ganz ähnlicher Weise wie in dem letzteren Falle verläuft die Einwirkung der Halogenfettsäuren (Chloressigsäure) auf Thioharnstoffe, wobei unter Abspaltung von Wasser ebenfalls eine Bindung des eintretenden Säurerestes mit der Amidogruppe stattfindet und Körper entstehen, welche man hergebrachter Weise als Sulfhydantoïne bezeichnet:

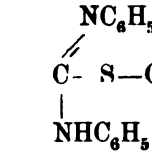


Alle diese so nahestehenden Verbindungen, welche mehr oder weniger ausgesprochenes Basen sind, zeigen in ihren Umsetzungen ein ganz analoges Verhalten. Zunächst zerfallen sie beim Erhitzen für sich oder mit Alkalien, in manchen Fällen auch schon dann, wenn man sie aus ihren Salzen frei zu machen sucht, in gewönliches oder ein substituirtes Cyanamid, das dann weiter in Dicyandiamid oder in einen Harnstoff übergehen kann und je nach ihrer Natur, in ein Mercaptan oder wie die Sulfhydantoïne in eine Thiosäure. Die schon citirten Untersuchungen von

Bernthsen und Will, sowie die von mir[1] am Sulfhydantoïn und Nitrosnulfhydantoïn und von Liebermann und Lange[2] am Diphenylsulfhydantoïn beobachteten Spaltungen geben hiefür Beispiele ab. Diese Reaction war auch der Grund, ihnen die oben beigelegte Constitution zu geben.

Diese Körper scheinen sich aber auch umgekehrt unter passenden Versuchsbedingungen aus ihren Spaltungsproducten synthetisch aufbauen zu lassen. Mindestens wurde dies von mir für das gewöhnliche,[3] das Allyl- und Phenylsulfhydantoïn[4] gezeigt und ich habe gelegentlich darauf hingewiesen,[5] dass diese Reaction eine allgemeine sei, was auch Will[6] bestätigte, indem es ihm gelang, aus Äthylmercaptan und Carbodiphenylimid den Äthylenester der Phenylimidophenylcarbaminthiosäure zu regeneriren; auch in der Tolylreihe ergaben sich ihm gleiche Resultate.

Ganz analog der Zersetzung unserer Basen in Cyanamid und Mercaptan, resp. Thiosäure verläuft deren Oxydation mit chlorsaurem Kalium und Salzsäure. Auch hier tritt eine Spaltung des Moleküles im gleichen Sinne ein, nur dass der Schwefel nicht in Form der SH-Gruppe, sondern, durch das Oxydationsmittel oxydirt, als Sulfongruppe auftritt, während das Cyanamid unter Wasseraufnahme in Harnstoff übergeht. So zerfällt der Äthylenester der Imidocarbaminthiosäure, wie früher gezeigt wurde, glatt in Äthylendisulfonsäure und Harnstoff. Dass der Verlauf des Processes auch bei den einfacheren Alkylestern der Imidocarbaminthiosäure derselbe ist, schliesse ich aus einer kurzen Mittheilung Rathke's,[7] der bei der Einwirkung von Chlor oder Brom auf den Phenylimidophenylcarbaminthiosäureäthylester:



[1] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. 12, 1385, u. Monatshefte für Chemie I. 163.

[2] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. 12, 595 u. 1588.

[3] Monatshefte für Chemie I, 442.

[4] Daselbst II, 775,

[5] Daselbst I, 445.

[6] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. 15, 1308 u. 1312.

[7] Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. 14, 1778.

neben einem chlor- oder bromhältigen, nicht weiter untersuchten Körper, der seine Entstehung wahrscheinlich einer weitergehenden Einwirkung des Hagloens auf primär gebildeten Diphenylharnstoff verdankt, das Auftreten von Äthylsulfonsäure beobachtete.

Unwesentlich modificirt ist das Resultat der Oxydation bei den Hydrosulfhydantoïnen und Sulfhydantoïnen, bei welchen, wie schon früher betont, der mit dem Schwefel verbundene Kohlenwasserstoff oder Säurerest zugleich mit der Amidgruppe des Thioharnstoffes in Bindung steht. Hier tritt keine vollständige Spaltung des Moleküles ein, sondern die gebildete Sulfonsäure bleibt mit dem Harnstoff verbunden und es resultiren eigenthümliche, gepaarte Sulfonsäuren, für welche die Taurocarbaminsäure und die Carbamidsulfonessigsäure als Typen zu betrachten sind. Die letzteren werden dann durch Einwirkung von Basen entweder vollständig, wie die Carbamidsulfonessigsäure, in ihre Componenten, Harnstoff und Sulfonsäure, gespalten, oder es tritt nur ein Theil des Harnstoffes als Kohlensäure und Ammoniak (resp. Amin) aus und es wird Taurin oder ein Abkömmling desselben gebildet.

Notiz über die trockene Destillation von Weinsäure und Citronensäure mit überschüssigem Kalk.

Von **Julian Freydl.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. Maly in Graz.)

Da über die Zersetzungsproducte, welche bei der trockenen Destillation von weinsauren und citronensauren Salzen mit Kalk entstehen, wie mich Prof. Maly aufmerksam machte, in der Literatur keine Angaben zu finden sind,[1] so habe ich darüber einige Versuche angestellt.

Wenn man von den üblichen Constitutionsformeln dieser Säuren ausgeht und annimmt, dass aus der dreibasischen Citronensäure 3, aus der zweibasischen Weinsäure beim Glühen mit Kalk 2 Mol. Kohlensäure austreten, so müsste, wie die nachfolgenden Gleichungen ausdrücken, aus der ersteren Isopropylalkohol, aus der letzteren Äthylenalkohol entstehen können:

$$\begin{array}{l} CH_2 \cdot COOH \\ C\,OH \cdot COOH \\ CH_2 \cdot COOH \end{array} = 3\,CO_2 + \begin{array}{l} CH_3 \\ CHOH \\ CH_3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} COOH \\ CHOH \\ CHOH \\ COOH \end{array} = 2\,CO_2 + \begin{array}{l} CH_2OH \\ CH_2OH \end{array}$$

[1] So z. B. weder in Gmelins Handbuch 4. Aufl. Bd. II der org. Chemie bei dem Artikel Weinsäure pag. 378 und bei dem Artikel Citronensäure pag. 827, noch im Beilstein'schen Handbuch.

Die in dieser Richtung angestellten Versuche ergaben jedoch ganz andere als die erwarteten und überhaupt keine glatten Resultate.

I. Versuch mit Weinsäure.

Ein Kilo entwässertes Seignettesalz wurde mit der gleichen Gewichtsmenge Ätzkalk gemengt und portionenweise in einer Kupferretorte destillirt. Man erhielt dabei 1. ein in reichlicher Menge sich entwickelndes Gas, ferner ein Destillat, welches aus 2 Schichten, einer dunkeln, öligen, oberen 2. und einer wässerigen, unteren Schichte 3. bestand, die mittels Scheidetrichters getrennt wurden.

1. Das Gas wurde über Wasser aufgefangen, es war farblos und brannte mit schwachleuchtender Flamme. Die gasometrische Untersuchung ergab Folgendes:

Volumen, red. auf 0°C. und 760mm B.

Ursprüngliches Gas	10·00 CC.
nach Zufuhr von Sauerstoff	30·80 CC.
nach der Verpuffung	15·20 CC.

Eine in das zurückgebliebene Gas eingeführte Kalikugel bewirkte keine weitere Volumsverminderung, was somit die Anwesenheit eines kohlenstoffhältigen Gases ausschloss und daher nur mehr auf Wasserstoff hindeuten konnte. Dieser müsste aber von dem Volumen des verschwundenen Gasgemenges d. i. 15·60 CC. $^2/_3$ Volumen d. i. 10·4 CC eingenommen haben, welch letzteres Volumen mit dem Volumen des ursprünglichen Gases d. i. 10·00 nahezu übereinstimmt.

Das Gas war somit nahezu reiner Wasserstoff.

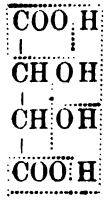
2. Die untere wässerige Schichte wurde für sich destillirt, solange noch eine brennbare Flüssigkeit überging. Dieselbe zeigte nach vollkommener Entwässerung durch wiederholte Rectification über Pottasche den constanten Siedepunkt von 56°, brannte mit leuchtender Flamme und hatte den charakteristischen Geruch des Acetons. Zur grösseren Sicherheit wurde noch die Sulfitverbindung daraus dargestellt.

Ausser Aceten konnte in dieser wässerigen Schichte kein Körper gefunden werden.

3. Die dunkle, ölige Schichte besass einen intensiv aromatischen Geruch und wurde mit Wasser im Dampfstrom destillirt, wobei ein gelbes, klares Öl überging, das mit Chlorcalcium getrocknet wurde. Der schwarze, theerige, mit Wasserdämpfen nicht flüchtige Rückstand wurde nicht weiter berücksichtigt.

Aus dem getrockneten gelben Öle liessen sich keine constant siedenden Fractionen erhalten. Der Siedepunkt stieg vielmehr stetig von 60 bis gegen 200°. Nachdem das Ganze über Natrium wiederholt destillirt worden war, resultirte ein farbloses Öl, aus dem bei erneuerter Fractionirung eine um 80° herum siedende Flüssigkeit erhalten wurde, die durch Analyse sowohl, wie durch ihre Überführbarkeit in Mirbanöl sich als Benzol erwies. Seine Menge war jedoch eine verhältnissmässig geringe. Der höher siedende Theil des mit Natrium behandelten Öls wurde, da fractionirtes Destilliren zu keinem weiteren Ziele führte, mit Chromsäuremischung gekocht, und darauf mit eingeleitetem Dampfe destillirt. Es ging jedoch keine andere Säure über als etwas Essigsäure.

Die Bildung des Benzols lässt sich in der Art verstehen, dass man in einem nicht weiter fassbaren Zwischenstadium die Bildung von Acetylen annimmt, das unter dem Einflusse der hohen Temperatur sich sofort zu Benzol polymerisirt, wie folgendes Schema dies andeuten soll.



II. Versuch mit Citronensäure.

Citronensaures Natrium wurde mit der doppelten Menge Ätzkalk partienweise destillirt und wieder ein aus einer wässerigen und einer aufschwimmenden obigen Schichte bestehendes

Destillat erhalten. Da es mir nur darauf ankam, eventuell gebildeten Isopropylalkohol aufzufinden, so wurde die ölige Schichte nicht weiter berücksichtiget.

Aus der wässerigen Schichte des Destillates erhielt man eine reichliche Menge eines dünnflüssigen, farblosen, brennbaren Destillates, das nach wiederholter Entwässerung durch Pottasche bei 56° siedete und reines Aceton war.

Isopropylalkohol wurde nach der Methode, welche Linnemann[1] angibt, um diesen Körper aus einem Gemisch mit Aceton zu erhalten, darzustellen versucht, jedoch Nichts davon gefunden.

[1] Ann. Chem. Pharm. 136, pag. 37.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVII. BAND. II. und III. HEFT.

Jahrgang 1883. — Februar und März.

(Mit 2 Tafeln und 4 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1883.

INHALT

des 2. und 3. Heftes Februar und März 1883 des LXXXVII. Bandes, II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

IV. Sitzung vom 1. Februar 1883 457

Dafert, Über eine neue Bildungsweise des Amylbenzols. [Preis: 5 kr. = 10 Pfg.] 460

Kretschy, Über die Oxydation von Kynurin und von Kynurensäure. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 463

V. Sitzung vom 15. Februar 1883: Übersicht 469

Pelz, Zur Contourbestimmung windschiefer Schraubenflächen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.] 473

Haitinger, Über die Einwirkung von Schwefel auf Phenolnatrium 484

Zeisel, Über Colchicin und Colchicein. (Vorläufige Mittheilung.) 495

VI. Sitzung vom 1. März 1883: Übersicht 501

Barth u. *Schreder,* Über das Oxyhydrochinon, das dritte isomere Trioxybenzol 505

Pastrovich, Über Reichenbach's Pikamar 511

— Über Coerulignol, Reichenbach's oxydirendes Princip 517

Jarolimek, Über die Beziehung zwischen der Spannung und Temperatur gesättigter Dämpfe 522

Mildner, Über Potenzreihen, deren Glieder mit den aufeinanderfolgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe r-ten Ranges multiplicirt oder durch letztere dividirt werden. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 532

Simony, Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze. (Fortsetzung.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 556

VII. Sitzung vom 8. März 1883: Übersicht 588

Weyr, Über einen Correspondenzsatz. [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 592

Le Paige, Über eine Eigenschaft der Oberflächen zweiter Ordnung 599

Hepperger, Versuch einer Bahnbestimmung des Schmidt'schen Nebels. [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] 603

Haerdtl, Bahnbestimmung des Planeten „Adria". II. Theil. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 620

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVII. Band. II. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

nthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

IV. SITZUNG VOM 1. FEBRUAR 1883.

Herr G. Mittag-Leffler in Stockholm übermittelt die erste Lieferung der von ihm mit Unterstützung Sr. Majestät des Königs von Schweden herausgegebenen neuen Zeitschrift: „Acta Mathematica."

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine Abhandlung: „Beiträge zur allgemeinen Nerven- und Muskelphysiologie. X. Mittheilung. Zur Kenntniss der secundären Zuckung", von Herrn Dr. Wilh. Biedermann, Privatdocent der Physiologie und erster Assistent am physiologischen Institute der Universität zu Prag.

Herr Dr. J. Blaas, Privatdocent an der Universität in Innsbruck, übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Beiträge zur Kenntniss natürlicher wasserhaltiger Doppelsulfate".

Herr Dr. J. v. Hepperger, Assistent an der Sternwarte in Wien, übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Versuch einer Bahnbestimmung des Schmidt'schen Nebels".

Der Secretär legt eine Abhandlung von Herr Prof. A. Belohoubek an der böhmischen technischen Hochschule in Prag: „Über krystallisirte Kaliumhydroxyde" vor.

Das c. M. Herr Prof. Dr. Sigm. Exner übersendet ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung seiner Priorität.

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeit: „Über die Oxydation von Kynurin und von Kynurensäure" von Dr. Michael Kretschy.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 47ᵉ année, 2ᵉ serie. Tome XII. Nrs. 2—4. Paris, 1883; 8°. — Tables des matières de l'année 1882. Paris; 8°.

Ateneo di Brescia: Commentari per l'anno 1882. Brescia, 1882; 8°. — Manuale d'Igiene rurale scritto specialmente pel Contadino Bresciano. Dr. Vitaliano Galli. Brescia, 1882; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Ausweise über den auswärtigen Handel der österreichisch-ungarischen Monarchie im Jahre 1881. XLII. Jahrgang, I. Abtheilung. Wien, 1882; 4°. — Statistisches Jahrbuch für das Jahr 1880. 3. und 4. Heft. Wien, 1882; 8°. — Nachrichten über Industrie, Handel und Verkehr. XXIV. Band, 4. und 5. Heft. Wien, 1882; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VII. Nr. 2 & 3. Cöthen, 1883; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVI. Nrs. 2 et 3. Paris, 1883; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. IV. Jahrgang 1883. Heft 1. Januar. Berlin; 4°.

Genootschap, het Bataviasch van Kunsten en Wetenschappen: Realia. Register op de generale Resolutien van het Kasteel Batavia. 1632—1805. I. Deel. Leiden, 1882; 4°.

Geological Survey of India: Memoirs. Vol. XIX, Part 1. Calcutta, 1882; 8°.

— — Palaeontologia Indica. Ser. X. Vol. II. Parts 1, 2 & 3. Calcutta, 1881—82; 4°. — Ser. XIV. Vol. I, 3. Calcutta, 1882; 4°.

— — Records. Vol. XV, Parts 1—3. Calcutta, 1882; 8°.

Geologische Anstalt, königlich ungarische: Mittheilungen. VI. Band, 3. u. 4. Heft. Budapest, 1882; 8°.

Geschichtsverein und naturhistorisches Landesmuseum in Kärnten: Carinthia. Zeitschrift für Vaterlandskunde, Belehrung und Unterhaltung. LXXII. Jahrgang 1882. Klagenfurt; 8°.

Gesellschaft, allgemeine schweizerische für die gesammten Naturwissenschaften: Neue Denkschriften. Band XXVIII, Abtheilung II. Zürich, 1882; 4°.

— Deutsche chemische: Berichte. XVI. Jahrgang, Nr. 1. Berlin, 1883; 8°.

— österreichische, zur Förderung der chemischen Industrie: Berichte. IV. Jahrgang. Nr. 4. Prag, 1882; 4°.

Hamburg: Verhandlungen zwischen Senat und Bürgerschaft im Jahre 1880. Hamburg, 1881; 4°.

Indian Meteorological Memoirs relating to India and the neighbouring countries. Vol. I. Calcutta, 1876—1881; gr. 4°.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. II. Nr. 20. Baltimore, December 1882; 4°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXIX. Band, 1883. I. Gotha; 4°.

Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique: Extrait du Bulletin. Tome I. Bruxelles, 1882; 8°.

Muséum d'Histoire naturelle: Nouvelles Archives. 2e série. Tome V. Paris, 1882; gr. 4°.

Nature, Vol. XXVII. Nrs. 690 & 691. London, 1883; 8°.

Society the Royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. V. Nr. 1. January 1883. London; 8°.

— the Linnean: The Journal. Zoology. Vol. XV. Nrs. 86—88. London, 1881; 8°. — Vol. XVI. Nrs. 89—94. London, 1881—82; 8°.

— — The Transactions. Zoology. 2nd ser. Vol. II. Parts 3—5. London, 1882; 4°.

— — The Journal. Botany. Vol. XIX. Nrs. 114—121. London, 1881—82; 8°.

— — Proceedings. From November 1875 to June 1880. London, 1882; 8°.

— — The Transactions. 2nd ser. Botany. Vol. II. Part. 1. London, 1881; 4°.

Verein, naturwissenschaftlicher der Rheinpfalz: XXXVI. XXXVII.—XXXIX. Jahresbericht der Pollichia. Dürkheim a. d. Hart, 1879, 1881; 8°. — Der Grabfund aus der Steinzeit von Kirchheim a. d. Eck in der Rheinpfalz, von Dr. C. Mehlis. Dürkheim & Kaiserslautern, 1881; 8°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. IV. Jahrgang Nr. 4 und Ausserordentliche Beilagen Nr. II und III. Wien, 1883; 4°.

Über eine neue Bildungsweise des Amylbenzols.

Von **F. W. Dafert.**

(Vorläufige Mittheilung aus dem Universitäts-Laboratorium im Convictgebäude.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Jänner 1883.)

Da bekanntlich bei Einwirkung von Zinkäthyl auf Benzylidenchlorid $C_6H_5CHCl_2$ Amylbenzol $C_6H_5CH(C_2H_5)_2$ [1] entsteht, so war es naheliegend die Einwirkung des ersteren auf das Benzotrichlorid $C_6H_5CCl_3$ zu untersuchen und dadurch eventuell Heptylbenzol zu erhalten:

$$2C_6H_5CCl_3 + 3Zn(C_2H_5)_2 = 3ZnCl_2 + 2C_6H_5C(C_2H_5)_3.$$

Das Trichlorid, das bei diesen Versuchen verwendet wurde, war aus reinem Toluol durch Chlorirung bis zum Maximum der Gewichtszunahme erhalten worden und zeigte den constanten Siedepunkt 213—215°.

0·1190 Grm. Substanz gaben 0·2610 gAgCl.

Gefunden	Berechnet für $C_7H_5Cl_3$
54·2	54·4% Chlor

Sonach war das angewandte Trichlorid chemisch rein (frei von Bichlorid).

Das verwendete Zinkäthyl wurde nach den Angaben von Gladestone und Tribe [2] aus Zinkkupfer und Jodäthyl erhalten und war die Ausbeute nach dieser Methode eine bedeutend bessere (circa 60%), als nach der früher im Gange gewesenen mit Zinkfeile.

---

[1] Lippmann u. Luginin Z. 1867, p. 666. Der Verfasser dieses ist mit dem Studium der Derivate dieses Kohlenwasserstoffes beschäftigt und hofft in Bälde das Resultat dieser Arbeit mittheilen zu können.

[2] Berichte d. d. chem. Ges. 6.

In den mit Kohlensäure gefüllten, mit Eiswasser gekühlten Zinkäthyl und Benzol im Überschuss enthaltenden Kolben wurden nach und nach 20 Grm. des Trichlorids eingetragen. Da die Einwirkung eine äusserst unregelmässige, mit Explosionen und heftiger Gasentwicklung (wahrscheinlich C_2H_4) verbunden ist, die sich weder durch Abkühlung noch durch langsames Eintragen verhindern lässt, ist die Ausbeute entsprechend ungenügend. Nachdem der feste Kolbeninhalt mit Wasser und Salzsäure behandelt worden, wurde die obenauf schwimmende Flüssigkeitsschichte abgezogen, getrocknet und destillirt. Dieselbe zeigte einen Siedepunkt von 170—180°, erwies sich chlorhältig und wurde desshalb im Rohre mit Natrium eingeschlossen und bei 200—250° Tage lang erhitzt. Nach vollständiger Entchlorung wurde wiederholt fractionirt und zwei Fractionen von 178—82° und von 182—84° abgesondert.

Die Fraction I (von 178—82° siedend) hatte eine Dichte von 0·8744 bei 21° C.

I. 0·2232 Grm. Substanz gaben im Luftstrom verbrannt 0·7297 Grm. CO_2 und 0·2169 Grm. H_2O.

II. 0·2912 Grm. Substanz gaben 0·9515 Grm. CO_2 und 0·2692 Grm. H_2O.

In Percenten ausgedrückt:

Gefunden		Berechnet für $C_{11}H_{16}$	
I	II		
89·15	89·11	89·19%	C
10·79	10·82	10·81%	H.

Die Dampfdichte nach Goldschmidt bestimmt:

Angewandte Substanz	0·0196 Grm.
Angewandtes Quecksilber	1236 „
Ausgeflossenes Quecksilber	85 „
Anfangstemperatur	22°
Temperatur des Bades	221°
Abgemessene Höhe der wirksamen Quecksilbersäule	57 Mm.
Barometerstand	752 „

Gefunden	Berechnet für $C_{11}H_{16}$
D = 2·558	2·559

Sonach ist diese Fraction mit Amylbenzol $C_{11}H_{16}$ identisch.

Die Fraction II (von 182—84° siedend) hatte eine Dichte von 0·8705 bei 21° C.

I. 0·2638 Grm. gaben im Luftstrom verbrannt 0·8691 Grm. CO_2 und 0·2403 Grm. H_2O.

II. 0·1740 Grm. gaben 0·5721 Grm. CO_2 und 0·1597 Grm. H_2O.

In Percenten ausgedrückt:

Gefunden		Berechnet für $C_{11}H_{16}$
I	II	
89·84	89·71	89·19% C.
10·11	10·20	10·81% H.

Die Dampfdichte ebenfalls nach Goldschmidt bestimmt:

Angewandte Substanz	0·0186 Grm.
Angewandtes Quecksilber	1237 „
Ausgeflossenes Quecksilber	86 „
Anfangstemperatur des Quecksilbers	19°
Temperatur des Bades	220°
Abgemessene Höhe der wirksamen Quecksilbersäule	51 Mm.
Barometerstand	750 „

Daraus

Gefunden	Berechnet für $C_{12}H_{48}$
D = 2·379	2·559

Hienach scheint diese Fraction ein durch einen Kohlenwasserstoff von geringerem Moleculargewicht verunreinigtes Amylbenzol zu sein.

Die Reaction verläuft nach der Gleichung:

$$2C_6H_5CCl_3 + 3Zn(C_2H_5)_2 = 2C_6H_5CH(C_2H_5)_2 + 3ZnCl_2 + 2C_2H_4.$$

Über die Oxydation von Kynurin und von Kynurensäure.

Von Dr. **Michael Kretschy.**

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Professors v. Barth.)

Durch eine Reihe von Umständen bisher gehindert, meine Untersuchungen über die Kynurensäure rasch weiter führen zu können, erlaube ich mir heute in Kürze über das Oxydationsproduct der Kynurensäure und des Kynurins zu berichten, um mir auch für die nächste Zeit das Recht zur Fortsetzung dieser schwierigen und mühevollen Arbeit zu wahren.

Die Oxydationsversuche boten manche nicht zu erwartende Schwierigkeiten. Oxydirt wurde mit übermangansaurem Kali in alkalischer Lösung und in der Voraussetzung, es werde die Reaction übereinstimmend verlaufen mit den Erfahrungen, welche über die Oxydation des Chinolin und der Derivate desselben vorlagen.

Ich oxydirte zunächst Kynurensäure mit der für eine erwartete Pyridinoxy- (di- oder tri-) carbonsäure nöthigen Menge von MnO_4K, Kynurin hingegen nur mit dem für eine Pyridincarbonsäure ausreichenden Zusatz von MnO_4K, da etwa nicht oxydirtes Kynurin durch seine ausgezeichnete Löslichkeit in Alkohol sich leicht entfernen liess.

Ich erwähne hier gleich, dass das Oxydationsproduct in beiden Fällen dasselbe war, ob nun in dem einen oder anderen Sinne oxydirt wurde. Die Ausbeute war jedesmal eine ziemlich gute; sie betrug aus Kynurensäure bis zu 65% des angewendeten Materiales, aus Kynurin bis zu 95%. Das Oxydationsproduct war nahezu weiss, nur schwach röthlich gefärbt und es hätte die Orientirung kaum schwer fallen können, wenn nicht die weitere Reinigung mit schweren Verlusten verbunden gewesen wäre.

Die Oxydation von Kynurin führte zunächst zum Ziele. Es wurde so verfahren:

8 Grm. Kynurin wurden mit 5 Grm. krystallisirten Ätzkali in $1^1/_2$ Liter Wasser unter gelindem Erwärmen gelöst. In die Lösung wurde allmälig in kleinen Portionen die für eine Pyridindicarbonsäure nöthige Menge gelösten übermangansauren Kalis, 45·9 Grm. (in Wirklichkeit 46·3 Grm.), zugegossen und vor jedem neuen Zusatz die Entfärbung der Chamäleonlösung abgewartet. Diese enthielt 38·15 Grm. MnO_4K auf 1000 Wasser. Die Oxydation geschah in einer Schale unter Ersatz des abdampfenden Wassers und bei einer Temperatur zwischen 60 und 80° C.

Um die Oxydation mit einer grösseren Gleichmässigkeit zu Ende zu führen, wurde vor dem Zusatz der letzten 200 CC. des Titers unterbrochen um den bisher ausgeschiedenen Braunstein zu entfernen und dann erst die vereinigten Filtrate, beziehungsweise Waschwässer nach passender Einengung zu Ende oxydirt. Der Braunstein wurde nun ein zweites Mal entfernt und die erhaltenen Filtrate unter Einleiten von Kohlensäure auf ein kleines Volumen gebracht. Beim Erkalten schieden sich alsbald grosse, weiche, schwach gefärbte Krystalldrusen aus, die sich bei gelindem Erwärmen oder Zusatz von wenig kalten Wassers leicht lösten — das Kalisalz der neuen Säure. Die Lösung wurde nun mit der berechneten Menge überschüssiger Salzsäure zersetzt und der Niederschlag bis zum Verschwinden der Salzsäurereaction mit in Eis gekühltem Wasser gewaschen. Er bestand aus blass röthlich gefärbten, mikroskopischen Nadeln und wog lufttrocken 7·6 Grm. Siedender Äther löste ihn fast vollständig bis auf geringe aschehältige Antheile.

Die aus dem Äther gewonnene Säure schmolz bei 187° C. Da für die weitere Reinigung auf etwa noch anwesendes Kynurin und auf Oxalsäure Rücksicht zu nehmen war, so wurde die Säure durch vorsichtiges Neutralisiren mit kohlensaurem Kali wieder in das Kalisalz zurückverwandelt und als solches mit Alkohol ausgezogen.

Der Alkohol nahm fast nichts auf; ebenso bewirkte Chlorcalcium, der wässrigen Lösung des Kalisalzes zugesetzt, kaum eine Fällung. Der Kalk wurde mit kohlensaurem Ammon entfernt, das Filtrat nun wiederholt mit Thierkohle gekocht, endlich auf ein kleines Volum gebracht und mit einer über-

schüssigen Menge von Salzsäure zersetzt. Die freigemachte Säure schied sich jetzt in stark glänzenden, weichen, feinen Nadeln ab, nahezu, doch nicht völlig farblos. Da aber ihre Menge bereits um mehr als 40% sich verringert hatte, so wurde von einer weiteren Reinigung Abstand genommen und nur zur Entfernung etwa unzersetzten Salzes die Säure in siedendem Äther aufgenommen. Nach ihrer Wiedergewinnung aus dem ätherischen Auszug erwies sie sich als eine reine einheitliche Verbindung.

Dieselbe Säure wurde nun auch in ähnlicher Weise aus der Kynurensäure, welche in der irrthümlichen Voraussetzung einer zu gewärtigenden Pyridinoxycarbonsäure mit einer grösseren Menge von übermangansaurem Kali oxydirt worden war, leicht gewonnen und isolirt.

Die Säure reagirt stark sauer. Sie ist schwer löslich in kaltem, ziemlich leicht löslich in heissem Wasser; sie löst sich in Alkohol, in Äther; sie schmeckt schwach bitter, hinterher schwach brennend; ihre kalt gesättigte Lösung wird von Eisenchlorid gefällt, eine verdünntere Lösung hingegen schwach carminroth gefärbt. Die Säure gibt, mit überschüssigem Kalk erhitzt, keinen Pyridingeruch. Sie wird aus den löslichen Salzen durch Mineralsäuren sofort, langsamer durch Essigsäure gefällt. Ihre Verbindungen mit den schweren Metallen, so das Silber-, Kupfer-, Blei-, Quecksilbersalz, sind kaum löslich in Wasser. Die freie Säure gibt mit Silbernitrat einen gallertigen Niederschlag.

Der Schmelzpunkt der Säure und ihr Verhalten in höherer Temperatur ist charakteristisch. Erhitzt man sie im offenen Capillarrohr, so erscheint zwischen 183—185° C. ein weisses Sublimat, bei 188—189° C. erfolgt ein lebhaftes Schäumen, ohne dass die Substanz schliesslich klar geschmolzen wäre; sobald das Schäumen aufhört, bedeckt sich die Capillarwand mit einem reichlichen, weissen, mikrokrystallinischen Anflug, als ob der Schaum erstarrte, und dieser Anflug schmilzt bei weiterem Erhitzen bis zu 250° nicht, er nimmt nur zuletzt sichtlich an Menge ab und wird bräunlich. Hierin stimmten die aus Kynurin und die aus Kynurensäure erhaltene Säure überein, ebenso in Bezug der anderen angegebenen Eigenschaften. Ihre

Identität wurde ferner durch die Analyse je der freien Säuren und der neutralen Silbersalze erwiesen.

Die lufttrockene freie Säure führt Krystallwasser und hat die Zusammensetzung $C_9H_7NO_5 + H_2O$. Sie gibt das Krystallwasser bei 100° C. getrocknet vollständig ab.

Die Wasserbestimmung ergab:

Säure aus Kynurin[1]. 0·2903 Grm. verloren bei 100° getrocknet 0·0217 Grm. H_2O; % H_2O = 7·47.

Säure aus Kynurensäure. 0·3262 Grm. verloren bei 100° getrocknet 0·0267 Grm. H_2O; % H_2O = 8·18.

$C_9H_7NO_5 + H_2O$

H_2O berechnet.....7·92%
gefunden.....7·47; 8·18%.

Die folgenden Verbrennunganalysen wurden mit bei 100° C. getrockneter Substanz ausgeführt.

1. Säure aus Kynurin. 0·2647 Grm. verbrannt, gaben CO_2 0·5005 Grm. H_2O 0·0777; % C = 51·56, % H = 3·26.

0·2681 Grm. gaben Volum N 16·0 CC. bei 14·9° C. und reducirtem Barometerstand 752·601 Mm.; in Grm. N = 0·018563; % N = 6·92.

2. Säure aus Kynurensäure. 0·2636 Grm. gaben verbrannt CO_2 0·4981 Grm., H_2O 0·0774 Grm., % C = 51·53, % H = 3·26.

0·3010 Grm. gaben Volum N 17·2 CC. bei 10·7° C. und reducirtem Barometerstand 750·901 Mm; in Grm. N = 0·020286 % N = 6·73.

Berechnet $C_9H_7NO_5$	Gefunden 1. aus Kynurin	Gefunden 2. aus Kynurensäure
C.....51·67	C.....51·56	51·53
H..... 3·34	H..... 3·26	3·26
N..... 6·69	N..... 6·92	6·73
O.....38·27	O..... —	—

[1] Das Präparat hatte eine zeitlang im Vacuum über Schwefelsäure gelegen.

Das neutrale Silbersalz wurde durch Ausfällen der heissen Lösung des Ammonsalzes mit Silbernitrat erhalten. Es fällt als ein dicker, in heissem Wasser schwer löslicher gallertiger Niederschlag, der ziemlich lichtbeständig ist und nach dem Trocknen eine bröselige Masse darstellt, welche unter dem Mikroskope prismatische Krystalle erkennen lässt.

Das neutrale Silbersalz hat kein Krystallwasser.

I. Silbersalz der Säure aus Kynurin:

0·2757 Grm. gaben verbrannt CO_2. 0·2568 Grm. H_2O. 0·0306 Grm. $\%$ C = 25·40; $\%$ H = 1·23

und gaben Ag...0·1405 Grm.; $\%$ Ag = 50·96

0·2804 Grm. gaben Ag..0·1425 Grm; $\%$ Ag = 50·82

0·3536 Grm. gaben Volum N..10·5 CC. bei 12·7° C. und reducirtem Barometerstand 754·317; in Grm. N = 0·012332, $\%$ N = 3·48.

II. Silbersalz der Säure aus Kynurensäure:

0·2846 Grm. gaben verbrannt CO_2.....0·2666 Grm., H_2O....0·0323 Grm.; $\%$ C = 25·54, $\%$ H = 1·26

und gaben Ag..0·1451, $\%$ Ag = 50·98

0·1919 Grm. gaben Ag...0·0976; $\%$ Ag = 50·85.

0·3019 Grm. gaben Volum N..9·7 CC. bei 11·5° C. und reducirtem Barometerstand 747·635 Mm. in Grm. N = 0·011356; $\%$ N = 3·76.

	Berechnet $C_9H_5NO_3Ag_2$	Gefunden I.	Gefunden II.
C	25·57	25·40	25·54
H	1·18	1·23	1·26
N	3·31	3·48	3·76
Ag	50·98	50·96, 50·82,	50·98, 50·85.
O	18·94	—	—

Die neue Säure ist isomer mit der von P. Friedländer und H. Ostermaier als Carbostyrilsäure[1] beschriebenen Ver-

[1] Berlin. Berichte d. d. chem. Gesellsch. XV. 332.

bindung, welche dieselben neben Isatin durch Oxydiren von Carbostyril mit übermangansaurem Kali (in alkalischer Lösung) erhielten. Die von mir erhaltene Säure unterscheidet sich von der Carbostyrilsäure durch ihre grössere Beständigkeit und durch ihren Schmelzpunkt. Eine Ansicht über die Constitution meiner Säure, die ich vorläufig Kynursäure nennen will, schon jetzt auszusprechen, scheint mir unpassend, da die Bildung derselben aus einem Oxychinolin und ihre Zusammensetzung zeigen, dass sie jedenfalls einer merkwürdigen Reaction ihre Entstehung verdankt. Hoffentlich wird das weitere Studium der Verbindung darüber, sowie über die Constitution des Kynurins und der Kynurensäure selbst Aufschluss geben.

V. SITZUNG VOM 15. FEBRUAR 1883.

Der Vorsitzende gibt Nachricht von dem am 11. Februar d. J. erfolgten Ableben des inländischen correspondirenden Mitgliedes dieser Classe, Sr. Excellenz des k. k. Feldzeugmeisters Herrn Franz Ritter v. Hauslab in Wien.

Die anwesenden Mitglieder geben ihr Beileid durch Erheben von den Sitzen kund.

Das c. M. Herr Prof. Dr. C. Freiherr v. Ettingshausen übersendet eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung: „Beiträge zur Kenntniss der Tertiärflora Australien's" und einen Auszug aus derselben für die Sitzungsberichte.

Das c. M. Herr Prof. Friedr. Brauer übersendet zwei Mittheilungen über Orthopteren- und Dipteren-Gattungen.

1. „Zur näheren Kenntniss der Odonaten-Gattungen Orchithemis, Lyriothemis und Agrionoptera".

2. „Über die Stellung der Gattung Lobogaster Phil. im Systeme."

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. L. Boltzmann übersendet folgende zwei Abhandlungen von Herrn S. Tolver Preston in Heatherfield (England):

1. „Eine dynamische Erklärung der Gravitation."

2. „Über die Möglichkeit, vergangene Wechsel im Universum durch die Wirkung der jetzt thätigen Naturgesetze — auch in Übereinstimmung mit der Existenz eines Wärmegleichgewichts in vergrössertem Massstabe — zu erklären."

Das c. M. Herr Prof. H. Leitgeb übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. Emil Heinricher, Privatdocent an der Universität in Graz, betitelt: „Beiträge zur Pflanzenteratologie und Blüthenmorphologie."

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Über Reichenbach's Pikamar“ und
2. „Über Coerulignol, Reichenbach's oxydirendes Princip,“ diese beiden Arbeiten von Herrn P. Pastrovich, Assistent an der technischen Hochschule in Graz.
3. „Über die Beziehung zwischen der Spannung und Temperatur gesättigter Dämpfe,“ von Herrn A. Jarolimek, Fabriksdirector in Hainburg.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Prof. Jos. Schlesinger an der Hochschule für Bodencultur in Wien vor, mit der Aufschrift: „Die Weltlehre begründet durch die Substantialität der Kraft.“

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. „Über Einwirkung von Schwefel auf Phenolnatrium“, von Herrn L. Haitinger, und
2. „Über Colchicin und Colchicein“, von Herrn Dr. S. Zeisel.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, Real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 221. Tomo XIX. Diciembre 15. Habana, 1832; 8°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXX 1882—83. Serie terza. Transunti. Vol. VII. Fascicolo 2°. Roma, 1882; 4°.

Ackerbau-Ministerium, k. k.: Statistisches Jahrbuch für 1881. 3. Heft, 2. Lieferung. Wien, 1882; 8°.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 6e série, 2e année, 12e cahier. 1882, décembre. Paris; 8°.

Apotheker-Verein, allgemeiner österreichischer: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXI. Jahrgang, Nr. 3—5, Wien, 1883; 8°.

Bern, Universität: Akademische Schriften pro 1881. 28 Stücke, 8° u. 4°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3e période, tome IX. Nr. 1.—15. Janvier 1883. Genève, Lausanne, Paris, 1883; 8°.

Bibliothèque universelle: Résumé météorologique de l'année 1881 pour Genève et le Grand Saint-Bernard par A. Kammermann. Genève, 1882; 8°.

Central-Commission, k. k. statistische: Statistisches Jahrbuch für das Jahr 1880. V. Heft. Wien, 1882; 8°.

Chemiker-Zeitung; Central-Organ. Jahrgang VII. Nr. 4—9. Cöthen, 1883; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVI. Nrs. 4 & 5. Paris, 1883; 4°.

Genootschap, Bataafsch der proefondervindelijke Wijsbegeerte: Nieuwe Verhandelingen; tweede reeks, deel III. 4e Stuk. Rotterdam, 1882; 4°.

Gesellschaft, königl.-sächsische: Berichte über die Verhandlungen. 1881, Leipzig, 1882; 8°.

— — Abhandlungen des XII. Bandes, Nr. 7 u. 8. Leipzig, 1881—82; 4°.

— österreichische, für Meteorologie: Zeitschrift. XVIII. Band. Februar-Heft 1883. Wien; 8°.

Gewerbe-Verein, n. ö.: Wochenschrift. XLIV. Jahrgang Nr. 2—5. Wien, 1883; 4°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österr.: Wochenschrift. VIII. Jahrgang, Nr. 2—6. Wien, 1883; 4°.

— — Zeitschrift. XXXIV. Jahrgang, VI. Heft. Wien, 1882; 4°.

Instituut, het koninklijk voor de Taal-, Land- en Volkenkunde van Nederlandsch-Indië: Bijdragen. IV. Volgreeks. VI. Deel. 2^e Stuk. 'sGravenhage, 1882; 8°.

Johns Hopkins University: American Chemical Journal edited by Ira Remsen. January, 1883. Baltimore; 8°.

Journal the American of science. Vol. XXV. Nr. 145. January 1883. New Haven, 1883; 8°.

Landwirthschafts-Gesellschaft, k. k. in Wien: Verhandlungen und Mittheilungen. Jahrgang 1882. 6. (Schluss-)Heft. Wien, 1882; 8°. — Jahrgang 1883. 1. Heft. Wien, 1883; 8°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrgang 1882. 12. Heft. Wien, 1882; 8°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel 27e année, 3e série. Tome XIII. 494e livraison. — Fevrier 1883. Paris; 8°.

Nature: Vol. XXVII, Nrs. 692 & 693. London, 1883; 8°.

Observatoire de Moscou: Annales. Vol. VIII. 2e livraison. Moscou, 1882; 4°.

Observatory, the: A monthly review of Astronomy. No. 70. February 1883. London; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 15 u. 16, 17. 1882. Wien; 8°.

Société mathématique de France: Bulletin. Tome X. Nr. 7. Paris, 1882; 8°.

Society, the Asiatic of Bengal: Journal. N. S. Vol. LI. Part 2, Nrs. 2 & 3. Calcutta, 1882; 8°.

— the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLIII. Nr. 2. December, 1882. London; 8°.

— the royal of New South Wales: Journal and Proceedings. 1881. Vol. XV. Sydney, 1882; 8°.

— — New South Wales in 1881: being a brief statistical and descriptive account of the Colony up to the end of the year, extracted chiefly from official records, by Thomas Richards, Esquire. 2d issue. Sydney, 1882; 8°.

— — Annual Report of the Department of Mines, New South Wales for the year 1880. Sydney, 1881; 4°. — The Minerals of New South Wales, by Archibald Liversidge, F. R. S. 2d edition. Sydney, 1882; 4°.

Verein, naturwissenschaftlicher von Hamburg — Altona: Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften. VII. Band, II. Abtheilung. Hamburg, 1883; 4°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang. Nr. 3—6. Wien, 1883; 4°.

Zur Contourbestimmung windschiefer Schraubenflächen.

Von **Carl Pelz,**
Professor an der technischen Hochschule in Graz.

(Mit 1 Tafel.)

Das Problem der Contourbestimmung einer windschiefen Schraubenfläche ist bereits wiederholt Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen, die zu interessanten und einfachen Resultaten geführt haben.

Vom Standpunkte der darstellenden Geometrie wurde, insbesondere für die axiale Schraubenfläche, in Herrn de la Gournerie's „Traité de géometrie descriptive" t. III., Art. 1002, Fig. 397 und 409 eine einfache Construction der Contourcurve angegeben und als Specialfall einer, in den Art. 994—1001 behandelten Construction der Selbstschattengrenze der genannten Fläche erledigt. Auch kinematische Betrachtungen wurden zur Lösung des in Rede stehenden Problems schon vor längerer Zeit in Anwendung gebracht, indem Herr Burmester in seiner schönen Abhandlung „Kinematisch-geometrische Constructionen der Parallelprojection der Schraubenflächen und insbesondere des Schattens derselben"[1] in Nr. 15 die Construction der Contour der allgemeinen Schraubenregelfläche und in Nr. 10 dasselbe Problem für die Schraubenflächen überhaupt bespricht, und durch kinematisch-geometrische Lehrsätze mit seltener Eleganz beweist.

Für die scharfgängige Schraubenfläche zurecht gelegt, wird Herrn Burmester's Construction mit der von Herrn de la

[1] Schlömilch's „Zeitschrift für Mathematik u. Physik" 18. Jahrg. 1873.

Gournerie angegebenen identisch und zeichnet sich vor anderen diesbezüglichen dadurch aus, dass sie die Verzeichnung der Tangenten der Schraubenlinie nicht erfordert, und auch die Punkte direct angibt, in welchen die Contour der Fläche die gleichnamige Projection der Schraubenlinie berührt.

Dass auch durch Benützung von hyperbolischen Paraboloiden, welche längs der einzelnen Erzeugenden der Schraubenfläche sich anschmiegen, die einfachen und übersichtlichen Lösungen des Problems der Contourbestimmung der Schraubenregelfläche, die Herr Burmester durch kinematische Betrachtungen begründet, erzielt werden können, erlaube ich mir, im Nachfolgenden darzulegen, und hiebei jene Beweisführung zu wählen, welche ich in meinen Vorträgen an der Hochschule, bei der Behandlung der windschiefen Schraubenflächen, diesem Gegenstande zu geben pflege.

Am Schlusse soll dann auch gezeigt werden, in welch' überraschend einfacher Weise die Contouren der Schraubenregelflächen für orthogonale und orthogonal- und klinogonal-axonometrische Darstellungen dann construirt werden können, wenn man die Construction der Tangenten in den einzelnen Punkten der Schraubenlinie nicht umgehen will.

1. Wenn die Gerade *ah* (siehe Fig. 1) eine Schraubenbewegung um die Schraubenaxe *A* vollführt, so erzeugt sie eine Schraubenregelfläche. *S* sei jene Schraubenlinie, die der Fusspunkt *a* der kürzesten Entfernung der beiden Geraden *A* und *ah* bei der Bewegung beschreibt, während Σ die vom Punkte *h* hervorgebrachte Schraubenlinie vorstellt. Diese beiden Schraubenlinien, welche dieselbe Ganghöhe *H* besitzen, geben uns ein Mittel an die Hand, um die zweite Projection der einzelnen Lagen der Erzeugenden der Fläche darzustellen, indess ihre Grundrissprojectionen Tangenten des Kreises *S'* sind.

Im Allgemeinen ist *S* eine beliebige durch *a* gehende Schraubenlinie mit der Axe *A*; nur die Annahme, dass *S* die Gerade *ah* zur Tangente im Punkte *a* hätte, bleibt von unseren Betrachtungen ausgeschlossen, da sie die windschiefe Schraubenregelfläche zur tangentialen (developpablen) machen würde. In

Fig. 1 wurde die erste Projectionsebene so angenommen, dass a im Abstande $\frac{H}{4}$ von derselben sich befindet.

Da die Fläche einen Rotationskegel mit zu A paralleler Axe zum Directionskegel besitzt, so ist die Tangentialebene des unendlich fernen Punktes einer jeden Erzeugenden der Fläche direct gegeben. Für die Erzeugende ah ist die vertical projicirende Ebene die asymptotische Ebene, und daher gleichzeitig auch die Directionsebene eines jeden hyperbolischen Paraboloides, welches sich in Punkten der Erzeugenden ah der Schraubenfläche anschmiegt. Wir betrachten die horizontale Projectionsebene als zweite Directionsebene eines solchen Anschmiegungsparaboloides P, und bezeichnen jedoch die horizontalen Erzeugenden desselben als jene der ersten Schar.

Die Tangentialebene des Punktes a des Paraboloides P ist ebenfalls unmittelbar gegeben, und da dieselbe auf der Schnittlinie hh'' der beiden Directionsebenen senkrecht steht, so folgt hieraus, dass a der Scheitel von P sein muss. In Folge dessen wird die Grundrisscontour der Fläche P eine Parabel II′ mit dem Scheitel a' und der Scheiteltangente $a'h$ sein. Wenn wir daher den auf $a'A'$ liegenden Brennpunkt f von II′ kennen würden, so wäre die Tangentialebene E der windschiefen Fläche P in einem beliebigen Punkte p der Erzeugenden ah, leicht zu bestimmen. Denn da die durch p gehende Erzeugende der ersten Schar zur Grundrissspur der gesuchten Tangentialebene parallel ist, so hätte man, einer bekannten Parabeleigenschaft zufolge, blos p' mit f zu verbinden, und von h die Normale auf fp' zu fällen, um E_h zu erhalten.

Da nun anderseits f durch p' und E_h bestimmt ist, so construiren wir, um ein Verfahren für die Bestimmung von f abzuleiten, die Tangentialebene des Anschmiegungsparaboloides im Punkte h. Dieselbe ist durch ah und die Tangente T an Σ im Punkte h bestimmt. Wird auf die Tangente des Kreises Σ' im Punkte h eine Strecke hd'_1 gleich dem Viertelkreise hd' aufgetragen, so wird $a'd'_1$ zur Grundrissspur der Tangentialebene des Punktes h parallel sein, und die von h auf $a'd'_1$ gefällte Normale durch f gehen.

Die Ähnlichkeit der beiden Dreiecke $ha'd'_1$ und $A'fh$ sagt jedoch, dass die Strecke $A'f$ gleich ist dem Radius eines Kreises, dessen Quadrant die Länge $a'h$ besitzt.

Einer jeden Erzeugenden der Schraubenregelfläche entspricht ein Anschmiegungsparaboloid P, dessen eine Directionsebene auf der Axe A senkrecht steht und folglich im Grundriss ein Parabelbrennpunkt f.

Die Gesammtheit der Punkte f ist ein um A' als Mittelpunkt beschriebener Kreis F, dessen Quadrantlänge der Strecke $a'h$ gleich ist. Hat man für eine Erzeugende den zugehörenden Punkt f construirt, so ist hiemit die Bestimmung der Tangentialebene in einem beliebigen Punkte dieser Erzeugenden und die duale Aufgabe als gelöst zu betrachten.

2. Im vorangehenden Artikel wurde gezeigt, dass die Bestimmung des Halbmessers des Kreises F, auf dem die Brennpunkte der Contourparabeln Π' der Paraboloide P liegen, auf die Ermittlung des Halbmessers eines Kreises hinauskommt, dessen Quadrant eine gegebene Länge aufweist.

Haben die Schraubenlinien S, Σ in Fig. 2 dieselbe Bedeutung wie in Fig. 1 und ist ah eine zur verticalen Projectionsebene parallele Erzeugende der Schraubenregelfläche, wobei der Horizontalabstand des Punktes $a = \frac{H}{4}$ ist, so erhalten wir den der Geraden ah, in der im Art. 1 besprochenen Weise, entsprechenden Parabelbrennpunkt f, indem wir mit Anwendung der bekannten Näherungsconstruction von Kochanski die Strecke $\alpha\beta$ der halben Peripherie des Kreises S' gleich machen, $A'n = \alpha\nu = {}^1/_2\alpha\beta$ auftragen, und durch h'' die Parallele $h''f$ zu na' ziehen.

Denken wir uns durch jede Erzeugende der Schraubenregelfläche die vertical-projicirende Ebene gelegt, und den Berührungspunkt derselben mit der Fläche ermittelt, so werden diese Punkte auf einer Curve Γ liegen, deren zweite Projection uns die verticale Contourcurve Γ'' der Fläche liefert.

Um z. B. den auf der Erzeugenden $s\sigma$ liegenden Punkt p der Curve Γ zu finden, haben wir blos die Gerade $A's'$ über s' hinaus bis zum Schnittpunkte f_1 mit F zu verlängern und f_1p' parallel zu $a'h$ zu ziehen; p' ist die Grundrissprojection des gesuchten Punktes p, und p'' der Berührungspunkt von $\sigma''s''$ mit Γ''.

Für die Erzeugende ah liegt der Berührungspunkt der vertical-projicirenden Ebene — wie bereits erwähnt wurde und die Construction direct zeigt — unendlich fern. Da dasselbe von einer jeden zur zweiten Projectionsebene parallelen Erzeugenden der Fläche gilt, so folgt hieraus, dass die verticalen Projectionen dieser Geraden Asymptoten der Curve Γ'' sein müssen.

Wie aus der Construction unmittelbar zu entnehmen ist, sind die Geraden $A'f$ und $A'h''$ Symmetralaxen und die zu $A'h''$ parallelen Tangenten von F Asymptoten der Curve Γ'. In der Figur wurden nur jene Theile der Curve Γ dargestellt, die in beiden Projectionen Berücksichtigung gefunden haben.

Die Punkte b'', in welchen Γ'' von Σ'' berührt wird, sind die verticalen Projectionen der Schnittpunkte b der Curven Γ und Σ im Raume, deren Grundrissprojectionen b' leicht ermittelt werden können. Sind x und v die auf derselben Seite von A' liegenden Schnittpunkte der X-Axe mit den Kreisen S', F respective und schneidet die Tangente von S' im Punkte x den Kreis Σ' in u, so hat man $A'\varphi$ parallel zu uv und $\varphi b'$ parallel zu $A'h''$ zu ziehen, um einen den Curven Γ', Σ' gemeinschaftlichen Punkt b' zu erhalten. Die Richtigkeit der Construction geht aus der Congruenz der Dreiecke xuv und $\psi\varphi b'$ hervor.

Denken wir uns den zweiten Schnittpunkt, den $\varphi b'$ mit F hervorbringt, mit φ_1 bezeichnet, so ist aus sehr nahe liegenden Gründen $A'\varphi_1$ auf hf normal gerichtet, woraus ebenfalls eine Construction für b' resultirt.

Um daher einen von den vier reellen Schnittpunkten des Kreises F und der Curve Γ', z. B. den Punkt r zu erhalten, hat man blos $A'r$ senkrecht auf $f\gamma$ zu fällen.

3. Die einfache Construction der Curve Γ'', die wir in Fig. 2 kennen gelernt haben, kann noch einer Modification unterworfen werden, die nicht ohne Interesse sein dürfte.

Es sei p (Fig. 9) ein in der besprochenen Weise construirter Punkt der Curve Γ'.

Construiren wir eine auf pf normale Gerade G im Abstande $og = R - r$ von o — wobei R und r die Radien der Kreise F und S respective bezeichnen — so bildet diese mit og und of ein Dreieck ogi, welches mit fsp congruent ist. Es ist daher $fp = oi$ und

$ps = gi$. In diesen Relationen sind zwei neue Constructionen der Curve Γ' enthalten.

a) Wir ziehen (siehe Fig. 10) durch o einen Strahl, der G in i und F in f schneidet; wird $fp = oi$ normal auf G gezogen, so wird p die Curve Γ' beschreiben.

b) Wir fällen (siehe Fig. 12) og senkrecht auf G und tragen die Strecke gi auf die Tangente des Punktes s auf. Wenn hiebei i den Schnittpunkt des Halbmessers os mit G bezeichnet, so wird der geometrische Ort des Punktes p die Curve Γ' sein.

4. Die Betrachtungen, welche wir behufs der punktweisen Bestimmung der Contourcurve Γ'' der allgemeinen Schraubenregelfläche angestellt haben, führen selbstverständlich auch bei der axialen Schraubenregelfläche (Schraube mit scharfem Gewinde) zum Ziele.

Das Anschmiegungsparaboloid P mit horizontaler Directionsebene, welches die genannte Fläche in Punkten der Erzeugenden ah (siehe Fig. 3) berührt, hat den Punkt a zum Scheitel und zur Grundrisscontour eine Parabel Π' mit dem Scheitel A' und der Scheiteltangente $A'h$. Den Brennpunkt f der Parabel Π' erhalten wir durch Ermittlung der Tangentialebene der Fläche im Punkte h.

Die Richtung der Grundrissspur dieser Ebene bestimmt die Gerade d'_1k'. Hiebei ist hd'_1 gleich der Länge des Quadranten hd' des Kreises Σ' und k' die Grundrissprojection des Schnittpunktes der Erzeugenden ah mit der horizontalen Ebene des Punktes d. Die Ähnlichkeit der Dreiecke hd'_1k' und $A'hf$ ergibt, dass $A'f$ dem Radius jenes Kreises gleich ist, dessen Quadrant die Länge hk' besitzt.

Der Radius des Kreises F wird also im vorliegenden Falle unter anderen auch erhalten, indem wir die Strecke $h\alpha$ nach der Kochanski'schen Construction der halben Peripherie des Kreises Σ' annähernd gleich machen, vom Punkte ν die Länge $\nu\omega = ex$ (wobei $d''e$ parallel zu $a''h''$ gezogen und folglich $ex = hk'$ gemacht wurde) auftragen und ω auf $A'h$ nach φ projiciren. Der Punkt φ ist ein Punkt des Kreises F.

Um die Grundrissprojection p' des Punktes p, in welchem die vertical projicirende Ebene der Erzeugenden σs die Fläche berührt, zu ermitteln, haben wir $A'f_1$ senkrecht auf $A'\sigma'$ zu

errichten und $f_1 p'$ parallel zur X-Axe zu ziehen. Hiemit ist der Punkt p'', in dem $\sigma'' s''$ die verticale Contourcurve C'' der Fläche berührt, bestimmt.

Die Curve C, auf der die Punkte p' liegen,[1] wurde von Herrn de la Gournerie und Anderen eingehender untersucht, wesshalb wir jede weitere Besprechung derselben für überflüssig halten. Blos die bekannte Eigenschaft sei erwähnt, dass, wenn r den Schnittpunkt von $A'\sigma'$ mit der Kreistangente des Punktes f bezeichnet, $fr = A'p'$ sein muss; da mit Hilfe dieser Relation die Schnittpunkte eines beliebigen mit F concentrischen Kreises mit der Curve C construirt werden können, welche Construction für Σ' angewendet, zur Bestimmung der Punkte b'' führt, in welchen C'' von Σ'' berührt wird.

5. In diesem Artikel wollen wir eine Tangentenconstruction der Curve C aus dem Grunde ableiten, um mit Hilfe derselben das Problem der Tangentenbestimmung auch für die Curve Γ, aus Fig. 2 zu erledigen.

Herr de la Gournerie hat seine Tangentenconstruction für die Curve C mit Hilfe der Indicatrix nach dem Theorem der conjugirten Tangenten abgeleitet. Wir wählen einen mehr directen Weg.

Es wurde gezeigt, dass, wenn der Scheitel o (siehe Fig. 4) eines rechtwinkeligen Dreiecks ofp fix bleibt, der Scheitel f in einem Kreise F mit dem Mittelpunkte o sich fortbewegt, die Hypotenuse fp des Dreiecks hiebei ihre Richtung nicht ändert, der Punkt p die Curve C beschreibt.

Das Erzeugniss des Punktes p wäre jedoch ein Kegelschnitt, wenn man als Bahn des Punktes f eine Gerade G angenommen hätte, und insbesondere ein Kegelschnitt K, der in p die Curve C berührt, wenn die Gerade G mit der Kreistangente ft des Punktes f zusammenfallen würde.

Der Kegelschnitt K ist, wie seine Erzeugungsweise sofort beweist, eine Hyperbel, die durch o hindurchgeht, in diesem Punkte eine auf fp normale Tangente besitzt, und deren Asymptoten zu den Geraden fp, fo respective parallel sind. Die eine Asymptote selbst geht durch den Pol π der Geraden fp, bezüglich

[1] Erscheint in der Figur nur theilweise gezeichnet.

F, während der Punkt c — wobei $oc = o\pi$ gemacht wurde — einen Punkt der zweiten Asymptote liefert.

Wir haben nun die Tangente der Hyperbel K für den Punkt p zu bestimmen, um die Tangente der Curve C in diesem Punkte zu erhalten. Schneidet die Kreistangente πf die Asymptote mc in t, so ist pt die gesuchte Tangente. Denn schneidet pt die Asymptote $m\pi$ in t_1, so muss, da $ft = f\pi$ ist, auch $pt = pt_1$ sein. Die Strecke tt_1 wird daher im Punkte p halbirt, was eine charakteristische Eigenschaft der Hyperbeltangente ist.

Es ist evident, dass zur Construction der Tangente im Punkte p die Verzeichnung der Asymtoten $m\pi$, mc der Hyperbel K nicht erforderlich war.

Denn, da von der Hyperbel die Asymptotenrichtungen, die Punkte p, o und die Tangente $c\pi$ des letztgenannten Punktes gegeben sind, so kann die Tangente im Punkte p nach dem Satze von Pascal construirt werden.

Dieses Theorem liefert nachfolgende Resultate:

α. Zieht man (siehe Fig. 5) durch den Schnittpunkt III der Tangente des Punktes o und der Geraden fp die Parallele zu po, bis der Radius of in II geschnitten wird, so ist pII die verlangte Tangente.

β. Die Diagonale fI (Fig. 6) des Parallelogrammes ofpI geht durch den Punkt III, in dem die gesuchte Tangente von der Tangente des Punktes o geschnitten wird.

γ. Wir ziehen pIII normal auf po und durch III die Parallele zu po; diese Gerade schneidet den auf of senkrechten Radius im Punkte II, welcher (siehe Fig. 7) der Tangente des Punktes p der Curve C angehört.

Nicht uninteressante Constructionen für die Tangente der Curve C im Punkte p ergeben sich auch in dem Falle, wenn zu ihrer Bestimmung die durch π gehende Asymptote der Hyperbel K benützt wird.

Denken wir uns beispielsweise diese Asymptote mit 56, die gesuchte Tangente mit 12 und die Tangente $o\pi$ des Punktes o mit 34 bezeichnet, so resultirt aus dieser Bezeichnung die Gerade I, III (siehe Fig. 11) als die Pascal'sche Gerade, und diese schneidet den zu fp parallelen Durchmesser des Kreises F im Punkte II, welcher, mit p verbunden, die gesuchte Tangente liefert.

Aus der Figur folgt nun, dass, wenn $p\pi$ von oII im Punkte 2 geschnitten wird, die Strecke $o2 = o$II ist. Es wird daher, wenn t den Schnittpunkt der Tangente pII mit der Asymptote πI bezeichnet, auch $It = I\pi$ sein müssen.

Schneidet $o\pi$ die Tangente pII in τ, so sind oIII $\tau\pi$ vier harmonische Punkte. Man erhält daher den Punkt τ, indem man den Endpunkt γ der Secante fp mit dem Schnittpunkte g von πf und oII verbindet, und diese Gerade mit $o\pi$ zum Schnitt bringt.

6. Wenn man in Fig. 4 um o als Mittelpunkt einen beliebigen Kreis S beschreibt und die Kreistangente des Punktes s mit fp in q zum Schnitt bringt, dann ist der geometrische Ort des Punktes q die Curve Γ' aus Fig. 2.

Da nun das Verhältniss:

$$\frac{pq}{qf} = \frac{os}{sf} = \text{const.}$$

ist, so folgt hieraus, dass die Tangente der Curve C im Punkte p die Tangente der Curve Γ' im Punkte q und die Tangente des Kreises F im Punkte f, sich in einem Punkte t schneiden müssen.

Fig. 4 enthält mehrere Relationen, die zur Bestimmung des Punktes t verwerthet werden können.

Die am schnellsten zum Ziele führende dürfte die sein, dass $ft = f\pi$ ist.

Um daher im Punkte q der Curve Γ' (siehe Fig. 2) die Tangente zu erhalten, ziehen wir im Punkte f_2 die Tangente an den Kreis F bis zum Schnittpunkte π mit $A'a'$ und machen $f_2t = f_2\pi$. Die Gerade qt ist die gesuchte Tangente.

Sollte der Punkt π ausserhalb der Tafelgrenze fallen, so ist zu berücksichtigen, dass (siehe Fig. 4) der Winkel $\pi of = fot$ ist, und die Strecke ot, als Diagonale des Rechtecks $oftn$, von fn halbirt wird.

Wird also (siehe Fig. 8) $f_1\varepsilon = f_1f$ gemacht, so wird $o\varepsilon$ von der Kreistangente des Punktes f_1 in t geschnitten.

Man kann auch f_1e parallel zu of ziehen und $et = eo$ machen.

7. Es wurde bereits bemerkt, dass wir die im Vorangehenden besprochene Construction der Contourcurven der

Schraubenregelflächen hauptsächlich aus dem Grunde bevorzugen, weil sie die Verzeichnung der Tangenten der Schraubenlinie nicht bedingt. Wenn man sich jedoch über diesen Vortheil hinwegsetzt, so kann auch in der nachfolgenden Weise die Contour der scharfgängigen Schraubenfläche und der allgemeinen Schraubenregelfläche construirt werden.

Es sei Σ (siehe Fig. 14) die verticale Projection einer Schraubenlinie mit der Axe A und $a\sigma$ die Projection einer Lage der erzeugenden Geraden der scharfgängigen Schraubenfläche.

Denken wir uns den Punkt σ auf A nach α orthogonal projicirt und das rechtwinkelige Dreieck $a\sigma\alpha$ in der Ebene so fortbewegt, dass a die Gerade A, und σ die Curve Σ derart durchläuft, dass die Kathete $a\alpha$ auf A ihre Länge beibehält, so wird die Hypothenuse $a\sigma$ die Curve C' enveloppiren, welche die verticale Contour der scharfen Schraubenfläche ist.

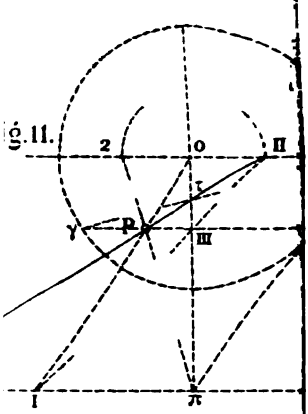
Die Gerade $a\sigma$ würde eine Parabel Π — mit der Scheiteltangente A — einhüllen, wenn der Punkt σ bei der erwähnten Bewegung nicht die Curve Σ, sondern eine Gerade G durchlaufen würde. Wählen wir insbesondere die Tangente σt der Curve Σ im Punkte σ als die Gerade G, so wird Π eine solche Parabel, die C' in dem auf $a\sigma$ liegenden Contourpunkte p berührt. Da diese Parabel σt zur Tangente, und wie bereits bemerkt wurde, A zur Scheiteltangente besitzt, so kann ihr Berührungspunkt p auf der Tangente $a\sigma$ nach dem Satze von Brianchon sofort construirt werden.

Der erwähnte Satz liefert nun das nachfolgende Resultat:

Man fälle von der Ecke β des Parallelogrammes $\sigma t a \beta$ die Senkrechte auf A; diese geht durch den gesuchten Punkt p. Da jedoch das hiedurch entstandene Dreieck $\beta a p$ mit dem Dreieck $t\sigma\tau$ — wobei $t\tau$ normal auf A errichtet wurde — congruent ist, so hat man blos $ap = \sigma\tau$ zu machen, um p zu erhalten.

Hiemit wäre das Problem der punktweisen Contourbestimmung der scharfgängigen Schraubenfläche ebenfalls gelöst.

Wenn man von der Construction der Tangente σt absieht, so wurde hiebei blos eine Gerade gezogen und eine Strecke übertragen. Der Beweis, dass $a\sigma$ bei der definirten Bewegung eine Parabel von besagter Eigenschaft beschreibt, ist so einfach



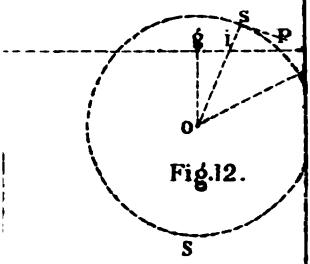


Fig.12.

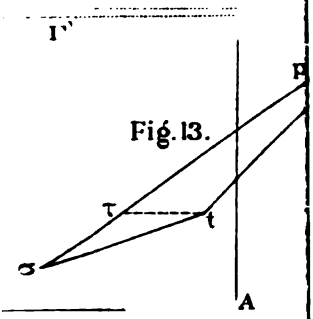


Fig.13.

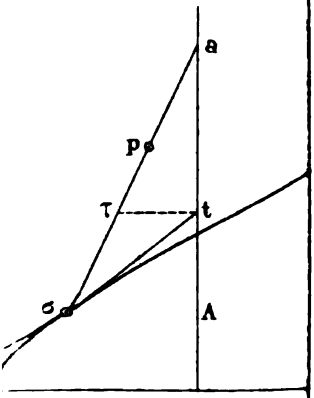
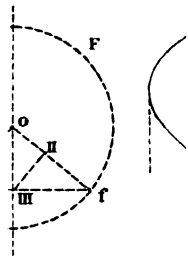
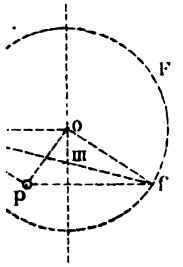
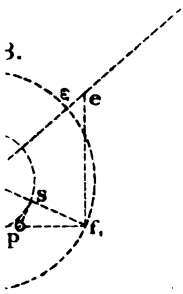
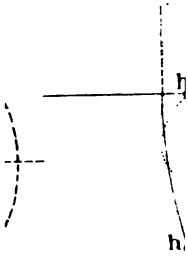


Fig.14.









und allgemein bekannt, dass wir ihn an diesem Orte unterdrücken müssen.

Die eben besprochene Construction gilt auch für orthogonal- und klinogonal-axonometrische Darstellungen der axialen Schraubenfläche. Es sei (siehe Fig. 15) Σ die (klinogonal oder orthogonal) axonometrische Projection einer Schraubenlinie mit der Axe A und $a\sigma$ die Projection einer Erzeugenden der axialen Schraubenfläche. Wird die Tangente der Curve Σ im Punkte σ bis zum Schnitt t mit A verlängert, $t\tau$ parallel zur Grundrissprojection der Tangente σt gezogen, und $ap = \sigma\tau$ gemacht, so ist p der Berührungspunkt von $a\sigma$ mit der Contour der Fläche.

8. Für die allgemeine Schraubenregelfläche erleidet die mitgetheilte Construction nur eine unwesentliche Modification.

Ist σs (Fig. 13) die Projection einer Lage der Erzeugenden der Schraubenregelfläche und haben die Punkte σ, s dieselbe Bedeutung wie in Fig. 2, so erhalten wir den auf σs liegenden Contourpunkt p in nachfolgender Weise. Wir construiren in σ und s die Tangenten an Σ und S respective; schneiden sich ihre Projectionen in t und ist $t\tau$ normal gerichtet auf A, so ist $sp = \sigma\tau$.

Denn, wenn wir die Punkte σ, s auf den Geraden σt und st resp. so fortbewegen lassen, dass die Differenz ihrer Horizontalabstände constant bleibt, so wird die Gerade σs eine Parabel erzeugen, welche die Contourcurve im Punkte p berührt und eine zu A parallele Scheiteltangente besitzt. Die Seiten des Dreiecks σst sind Tangenten dieser Parabel und da auch die Richtung der Parabelaxe gegeben ist, so kann der Berührungspunkt p der Tangente σs nach dem Satze von Brianchon construirt werden.

Für gewisse Bezeichnungen der Tangenten ergibt sich hiebei der Brianchon'sche Punkt b als der vierte Eckpunkt des Parallelogrammes σtsb und es ist das Dreieck bsp mit $t\sigma\tau$ congruent.

Schlussbemerkung. Mit Rücksicht darauf, dass in den drei letzten Figuren der Punkt p als Berührungspunkt der Geraden σa respective σs mit einer Parabel construirt wurde, erscheint es fast überflüssig zu bemerken, dass die Constructionen der Artikel 7 und 8 für centrale Darstellungen der Schraubenregelflächen nur unwesentliche Abänderungen erfahren.

Über die Einwirkung von Schwefel auf Phenolnatrium.

Von **Ludwig Haitinger.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. A. Lieben.)

Erhitzt man Phenolnatrium in einem Strome von Kohlensäure, so tritt, wie H. Kolbe gezeigt hat, unter Regenerirung der Hälfte des angewandten Phenols, die Bildung von Dinatriumsalicylat ein, d. h. es findet eine Einschiebung der Elemente des Kohlendioxyds in das Molekül des Phenols statt.

In der Absicht, dieselbe Methode zur Einführung anderer Atomgruppen oder Atome in das Phenolmolekül zu benützen, habe ich auf trockenes Phenolnatrium sowohl Schwefeldioxyd und Schwefelkohlenstoff, als auch Sauerstoff oder Luft unter mannigfach variirten Verhältnissen einwirken lassen, ohne jedoch bemerkenswerthe Resultate zu erhalten. Bei Anwendung der letztgenannten Agentien findet allerdings eine Reaction statt, es destillirt reichlich Phenol (bis zu $^3/_4$ des dem Phenolnatrium entsprechenden), doch konnte aus dem Producte keine wohl charakterisirte Substanz abgeschieden werden. Wie es scheint, vollziehen sich gleichzeitig Oxydations- und Condensationsprocesse.

Viel günstigere Resultate konnten bei der Einwirkung von Schwefel auf Phenolnatrium erhalten werden. Obwohl es auch hiebei nicht gelang, das gemäss der Gleichung:

$$2C_6H_5.ONa + S = C_6H_4\begin{matrix}ONa\\SNa\end{matrix} + C_6H_5OH$$

zu erwartende Oxyphenylmercaptan unmittelbar zu fassen, so war es doch möglich, ein aus diesem entstehendes Oxydationsproduct von der Zusammensetzung $(C_6H_4OH)_2S_2$, das ich künftig mit dem Namen Di-oxyphenyl-disulfid bezeichnen will, in Form seines primären Natriumsalzes rein darzustellen.

Durch Reduction dieser Verbindung gelangt man leicht und schnell zum Oxyphenylmercaptan zurück. Es hat sich gezeigt, dass die Analogie der Einwirkung von Schwefel auf Phenolnatrium mit jener von Kohlendioxyd auf Phenolnatrium so weit geht, dass hier wie dort zunächst Orthoderivate des Benzols entstehen.

In Folgendem sind die Darstellungsmethoden und Eigenschaften der genannten Körper, sowie die zur Aufklärung ihrer Constitution ausgeführten Versuche beschrieben.

Di-oxyphenyl-disulfid.

Trockenes Phenolnatrium und Schwefel werden im Verhältnisse von 2 Mol. des ersteren und 1 Atom des letzteren in fein gepulvertem Zustande gemengt und in einer Retorte (in einem Sandbade) durch etwa eine Stunde auf 180—200° erhitzt. Dabei verflüssigt sich die Masse, während gleichzeitig eine geringe Menge Phenol abdestillirt. Nach dem Erkalten wird die Schmelze mit mässig verdünnter Schwefelsäure zersetzt und das abgeschiedene schwarze Öl mit Wasserdampf destillirt. Die Destillation wird so lange fortgesetzt, bis das Destillat mit Bleisalzen keine gelbe Fällung mehr gibt. Es bleibt dann eine bedeutende Menge eines schwarzen zähen Harzes zurück, dessen Untersuchung bis jetzt kein klares Resultat ergeben hat; nur sei erwähnt, dass es geringe Mengen Sulfobenzid (Schmelzpunkt 129°) zu enthalten scheint.

Die ersten Partien des mit Wasserdampf erhaltenen Destillates enthalten ein schweres Öl, welches im wesentlichen aus Phenol besteht. Das mit übergegangene Wasser trübt sich an der Luft sehr bald in Folge partieller Oxydation des darin gelösten Oxyphenylmercaptans. Dieses letztere wurde zwar nie in Substanz abgeschieden, doch ist seine Gegenwart durch seine weiter unten zu beschreibenden sehr characteristischen Reactionen sicher erwiesen worden.

Behufs weiterer Verarbeitung wurde das gesammte stark sauer reagirende Destillat mit Natriumcarbonat neutralisirt und zur Syrupdicke eingedampft. Hiebei findet einerseits Verflüchtigung des Phenols, anderseits eine Oxydation des Mercaptans durch den Sauerstoff der Luft statt und es scheidet sich entweder sofort

oder bei längerem Stehen in flachen Schalen ein schwefelgelber, krystallinischer Niederschlag ab. Dieser wird abgesaugt mit kaltem Wasser (worin es fast ganz unlöslich) gewaschen und aus verdünntem Alkohol umkrystallisirt. Die sich abscheidenden harten Krystallkrusten sind:

Primäres Natriumsalz des Di-oxyphenyl-disulfids. Dasselbe ist, wenn rein, vollkommen weiss, gibt aber intensiv gelbe Lösung. Wird es mit Wasser gekocht, so disociirt es theilweise unter Abscheidung eines schweren Öles. Die aus verdünntem heissem Alkohol erhaltenen Krystalle ergaben bei der Analyse folgende Resultate:

I. 0·4074 Grm. des zwischen Papier abgepressten (übrigens recht luftbeständigen) Salzes ergaben 0·0758 Grm. Natriumsulfat.

II. 0·4620 Grm. Substanz verloren bei 140° 0·1290 Grm. und lieferten 0·0862 Grm. Na_2SO_4.

III. 0·7905 Grm. Substanz verloren bei 140° 0·2220 Grm. und lieferten 0·1481 Grm. Na_2SO_4.

IV. 0·3281 Grm. Substanz mit Soda und HgO geglüht (Bunsen-Russell) gaben 0·4085 $BaSO_4$.

V. 0·3072 Grm. Substanz lieferten bei der Verbrennung mit CuO und vorgelegtem (nach Kopfer präparirtem) PbO_2: 0·1478 Grm. H_2O und 0·4276 Grm. CO_2.

VI. 0·2108 Grm. Substanz gaben 0·0994 Grm. H_2O und 0·2932 CO_2.

Berechnet für $C_{12}H_9O_2S_2Na+6aqu$	Gefunden					
	I	II	III	IV	V	VI
C... 37·89	—	—	—	—	37·96	37·93
H... 5·53	—	—	—	—	5·35	5·24
S. . 16·84	—	—	—	17·09	—	—
Na.. 6·05	6·03	6·04	6·07	—	—	—
$6H_2O$.. 28·42	—	27·92	28·08	—	—	—

Das Salz hat demnach die empirische Zusammensetzung $C_{11}H_{21}O_8S_2Na$ und enthält 6 Moleküle Krystallwasser. Das letztere entweicht zum grössten Theile schon bei 100°, die letzten Reste aber erst unter schwacher Zersetzung des Salzes über 140°.

Wie schon früher erwähnt wurde, ist die Reaction zwischen Schwefel und Phenolnatrium durchaus keine glatte und beträgt die Ausbeute an reinem Natriumsalz kaum mehr als 20% der theoretischen.

Primäres Kaliumsalz des Di-oxyphenyl-disulfids wurde ganz analog dem Natriumsalze durch Absättigen der Rohdestillate mit Kaliumcarbonat bereitet. Es unterscheidet sich von dem ihm sonst sehr ähnlichen Natriumsalze nur durch seine um ein geringes grössere Löslichkeit. Eine Kaliumbestimmung ergab, dass es mit 5 Molekülen Wasser krystallisirt, von welchen 3 bei 100° entweichen. Zwischen 120° und 130° beginnt es unter schwacher Zersetzung zu schmelzen.

I. 0·2018 Grm. Substanz (zwischen Papier gepresst) lieferten 0·0473 Grm. K_2SO_4.

II. 0·2203 Grm. Substanz lieferten 0·0521 Grm. K_2SO_4.

Berechnet für $C_{12}H_9S_2O_2K+5aqu.$	Gefunden I	Gefunden II
K..... 10·32	10·50	10·60

Neutrales Kaliumsalz des Di-oxyphenyl-disulfids wird durch Auflösen des primären Salzes in der äquivalenten Menge Kalilauge und Eindunsten im Vacuum in der Form feiner zu Bündeln vereinigter seideglänzender Nadeln gewonnen. Es ist in Wasser sehr leicht löslich und wird durch Kohlensäure unter Abscheidung des primären Salzes zersetzt.

Dimethyläther des Di-oxyphenyl-disulfids wurde durch 3stündiges Kochen der nach der Gleichung

$$C_{12}H_9NaS_2O_2+NaOH+2CH_3J=C_{12}H_8S_2O_2(CH_3)_2+2JNa+H_2O$$

berechneten Mengen des primären Natriumsalzes, Ätznatron und Jodmethyl mit Methylalkohol dargestellt. Der rohe, mit Wasser gewaschene Äther ist immer mit etwas einer übelriechenden, öligen Substanz verunreinigt, welche durch Umkrystallisiren aus Alkohol entfernt werden kann. So gereinigt stellt der Äther kleine, derbe, vollkommen geruchlose Nadeln dar, deren Schmelzpunkt bei 119° (corrigirt) liegt. Bei der Destillation tritt Zersetzung ein.

0·2461 Grm. Substanz lieferten bei der Vorbrennung mit CuO und vorgelegtem Bleisuperoxyd 0·1066 Grm. H_2O und 0·5420 CO_2.

Berechnet für $C_{12}H_8S_2(OCH_3)_2$	Gefunden
C.... 60·43	60·06
H.... 5·04	4·81

Der bei der Darstellung des Äthers auftretende, stark riechende Körper ist aller Wahrscheinlichkeit nach das dem Äther des Disulfids entsprechende Mercaptan, entstanden durch eine reducirende Wirkung des alkoholischen Kalis. Bei einer directen Reduction des Äthers mit Natriumamalgam wurde derselbe, etwas an verbrannten Kautschuk erinnernde Geruch beobachtet.

Das freie Di-oxyphenyl-disulfid wurde aus dem Natriumsalze durch Schütteln mit verdünnter Schwefelsäure und Äther gewonnen. Es ist ein in Wasser fast ganz unlösliches, dickes Öl von äusserst schwachem Geruch. Oberhalb 200° beginnt es lebhaft zu sieden, doch jedenfalls unter völliger Zersetzung. Es entweichen Ströme von Schwefelwasserstoff und es destillirt eine geringe Menge einer leicht beweglichen Flüssigkeit, in der sich nach einiger Zeit Krystalle zeigen, welche bisher aber nicht weiter untersucht worden sind. Versuche, das Di-oxyphenyl-disulfid zum Krystallisiren zu bringen, scheiterten und es wurde bei dem gänzlichen Mangel an characteristischen Eigenschaften auf eine Elementaranalyse desselben verzichtet. Nach der Zusammensetzung seiner Metallverbindungen kommt ihm jedenfalls die Formel $C_{12}H_{10}S_2O_2$ zu.

Reactionen des Di-oxyphenyl-disulfids. Eine wässerige Lösung seiner Natriumverbindung gibt mit Metallsalzen Niederschläge von folgender Beschaffenheit: Silbernitrat — schwarz, unlöslich in Essigsäure; Kupferacetat — braun; Zinkacetat — weiss; Bleiacetat eigelb, sämmtlich löslich in verdünnter Essigsäure.

Die Bleifällung wurde analysirt, sie lieferte nach dem Trocknen über Schwefelsäure 45·05% Blei, während für $C_{12}H_8O_2S_2Pb$ (das neutrale Bleisalz) 45·49% verlangt werden.

Sämmtliche Verbindungen des Di-oxyphenyl-disulfids geben wenn sie trocken mit concentrirter Schwefelsäure zusammengebracht werden, eine bläulichgrüne Färbung von grosser Intensität. Wird Di-oxyphenyl-disulfid oder eines seiner löslichen Salze mit Natriumamalgam zusammengebracht, so wird es zu Oxyphenylmercaptan reducirt, welches seinerseits wieder zahlreiche, characteristische Reactionen besitzt. Ebenso wie Natriumamalgam wirken auch Zinkstaub, Eisenhydroxydul und Kali; in geringerem

Masse, selbst alkoholische Kalilauge beim Kochen. Auch beim Schmelzen mit Kaliumhydroxyd entsteht Oxyphenylmercaptan.

Oxyphenylmercaptan.

Oxyphenylmercaptan wird am bequemsten durch Reduction der primären Natriumverbindung des Di-oxyphenyl-disulfids mittels Natriumamalgam dargestellt. Man lässt letzteres so lange auf das mit Wasser angerührte Natriumsalz einwirken, bis eine lebhafte Wasserstoffentwicklung erfolgt und hat nur Sorge dafür zu tragen, dass die alkalische Lösung, welche begierig Sauerstoff absorbirt, nicht unnöthig lange mit Luft in Berührung komme. Nach beendeter Reduction — welche ziemlich rasch verläuft — giesst man vom Quecksilber ab und säuert mit Schwefelsäure an. Das ausfallende Öl wird gewaschen, getrocknet und rectificirt. Der Natriumsulfatlösung kann durch Ausschütteln mit Äther noch eine geringe Menge gelösten Productes entzogen werden. Annähernd quantitativ ausgeführte Versuche haben ergeben, dass in der That entsprechend der Gleichung:

$$C_{12}H_9O_2S_2Na + H_2 + 3NaOH = 2C_6H_4\begin{matrix}ONa\\SNa\end{matrix} + 3H_2O$$

für ein Molekül des Natriumsalzes zwei Atome Wasserstoff verbraucht werden.

Wird reines Material verwendet, so ist das erhaltene Oxyphenylmercaptan auch vollkommen rein, es destillirt dann alles bis auf einen geringen Rückstand von Di-oxyphenyl-disulfid (auch bei sorgfältigem Arbeiten ist eine geringe Oxydation kaum vermeidlich) innerhalb zweier Grade.

I. 0·3394 Grm. Substanz mit CuO und vorgelegtem nach Kopfer präparirtem PbO_2 verbrannt gaben 0·1404 Grm. H_2O und 0·7131 Grm. CO_2.
II. 0·3264 Grm. Substanz lieferten 0·1357 Grm. H_2O und 0·6875 Grm. CO_2.
III. 0·3013 Grm. Substanz mit Soda und HgO geglüht etc. (Bunsen-Russel) lieferten 0·5579 Grm. $BaSO_4$.

Berechnet für	Gefunden		
C_6H_6SO	I	II	III
C... 57·14	57·29	57·44	—
H .. 4·76	4·60	4·62	—
S... 25·40	—	—	25·43

Das Oxyphenylmercaptan ist eine stark lichtbrechende Flüssigkeit von äusserst intensivem Geruche. Auf die Haut gebracht, wirkt es gleich dem Phenol ätzend. Es ist mit Wasserdampf destillirbar und in Wasser erheblich löslich. Unter einem Drucke von 750·7 Mm. destillirt es unzersetzt bei 216—217 (corrigirt). Bei sehr niedriger Temperatur erstarrt es zu einer glänzenden Krystallmasse, die äusserlich festem Phenol vollkommen gleicht und bei +5—6° schmilzt. Als Kriterium für die Reinheit der Substanz ist ihr Schmelzpunkt jedoch nicht gut verwendbar, da sie unter Umständen selbst in einem Gemisch von fester Kohlensäure und Äther nicht krystallisirt.

Eine Bestimmung des specifischen Gewichtes ergab für

$$0° : 1 \cdot 2373, \quad \text{für } 100° : 1 \cdot 1889$$

bezogen auf Wasser von derselben Temperatur.

Das Oxyphenylmercaptan hat den Charakter einer ziemlich starken Säure; seine wässerige Lösung röthet Lakmuspapier; kohlensaure Salze zersetzt es unter Entwicklung von Kohlendioxyd. Mit Metallsalzen gibt es zahlreiche, characteristische Reactionen. Versetzt man eine wässerige Lösung des Mercaptans mit wenig Eisenchlorid, so trübt sie sich rasch unter vorübergehender, schwach violetter Färbung. Fügt man aber alsbald etwas Natriumcarbonat zu, so entsteht eine äusserst intensive grüne Färbung, die auf Zusatz von ätzendem Alkali einer fast ebenso intensiven rothen Platz macht. Unter Umständen können auch blaue und violette Tinten als Mischfarben auftreten.

Es ist bemerkenswerth, dass die Nüancen dieser Färbungen übereinstimmen mit jenen, welche Brenzkatechin mit Eisenchlorid in neutraler beziehungsweise in einer mit Natriumcarbonat versetzten Lösung gibt.

Mit Bleisalzen gibt das Oxyphenylmercaptan eine voluminöse gelbe Fällung, welche selbst in verdünnten Mineralsäuren unlöslich ist (Unterschied vom Di-oxyphenyl-disulfid). Bei längerem Stehen wird der Niederschlag dicht und krystallinisch und besteht dann aus wasserhaltigem C_6H_4SOPb. Die gefundenen analytischen Daten entbehren leider einer genauen Übereinstimmung mit den berechneten und dürfte vermuthlich die Oxydationsfähigkeit der Verbindung daran Schuld tragen.

Bei der trockenen Destillation gibt das (vorher nicht getrocknete) Bleisalz in reichlicher Menge ein Destillat, welches nach zweimaliger Rectification an dem genau übereinstimmenden Sied- und Schmelzpunkt als Phenol erkannt wurde. Ausser diesem entsteht noch etwas Diphenylenoxyd (Schmelzpunkt 78° statt 80°). Die Reaction ist nur dann verständlich, wenn man annimmt, dass eine Sauerstoffverbindung des Blei's beim Schwefelblei zurück bleibt:

$$C_6H_4SOPb + H_2O = C_6H_6O + PbS + O.$$

Einen in Säuren ebenfalls unlöslichen gelben Niederschlag gibt das Oxyphenylmercaptan mit Silbernitrat. Dieser hat die weitere auffallende Eigenthümlichkeit in Kalilauge löslich und in Ammoniak unlöslich zu sein. Noch geben Niederschläge: Mercurichlorid — gelblichweiss, flockig, in heissem Wasser löslich, beim Erkalten krystallinisch ausfallend; Mercuronitrat — braunschwarz; Kupferacetat — blauschwarz; Zinkacetat weiss; Cadmiumnitrat weiss.

Mit allen Oxydationsmitteln wie Permanganat, Chromsäure etc. tritt eine Trübung von Di-oxyphenyl-disulfid ein. Dieselbe Erscheinung macht sich, wie schon früher erwähnt, auch beim Stehen an der Luft bemerkbar, doch findet die Oxydation des freien Mercaptans immer nur langsam statt. Viel rascher und vollständiger verläuft sie in alkalischer Lösung, wobei direct das entsprechende Salz des Disulfids entsteht.

0·2034 Grm. Natriumsalz erhalten durch mehrtägiges Stehen einer mit Soda versetzten Lösung von Oxyphenylmercaptan an der Luft lieferten 0·0384 Grm. Na_2SO_4 entsprechend 6·12% Na statt 6·05%.

Constitution des Oxyphenylmercaptans.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich, dass die als Oxyphenylmercaptan und Di-oxyphenyl-disulfid beschriebenen Substanzen — namentlich was ihre leichte Umwandelbarkeit in einander anlangt — genau in demselben Verhältnisse zu einander stehen wie Thiophenol und Diphenyldisulfid.

Berücksichtigt man gleichzeitig die Art ihrer Entstehung und auch ihren phenolartigen Character, so lässt sich ihre Constitution wohl nur in folgender Weise schematisiren:

$$C_6H_4\begin{matrix}-SH\\-OH\end{matrix} \qquad C_6H_4\begin{matrix}-S-S-\\-OH\ HO-\end{matrix}C_6H_4$$

Ein stricter Beweis für diese Ansichten konnte durch eine durchgreifende Oxydation zu Phenolsulfonsäure erbracht werden. Es gelang allerdings nicht, Oxyphenylmercaptan direct zu einer Phenolsulfonsäure zu oxydiren, einzig aus dem Grunde, weil letztere Oxydationsmitteln gegenüber allzu empfindlich sind. Selbst als nur eine unzureichende Menge von Kaliumpermanganat oder Chromsäure (Salpetersäure war der Bildung von Nitrokörpern wegen ausgeschlossen) verwendet wurde, konnten nur äusserst geringe Mengen von Sulfonsäuren erhalten werden. Weit glatter vollzieht sich dagegen die

Oxydation des Methyläthers des Di-oxyphenyl-disulfids. Dieser wurde in eisessigsaurer Lösung mit einer heissen Lösung von Chromtrioxyd in Eisessig so lange versetzt, bis eine herausgenommene Probe mit Wasser keine Trübung von unveränderten Äther mehr gab. Es wurde um etwa die Hälfte mehr als die berechnete Menge Chromtrioxyd verbraucht, da ein kleiner Theil der Substanz vollständig (unter Bildung von Schwefelsäure) verbrannt wurde. — Die weitere Verarbeitung geschah in der üblichen Weise durch Abdampfen und successive Behandlung mit Baryt, Schwefelsäure, Bleiacetat, Schwefelwasserstoff und neuerliches Eindampfen. — Die Sulfonsäure, die so erhalten wurde, gab, mit Kalilauge neutralisirt, ein Kaliumsalz welches in Aussehen und Löslichkeitsverhältnissen einem zum Vergleiche aus Orthophenolsulfonsäure dargestellten Kaliumsalze der Anisolsulfonsäure [1] vollkommen glich.

---

[1] Ich habe dasselbe durch Erhitzen von orthophenolsulfonsaurem Kalium mit einem kleinen Überschuss von Jodmethyl und Ätzkali (in einer Lösung von etwa 70percentigen Methylalkohol) am Rückflusskühler bereitet. Das nach dem Abkühlen abgeschiedene Salz wurde abgesaugt, scharf gepresst und noch einmal aus Alkohol umkrystallisirt, worauf es sich jodfrei erwies. Den Angaben Kekulés über diese Verbindung (Zeitschrift für Chemie 1867, 201) kann ich noch hinzufügen, dass es aus heisser wässeriger Lösung mit einem Molekül Krystallwasser anschiesst.

0·3052 Grm. zwischen Papier abgepresster Substanz verloren bei 100° 0·0224 Grm. und lieferten 0·1088 Grm. K_2SO_4 entsprechend 7·34% H_2O und 15·98% K (berechnet für $C_7H_7O_4SK + H_2O$: 7·38% H_2O und 15·98% K.)

0·2582 Grm. des sorgfältig zwischen Papier abgepressten Salzes verloren bei 100° 0·0192 Grm., bei weiterem Erhitzen auf 200° nichts und lieferten 0·0917 Grm. K_2SO_4.

	Berechnet für $C_6H_4(OCH_3)SO_3K+H_2O$	Gefunden
H_2O...	7·38%	7·44
K.....	15·98 „	15·92

Es war also wirklich Anisolsulfonsäure gebildet worden und zwar nach dem übereinstimmenden Krystallwassergehalt des Kaliumsalzes, wahrscheinlich Orthosulfoanisol. Leider sind die isomeren Sulfoanisole nicht sehr eingehend untersucht und überdies, wie Kekulé hervorhebt, einander sehr ähnlich.

Eine Überführung der vorliegenden Methylphenolsulfonsäure in die freie Phenolsulfonsäure war unthunlich, weil hiebei eine Umlagerung (Ortho in Para) zu befürchten war.

Es wurde desshalb das Kalisalz mit Ätzkali geschmolzen, um aus der Stellung des zu erhaltenden Dioxybenzols auf die Stellung des Sulfonisols und somit auch auf diejenige des Oxyphenylmercaptans zurückschliessen zu können. Die Schmelzoperation wurde gemäss den von Degener[1] empfohlenen Bedingungen mit einem grossen Überschuss an Kaliumhydroxyd bei einer Temperatur von 300—330° durchgeführt. Es hat sich gezeigt, dass Brenzkatechin in nennenswerther Menge entsteht. — Obwohl schon des öfteren auf Umlagerungen bei der Kalischmelze aufmerksam gemacht wurde, so glaube ich der Bildung von Brenzkatechin doch eine Beweiskraft zumessen zu sollen, da Orthodioxybenzol in glatter Weise nur beim Verschmelzen von Orthoderivaten des Benzols mit Kali entsteht.

Für die Zugehörigkeit des Oxyphenylmercaptans zur Orthoreihe gelang es mir, noch einen zweiten von dem eben dargelegten vollständig unabhängigen Beweis zu erbringen durch die Synthese eines seiner Derivate aus Anisolsulfonsäure.

Als Ausgangspunkt hiezu diente ein reines, in schön ausgebildeten wasserhaltigen Säulen krystallisirtes Orthophenolsulfonsaures Kalium. Dasselbe wurde in der früher beschriebenen Weise methylirt und das Kaliumsalz der methylirten Säure mit der äquivalenten Menge Phosphorpentachlorid zusammengerieben.

[1] J. f. pr. Ch. (2) 20, 301.

Die Einwirkung geht ruhig und glatt vor sich und das Product scheidet, mit Wasser zusammengebracht, das Chlorid der Orthomethylphenolsulfonsäure in Krystallen ab. Der Schmelzpunkt dieses bisher noch nicht beschriebenen Körpers liegt bei circa 55°. Das Säurechlorid wurde sodann in Alkohol gelöst und mit Zinkstaub behandelt. Hiebei entsteht jedenfalls das Zinksalz der entsprechenden Sulfinsäure, doch wurde auf eine Reindarstellung desselben verzichtet und die Reduction alsbald durch Hinzufügen von Zink und Salzsäure weitergeführt.

Als schliesslich unter Zusatz von überschüssiger Salzsäure mit Wasserdampf abgetrieben wurde, destillirte ein Öl von widerlichem Geruche, der mit dem bei der Reduction des Methyläthers des Dioxyphenyldisulfids auftretenden frappante Ähnlichkeit zeigte. Auf Zusatz von Eisenchlorid trübte sich das mit übergangene Wasser neuerdings, nach längerem Stehen verschwand auch der Geruch und das Öl verwandelte sich in eine feste Masse. Letztere mit Äther ausgezogen und aus Alkohol umkrystallisirt zeigte alle Eigenschaften des früher beschriebenen Dimethyläthers des aus Phenolnatrium und Schwefel bereiteten Di-oxyphenyl-disulfids, insbesondere den gleichen Schmelzpunkt von 119°.

Es waren also, wie erwartet, folgende Reactionen vor sich gegangen:

$$C_6H_4(OCH_3)SO_2Cl + 6H = C_6H_4(OCH_3)SH + 2H_2O + HCl$$
$$2C_6H_4(OCH_3)SH + Fe_2Cl_6 = [C_6H_4(OCH_3)S]_2 + 2HCl + Fe_2Cl_4.$$

Da Orthophenolsulfonsäure verwendet wurde und eine Umlagerung (mit alleiniger Ausnahme der Einwirkung von Phosphorpentachlorid, die aber, wie erwähnt, unter minimer Temperaturerhöhung verlief und in kürzester Zeit beendet war) kaum zu befürchten ist, so folgt, dass der erhaltene Äther des Disulfids ebenfalls den Orthoderivaten des Benzols zuzuzählen ist.

Über Colchicin und Colchicein.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von Dr. S. Zeisel.

(Aus dem k. k. Universitätslaboratorium des Prof. A. Lieben.)

Um mir ungestörtes Arbeiten auf diesem Gebiete zu sichern, theile ich in Folgendem einige neue Beobachtungen über Colchicin und Colchicein mit.

Das von mir verwendete Colchicin war mir zum Theile von Herrn Dr. J. Schorm freundlichst zur Verfügung gestellt worden, wofür ich ihm hiemit meinen verbindlichsten Dank ausspreche, zum Theile habe ich es selbst aus rohem Extracte von Colchicinsamen dargestellt und nach einem neuen Verfahren gereinigt. Beide Präparate waren krystallisirt, enthielten jedoch noch Chloroform, das bei monatelangem Liegen an der Luft gar nicht, bei 100° C. auch nach vielen Stunden nicht vollständig abgegeben wurde. Das Chloroform kann jedoch leicht entfernt werden, indem man die Krystalle in Wasser löst und kurze Zeit kocht, wodurch eine Lösung erhalten wird, die bis auf gewisse Abweichungen, auf welche ich später zurückkommen werde, die bekannten Colchicinreactionen zeigt.

Meine Versuche sind noch nicht so weit gediehen, um entscheiden zu können, ob die ursprünglichen, aus Chloroform erhaltenen Colchicinkrystalle das Chloroform als mechanisch zurückgehaltene Verunreinigung oder chemisch gebunden enthalten.

Aus diesem Colchicin habe ich sowohl durch Einwirkung von H_2SO_4 als auch von HCl in sehr verdünnter Lösung Colchicein erhalten können neben einer geringen Menge einer schon von Anderen beobachteten, in Wasser leicht löslichen amorphen

Substanz, in welcher ich das Sulfat, beziehungsweise Chlorhydrat einer neuen Base erkannt habe. Bei der Einwirkung von sehr verdünnter Schwefelsäure auf Colchicin entsteht ausserdem noch sehr wenig einer leicht flüchtigen, in Wasser in jedem Verhältnisse löslichen und durch Pottasche in öliger Form abscheidbaren Verbindung.

Colchicein kann in die vorhin erwähnte neue Base vollständig durch Erhitzen mit starker Salzsäure auf 110—120° umgewandelt werden. Dabei bildet sich ausserdem Chlormethyl.

Die neue Base — ich will sie vorläufig Apocolchicein nennen — wird aus ihren intensiv gelb gefärbten Lösungen in Säuren durch Zusatz von Natriumcarbonat als gelbe, flockige, vollkommen amorphe Ausscheidung erhalten, welche sich leicht wieder in Säuren, aber auch in ätzenden Alkalien mit gelber Farbe löst. Apocolchicein ist sehr schwer in kaltem, leichter in heissem Wasser löslich. Die heisse, wässerige oder verdünnt-alkoholische Lösung erstarrt beim Erkalten zu einer gallertigen Masse. Die sauren Lösungen des Apocolchicеins trocknen zu gelben Firnissen ein. Das Chlorhydrat verliert seine Salzsäure auch bei oftmaligem Eindampfen seiner wässerigen Lösung bis zur Trockne nicht. Ich hebe dies besonders hervor, weil ich vermuthe, dass Hertel[1] dasselbe Salz als chlorfrei analysirt hat. Er berechnet aus seinen Analysen die Formel $C_{51}H_{76}N_2O_{32}$.

Das Apocolchicein-Chlorhydrat gibt mit Pikrinsäure, Jodjodkalium, Platinchlorid, Bromwasser, Kaliumwismuthjodid, Phosphorwolframsäure und Phosphormolybdänsäure amorphe Fällungen, mit Eisenchlorid bei Abwesenheit freier Salzsäure einen braungrünen Niederschlag, der sich in Chlorwasserstoffsäure mit schön grüner Farbe löst. Gerbsäure bewirkt keinen Niederschlag. Freies, trockenes Apocolchicein löst sich in concentrirter Schwefelsäure mit gelber Farbe, die beim Hinzufügen von Kaliumnitratpulver in indigblau, sodann violett, endlich rothgelb übergeht, worauf durch Alkalischmachen eine schöne Rothfärbung hervortritt. Durch längeres Erhitzen mit rauchender Salzsäure auf 150° wird aus Apocolchicein unter theilweiser Verkohlung eine in allen Lösungsmitteln schwer lösliche, braun-

[1] Johann Hertel, Inaugural-Dissert. Dorpat 1881. Pag. 41.

gelbe pulverige, manchmal sich flockig ausscheidende Substanz von entschieden und blos saurem Character gebildet. Sie löst sich mit rothbrauner Farbe in Natriumcarbonat und wird daraus durch Säurezusatz wieder in Flocken abgeschieden. Ihre heisse verdünnt-alkoholische Lösung lässt auf Zusatz von Barytwasser einen rothen flockigen Niederschlag einer Bariumverbindung fallen. Eine Verbindung von ganz ähnlichen Eigenschaften entsteht beim Erhitzen von Colchicein mit concentrirter Schwefelsäure.

Wenn man Apocolchicein trocken erhitzt, so entweichen Dämpfe, welche intensiv nach Trimethylamin riechen.

Beim Erhitzen mit festem Ätzkali entsteht eine Verbindung, die nach dem Lösen und Ansäuern der Schmelze mit Schwefelsäure durch Äther ausgeschüttelt werden kann, durch Bleizucker aus ihrer wässerigen Lösung gefällt wird und mit Wasserdampf flüchtig ist. Sie gibt mit Eisenchlorid eine violettrothe, sowohl auf Zusatz von Säuren als auch von Natriumcarbonat verschwindende Färbung.

Schliesslich erwähne ich noch, dass sowohl Colchicin als auch Colchicein und Apocolchicein von nascirendem Wasserstoff in alkalischer und saurer Lösung verändert werden. Es bilden sich bisher nur amorph erhaltene Verbindungen, welche viele für die drei oben bezeichneten Substanzen characteristische Reactionen nicht mehr zeigen.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVII. Band. III. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

VI. SITZUNG VOM 1. MÄRZ 1883.

Die Nachricht über das am 20. Februar d. J. erfolgte Ableben des wirklichen Mitgliedes Herrn Regierungsrathes Dr. Eduard Freiherrn v. Sacken wurde bereits in der Gesammtsitzung der Akademie vom 22. Februar zur Kenntniss genommen und der Theilnahme an diesem Verluste Ausdruck gegeben.

Das k. und k. Reichs-Kriegs-Ministerium übermittelt ein Exemplar der im technischen und administrativen Militär-Comité bearbeiteten Zusammenstellung, betreffend: „Die Verluste der im Occupationsgebiete und in Süd-Dalmatien befindlichen Truppen im Jahre 1882".

Herr J. Palisa, Adjunct der Wiener Sternwarte, dankt für den ihm von der Akademie bewilligten Subventionsbeitrag zur Ermöglichung seiner Theilnahme an der französischen Expedition behufs Beobachtung der totalen Sonnenfinsterniss am 6. Mai 1883 auf dem Manihiki-Archipel im stillen Ocean.

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine Abhandlung: „Beiträge zur allgemeinen Nerven- und Muskelphysiologie. XI. Mittheilung. Über rhytmische Contractionen quergestreifter Muskeln unter dem Einflusse des constanten Stromes", von Herrn Dr. Wilh. Biedermann, Privatdocent und erster Assistent am physiologischen Institute der Universität zu Prag.

Das w. M. Herr Director E. Weiss übersendet eine Notiz über einen neuen, von den Astronomen Brooks und Swift in Rochester (Amerika) aufgefundenen Kometen.

Herr Prof. Dr. G. v. Escherich in Graz übersendet eine Abhandlung: „Über die Gemeinsamkeit particulärer Integrale bei zwei linearen Differentialgleichungen." II.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Fundamentalversuche über die Licht- und Farbenempfindlichkeit augenloser und geblendeter Thiere", von Herrn Prof. Dr. V. Graber an der Universität in Czernowitz.
2. „Über eine sehr vortheilhafte Füllung der Kohlen-Zink-Kette", von Herrn Prof. P. R. Handmann in Kalksburg.

3. „Bestimmung des Tripels weiterer Schnittpunkte der beiden durch vier imaginäre Tangenten und einen Punkt gegebenen Kegelschnitte", von Herrn Prof. J. Tesař an der Staatsgewerbeschule in Brünn.
4. „Über Chlor- und Bromoxylderivate des Benzols". III. Abhandlung, von Herrn Dr. R. Benedikt an der technischen Hochschule in Wien.
5. „Bahnbestimmung des Planeten Adria", von Herrn E. Freiherrn v. Haerdtl, stud. phil. in Wien.
6. „Die Limnaeen der Gruppe *Gulnaria* Leach.", von Herrn Jul. Hazay in Budapest.

Ferner legt der Secretär folgende versiegelte Schreiben behufs Wahrung der Priorität vor:

1. Von Herrn S. Kantor, Privatdocent an beiden deutschen Hochschulen in Prag, enthaltend einen vorläufigen Auszug aus einer grösseren Abhandlung, deren Vorlage vom Verfasser in Aussicht gestellt wird.
2. Von Herrn J. Unterweger, Landes-Bürgerschullehrer in Judenburg, enthaltend einige Sätze zur Erklärung magnetischer Erscheinungen.
3. Von Herrn A. Krásza, technischer Eleve der Südbahn in Marburg ohne Inhaltsangabe.

Herr A. Krásza stellt gleichzeitig das Ansuchen, dass das von ihm unter dem 13. Juli 1882 bei der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften behufs Wahrung seiner Priorität deponirte versiegelte Schreiben eröffnet und der Inhalt desselben publicirt werde.

Diesem Ansuchen entsprechend wurde das betreffende Schreiben entsiegelt, welches einen Aufsatz über die elektrische Steuerung für Dampfmaschinen enthielt, der im Anzeiger Nr. VI veröffentlicht wurde.

Das w. M. Herr Prof. Th. Ritter v. Oppolzer überreicht „Tafeln für die Bestimmung der Orte des Planeten (58) Concordia".

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine von ihm selbst in Gemeinschaft mit Herrn Dr. J. Schreder ausgeführte Arbeit: „Über das Oxyhydrochinon, das dritte isomere Trioxybenzol."

Das w. M. Herr Hofrath J. Petzval überreicht eine Abhandlung des Herrn Prof. Dr. Oskar Simony in Wien: „Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze." (Fortsetzung.)

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Anales. Entrega 222. Tomo XIX. Enero 15. Habana, 1883; 8°.

Académie de Médecine: Bulletin. Nrs. 5—7. Paris, 1883; 8°.

— royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique: Bulletin. 51e anné, 3e série, tome 4. Nr. 12. Bruxelles, 1882; 8°.

— — Annuaire. 1883. 49e année. Bruxelles, 1883; kl. 8°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft 19. Nr. 1—2. Halle a. S., 1883; 4°.

— der Wissenschaften, k. b. zu München: Sitzungsberichte. 1882. Heft. 5. München, 1882; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VII. Nr. 10, 12 und 13. Cöthen, 1883; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences. Tome XCVI. Nos. 6 & 7. Paris, 1883; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. IV. Jahrgang 1883. Heft 2. Februar, Berlin, 1883; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVI. Jahrgang. Nr. 2, Berlin, 1883; 8°.

— deutsche entomologische: Zeitschrift. XXVII. Jahrg, 1. Heft. S. 25—192). Berlin, London, Paris, 1883; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXV. (n. F. XV.) Nr. 10, 11 u. 12. Wien, 1882; 8°.

Gesellschaft, physikalisch-chemische: Bulletin. Tome XIV. Nr. 9. St. Petersburg, 1882; 8°. — Tome XV. Nr. 1. St. Petersbourg, 1883; 8°.

— kais. königl. mährisch-schlesische zur Beförderung des Ackerbaues, der Natur- und Landeskunde zu Brünn: Mittheilungen. 1882. LXII. Jahrgang. Brünn; 4°.

Institute, the Anthropological of Great Britain and Ireland: The Journal. Vol. XII. Nr. 3. London, 1883; 8°.

Johns Hopkins University: American Journal of Mathematics. Vol. V. Nr. 2. Baltimore, 1882; 4°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band XXVII. Nr. 1—3. Leipzig, 1883; 8°.

— the American of Science: Vol. XXV. Nr. 146. New Haven, 1883; 8°.

Karpathen-Verein, ungarischer: Jahrbuch. IX. Jahrg. 1882. 4. Heft. Kesmark; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXIX. Band, 1883. II & III, Gotha; 4°.

Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique: Bulletin. Tome I. 1882. Nr. 3. Bruxelles, 1882, 8°.

— — Explication de la Feuille de Ciney par M. E'. Dupont pour le Calcaire carbonifère et par M. Michel Mourlon pour le Famennien. Bruxelles, 1882; 8°.

Nature. Vol. XXVII. Nos. 694 & 695. London, 1883; 8°.

Osservatorio centrale del real collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Bollettino mensuale. Torino, 1882; 4°.

Société des Ingenieurs civils: Mémoires et Compte rendu de travaux. 4ᵉ série, 35ᵉ année; 11ᵉ cahier. Novembre 1882. Paris, 1882; 8°.

Society, the American geographical: Bulletin. 1882. Nr. 2. New-York; 8°.

— the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLIII. Nr. 3. January, 1883; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and monthly record of Geography. Vol. V. Nr. 2. February 1883. London; 8°.

— the royal microscopical: Journal. Ser. II. Vol. III. Part 1. February, 1883. London and Edinburgh; 8°.

Tübingen, Universität: Akademische Schriften pro 1882. 36 Stücke. 4° & 8°.

Verein, Nassauischer für Naturkunde: Jahrbücher. Jahrgang 35. Wiesbaden, 1882; 8°.

Vierteljahresschrift, österreichische für wissenschaftliche Veterinärkunde. LVIII. Band. — 2. Heft. (Jahrgang 1882. IV.). Wien, 1882; 8°.

Wissenschaftlicher Club: Monatsblätter. IV. Jahrgang, Nr. 5. Wien, 1883; 4°. — Jahresbericht 1882—1883. VII. Vereinsjahr. Wien, 1883; 8°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. III. Jahrgang 1883. 1. Heft: Januar. Berlin, 1883; 8°.

— für Physiologische Chemie: VII. Band. 2. Heft. Strassburg, 1883; 8°.

Über das Oxyhydrochinon, das dritte isomere Trioxybenzol.

Von **L. Barth** und **J. Schreder.**

(Aus dem I. Wiener Universitäts-Laboratorium. LXXXVII.)

Vor einiger Zeit (Monatshefte III, S. 650) haben wir mitgetheilt, dass aus Hydrochinon in der Natronschmelze neben Condensationsproducten ein zersetzlicher, entweder gar nicht, oder doch nur sehr schwierig krystallisirbarer Körper entstehe. Diesen, das interessanteste Product der genannten Reaction, haben wir nun in etwas grösserer Menge dargestellt und so ist es uns gelungen, nach vielen vergeblichen Versuchen, wenigstens einen Theil desselben in krystallinischer Form zu erhalten und seine Zusammensetzung durch die Analyse feststellen zu können. Er ist das bisher nicht bekannte Isomere des Pyrogallols und Phloroglucin's, dem wir, um seine Entstehung aus Hydrochinon und die Stellung der Hydroxylgruppen sofort erkennen zu lassen, den Namen Oxyhydrochinon gegeben haben. Durch frühere Arbeiten des Einen von uns, war es uns nämlich wahrscheinlich, dass in der Pyrogallussäure die Hydroxyle die Stellung 1 : 2 : 3 einnehmen und dass daher das noch unbekannte dritte Isomere $C_6H_6O_3$ die Hydroxyle in der Stellung 1 : 2 : 4 haben müsse. Darnach konnte es, von Umlagerungen abgesehen, nur aus dem Hydrochinon gelingen, dieses Trioxybenzol sicher frei von den anderen Isomeren darzustellen. Der Versuch hat diese Annahme gerechtfertigt. Es bildet sich in der That nur dieser Körper als directes Oxydationsproduct und keine Spur von Pyrogallussäure oder Phloroglucin.

Das Hydrochinon wird mit einem grossen Überschuss von käuflichem Ätznatron (8 — 10fache Menge) verschmolzen. Wenn

das zu Beginn der Operation in geringer Menge zugesetzte Wasser verdampft ist, erhitzt man sehr rasch mit grosser Flamme. Alsbald beginnt die Schmelze sehr stark zu schäumen, es entwickelt sich viel Wasserstoff. Die Farbe derselben ist in diesem Stadium schwefelgelb. Nach einiger Zeit wird die Wasserstoffentwicklung schwächer, die Farbe lichtbraun, der Schaum beginnt etwas einzusinken. Man mässigt nun die Temperatur durch Abdrehen der Flamme. Nach kurzer Zeit hört die Wasserstoffentwicklung fast ganz auf, man entfernt das Feuer und trägt die chokoladebraune erkaltete Masse in verdünnte Schwefelsäure ein.

Die Dauer einer Operation beträgt bei Verarbeitung von je 30 Grm. Hydrochinon circa 20 — 25 Minuten. Die Lösung des Schmelzkuchens in der Säure erfolgt fast ohne jegliche Ausscheidung brauner Flocken. Man giesst, um die geringen Mengen derselben zu entfernen, durch ein Filter und schüttelt das lichtweingelbe Filtrat 10 — 15mal mit Äther aus. Die rückständige wässerige, saure Flüssigkeit färbt sich dabei violett. Die vereinigten Ätherauszüge hinterlassen nach dem Abdestilliren einen bräunlichen Syrup. Dieser wird in Wasser aufgenommen, wobei eine nicht sehr grosse Menge eines undeutlich krystallinischen, weissen, an der Luft rasch blau, endlich fast schwarz werdenden Pulvers zurückbleibt. Nach dem Filtriren wird die wässerige Lösung mit neutralem Bleiacetat fractionirt ausgefällt. Die ersten Fällungen sind dunkel gefärbt und geben nach der Zersetzung mittelst Schwefelwasserstoff, braune schmierige Substanzen. Die späteren Fällungen sind heller, die letzten ganz hellgraugelb, färben sich aber beim Stehen ebenfalls sehr rasch dunkel. Sie werden zerlegt und die erhaltenen Lösungen 15—20mal fractionirt mit Äther ausgezogen. Die ersten Auszüge liefern dunkelgelb gefärbte syrupöse Rückstände, die letzten hellere. Beide werden nochmals in Wasser aufgenommen, wobei wieder eine gewisse Menge des früher erwähnten, weissen, krystallinischen, rasch blau werdenden Pulvers zurückbleibt, und dann das fractionirte Fällen mit Bleizucker und das fractionirte Ausschütteln der zerlegten Bleisalze mehrmals wiederholt, bis endlich die hellst gefärbten, anfänglich syrupösen Ätherrückstände langsam, oft erst nach tage- oder wochenlangem Stehen zu krystallisiren beginnen. Die ursprünglich mit neutralem Bleiacetat ausgefällte Flüssigkeit wird

nun mit Bleiessig versetzt, wodurch abermals ein reichlicher Niederschlag entsteht, der nach dem Zersetzen, Aufnehmen der in Freiheit gesetzten Substanz in Äther und Behandlung des Ätherrückstandes mit Wasser eine Lösung gibt, in der neutrales Bleiacetat neuerdings eine Fällung hervorbringt, offenbar weil durch die frei werdende Essigsäure etwas von dem ersten Bleisalze aufgelöst worden war. Dieser zweite Bleiniederschlag wird zersetzt, wie oben behandelt und mit den entsprechenden Substanzen aus der ersten Bleifällung vereinigt. Die ganze Operation wird, wenn nöthig, ein drittes Mal durchgeführt, bis in dem durch Bleiessig erhaltenen Niederschlag nichts mehr von dem ersteren Körper enthalten ist.

Die früher erwähnten, endlich breiig krystallinisch erstarrten Ätherrückstände werden auf eine Saugfilter gebracht und entweder mit Wasser oder mit Amylalkohol gewaschen bis sie nahezu farblos sind, dann vor Licht geschützt, zwischen Papier an der Luft oder über Schwefelsäure getrocknet. Diese Operation muss sorgfältig ausgeführt werden, um die Substanz analysenrein zu erhalten, denn wir haben uns leider bis jetzt vergeblich bemüht, ein passendes Lösungsmittel für sie, aus dem sie ohne grosse Verluste umkrystallisirt werden könnte, zu finden. Der Körper scheint wasserfrei zu krystallisiren, wenigstens verlor eine mit Wasser gewaschene, lufttrocken gewordene Probe bei 100° nur sehr wenig an Gewicht. Aus Äther erhält man ihn in mikroskopischen wohlausgebildeten Täfelchen oder in Blättchen, häufig aber auch nur in verworrenen Krystallaggregaten. Zur Analyse wurde er im Vacuum bei 70—80° getrocknet.

I. 0.2542 Grm. Substanz gaben 0·5371 Grm. Kohlensäure und 0.1075 Grm. Wasser.

II.[1] 0.2996 Grm. Substanz gaben 0.6326 Grm. Kohlensäure und 0.1240 Grm. Wasser.

In Procenten:

	Gefunden		$C_6H_6O_3$
	I.	II.	
C.....	57.62	57.59	57.14
H	4.70	4.60	4.76.

[1] Von anderer Bereitung.

Wie man sieht, hängt dem Oxyhydrochinon noch hartnäckig eine geringe Menge einer kohlenstoffreicheren, wasserstoffärmeren Substanz an, welche vielleicht auch die Ursache ist, dass dasselbe so schwierig zur Krystallisation zu bringen ist. Nichtsdestoweniger bildet dasselbe die Hauptmenge der syrupösen, oben beschriebenen Ätherrückstände und ist auch vorwiegend in den von den Krystallen abgesaugten Laugen enthalten.

Der Schmelzpunkt des Oxyhydrochinons war nicht scharf zu bestimmen. Es erweicht allmälig und ist bei 132—133° vollständig geschmolzen, doch dürfte bei einem absolut reinen Präparate der Schmelzpunkt wohl noch höher liegen.

Das Oxyhydrochinon löst sich sehr leicht schon in der Kälte in Wasser, Äther, Essigäther, Äthyl- und Amylalkohol, fast gar nicht dagegen in Ligroin, Chloroform, Schwefelkohlenstoff und Benzol. Die wässerige Lösung desselben ist äusserst empfindlich, selbst im luftverdünnten Raume über Schwefelsäure färbt sie sich dunkel, setzt dunkelbraune Flocken ab und trocknet schliesslich zu einer schwarzbraunen, etwas schmierigen Masse ein. An freier Luft geschieht dieses Braunwerden schneller, noch schneller, wenn man einen Tropfen Alkali zur Lösung setzt. Sie ist in dieser Beziehung viel empfindlicher als eine Pyrogallussäurelösung. Auf die Haut gebracht, färbt sie diese zunächst bräunlich, nach einigen Stunden aber intensiv schwarz. In verdünnter Lösung erzeugen ein Paar Tropfen einer sehr verdünnten Eisenchloridlösung eine bräunlichgrüne, schnell verblassende Färbung, welche auf Zusatz von sehr wenig Sodalösung schön dunkelblau, bei etwas mehr Sodazusatz weinroth wird. Wird gleich anfangs mehr Eisenchlorid zugegeben, so entsteht eine dunkle grünbraune Färbung, die nicht mehr verblasst und auf Sodazusatz fast schwarz wird. Eisenvitriol lässt die Lösung des Körpers unverändert. Nach Zugabe von etwas Soda tritt dann eine violette, nach weiterer Zugabe eine intensiv blaue Färbung ein. Eine concentrirte wässerige Lösung des Oxyhydrochinons mit einer concentrirten Eisenchloridlösung versetzt, scheidet dunkle Flocken ab von zweifelhaft krystallinischer Beschaffenheit, in Wasser schwer löslich. Verreibt man Oxyhydrochinon mit Brom, so entweicht Bromwasserstoff und nach dem Verjagen des überschüssigen Brom auf dem Wasserbade bleibt ein brauner Rück-

stand, der sich in verdünntem Alkohol mit dunkelkirschrother Farbe löst, aus welcher Lösung dann hübsche, blauviolette Krystallkörner anschiessen. Bei dieser Reaction scheint daher nicht bloss Substitution von Brom, sondern vielleicht auch Chinonbildung stattgefunden zu haben, worauf das Auftreten eines intensiv gefärbten Productes zu deuten scheint.

Erhitzt man das Oxyhydrochinon in einem Retörtchen für sich im Wasserstoffstrom, so bräunt und schwärzt sich die Masse, geräth ins Sieden und unter Aufblähen und Verkohlen des Rückstandes destillirt ein gelbbräunliches Öl, das in kurzer Zeit theilweise erstarrt. Löst man das Destillat in Wasser, versetzt mit Bleiacetat, filtrirt den entstandenen Niederschlag und zersetzt diesen sowie das Filtrat mit Schwefelwasserstoff, so erhält man aus ersterem unverändertes, wenn auch braungefärbtes Oxyhydrochinon, aus letzterem aber **Hydrochinon.** Dieses wurde nach dem Reinigen und Umkrystallisiren unzweifelhaft erkannt: an seiner Krystallisationsfähigkeit, seiner Krystallform, dem Schmelzpunkte und an der Bildung von Chinhydron. Das Oxyhydrochinon destillirt also zum Theil unverändert, zum Theil verkohlt es und zum Theil wird es unter den angegebenen Umständen reducirt zu Hydrochinon, aus dem es durch Oxydation entstanden war.

Durch die im Vorstehenden angeführten Versuche kann es als bewiesen angesehen werden, dass dem neuen Trioxybenzol die Stellung 1 : 2 : 4 zukommt. Damit ist auch für die Pyrogallussäure die Stellung 1 : 2 : 3 und wie wir ja schon früher angenommen haben, für das Phloroglucin die symmetrische 1 : 3 : 5 festgestellt. Vor Jahren hat der Eine von uns die Protokatechusäure in Gallussäure übergeführt [1] und in Gemeinschaft mit Senhofer auch aus der symmetrischen Dioxybenzoësäure (α-Resorcylsäure) reichliche Mengen von Gallussäure erhalten. Vergegenwärtigt man sich die jetzt sicher festgestellten Constitutionsformeln der genannten beiden Dioxybenzoësäuren und hält an der Stellung 1 : 2 : 3 für Pyrogallussäure fest, so kann Gallussäure nur 1:3:4:5 (Carboxyl an 1) sein. Dann muss ferner die von

---

[1] Vergl. auch Matsmoto Berl. Ber., XI., 140.

Senhofer und Brunner dargestellte Pyrogallocarbonsäure die Stellung 1:2:3:4 besitzen und ferner die von denselben Forschern erhaltene Gallocarbonsäure 1:2:3:4:5 sein (Carboxyle an 1 und 2). Die Bildung von Gallussäure aus Dijodsalicylsäure, welche seinerzeit Lautemann mitgetheilt hat, ist später nicht bestätigt worden. Jedenfalls hat Lautemann nur sehr geringe Mengen seiner Säure zur Verfügung gehabt und vielleicht lag ihm die isomere Gallussäure vor, die ja sehr leicht beim Erhitzen Pyrogallussäure liefert.

Durch die Erkenntniss, dass in der Gallussäure die oben angeführte Stellung 1:3:4:5 vorhanden ist, ist endlich auch die Constitutionsformel der Ellagsäure festgestellt.

Über die anderen bei der Einwirkung von schmelzendem Natron auf Hydrochinon entstehenden Substanzen, sowie eventuell über Derivate des Oxyhydrochinons werden wir berichten, wenn das eingeschlagene mühselige Trennungs- und Reinigungsverfahren zum Ziele geführt hat oder wir einen besseren Weg zur Erreichung desselben aufgefunden haben werden.

Über Reichenbach's Pikamar.

Von P. Pastrovich.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Februar 1883.)

Die Untersuchungen A. W. Hoffmann's haben dargethan, dass an der Zusammensetzung des Buchenholztheers nicht nur ein- und zweisäurige, sondern auch dreisäurige Phenole, beziehungsweise ihre Methyläther wesentlichen Antheil nehmen. Es war nun der Zweck der folgenden Arbeit, zu entscheiden, unter welche dieser Gruppen das Pikamar zu zählen sei. Reichenbach[1] beschreibt dasselbe als fast farblose, ölige Flüssigkeit von eigenthümlichem Geruch und bitterem Geschmack, welche bei 715 Mm. bei 285° siedet und das specifische Gewicht 1·10 besitzt.

Als Rohmaterial zur Darstellung des Pikamars dienten die über 270° C. siedenden Fractionen des Buchentheers; diese enthalten neben Pikamar noch Propylpyrogallussäuredimethyläther und das später zu beschreibende Blauöl. Zweckmässiger noch können die über 270° C. destillirenden Antheile des Birkenrindentheers hiezu verwendet werden, welche Pikamar in grösserer Menge als die Buchentheeröle enthalten. Die Rohöle können durch fractionirte Destillation nicht gereinigt werden, da mit den höher siedenden Fractionen immer solche von niedrigerem Siedepunkt übergehen und umgekehrt. Sie wurden daher mit etwa der achtfachen Menge heisser, wässeriger Kalilauge von 1·100 spec. Gewichtes zusammengebracht; beim Erkalten krystallisirt ein Gemenge von Pikamarkali und der Kaliverbindung des Propylpyrogallussäuredimethyläthers heraus, während das Blauöl in Lösung bleibt. Der Krystallbrei wurde durch Auspressen von der tief braun gefärbten Mutterlauge getrennt, in verdünnter heisser Kalilauge von 1·030 spec. Gewichtes aufgelöst und in der Wärme krystallisiren lassen; hiebei schiesst nur Pikamarkali in Nadeln an, während die Kaliverbindung des Propylpyrogallussäure-

[1] Schweigget's Jahrbuch, 68, 295 u. 350.

dimethyläthers gelöst bleibt. Durch mehrmaliges Umkrystallisiren wurde schliesslich ein reines Präparat erhalten. Dieses wurde mit verdünnter Salzsäure zersetzt, das abgeschiedene Öl getrocknet und mehrmals destillirt.

Das so erhaltene Pikamar ist eine farblose, ölige Flüssigkeit von grossem Lichtbrechungsvermögen, welche sich bei längerem Stehen am Lichte schwach gelblich färbt; es siedet bei 290° C. (corr.) und hat bei 15° C. das specifische Gewicht 1·10228; in Wasser ist es wenig, in Alkohol, Äther und Essigsäure sehr leicht löslich; es besitzt einen bitteren pfefferminzartigen Geschmack und charakteristischen Rauchgeruch. Die Substanz wurde der Elementaranalyse unterworfen.

1. 0·3595 Grm. gaben 0·86775 Grm. Kohlensäure und 0·260 Grm. Wasser.
2. 0·30375 Grm. gaben 0·7305 Grm. Kohlensäure und 0·2175 Grm. Wasser.
3. 0·2975 Grm. ergaben 0·71825 Grm. Kohlensäure und 0·2145 Grm. Wasser.
4. 0·340 Grm. ergaben 0·820 Grm. Kohlensäure und 0·241 Grm. Wasser.

	Berechnet für $C_{10}H_{14}O_3$	Gefunden			
		1.	2.	3.	4.
C.....	65·93	65·83	65·59	65·84	65·77
H.....	7·69	8·03	7·95	8·01	7·87
O.....	26·38	26·14	26·46	26·15	26·36

Die Annahme der Formel $C_{10}H_{14}O_3$ wurde ferner durch die gefundene Dampfdichte gerechtfertigt, welche nach dem Meyer'schen Verdrängungsverfahren und nach der Modification desselben von H. Schwarz[1] bestimmt wurde.

	Berechnet für $C_{10}H_{14}O_3$	Gefunden.	
		nach Meyer	nach Schwarz
D =	6·32	6·41	6·53

Reactionen des Pikamars: Eine verdünnte alkoholische Lösung von Pikamar wird durch einige Tropfen neutraler alkoho-

[1] Privatmittheilung von Prof. H. Schwarz.

lischer Eisenchloridlösung intensiv blaugrün gefärbt; durch Alkalien und Erdalkalien wird es als schwer lösliche Alkali-, resp. Erdalkaliverbindung gefällt.

Zersetzung des Pikamars durch Salzsäure.

Wird Pikamar mit überschüssiger concentrirter Salzsäure längere Zeit im zugeschmolzenen Glasrohre auf 140° C. erhitzt, so verwandelt es sich in eine braun gefärbte Flüssigkeit; beim Öffnen des Rohres entweichen reichliche Mengen von Chlormethyl. Die Reactionsmasse wurde durch Abdampfen auf dem Wasserbade von Salzsäure befreit, und erstarrte nach langem Stehen zu einer krystallinischen Masse. Durch Abpressen zwischen Filterpapier von den anhaftenden theerigen Substanzen befreit, wurde der Krystallbrei mehrere Male aus Wasser und schliesslich aus Benzol umkrystallisirt. Es wurden so kleine farblose Prismen vom Schmelzpunkte 80° erhalten, deren Eigenschaften mit den von A. W. Hofmann[1] aus Propylpyrogallussäuredimethyläther auf gleiche Weise erhaltenen vollkommen übereinstimmen. Sie sind in Wasser und Alkohol sehr leicht, in Äther leicht löslich; die wässerige Lösung wird durch Alkalien schnell verdunkelt, mit einer verdünnten Eisenvitriollösung entsteht schöne indigblaue Färbung. Die bei der Elementaranalyse erhaltenen Zahlen sprechen für die Formel $C_9H_{12}O_3$.

Beleganalysen: 1. 0·215 Grm. lieferten 0·505 Grm. Kohlensäure und 0·1425 Grm. Wasser.

2. 0·1725 Grm. gaben 0·40425 Grm. Kohlensäure und 0·115 Grm. Wasser.

	Berechnet für $C_9H_{12}O_3$	Gefunden 1.	Gefunden 2.
C.....	64·28	64·05	63·91
H.....	7·14	7·36	7·40
O.....	28·58	28·59	28·69

Die Zersetzung des Pikamars durch Salzsäure lässt sich demnach durch die Gleichung

$$C_{10}H_{14}O_3 + HCl = C_9H_{12}O_3 + CH_3Cl$$

ausdrücken.

[1] Ber. deutsch. chem. Ges. 11, 329.

Diacetpikamar.

Die Versuche, aus Pikamar durch Bromirung ein Bromderivat darzustellen scheiterten daran, dass immer nur braune, schmierige Massen erhalten wurden. Weit einfacher gestaltet sich die Darstellung der Diacetverbindung des Pikamars. Wird 1 Theil Pikamar mit 2 Theilen Essigsäureanhydrid durch zwei Stunden im Kolben mit Rückflusskühler gekocht, so erstarrt die Masse beim Erkalten oder beim Eingiessen in Wasser allmählig zu einem schwach gelblich gefärbten Krystallbrei. Die Masse wurde mehrere Male aus Alkohol umkrystallisirt und so lange, farblose Nadeln vom Schmelzpunkt 82·5—83·0° C. erhalten. Dem entgegen enthalten Reichenbach's[1] Arbeiten die Angabe, dass Pikamar, wenn man es längere Zeit mit Essigsäure kocht, sich beim Eingiessen der essigsauren Lösung in Wasser wieder unverändert abscheidet. Die Analyse der Acetverbindung führte zur Formel $C_{10}H_{12}(C^2H^3O)_2O_3$.

Analysen: 1. 0·289 Grm. gaben 0·6665 Grm. Kohlensäure und 0·1785 Grm. Wasser.

2. 0·1945 Grm. gaben 0·449 Grm. Kohlensäure und 0·12175 Grm. Wasser.

	Berechnet für $C_{10}H_{12}(C_2H_3O)_2O_3$	Gefunden 1.	Gefunden 2.
C	63·15	62·89	62·96
H	6·76	6·86	6·95
O	30·09	30·25	30·09

Mit Brom behandelt, geht die Acetverbindung in ein bei 79° schmelzendes Bromderivat über, welches in gelben wavellitartig angeordneten Nadeln oder Warzen krystallisirt. Die bei der Analyse gefundenen Zahlen sprechen für die Formel $C_{10}H_{10}Br_2(C^2H^3O)_2O_3$.

1. 0·38275 Grm. Substanz ergaben 0·3385 Grm. Bromsilber, entsprechend 0·14404 Grm. Brom.
2. 0·2945 Grm. gaben 0·260 Grm. Bromsilber, entsprechend 0·11063 Grm. Brom.

[1] Loc. cit.

	Berechnet für $C_{10}H_{10}Br_2(C_2H_3O)_2O_3$	Gefunden 1.	Gefunden 2.
Br.....	37·73%	37·63%	37·56%

Pikamarkali.

Wird eine alkoholische Lösung von Pikamar mit überschüssigem warmem alkoholischem Kali zusammengebracht, so krystallisirt beim Erkalten Pikamarkali in kugelförmig angeordneten schwach bläulich gefärbten Nadeln heraus. Die Krystalle werden mehrmals aus verdünntem alkoholischem Kali umkrystallisirt und dann rasch mit Alkohol gewaschen und im Exsiccator über Chlorcalcium und Natronkalk getrocknet. So gelingt es, die reine Verbindung in nahezu farblosen perlmutterglänzenden Krystallen zu erhalten, welche sich beim Liegen an der Luft bald grau und endlich blauschwarz färben. Mit verdünntem Säuren-Wasser, ja selbst mit Alkohol zusammengebracht, zersetzt sich die Verbindung. Auch beim Zusammenbringen einer alkoholischen Pikamarlösung mit Natronlauge oder beim Kochen mit überschüssigem Ammoniak erhält man ähnliche krystallisirte Verbindungen; Baryt- und Kalkwasser erzeugen in der alkoholischen Lösung des Pikamars direct sehr schwer lösliche Niederschläge. Dieselben sind nach der allgemeinen Formel $C_{10}G_{12}R^{I}_{2}O_3$ oder $C_{10}H_{12}R^{II}O_3$ zusammengesetzt, worin R^{I} ein einwerthiges, R^{II} ein zweiwerthiges Metall bezeichnet. Für die Kaliverbindung ergab die Analyse folgende Zahlen:

1. 0·26725 Grm. im Schiffchen mit Chromoxyd gemischt im Sauerstoffstrom verbrannt gaben 0·451 Grm. Kohlensäure und 0·1225 Grm. Wasser.
2. 0·3015 Grm. in derselben Art verbrannt gaben 0·5105 Grm. Kohlensäure und 0·1335 Grm. Wasser.
3. 0·281 Grm. ergaben 0·188 Grm. schwefelsaures Kali.
4. 0·618 Grm. gaben 0·4205 Grm. Kaliumsulfat.

	Berechnet für $C_{10}H_{12}K_2O_3$	Gefunden 1.	2.	3.	4.
C.....	46·49	46·02	46·17	—	—
H	4·65	5·09	4·91	—	—
K	30·28	—	—	30·04	30·55
O	18·58	—	—	—	—

Pikamarkali, welches längere Zeit mit Alkohol gewaschen wurde, zeigte bei der Kalibestimmung einmal $14 \cdot 39\%$, nach noch längerem Waschen damit $11 \cdot 79\%$ Kalium.

Durch Oxydation des Pikamars mit Chromsäuremischung wurde ein gelbbraunes Harz erhalten, welches bisher noch nicht zur Krystallisation gebracht werden konnte; ebenso verwandelt Salpetersäure das Pikamar in eine kirschrothe schmierige Masse.

Theoretische Betrachtungen.

Durch die Zersetzung des Pikamars mit concentrirter Salzsäure wurde eine Verbindung $C_9H_{12}O_3$ erhalten. Da diese Verbindung durch Abspaltung von Methyl aus dem Pikamar entsteht, dieses aber selbst die Fähigkeit besitzt mit Alkalien Salze zu bilden, so deutet dies, sowie die Existenz der Acetverbindung einerseits auf das Vorhandensein der Gruppe OCH_3, anderseits auf das zweier Hydroxylgruppen hin. Man wird daher das Pikamar als den Monomethyläther eines höheren Homologons der Pyrogallussäure, das entmethylirte Product $C_9H_{12}O_3$ aber als das höhere Homologon selbst betrachten können. Die Formeln für dieses Homologon, sowie für das Pikamar und seine Acet- und Kaliverbindung gestalten sich demnach folgendermassen:

$$C_9H_9\begin{cases}OH\\OH\\OH\end{cases} \qquad C_9H_9\begin{cases}OCH_3\\OH\\OH\end{cases} \qquad C_9H_9\begin{cases}OCH_3\\OC_2H_3O\\OC_2H_3O\end{cases} \qquad C_9H_9\begin{cases}OCH_3\\OK\\OK\end{cases}$$

Nachdem in der Acetverbindung noch 2 Atome Wasserstoff durch Brom ersetzt werden können, so erscheint die Annahme wahrscheinlich, dass, obwohl die Propylgruppe bis jetzt nicht direct nachgewiesen werden konnte, hier ein propylirtes Trioxybenzol, eine Propylpyrogallussäure mit ihren Derivaten vorliegt, das Pikamar also als Propylpyrogallussäuremonomethyläther anzusehen ist. Darnach hätte man:

$$C_6H_2{-}C_3H_7\begin{cases}OH\\OH\\OH\end{cases} \qquad C_6H_2{-}C_3H_7\begin{cases}OCH_3\\OH\\OH\end{cases} \qquad C_6H_2{-}C_3H_7\begin{cases}OCH_3\\OC_2H_3O\\OC_2H_3O\end{cases}$$

$$C_6H_2{-}C_3H_7\begin{cases}OCH_3\\OK\\OK\end{cases}$$

Über Coerulignol, Reichenbach's oxydirendes Princip.

Von P. Pastrovich.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Februar 1883.)

Die hochsiedenden Antheile des Buchenholztheeröles charakterisiren sich dadurch, dass ihre alkoholische Lösung, mit Barytwasser versetzt, eine prachtvoll cyanblaue Färbung ergibt, welche schon Reichenbach[1] in seinen Schriften erwähnt, ebenso auch mit Chlorkalk für sich. Von den übrigen Theerölen ist der diese Farbreaction hervorrufende Körper bisher äusserst schwierig zu trennen gewesen und gelang dies Herrn Fabriksbesitzer A. Grätzel in Hannover, welcher die Rohmaterialien gütigst zur Verfügung stellte, erst nach sechs Jahre langen Bemühungen. Er ist derselbe Körper, welchen Reichenbach in seinen Schriften als „oxydirendes Princip" bezeichnet und als Chromogen seines Pittacall zu erkennen glaubte. Herr Grätzel hat für diesen Körper den Namen Coerulignol oder Blauöl vorgeschlagen.

Die Reinigung des Rohöles war äusserst schwierig; bei Versuchen, es fractionirt zu destilliren, stieg der Quecksilberfaden des Thermometers constant und die Destillate färbten sich schon nach eintägigem Stehen an der Luft intensiv dunkel. Erst als im Destillationsrückstande, der schwarz und in der Kälte pechartig war, grössere Mengen, und in den verschiedenen Fractionen geringere, mit dem Siedepunkt aber steigende Mengen Stickstoff quantitativ nachgewiesen wurden, war der zur Reinigung des Blauöles einzuschlagende Weg gegeben. Das Rohöl wurde in möglichst verdünnter Essigsäure gelöst und längere Zeit damit gekocht; beim Eingiessen in viel Wasser schied sich das Öl wieder ab, während die essigsaure Lösung den stickstoffhältigen Körper enthielt. So gereinigt konnte das Blauöl nach dem

[1] Schweigger's Jahrbuch, 68, 295 u. 350.

Trocknen anstandslos destillirt werden und bewegte sich der Siedepunkt nur zwischen 240°—241° (corr). Das so erhaltene Öl war nahezu farblos, von nicht unangenehmem kreosotähnlichen Geruch und brennendem aromatischen Geschmack, Siedepunkt 240°—241°, spec. Gewicht bei 15° C. 1,05645 (Mittel aus 10 Wägungen). Es ist in kaltem Wasser sehr schwer, leichter in heissem Wasser, in Alkohol, Äther und Essigsäure aber in fast unbeschränkten Mengen löslich; die Lösungen reagiren neutral. Concentrirte Schwefelsäure färbt das Blauöl roth, mit Kalilauge färbt es sich beim Stehen an der Luft dunkel. Barytwasser bringt in der alkoholischen Lösung die schon erwähnte prachtvolle Blaufärbung hervor, welche auch bei directer Behandlung des Öles mit Chlorkalk auftritt. Alkoholisches Eisenchlorid färbt die alkoholische Lösung des Blauöles grün, wässeriges Eisenchlorid die wässerige Lösung prächtig carmoisinroth. Das Öl der Analyse unterworfen, lieferte folgende Zahlen:

1. 0·310 Grm. gaben 0·821 Grm. Kohlensäure und 0·240 Grm. Wasser.
2. 0·3185 Grm. gaben 0·8405 Grm. Kohlensäure und 0·2455 Grm. Wasser.
3. 0·27575 Grm. gaben 0·7285 Grm. Kohlensäure und 0·2155 Grm. Wasser.
4. 0·2485 Grm. gaben 0·65775 Grm. Kohlensäure und 0·195 Grm. Wasser.

	Berechnet für $C_{10}H_{14}O_2$	Gefunden			
		1.	2.	3.	4.
C	72·28	72·27	71·97	72·05	72·19
H	8·43	8·60	8·56	8·68	8·71
O	19·29	19·13	19·47	19·27	19·10

Die aus diesen Daten gewonnene Formel wird bestätigt durch die Dampfdichte, deren Bestimmung nach dem Meyer'schen Verdrängungsverfahren vorgenommen wurde.

	Berechnet für $C_{10}H_{14}O_2$	Gefunden	
D =	5·76	5·69	5·84

Zersetzung des Coerulignols durch Salzsäure.

Bei längerem Erhitzen von Coerulignol mit überschüssiger concentrirter Salzsäure auf 140° C. im zugeschmolzenen Rohre verwandelt es sich nach und nach in eine braune Flüssigkeit, in welcher kleine, nadelförmige, farblose Krystalle auftreten. Beim Öffnen des Rohres entweicht Chlormethyl in riesigen Strömen. Die Reaktionsmasse wurde am Wasserbade eingedampft, mehrmals in Wasser aufgenommen und wieder abgedampft, um die Salzsäure möglichst zu entfernen. Nach längerer Zeit erstarrte die Masse krystallinisch und wurde durch Abpressen zwischen Filtrirpapier, mehrmaliges Umkrystallisiren aus Wasser und schliesslich aus siedendem Benzol gereinigt. So wurden farblose, dünne Prismen (vom Schmelzpunkt 56° C.) erhalten, deren Analyse für die Formel $C_9H_{12}O_2$ gut stimmende Zahlen ergab.

1. 0·2355 Grm. gaben 0·6115 Grm. Kohlensäure und 0·1700 Grm. Wasser.
2. 0·1750 Grm. gaben 0·453 Grm. Kohlensäure und 0·1285 Grm. Wasser.

	Berechnet für $C_9H_{12}O_2$	Gefunden. 1.	2.
C.....	71·06	70·82	70·63
H.....	7·88	8·02	8·15
O.....	21·16	21·16	21·22

Auf Grund der bisher gefundenen Formeln lässt sich die Zersetzung des Coerulignols durch concentrirte Salzsäure durch die Gleichung

$$C_{10}H_{14}O_2 + HCl = C_9H_{12}O_2 + CH_3Cl$$

versinnlichen.

Die Lösung des entmethylirten Productes färbt sich mit Eisenchlorid grün, mit Alkalien verdunkelt sie allmählig beim Stehen an der Luft.

Das Coerulignol erweist sich gegen Reagentien äusserst widerstandsfähig; so war z. B. erst durch zwei Tage langes Kochen von 3 Theilen Coerulignol mit 1 Theil Essigsäureanhydrid die

Acetverbindung

zu erhalten. Ein einziges Mal konnte diese im krystallisirten Zustande in Form von weberschiffchenähnlichen Kryställchen

erhalten werden, doch war die Menge derselben zur Schmelzpunktbestimmung zu gering. Trotz aller Bemühungen konnten Krystalle nicht wieder dargestellt werden. Die Acetverbindung stellt ein dickflüssiges, fast farbloses Öl dar, welches in Wasser unlöslich, in Alkohol, Äther und Essigsäure sehr leicht löslich ist. Die alkoholische Lösung wird durch Barytwasser rothviolett gefärbt. Der Siedepunkt der Verbindung liegt bei 265° C., doch tritt beim Sieden schon theilweise Zersetzung ein. Aus den Elementaranalysen wurden folgende Daten erhalten:

1. 0·293 Grm. gaben 0·74075 Grm. Kohlensäure und 0·2145 Grm. Wasser.
2. 0·215 Grm. gaben 0·5425 Grm. Kohlensäure und 0·1535 Grm Wasser.

	Berechnet für $C_{10}H_{18}(C_2H_3O)O_2$	Gefunden 1.	Gefunden 2.
C	69·23	68·95	68·81
H	7·69	8·15	7·93
O	23·08	22·90	23·26

Weder aus der Acetverbindung, noch aus dem Coerulignol selbst konnten durch Einwirkung von Brom Derivate erzielt werden, da immer nur braune, schmierige Massen resultirten; auch Oxydationsversuche mit Chromsäure blieben erfolglos. Durch Einwirkung von Salpetersäure vom specifischen Gewichte 1·12 wurde als Hauptproduct Oxalsäure, in geringer Menge aber ein

Nitrocoerulignol

erhalten. Die Verbindung war anfänglich dickflüssig und braun, erstarrte jedoch bei weiterer Einwirkung der Salpetersäure zu einer gelben, spröden, harzartigen Masse; dieselbe wurde mit Wasser ausgewaschen, in verdünnter Sodalösung aufgenommen und diese tief gelbbraune Lösung mit verdünnter Salzsäure zersetzt. Der Nitrokörper schied sich in gelben Flocken aus und wurde aus heissem Wasser und aus Alkohol umkrystallisirt. Die honiggelb gefärbten Krystalle haben viele Ähnlichkeit mit Pikrinsäurekrystallen; sie schmelzen unter Zersetzung bei 124° C.

Analyse: 0·1955 Grm. gaben nach Duma's Methode verbrannt 11·6 CC. Stickstoff bei 14° C. und 732 Mm. B.

	Berechnet für $C_{10}H_{18}(NO_2)O_2$	Gefunden
N.....	6·63%	6·72%

Die Zersetzung des Coerulignols durch concentrirte Salzure, sowie die Existenz der Acetverbindung sprechen für das rhandensein der Gruppen OCH_3 und OH. Es dürfte darnach s Coerulignol als Methyläther eines höheren Homologons eines r drei Dioxybenzole, die durch Einwirkung von Salzsäure haltene Verbindung als dieses höhere Homologon selbst aufzussen sein. Für das Homologon, das Coerulignol und die Acetrbindung ergeben sich somit die Formeln:

$$C_9H_{10}\begin{cases}OH\\OH\end{cases} \qquad C_9H_{10}\begin{cases}OCH_3\\OH\end{cases} \qquad C_9H_{10}\begin{cases}OCH_3\\OC_2H_3O\end{cases}$$

Um zu sehen, von welchem der drei Dioxybenzole sich das erulignol ableitet, wurde folgende Reaction von Brunner nützt. Wird eine geringe Menge eines Dioxybenzols mit einem opfen Nitrobenzol und einem Tropfen concentrirter Schwefelure auf 135° C. erwärmt, die Schmelze dann mit Wasser aufnommen und schwach alkalisch gemacht, so liefert Resorcin ie brillantrothe Lösung mit gelber Fluorescenz, Brenzkatechin ie blauviolette und Hydrochinon eine gelb gefärbte Flüssigkeit. chdem sich nun das Coerulignol hiebei genau so verhält, wie enzkatechin, so scheint es wahrscheinlich, selbes als Homologon s Guajacols betrachten zu können. Ob die Substitution aber rch eine Propylgruppe oder durch andere Gruppen erfolgt, ist ch unentschieden.

A. Grätzel stellt durch einen von ihm nicht näher schriebenen Oxydationsvorgang eine erdige Masse aus dem erulignol dar, aus welcher Liebermann einen Farbstoff ielt, den er Eupitton nannte. Über die Versuche, aus dem erulignol zu diesem Farbstoff zu gelangen, werde ich mir auben in einer anderen Mittheilung zu berichten.

Über die Beziehung zwischen der Spannung und Temperatur gesättigter Dämpfe.

Von A. Jarolimek.

(Vorgelegt in der Sitzung am 15. Februar 1883.)

Ich habe kürzlich nachgewiesen,[1] dass durch die aus Zeuner's Zustandsgleichung für Wasserdampf resultirende Formel:

$$T = 334{\cdot}774\ p^{0{\cdot}06068} + 38{\cdot}106\ p^{0{\cdot}25}$$

die Beziehung zwischen Spannung und Temperatur von gesättigtem Wasserdampf nicht mit genügender Schärfe ausgedrückt wird, und dass in dieser Beziehung die Formel:

$$T = 326{\cdot}7\ p^{0{\cdot}04233} + 46{\cdot}3\ p^{0{\cdot}3039}$$

weit genauere Resultate liefert. Auch die von A. Winkelmann für Dämpfe überhaupt aufgestellte Formel:

$$t_n = (a+b)\, n^{\frac{dn}{d}A} - a$$

gibt, auf Wasserdampf angewendet, nur für niedere und mittlere Pressungen zutreffende, für hohe Drücke hingegen beträchtlich abweichende Resultate.

Setzt man nämlich in dieser Formel, wie von Winkelmann für Wasserdampf angegeben

$$\begin{aligned} (a+b) &= 200, \\ a &= 100, \\ A &= 0{\cdot}13507, \end{aligned}$$

bezeichnet die Spannung in Atmosphären (n) mit p, und substituirt für die Dichte bei der Pressung n oder p,

[1] Sitzb. d. k. Akad. der Wissensch. II. Abth., Nov.-Heft 1882.

$d_n = 0{\cdot}6061\ p^{0{\cdot}9393}$, sowie für die constante Dichte

$$d = \frac{10334.p}{29{,}272\,(273+t)},$$

so folgt:

$$t = 200\,p^{\frac{t+273}{2684{\cdot}5\,p^{0{\cdot}06068}}} - 100.$$

Hieraus ergibt sich für

$p = 20$	$t = 215$	statt 213,	also eine Differenz von $+2°$
28	234·5	231	$+3{\cdot}5°$
39	256·5	250	$+6{\cdot}5$
100	347	315	$+32.$

Für alle anderen Dämpfe hat E. Dühring die Formel $t_1 = r + qt$ angegeben, wobei t und t_1 die Siedetemperaturen des Wassers und einer anderen Flüssigkeit bei einem und demselben Drucke, r die Siedetemperatur der Flüssigkeit unter dem Drucke, bei dem das Wasser bei 0° siedet ($p = 4{\cdot}6$ Mm.), endlich q den specifischen Factor der Flüssigkeit bedeuten.

Auch diese Formel, welche übrigens die Beziehung zwischen Druck und Temperatur eines Dampfes nicht unmittelbar angibt, sondern nur den Vergleich mit der beim Wasserdampf bestehenden Beziehung ausdrückt, gibt nur annähernde Resultate. Dieselbe stimmt innerhalb der Grenzen $p = 1$ bis 10^{at} noch am besten beim Quecksilber und Alkohol, wobei dann zu setzen ist:

beim Quecksilber ..... $t_1 = 1{\cdot}94\ t + 163$
und beim Alkohol ..... $t_1 = 0{\cdot}912\ t - 13.$

Für $p = 4{\cdot}6$ Mm. ($t = 0$) resultirt dann aber nach diesen Formeln beim

Quecksilber ..... $t_1 = 163$ statt 152·3
und bei Alkohol ..... $t_1 = -13$ „ $-15°$

Bei Chlorkohlenstoff und Schwefelkohlenstoff sind die Abweichungen schon in den Grenzen von $p = 1$ bis 10^{at} erheblich. So ist nach Regnault

	t für Wasser	t_1 für SC
bei $p =$ 1	100	46·25
5	152·22	105·86
10	180·31	139.97

Für $p = 1$ und 5 müsste also sein:

$$46 \cdot 25 = r + 100\, q$$
$$105 \cdot 86 = r + 152 \cdot 22\, q,$$

woraus sich $r = -67 \cdot 9$ und $q = 1 \cdot 1415$ bestimmt. Hiernach folgt aber für $p = 10$ $t_1 = 137 \cdot 92$ statt 139·97, daher eine Differenz von 2·05°. Ähnliche Differenzen ergeben sich bei anderen Dämpfen.

Dass das Dühring'sche Gesetz überhaupt nur eine beiläufige Annäherung gibt, zeigt sich am besten bei Prüfung desselben in Bezug auf Kohlensäure. Es stimmt hier nämlich, so lange höhere Pressungen in Betracht gezogen werden, in sehr befriedigender Weise. So ist nach Regnault für

	t bei Wasser	t_1 bei Kohlens.
$p = 17 \cdot 11^{at}$ (13007 Mm.)	205·19	—25
26·76 (20340 „)	228·43	—10

woraus sich $t_1 = 0 \cdot 6454\ t - 157 \cdot 43$ bestimmt.

Dies gibt für $p = 100$ oder $t = 315°$ $t_1 = 45 \cdot 87$, was mit dem Regnault'schen Werthe (45) auch bei dieser hohen Pressung noch ziemlich übereinstimmt. Zieht man jedoch die Pressung $p = 1$ in Betracht, wobei $t = 100$ ist, so würde nach der obigen Formel hiefür $t_1 = -92 \cdot 9°$ resultiren, wogegen der Siedepunkt der Kohlensäure nach Berthelot bei —78·2° und nach Pictet bei —80° liegt, demnach hier eine sehr beträchtliche Abweichung zu Tage tritt.

Übrigens können die von Regnault für die Kohlensäure bestimmten Constanten auch nur für höhere Pressungen benützt werden. Denn nach Regnault's Formel könnte der Druck von $p = 1$ bei gar keiner Temperatur der Kohlensäure eintreten, da hiernach bei $t = -104°$ ein Minimum von $p = 2 \cdot 40^{at}$ zum Vorschein kommt und von da ab für noch tiefere Temperaturen p wieder steigt, so z. B. für $t = -150°$ bereits $p = 27$ wird.

Nach alledem ermangeln wir also augenscheinlich noch einer mit den Erfahrungsresultaten genügend übereinstimmenden Relation, welche die Beziehungen zwischen Spannung und Temperatur der Dämpfe in einfacher Weise ausdrücken würde.

Zeuner sagt in seinen „Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie", dass er sich hauptsächlich der Mühe der Berechnung seiner Tabellen unterzogen habe, „weil ein Vergleich gleichartiger Werthe der Tabellen für verschiedene Dämpfe möglicherweise allein schon auf ganz neue Beziehungen und auf die Entdeckung eines Gesetzes führen könne, welchem alle Dampfarten in gleicher Weise unterworfen sind."

„Die Auffindung eines solchen Gesetzes", bemerkt Zeuner, „ist überhaupt nur auf zwei Wegen denkbar: entweder dadurch, dass es gelingt, aus der inneren Constitution der Flüssigkeiten und Gasarten das Gesetz der Dampfbildung abzuleiten, oder dadurch, dass man die für verschiedene Dampfarten erhaltenen Versuchs- und Rechnungsresultate sorgfältig untereinander vergleicht."

Ich habe auf dem letzten Wege eine bei allen Dampfarten in sehr befriedigender Weise zutreffende Beziehung aufgedeckt, welche sich allgemein sehr einfach schreibt:

$$t = a + b\sqrt{p} + \frac{c}{p}.$$

Man sieht, dass hiebei das dritte Glied $\frac{c}{p}$ mit steigender Spannung immer kleiner wird, so dass die Dämpfe, je höher ihre Pressung ist, um so genauer dem höchst einfachen Gesetze $t = a + bp^{0\cdot25}$ folgen.

Der Werth von c ist überdies gerade bei der Gruppe von Dämpfen, bei welchen das Dühring'sche Gesetz am wenigsten zutrifft, wie bei Chlorkohlenstoff, Schwefelkohlenstoff, Äther etc. verschwindend klein, so dass diese Dämpfe mit weit grösserer Genauigkeit dem Gesetze

$$t = a + bp^{0\cdot25},$$

als der von Dühring angegebenen Formel

folgen. $$t_1 = a + bt$$

Das letzte Glied meiner Formel bildet also gewissermassen nur eine Correctur, deren Bedeutung vielleicht in der Folge noch näher erkannt werden wird. Wie ersichtlich, stellt diese Function $m = \frac{c}{p}$ die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel dar,

deren Asymptoten mit den Coordinatenachsen zusammenfallen, und stimmt also in der Form mit der isothermischen Curve (pv = Const.) überein.

Für Pressungen unter $p = 1$ verlangt zwar obige Relation noch einer besonderen Correctur. Doch glaubt auch Zeuner, dass für so kleine Pressungen auch die Werthe, auf welche die mechanische Wärmetheorie führt, nicht ganz sicher sind, und da ich ebenfalls die Bedürfnisse der Technik vor allem ins Auge zu fassen beabsichtige, so beschränke ich mich nur auf Untersuchung der Beziehungen innerhalb der Grenzen von $p = 1$ bis 10, beziehentlich 1 bis 100^{at}.

Ich bringe nun die von mir für die verschiedenen Dämpfe gefundenen Formeln zur Mittheilung, und füge die darnach für verschiedene Spannungen resultirenden Temperaturen, sowie zum Vergleiche die Temperaturen nach Regnault (bei Kohlensäure auch nach anderen) bei:

Wasserdampf: $$t = 97\, p^{0{\cdot}25} + 8 - \frac{5}{p} \ldots \text{I)}$$

	t nach I)	t nach Regnault	Differenz
für $p =$ 1	100	100	0
2	120·8	120·6	+0·2
3	134	133·9	+0·1
4	143·9	144	—0·1
5	152	152·2	—0·2
6	159	159·2	—0·2
7	165·1	165·3	—0·2
8	170·5	170·8	—0·3
9	175·5	175·8	—0·3
10	180	180·3	—0·3
15	198·6	198·8	—0·2
20	212·9	213	—0·1
28	230·9	230·9	0
40	251·8	—	—
70	288·5	—	—
100	314·7	—	—

Kohlensäure: $t = 63\, p^{0\cdot25} - 154\cdot5 + \frac{13\cdot5}{p}$ ... II)

	t nach II)	t nach		Differenz
$p =$ 1	−78	−78·2	Berthelot	+0·2
		−80	Pictet	+2
2·08	−72	−70	„	−2
3·90	−62·5	−60	„	−2·5
4·60	−59·3	−59·4	Faraday	+0·1
10·25	−40·5	−40	Pictet	−0·5
17·11	−25·6	−25	Regnault	−0·6
26·76	−10·7	−10	„	−0·7
35·40	− 0·4	0	„	−0·4
46·05	+ 9·9	+10	„	−0·1
58·83	+20·2	+20	„	+0·2
73·84	+30·4	+30	„	+0·4
91·03	+40·2	+40	„	+0·2
100·41	+45	+45	„	0

Quecksilber: $t = 190\cdot5\, p^{0\cdot25} + 175 - \frac{8}{p}$ [1] ... III)

	t nach III)	t nach Regnault	Differenz
$p =$ 1	357·5	357·3	+0·2
2	397·4	397·3	+0·1
3	423	423	0
4	442·4	442·5	−0·1
5	458·2	458·3	−0·1
6	471·8	471·9	−0·1
7	483·7	483·7	0
8	494·3	494·3	0
9	504	504	0
10	512·9	512·8	+0·1

[1] Mit Hilfe dieser Formel fand ich in Zeuner's Tabelle (Grundzüge, S. 255) zwei Rechnungsfehler. Die daselbst beim Quecksilber für $p = 9$ und 10 angegebenen Temperaturen von $t = 505\cdot152$ und $513\cdot907$ entsprechen nämlich den Pressungen

$p = 6940$ und 7700 Mm.
statt 6840 „ 7600 „

Alkohol: $t = 90\,p^{0\cdot25} - 8\cdot2 - \frac{3\cdot5}{p}$ ... IV)

	t nach IV)	t nach Regnault	Differenz
$p =$ 1	78·3	78·3	0
2	97·1	96·8	+0·3
3	109·1	108·8	+0·3
4	118·2	118	+0·2
5	125·7	125·5	+0·2
6	132	131·9	+0·1
7	137·7	137·6	+0·1
8	142·7	142·6	+0·1
9	147·3	147·3	0
10	151·5	151·5	0

Äther: $t = 108\,p^{0\cdot25} - 72\cdot5$ ... V)

	t nach V)	t nach Regnault	Differenz
$p =$ 1	35·5	35	+0·5
2	55·9	55·9	0
3	69·6	69·6	0
4	80·2	80·2	0
5	89	89	0
6	96·5	96·5	0
7	103·1	103·1	0
8	109·1	109	+0·1
9	114·5	114·4	+0·1
10	119·5	119·4	+0·1

Aceton: $t = 112 \cdot 5\, p^{0 \cdot 25} - 56$ ... VI)

	t nach VI)	t nach Regnault	Differenz
$p =$ 1	56·5	56·3	+0·2
2	77·7	78	—0·3
3	92	92·3	—0·3
4	103·1	103·3	—0·2
5	112·2	112·3	—0·1
6	120	120·1	—0·1
7	127	127	0
8	133·2	133·2	0
9	138·8	138·8	0
10	144	144	0

Chloroform: $t = 118 \cdot 5\, p^{0 \cdot 25} - 58 \cdot 5$ ... VII)

	t nach VII	t nach Regnault	Differenz
$p =$ 1	60	60·2	—0·2
2	82·4	82·6	—0·2
3	97·5	97·5	0
4	109	109	0
5	118·7	118·6	+0·1
6	126·9	126·8	+0·1
7	134·2	134·1	+0·1
8	140·8	140·7	+0·1
9	146·7	146·7	0
10	152·2	152·3	—0·1

Schwefelkohlenstoff: $t = 120\,p^{0\cdot25} - 73\cdot5$ ... VIII)

	t nach VIII	t nach Regnault	Differenz
$p =$ 1	46·5	46·3	+0·2
2	69·2	69·3	—0·1
3	84·4	84·4	0
4	96·2	96·2	0
5	105·9	105·9	0
6	114·3	114·2	+0·1
7	121·7	121·6	+0·1
8	128·3	128·3	0
9	134·3	134·3	0
10	139·9	139·9	0

Chlorkohlenstoff: $t = 130\,p^{0\cdot25} - 53\cdot3$ ... IX)

	t nach IX	t nach Regnault	Differenz
$p =$ 1	76·7	76·5	+0·2
2	101·3	101·4	—0·1
3	117·8	117·9	—0·1
4	130·5	130·5	0
5	141·1	141·2	—0·1
6	150·2	150·2	0
7	158·1	158·1	0
8	165·3	—	—
9	171·8	—	—
10	177·8	—	—

Die hier angegebenen Formeln mögen vielleicht hie und da noch Correcturen finden; ihre Grundform dürfte jedoch beibehalten werden, und es ist nicht unmöglich, dass damit ein Schritt weiter zur näheren Erkenntniss der Constitution der Dämpfe angebahnt wird.

Jedenfalls ist es auffallend, dass hier p wie in der von Zeuner für Wasserdampf aufgestellten Zustandsgleichung allgemein mit dem Exponent $\frac{x-1}{x} = \frac{1}{4}$ erscheint, wodurch es an Wahrscheinlichkeit gewinnt, dass der Werth von $x = \frac{4}{3}$, wie beim Wasserdampf, auch bei allen anderen Dämpfen zutrifft, wenn deren Zustandsgleichungen ihre richtige Form finden.

Über Potenzreihen, deren Glieder mit den aufeinanderfolgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe r-ten Ranges multiplicirt oder durch letztere dividirt werden.

Von **Reinhard Mildner,**

Professor der Landes-Unterrealschule in Bömerstadt.

(Vorgelegt in der Sitzung am 18. Jänner 1883.)

Es sei der Werth der endlichen Potenzreihe

$$1) \qquad A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots+A_nx^n=\varphi(x)$$

gegeben.

Man multiplicire die Glieder der Reihe 1) mit den aufeinanderfolgenden Gliedern einer arithmetischen Reihe r-ten Ranges und bestimme den Werth der auf diese Art abgeleiteten neuen Reihe:

$$A_0u_0+A_1u_1x+A_2u_2x^2+\ldots+A_nu_nx^n,$$

wobei $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n$ die besprochenen Glieder der arithmetischen Reihe r-ten Ranges bedeuten mögen. Es sei zunächst:

$$2) \quad f(x,k)=A_0\Delta^k u_0+A_1\Delta^k u_1x+A_2\Delta^k u_2x^2+\ldots+A_n\Delta^k u_nx^n,$$

dabei stellt, wie in der Theorie der arithmetischen Reihen üblich, $\Delta^k u_g$ das $(g+1)$-te Glied der k-ten Differenzreihe von $u_0, u_1, u_2 \ldots u_n$ vor. Consequenter Weise wird die abgeleitete Reihe mit $f(x,0)$ bezeichnet werden müssen, so dass die Gleichung entspringt:

$$3) \qquad f(x,0)=A_0u_0+A_1u_1x+A_2u_2x^2+\ldots+A_nu_nx^n.$$

Es ist

$$f(x,r)=\Delta^r u_0\cdot\varphi(x),$$

da die Glieder der r-ten Differenzreihe einander gleich sind, ferner ist:

$$f(x, r-1) = A_0\Delta^{r-1}u_0 + A_1\Delta^{r-1}u_1 x + A_2\Delta^{r-1}u_2 x^2 + \ldots + A_n\Delta^{r-1}u_n x^n.$$

Nun ist aus der Theorie der Differenzreihen bekannt:

$$\Delta^{r-1}u_n = \Delta^{r-1}u_0 + n\Delta^r u_0;$$

dieser Ausdruck in die letzte Gleichung eingesetzt, gibt:

$$f(x, r-1) = \Delta^{r-1}u_0 \cdot \varphi(x) + (A_1 x + 2A_2 x^2 + 3A_3 x^3 + \ldots + nA_n x^n)\Delta^r u_0$$

$$= \Delta^{r-1}u_0 \cdot \varphi(x) + x\varphi'(x);$$

ferner ist:

$$f(x, r-2) = A_0\Delta^{r-2}u_0 + A_1\Delta^{r-2}u_1 x + A_2\Delta^{r-2}u_2 x^2 + \ldots + A_n\Delta^{r-2}u_n x^n$$

und

$$\Delta^{r-2}u_n = \Delta^{r-2}u_0 + \binom{n}{1}\Delta^{r-1}u_0 + \binom{n}{2}\Delta^r u_0.$$

Substituirt man in den Ausdruck für $\Delta^{r-2}u_n$ statt n die aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... bis n und entwickelt die einzelnen Glieder, so findet man:

$$f(x, r-2) = \Delta^{r-2}u_0\varphi(x) + \Delta^{r-1}u_0[A_1 x + 2A_2 x^2 + 3A_3 x^3 + \ldots + nA_n x_n] +$$

$$+ \Delta^r u_0\left[A_2 x^2 + \binom{3}{2}A_3 x^3 + \binom{4}{2}A_4 x^4 + \ldots + \binom{n}{2}A_n x^n\right]$$

$$= \Delta^{r-2}u_0\varphi(x) + \Delta^{r-1}u_0 \cdot x\varphi'(x) + \frac{\Delta^r u_0}{2!}x^2[2A_2 + 2 \cdot 3A_3 x + 3 \cdot 4A_4 x^2 + \ldots + (n-1)nA_n x^{n-2}].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer stellt den zweiten Differentialquotienten von $\varphi(x)$ vor, desswegen ist:

$$f(x, r-2) = \Delta^{r-2}u_0\varphi(x) + \Delta^{r-1}u_0 x\varphi'(x) + \frac{\Delta^r u_0}{2!}x^2 \cdot \varphi''(x).$$

Ähnlich wird $f(x, r-3)$ entwickelt:

$$f(x, r-3) = \Delta^{r-3}u_0 A_0 + A_1\Delta^{r-3}u_1 x + A_2\Delta^{r-3}u_2 x^2 + \ldots + A_n\Delta^{r-3}u_n x^n$$

$$\Delta^{r-3}u_n = \Delta^{r-3}u_0 + \binom{n}{1}\Delta^{r-2}u_0 + \binom{n}{2}\Delta^{r-1}u_0 + \binom{n}{3}\Delta^r u_0.$$

Setzt man in der letzten Gleichung $n = 1, 2, 3, \ldots . n$ und entwickelt mit Benützung des Ausdruckes für $\Delta^{r-3}u_n$ die Coëfficienten der vorletzten Gleichung, so erhält man nach kurzer Rechnung das einfache Resultat:

$$f(x, r-3) = \Delta^{r-3}u_0\varphi(x) + \Delta^{r-2}u_0\varphi'(x)\cdot\frac{x}{1}! + \Delta^{r-1}u_0\cdot\varphi''(x)\frac{x^2}{2}! + \Delta^r u_0\varphi'''(x)\frac{x^3}{3}!$$

Das Gesetz ist nunmehr klar ausgesprochen und ist der Werth der abgeleiteten Reihe durch nachstehende Summe gegeben:

$$\text{I)}\quad f(x, 0) = u_0\varphi(x) + \Delta u_0\varphi'(x).\frac{x}{1!} + \Delta^2 u_0\varphi''(x)\frac{x^2}{2!} + \ldots + \Delta^r u_0\cdot\varphi^{(r)}(x)\frac{x^r}{r!}$$

. . . . . .

oder einfacher geschrieben:

$$\text{I')}\qquad f(x, 0) = \sum_{k=0}^{k=r}\frac{\Delta^k u_0}{k!}x^k.\frac{d^k\varphi(x)}{dx^k}$$

. . . . . .

Als Beispiel möge die Reihe dienen:

$$\varphi(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \ldots + x^{n-1} = \frac{1-x^n}{1-x}.$$

Man multiplicire die Glieder der geometrischen Progression der Reihe nach mit

$$0, 1.2, 3.4, 5.6, 7.3\ldots(2n-3)(2n-2),$$

so ist:

$$f(x,0) = 1.2x+3.4x^2+5.6x^3+\ldots.+(2n-3)(2n-2)x^{n-1}$$

$$\begin{array}{ccccc} 0, & 2, & 12, & 30, & 56 \\ & 2, & 10, & 18, & 24 \\ & & 8, & 8, & 8 \end{array}$$

Hier ist

$$r = 2, \quad u_0 = 0, \quad \Delta u_0 = 2, \quad \Delta^2 u_0 = 8$$

und

$$\alpha) \qquad f(x,0) = u_0\varphi(x)+\frac{\Delta u_0}{1!}x\cdot\frac{d\varphi}{dx}+\frac{\Delta^2 u_0}{2!}x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}$$

$$\varphi = \frac{1-x^n}{1-x} \qquad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{(nx-x-n)x^{n-1}+1}{(1-x)^2}.$$

Der zweite Differentialquotient entwickelt, ist durch den Ausdruck gegeben:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{2-(n^2-n)x^{n-2}+(2n^2-4n)x^{n-1}-(n^2-3n+2)x^n}{(1-x)^3}.$$

Diese Werthe in Gleichung α) substituirt, geben schliesslich das Resultat:

$$1.2x+3.4x^2+5.6x^3+\ldots.+(2n-3)(2n-2)x^{n-1} =$$

. . . . . .

$$= \frac{2x}{(1-x)^3}\{1+3x-x^{n-1}[n(2n-1)-(4n^2-6n-1)x+$$
$$+(2n^2-5n+3)x^2]\}.$$

. . . . . .

Zu demselben Resultate wie in I) gelangt man, wenn die Glieder einer unendlichen Reihe mit den aufeinanderfolgenden Gliedern $u_0, u_1, u_2, \ldots. u_n$ einer arithmetischen Reihe n-ten Ranges multiplicirt werden. Man bezeichne mit $\varphi(x)$ den Werth der gegebenen unendlichen Reihe und mit $f(x,0)$, wie vorher, den Werth der abgeleiteten Reihe, so ist, wenn $\Delta^k u_r$ die frühere Bedeutung hat:

$$1) \qquad \varphi(x) = A_0+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\ldots$$

2) $$f(x, k) = A_0\Delta^k u_0 + A_1\Delta^k u_1 x + A_2\Delta^k u_2 x^2 + \ldots .$$

und

3) $$f(x, 0) = A_0 u_0 + A_1 u_1 x + A_2 u_2 x^2 + A_3 u_3 x^3 + \ldots .$$

Die Reihe 1) convergirt für alle x, welche absolut genommen kleiner sind als $\frac{1}{a}$; wobei $a = \left[\lim \frac{A_n}{A_{n-1}}\right]$ also für $[x] < \frac{1}{a}$.

Es lässt sich nun, wie folgt, leicht zeigen, dass die abgeleitete Reihe 2) für alle ganzen k also auch die Reihe 3) für die nämlichen Werthe des x, wie 1) convergirt.

Der Einfachheit halber mögen die Glieder der Reihe 2) mit $U_0, U_1, \ldots U_n$ bezeichnet werden. Dann folgt:

$$\beta) \left[\lim \frac{U_{n+1}}{U_n}\right] = \left[\lim \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot \frac{\Delta^k u_n}{\Delta^k u_{n-1}} \cdot x\right] = [x]\left[\lim \frac{A_n}{A_{n-1}} \cdot \frac{\Delta^k u_n}{\Delta^k u_{n-1}}\right].$$

Nun ist das allgemeine Glied der k-ten Differenzreihe durch den Ausdruck gegeben:

$$\Delta^k u_n = \Delta^k u_0 + \binom{n}{1}\Delta^{k+1} u_0 + \binom{n}{2}\Delta^{k+2} u_0 + \ldots + \binom{n}{r-k}\Delta^r u_0$$

und dessgleichen

$$\Delta^k u_{n-1} = \Delta^k u_0 + \binom{n-1}{1}\Delta^{k+1} u_0 + \binom{n-1}{2}\Delta^{k+2} u_0 + \ldots + \binom{n-1}{r-k}\Delta^r u_0$$

also folgt durch Division:

$$\frac{\Delta^k u_n}{\Delta^k u_{n-1}} = \frac{\Delta^k u_0 + \binom{n}{1}\Delta^{k+1} u_0 + \binom{n}{2}\Delta^{k+2} u_0 + \ldots + \binom{n}{r-k}\Delta^r u_0}{\Delta^k u_0 + \binom{n-1}{1}\Delta^{k+1} u_0 + \binom{n-1}{2}\Delta^{k+2} u_0 + \ldots + \binom{n-1}{r-k}\Delta^r u_0}.$$

Entwickelt man Zähler und Nenner nach steigenden Potenzen von n, so hat der Quotient die Form:

$$\frac{\Delta^k u_n}{\Delta^k u_{n-1}} = \frac{b_0 + b_1 n + b_2 n^2 + \ldots + b_{r-k} n^{r-k}}{c_0 + c_1 n + c_2 n^2 + \ldots + c_{r-k} n^{r-k}}$$

und wenn n unendlich wird, folgt:

$$\lim \frac{\Delta^k u_n}{\Delta^k u_{n-1}} = \frac{b_{r-k}}{c_{r-k}} = 1;$$

weil

$$b_{r-k} = c_{r-k} = \frac{\Delta^r u_0}{(r-k)!}$$

ist.

Aus diesem Grunde geht die Gleichung β) über in:

$$\left[\lim \frac{U_{n+1}}{U_n}\right] = [x] . \left[\lim \frac{A_n}{A_{n-1}}\right] = [x] . a.$$

Es convergiren daher die Reihen 2) und 3) für alle x, welche der Relation entsprechen $[x] . a < 1$, das ist für $[x] < \frac{1}{a}$, wodurch die Behauptung gerechtfertigt erscheint.

Es ist ferner:

$$f(x, r) = \Delta^r u_0 . \varphi(x)$$

und

$$f(x, r-1) = A_0 \Delta^{r-1} u_0 + A_1 \Delta^{r-1} u_1 x + A_2 \Delta^{r-1} u_2 x^2 + \ldots .$$

Entwickelt man $\Delta^{r-1} u_1$, $\Delta^{r-1} u_2$, $\Delta^{r-1} u_3$ u. s. w. nach der bekannten Formel $\Delta^{r-1} u_n = \Delta^{r-1} u_0 + n \Delta^r u_0$ und substituirt die Werthe in den Ausdruck für $f(x, r-1)$, so folgt alsogleich:

$$\begin{aligned} f(x, r-1) &= \Delta^{r-1} u_0 \varphi(x) + \Delta^r u_0 (A_1 x + 2 A_2 x^2 + 3 A_3 x^3 + \ldots .) \\ &= \Delta^{r-1} u_0 . \varphi(x) + \Delta^r u_0 . x \varphi'(x) \\ f(x, r-2) &= A_0 \Delta^{r-2} u_0 + A_1 \Delta^{r-2} u_1 x + A_2 \Delta^{r-2} u_2 . x^2 + \\ &\qquad + A_3 \Delta^{r-2} u_3 x^3 + \ldots . ; \end{aligned}$$

dabei hat man wieder:

$$\Delta^{r-2} u_n = \Delta^{r-2} u_0 + \binom{n}{1} \Delta^{r-1} u_0 + \binom{n}{2} \Delta^r u_0$$

Berechnet man die Coëfficienten der letzten Reihe nach der vorangehenden Formel und entwickelt die einzelnen Glieder, so ist:

$$\begin{aligned} f(x, r-2) = {} & \Delta^{r-2} u_0 . (A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots .) + \\ & + \frac{\Delta^{r-1} u_0}{1!} x (A_1 + 2 A_2 x + 3 A_3 x^2 + \ldots .) + \\ & + \frac{\Delta^r u_0}{2!} x^2 (1.2 A_2 + 2.3 A_3 x + 3.4 A_4 x^2 + \ldots .) \end{aligned}$$

$$f(x, r-2) = \Delta^{r-2}u_0\varphi(x) + \frac{\Delta^{r-1}u_0}{1!}x.\varphi'(x) + \frac{\Delta^r u_0}{2!}x^2.\varphi''(x);$$

da die Ausdrücke in den Klammern $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$ und $\varphi''(x)$ darstellen.

Ebenso leicht findet man:

$$f(x, r-3) = \Delta^{r-3}u_0\varphi(x) + \frac{\Delta^{r-2}u_0}{1!}x.\varphi'(x) +$$

$$+ \frac{\Delta^{r-1}u_0}{2!}x^2\varphi''(x) + \frac{\Delta^r u_0}{3!}x^3\varphi'''(x).$$

Das Gesetz ist auch hier ebenso klar, wie früher ausgesprochen, und es ist schliesslich:

II) $$f(x, 0) = A_0u_0 + A_1u_1x + A_2u_2x^2 + \ldots. =$$

$$= u_0\varphi(x) + \frac{\Delta u_0}{1!}x\varphi'(x) + \frac{\Delta^2 u_0}{2!}x^2\varphi''(x) + \ldots. +$$

$$+ \frac{\Delta^r u_0}{r!}x^r\varphi^{(r)}(x)$$

oder kürzer:

II′) $$f(x, 0) = \sum_{k=0}^{k=r} \frac{\Delta^k u_0}{k!}x^k.\frac{d^k\varphi}{dx^k};$$

. . . . . .

dabei bedeutet $\frac{d^0\varphi}{dx^0}$ die Function $\varphi(x)$ selbst.

Beispiel 1.

Es sei in $\varphi(x)$

$$A_0 = A_1 = A_2 = \ldots. = 1,$$

also:

$$\varphi(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots.; \quad -1 < x < +1,$$

so ist nach II:

$$f(x) = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \ldots. = \sum_{k=0}^{k=r} \frac{\Delta^k u_0}{k!}x^k\frac{d^k\varphi}{dx^k}$$

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x) &= (1-x)^{-1}\\ \frac{d^k\varphi}{dx^k} &= \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}\end{aligned}\right\}$$

dies in die letzte Gleichung substituirt gibt:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{k=r}\frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}\,.\Delta^k u_0=\frac{1}{1-x}\sum_{k=0}^{k=r}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k\Delta^k u_0$$

oder:

a) $$u_0+u_1x+u_2x^2+u_3x^3+\ldots=$$

$$=\frac{1}{1-x}\left[\left(\frac{x}{1-x}\right)^r\Delta^r u_0+\left(\frac{x}{1-x}\right)^{r-1}\Delta^{r-1}u_0+\ldots\right.$$

. . . . . .

$$\left.+\ldots+\frac{x}{1-x}\,.\Delta u_0+u_0\right]=f(x)$$

. . . . . .

dabei muss $-1<x<+1$ sein.

Es sei beispielsweise:

$$f(x)=1+9x+25x^2+49x^3+\ldots;\quad -1<x<+1$$

dann erhält man für die ersten Glieder der aufeinanderfolgenden Differenzreihen:

$$u_0=1;\quad \Delta u_0=8;\quad \Delta^2 u_0=8;$$

daher für $f(x)$ nachstehenden Werth:

$$f(x)=\frac{1+6x+7x^2}{(1-x)^3};$$

. . . . . .

ferner sei noch:

$$f(x)=1.2.3+4.5.6x+7.8.9x^2+10.11.12x^3+\ldots;$$
$$-1<x<+1.$$

Hier ist:

$$u_0=6,\quad \Delta u_0=114;\quad \Delta^2 u_0=270;\quad \Delta^3 u_0=162.$$

Nach geschehener Substitution in II) gelangt man zu dem Resultate:

$$f(x)=\frac{6(10x^2+16x+1)}{(1-x)^4};\quad [x]<1.$$

Die Gleichung *a*) kann auf die Form gebracht werden:

$$a) \quad f(x) = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \ldots = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{k=g+1} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \Delta^{k-1} u_0$$

wenn g den Rang der arithmetischen Reihe u_0, u_1, u_2, ... bedeutet.

Setzt man hier in *a*)

$$x = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

so geht die letzte Gleichung über in:

$$b) \quad f(r\cos\vartheta) + if(r\sin\vartheta) = \frac{1}{r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)} \sum_{k=1}^{k=g+1} \left(\frac{r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta}{1 - r\cos\vartheta - ri\sin\vartheta}\right)^k \cdot \Delta^{k-1} u_0$$

$$\frac{r\cos\vartheta + ri\sin\vartheta}{1 - r\cos\vartheta - ri\sin\vartheta} = \frac{(1 - r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta)(r\cos\vartheta + ir\sin\vartheta)}{1 - 2r\cos\vartheta + r^2} =$$

$$= \frac{r\cos\vartheta - r^2\cos^2\vartheta - r^2\sin^2\vartheta + i(r\sin\vartheta - r^2\sin\vartheta\cos\vartheta + r^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{1 - 2r\cos\vartheta + r^2}$$

$$= \frac{r(\cos\vartheta - r + i\sin\vartheta)}{1 - 2r\cos\vartheta + r^2} = \frac{r}{J} \cdot R(\cos\omega + i\sin\omega);$$

dabei sind die Grössen J, R und ω durch folgende Gleichungen bestimmt:

$$\alpha) \quad J = 1 - 2r\cos\vartheta + r^2$$

$$R = \sqrt{J}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta) \quad \cos\omega &= \frac{\cos\vartheta - r}{R} \\ \gamma) \quad \sin\omega &= \frac{\sin\vartheta}{R} \end{aligned}\right\} \text{ dabei ist: } 0 \gtreqless \omega \gtreqless 2\pi.$$

Substituirt man in *b*) für den Bruch unter dem Summenzeichen den Werth $\frac{r}{\sqrt{J}}(\cos\omega + i\sin\omega)$, so nimmt die Gleichung *b*) die Form an:

$$f(r\cos\vartheta)+if(r\sin\vartheta)=\frac{1}{re^{\vartheta i}}\sum_{k=1}^{k=g+1}\frac{r^k}{\sqrt{J^k}}(\cos k\omega+i\sin k\omega)\Delta^{k-1}u_0$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=g+1}\frac{r^k}{\sqrt{J^k}}[\cos(k\omega-\vartheta)+i\sin(k\omega-\vartheta)]\Delta^{k-1}u_0.$$

Daraus folgt unmittelbar:

c) $$f(r\cos\vartheta)=u_0+u_1r\cos\vartheta+u_2r^2\cos 2\vartheta+u_3r^3\cos 3\vartheta+\ldots.=$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=g+1}\left(\frac{r}{\sqrt{J}}\right)^k\cos(k\omega-\vartheta)\Delta^{k-1}u_0$$

. . . . . .

d) $$f(r\sin\vartheta)=u_1r\sin\vartheta+u_2r^2\sin 2\vartheta+u_3r^3\sin 3\vartheta+\ldots.=$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=g+1}\left(\frac{r}{\sqrt{J}}\right)^k\sin(k\omega-\vartheta)\Delta^{k-1}u_0$$

. . . . . .

J und ω sind durch die Gleichungen α), β) und γ) definirt.

Als specielle Fälle sollen die folgenden bekannten Reihen behandelt werden:

$$f(x\cos\vartheta)=+r\cos\vartheta+2r^2\cos 2\vartheta+3r^3\cos 3\vartheta+\ldots.=$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{r^k}{\sqrt{J^k}}\cos(k\omega-\vartheta)\Delta^{k-1}u_0$$

$$f(x\sin\vartheta)=r\sin\vartheta+2r^2\sin 2\vartheta+3r^3\sin 3\vartheta+\ldots.=$$

$$=\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{x^k}{\sqrt{J_k}}\sin(k\omega-\vartheta)\Delta^{k-1}u_0.$$

Hier im vorliegenden Falle ist $u_0=0$, $\Delta u_0=1$, daher:

$$f(r\cos\vartheta)=\frac{r}{J}\cos(2\omega-\vartheta)=\frac{r}{J}(\cos 2\omega\cos\vartheta+\sin 2\omega\sin\vartheta)=$$

$$=\frac{r}{J}[(1-2\sin^2\omega)\cos\vartheta+2\sin\omega\cos\omega\sin\vartheta];$$

dabei ist:

$$\cos\omega=\frac{\cos\vartheta-r}{\sqrt{J}}\text{ und }\sin\omega=\frac{\sin\vartheta}{\sqrt{J}};$$

dies beachtend, ist der Werth der letzten Reihe:

$$r\cos\vartheta+2r^2\cos 2\vartheta+3r^3\cos 3\vartheta+\ldots.=$$

$$=\frac{r[(1+r^2)\cos\vartheta-2r]}{(1-2r\cos\vartheta+r^2)^2};\quad -1<r<1$$

. . . . . .

$$f(r\sin\vartheta)=\frac{r}{J}\sin(2\omega-\vartheta)=\frac{r}{J}(\sin 2\omega\cos\vartheta-\cos 2\omega\sin\vartheta)$$

$$=\frac{r}{J}[2\sin\omega\cos\vartheta\cos\omega-(1-2\sin^2\omega)\sin\vartheta]$$

$$=\frac{r(1-r^2)\sin\vartheta}{(1-2r\cos\vartheta+r^2)^2};$$

also:

$$r\sin\vartheta+2r^2\sin 2\vartheta+3r^3\sin 3\vartheta+\ldots.=\frac{r(1-r^2)\sin\vartheta}{(1-2r\cos\vartheta+r^2)^2};$$

$$-1<r<+1.$$

2. Beispiel.

$$\varphi(x)=e^x$$

$$f(x)=u_0+\frac{u_1x}{1!}+\frac{u_2x^2}{2!}+\frac{u_3x^3}{3!}+\ldots.=\sum_{k=0}^{k=r}\frac{\Delta^k u_0}{k!}x^k.\frac{d\varphi^k}{dx^k}$$

$$\frac{d^k\varphi}{dx^k}=e^x;$$

daher folgt:

$$e)\qquad u_0+\frac{u_1x}{1!}+\frac{u_2x^2}{2!}+\frac{u_3x^3}{3!}+\ldots.=e^x\sum_{k=0}^{k=r}\Delta^k u^0.\frac{x^k}{k!};$$

gültig für alle x.

. . . . . .

Es sei hier beispielsweise:

$$f(x)=\frac{1.2x}{1!}+\frac{3.4x^2}{2!}+\frac{5.6x^3}{3!}+\frac{7.8x^4}{4!}+\ldots.;$$

dann hat man nach e);

$$f(x)=e^x\sum_{k=0}^{k=2}\Delta^k u_0.\frac{x^k}{k!}=e^x\left(u_0+\Delta u_0.x+\Delta^2 u_0.\frac{x^2}{2!}\right)$$

$$\begin{array}{cccccll} 0, & 2, & 12, & 30, & 56 & \text{also} & u_0 = 0 \\ & 2, & 10, & 18, & 26 & & \Delta u_0 = 2 \\ & & 8, & 8, & 8 & & \Delta^2 u_0 = 8 \end{array}$$

$$f(x) = 2x(1+2x)e^x.$$

. . . . . .

Setzt man in Gleichung *e*) $x = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$, so geht selbe in die folgende über:

$$f(\rho\cos\omega)+if(\rho\sin\omega) = e^{\rho\cos\omega+i\rho\sin\omega}\sum_{k=0}^{k=r}\frac{\Delta^k u_0}{k!}(\cos k\omega+i\sin k\omega)$$

$$= e^{\rho\cos\omega}\,.\,e^{i\rho\sin\omega}\,.\sum_{k=0}^{k=r}\frac{\Delta^k u_0}{k!}\,e^{k\omega i}$$

$$= e^{\rho\cos\omega}\sum_{k=0}^{k=r}\frac{\Delta^k u_0}{k!}\,e^{(k\omega+\rho\sin\omega)i}$$

also ist:

$$f(\rho\cos\omega) = u_0+\frac{u_1\rho\cos\omega}{1!}+\frac{u_2\rho^2\cos 2\omega}{2!}+\frac{u_3\rho^3\cos 3\omega}{3!}+\ldots. =$$

$$= e^{\rho\cos\omega}\,.\sum_{k=0}^{k=r}\frac{\Delta^k u_0}{k!}\cos(k\omega+\rho\sin\omega);$$

. . . . . .

und

$$f(\rho\sin\omega) = \frac{u_1\rho\sin\omega}{1!}+\frac{u_2\rho^2\sin 2\omega}{2!}+\frac{u_3\rho^3\sin 3\omega}{3!}+\ldots. =$$

$$= e^{\rho\cos\omega}\sum_{k=0}^{k=r}\frac{\Delta^k u_0}{k!}\sin(k\omega+\rho\sin\omega$$

. . . . . .

3. Beispiel.

Es sei:

$$\varphi(x) = 1+\binom{\lambda}{1}x+\binom{\lambda}{2}x^2+\binom{\lambda}{3}x^3+\ldots. = (1+x)^\lambda;$$

$$-1 < x < +1.$$

$$f(x) = u_0+\binom{\lambda}{1}u_1x+\binom{\lambda}{2}+u_2x^2\binom{\lambda}{3}u_3x^3+\ldots.;\quad -1 < x < 1.$$

Nach II) hat man:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=r} \Delta^k u_0 \cdot \frac{x^k}{k!} \frac{d^k \varphi}{dx^k}$$

$$\frac{d^k \varphi}{dx^k} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\ldots.(\lambda-k+1)(1+x)^{\lambda-k}$$

dies eingesetzt gibt:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{k=r} \Delta^k u_0 \cdot \frac{x^k}{k!} \lambda(\lambda-1)\ldots.(\lambda-k+1) \cdot \frac{(1+x)^\lambda}{(1+x)^k}$$

$$f(x) = (1+x)^\lambda \cdot \sum_{k=0}^{k=r} \binom{\lambda}{k} \Delta^k u_0 \cdot \left(\frac{x}{1+x}\right)^k; \quad -1 < x < +1$$

. . . . . .

Substituirt man für $x \ldots . \rho . e^{\varphi i}$, so geht die linke Seite über in $f(\rho\cos\varphi) + if(\rho\sin\varphi)$ und für den zweiten Theil der Gleichung erhält man:

$$(1+\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi)^\lambda \sum_{k=0}^{k=r} \binom{\lambda}{k} \Delta^k u_0 \left(\frac{\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi}\right)^k$$

$$\frac{\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi}{1+\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi} = \frac{(\rho+\cos\varphi+i\sin\varphi)\rho}{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2} =$$

$$= \frac{\rho R}{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2}(\cos\omega+i\sin\omega);$$

dabei ist:

$$\left.\begin{aligned} \cos\omega &= \frac{\rho+\cos\varphi}{R} \\ \sin\omega &= \frac{\sin\varphi}{R} \end{aligned}\right\} \quad 0 \gtrless \omega \lessgtr 2\pi \text{ und } R = \sqrt{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2}$$

ebenso soll der Ausdruck vor dem Summenzeichen umgeformt werden:

$$1+\rho\cos\varphi+i\rho\sin\varphi = R'(\cos\vartheta+i\sin\vartheta) = R'e^{\vartheta i};$$

ϑ und R' sind durch die Gleichungen bestimmt:

$$\left.\begin{aligned}\cos\vartheta &= \frac{1+\rho\cos\varphi}{R'}\\ \sin\vartheta &= \frac{\rho\sin\varphi}{R'}\end{aligned}\right\} \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi \text{ und } R' = \sqrt{1+2\rho\cos\varphi+\rho^2} = R.$$

Dies beachtend, geht die rechte Seite der Gleichung über in:

$$R^\lambda e^{\lambda\vartheta i}\sum_{k=0}^{k=r}\binom{\lambda}{k}\Delta^k u_0\frac{\rho^k}{R^k}\cdot e^{ki\omega} = \sum_{k=0}^{k=r}\binom{\lambda}{k}\Delta^k u_0\frac{\rho^k}{R^{k-\lambda}}e^{(k\omega+\vartheta\lambda)i},$$

woraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}f(\rho\cos\varphi) &= \sum_{k=0}^{k=r}\binom{\lambda}{k}\Delta^k u_0\cdot\frac{\rho^k}{R^{k-\lambda}}\cos(k\omega+\vartheta\lambda)\\ f(\rho\sin\beta) &= \sum_{k=r}^{k=r}\binom{\lambda}{k}\Delta^k u_0\frac{\rho^k}{R^{k-\lambda}}\cdot\sin(k\omega+\vartheta\lambda)\end{aligned}\right\}$$

die Werthe für R, ω und ϑ sind durch die obigen Gleichungen bestimmt.

4. Beispiel.

$$\varphi(z) = \frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z}} = 1+\frac{1}{2}\cdot\frac{z}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{z^2}{5}+ \\ +\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{z^3}{7}+\ldots.;\ -1<z<1$$

$$f(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2^2z}{3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{4^2z^2}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{6^2z^3}{7}+\ldots;\ -1<z<1$$

$$= \frac{2}{3}z+\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}z^2+\frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{6}{7}z^3+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot\frac{8}{9}z^4+\ldots.$$

$$\begin{array}{rrrr} 0, & 4, & 16, & 36\\ & 4, & 12. & 20\\ & & 8, & 8\end{array}$$

$$f(z) = \frac{z^2}{2!}\Delta^2 u_0\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{z}{1!}\Delta u^0\frac{d\varphi}{dz}+u_0\varphi(z)$$

$$= 4z\left(z\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{d\varphi}{dz}\right) = 4z\frac{d\left(z\frac{d\varphi}{dz}\right)}{dz}$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\sqrt{z} - \sqrt{1-z}\arcsin\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}\sqrt{1-z}}$$

$$y = z\frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{2\sqrt{1-z}} - \frac{\arcsin\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}$$

$$\frac{dy}{dz} = \frac{1}{4z}\left[\frac{2z-1}{(1-z)\sqrt{1-z}} + \frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}\right]$$

$$f(z) = \frac{2z-1}{(1-z)\sqrt{1-z}} + \frac{\arcsin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$$

$$\sqrt{z}f(z) = \frac{(2z-1)\sqrt{z}}{(1-z)\sqrt{1-z}} + \arcsin\sqrt{z};$$

setzt man $\sqrt{z} = x$ und addirt beiderseits x, so ist:

$$x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{5}x^5 + \frac{3.5}{2.4}\cdot\frac{6}{7}x^7 + \frac{3\ 5.7}{2.4.6}\cdot\frac{8}{9}x^9 + \ldots =$$

$$= x\left[\frac{2x^2-1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} + 1\right] + \arcsin x; \quad -1 < x < 1.$$

. . . . . .

Setzt man in der Reihe für $\varphi(x)$ allgemein $A_n = \frac{B_n}{u_n}$, so gehen die Reihen für $\varphi(x)$ und $f(x)$ in die folgenden über:

$$m) \qquad \varphi(x) = \frac{B_0}{u_0} + \frac{B_1}{u_1}x + \frac{B_2}{u_2}x^2 + \frac{B_3}{u_3}x^3 + \ldots.$$

$$n) \qquad f(x) = B_0 + B_1x + B_2x^2 + B_3x^3 + \ldots. = \sum_{k=0}^{k=r} \frac{\Delta^k u_0}{k!}x^k \frac{d^k\varphi}{dx^k}.$$

Es könnte die umgekehrte Aufgabe vorliegen; gegeben $f(x)$, zu suchen der Werth der Reihe $\varphi(x)$. Es ist einleuchtend, dass $\varphi(x)$ ein bestimmtes particuläres Integral der Differentialgleichung n) darstellt. In vielen Fällen gelingt es die lineare Differentialgleichung von specieller Form durch einen geschlossenen Ausdruck zu integriren. Dann ist die verlangte Reihe $\varphi(x)$ ausgewerthet. Es mögen hier einige Beispiele Platz finden.

1. Beispiel.

$$f(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots.$$

$$\varphi(x) = \frac{B_0}{1.2.3} + \frac{B_1 x}{4.5.6} + \frac{B_2 x^2}{7.8.9} + \frac{B_3 x^3}{10.11.12} + \ldots.$$

6,	120,	504,	1320,	2730	$u_0 = 6$
	114,	384,	816,	1410	$\Delta u_0 = 114$
		270,	432,	594	$\Delta^2 u_0 = 270$
			162,	162	$\Delta^3 u_0 = 162.$

Die Differentialgleichung n) lautet daher, wenn man die Summe entwickelt, folgendermassen:

1) $$9x^3 \frac{d^3\varphi}{dx^3} + 45x^2 \frac{d^2\varphi}{dx^2} + 38x \frac{d\varphi}{dx} + 2\varphi = \frac{1}{3} f(x).$$

Ein particuläres Integral der reducirten Differentialgleichung 1) hat die Form x^r und zur Bestimmung von r hat man bekanntermassen die Gleichung:

$$9r(r-1)(r-2) + 45r(r-1) + 38r + 2 = 0$$

oder einfacher:

$$9r^3 + 18r^2 + 11r + 2 = 0$$

und hier sind die Wurzeln der vorliegenden Gleichung:

$$r_1 = -1; \quad r_2 = -\frac{1}{3}; \quad r_3 = -\frac{2}{3}.$$

Das allgemeine Integral der reducirten Differentialgleichung ist demnach durch den Ausdruck gegeben:

$$C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3 = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-\frac{1}{3}} + C_3 x^{-\frac{2}{3}}$$

und das allgemeine Integral der Differentialgleichung 1) hat die Form:

$$\varphi = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3,$$

wobei u_1, u_2, u_3 Functionen von x sind und sich durch das Verfahren der Variation der Constanten bestimmen lassen. Dazu dienen die folgenden drei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 \frac{du_1}{dx} + \varphi_2 \frac{du_2}{dx} + \varphi_3 \frac{du_3}{dx} &= 0,\\
\varphi_1' \frac{du_1}{dx} + \varphi_2' \frac{du_2}{dx} + \varphi_3' \cdot \frac{du_3}{dx} &= 0,\\
\varphi_1'' \frac{du_1}{dx} + \varphi_2'' \frac{du_2}{dx} + \varphi_3'' \frac{du_3}{dx} &= \frac{1}{27x^3} f(x).
\end{aligned}\right\}$$

Setzt man für die Functionen φ_1, φ_2, φ_3 und ihre Differentialquotienten die Werthe ein, so hat man zur Bestimmung von u_1, u_2 und u_3 die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du_1}{dx} + x^{\frac{1}{3}} \frac{du_2}{dx} + x^{\frac{1}{3}} \frac{du_3}{dx} &= 0\\
\frac{du_1}{dx} + \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} \frac{du_2}{dx} + \frac{2}{3} x^{\frac{1}{3}} \frac{du_3}{dx} &= 0\\
\frac{du_1}{dx} + \frac{2}{9} x^{\frac{1}{3}} \frac{du_2}{dx} + \frac{5}{9} x^{\frac{1}{3}} \frac{du_3}{dx} &= \frac{1}{54} f(x).
\end{aligned}\right\}$$

Diese Gleichungen geben nach $\frac{du_1}{dx}$, $\frac{du_2}{dx}$, $\frac{du_3}{dx}$ aufgelöst, folgende Werthe:

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{1}{6} f(x); \quad \frac{du_2}{dx} = \frac{1}{6} \cdot \frac{f(x)}{x^{\frac{1}{3}}}; \quad \frac{du_3}{dx} = -\frac{f(x)}{3x^{\frac{1}{3}}}$$

und

$$u_1 = \frac{1}{6} \int f(x)\,dx; \quad u_2 = \frac{1}{6} \int \frac{f(x)\,dx}{x^{\frac{2}{3}}}; \quad u_3 = -\frac{1}{3} \int \frac{f(x)dx}{x^{\frac{1}{3}}}$$

. . . .

$$= \frac{x^{-1}}{6}\left[\int f(x)\,dx\right] + \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{6}\int \frac{f(x)\,dx}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{3}\int \frac{f(x)dx}{x^{\frac{1}{3}}} +$$

$$+ K_1 x^{-1} + K_2 x^{-\frac{1}{3}} + K_3 x^{-\frac{2}{3}}$$

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{1-x} = -l(1-x)$$

$$\int \frac{f(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int \frac{dx}{x^{\frac{2}{3}}(1-x)} = \frac{1}{2}\,l(1-x) - \frac{3}{2}\,l(1-\sqrt[3]{x}) +$$

$$+ \sqrt{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}}$$

$$\int \frac{f(x)}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int \frac{dx}{x^{\frac{1}{3}}(1-x)} = -\frac{3}{2}\,l(1-\sqrt[3]{x}) + \frac{1}{2}\,l(1-x) +$$

$$+ \sqrt{3}\,\text{arc tg}\,\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}.\sqrt{3}};$$

diese Ausdrücke für die Integrale eingesetzt geben:

$$\varphi(x) = \frac{1}{4\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) l(1-\sqrt[3]{x}) -$$

$$- \frac{1}{12\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1\right) l(1-x) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt[3]{x}}\left[\text{arc tg}\,\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\,\text{arc tg}\,\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}.\sqrt[3]{x}}\right] +$$

$$+ \frac{K_1}{x} + \frac{K_2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{K_3}{\sqrt[3]{x^2}}$$

und wenn man x durch x^3 ersetzt und die Gleichung mit x^3 multiplicirt, so folgt:

$$x^3\varphi(x^3) = \frac{x}{4}\,(2-x)l(1-x) - \frac{1}{12}\,(2+2x-x^2)l(1-x^3) +$$

$$+ \frac{x}{2\sqrt{3}}\left[x\,\text{arc tg}\,\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - 2\,\text{arc tg}\,\frac{2+x}{x\sqrt{3}}\right] + K_1 + K_2 x + K_3 x^2.$$

Für $x = 0$ findet man alsogleich $K_1 = 0$.

Differenzirt man die letzte Gleichung zweimal nach x und setzt dann $x = 0$, so folgen für die Constanten nachstehende einfache Werthe:

$$K_3 = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}; \quad K_2 = \frac{\pi}{12\sqrt{3}};$$

also ist:

$$\beta) \quad x^3\varphi(x^3) = \frac{x}{4}(2-x)l(1-x) - \frac{1}{12}(2+2x-x^2)l(1-x^3) +$$

$$+ \frac{x}{2\sqrt{3}}\left[x \operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - 2 \operatorname{arctg}\frac{2+x}{x\sqrt{3}} + \pi\left(1-\frac{x}{6}\right)\right] =$$

$$= \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^6}{4.5.6} + \frac{x^9}{7.8.9} + \ldots; \quad -1 \lesseqgtr x \lesseqgtr +1,$$

. . . . . .

und

$$\varphi(x) = \frac{1}{1.2.3} + \frac{x}{4.5.6} + \frac{x^2}{7.8.9} = \frac{x^3}{10.11.12} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}} = 1\right)l(1-\sqrt[3]{x}) - \frac{1}{12\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1\right)l(1-x) +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt[3]{x}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}.\sqrt[3]{x}} + \pi\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{6}\right)\right];$$

$$-1 \lesseqgtr x \lesseqgtr 1.$$

Für $x = 1$ folgt aus β):

$$\varphi(1) = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{7.8.9} + \frac{1}{10.11.12} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - l3\right)$$

. . . . . .

2. Beispiel.

$$\varphi(x) = \frac{B_0}{1.3.5} + \frac{B_1 x}{3.5.7} + \frac{B_2 x^2}{5.7.9} + \frac{B_3 x^3}{7.9.11} + \ldots$$

$$f(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + B_3 x^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{k=3} \frac{x^k}{k!} \Delta^k u_0 \frac{d^k\varphi}{dx^k}.$$

Im vorliegenden Falle ist:

$$u_0 = 15;\ \Delta u_0 = 90;\ \Delta^2 u_0 = 120 \text{ und } \Delta^3 u_0 = 48$$

Die Summe entwickelt, gibt folgende Differentialgleichung zur Bestimmung der Function $\varphi(x)$:

$$\delta) \qquad 8x^3\frac{d^3\varphi}{dx^3} + 60x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + 90x\frac{d\varphi}{dx} + 15\varphi = f(x).$$

Das allgemeine Integral der reducirten Differentialgleichung ist von der Form:

$$C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2} + C_3x^{r_3};$$

wobei r_1, r_2 und r_3 durch nachstehende Gleichung bestimmt sind:

$$8r(r-1)(r-2) + 60r(r-1) + 90r + 15 = 0$$

oder

$$8r^3 + 36r^2 + 46r + 15 = 0;$$

daraus folgt:

$$\left.\begin{aligned} r_1 &= -\frac{1}{2} \\ r_2 &= -\frac{3}{2} \\ r_3 &= -\frac{5}{2} \end{aligned}\right\}$$

Durch Variation der Constanten lässt sich die Differentialgleichung $\delta)$ integriren und ist das allgemeine Integral φ durch den Ausdruck gegeben:

$$\varphi = u_1\varphi_1 + u_2\varphi_2 + u_3\varphi_3 = u_1x^{-\frac{1}{2}} + u_2x^{-\frac{3}{2}} + u_3x^{-\frac{5}{2}}.$$

Zur Berechnung der Functionen u_1, u_2, u_3 dienen bekanntlich die drei Gleichungen:

$$\varphi_1\frac{du_1}{dx} + \varphi_2\frac{du_2}{dx} + \varphi_3\frac{du_3}{dx} = 0$$

$$\varphi_1'\frac{du_1}{dx} + \varphi_2'\frac{du_2}{dx} + \varphi_3'\frac{du_3}{dx} = 0$$

$$\varphi_1''\frac{du_1}{dx} + \varphi_2''\frac{du_2}{dx} + \varphi_3''\frac{du_3}{dx} = \frac{f(x)}{8x^3}.$$

Setzt man für die Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ und für ihre Differentialquotienten die Werthe ein, so gehen die vorigen Gleichungen in die folgenden über:

$$\left.\begin{aligned} x^3\frac{du_1}{dx} + x\frac{du_2}{dx} + \frac{du_3}{dx} &= 0 \\ x_2\frac{du_1}{dx} + 3x\frac{du_2}{dx} + 5\frac{du_3}{dx} &= 0 \\ 3x^2\frac{du_1}{dx} + 15x\frac{du_2}{dx} + 35\frac{du_3}{dx} &= \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}f(x). \end{aligned}\right\}$$

Für die Differentialquotienten ergeben sich die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \frac{du_1}{dx} &= \frac{1}{16}\cdot\frac{f(x)}{\sqrt{x}} \\ \frac{du_2}{dx} &= -\frac{1}{8}\sqrt{x}f(x) \\ \frac{du_3}{dx} &= \frac{1}{16}x^{\frac{3}{2}}f(x); \end{aligned}\right\}$$

daher

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{16}\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx + K_1 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_2 &= -\frac{1}{8}\int\sqrt{x}f(x)dx + K_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u_3 &= \frac{1}{16}\int x^{\frac{3}{2}}f(x)\,dx + K_3 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\}$$

und es ist desshalb schliesslich:

$$A) \qquad \varphi(x) = \frac{u_1}{\sqrt{x}} + \frac{u_2}{x\sqrt{x}} + \frac{u_3}{x^2\sqrt{x}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Hier sind nur noch in jedem speciellen Falle die Constanten K_1, K_2 und K_3 zu ermitteln. Als eine Anwendung der letzten Formeln mögen folgende Fälle betrachtet werden:

1) $$f(x) = \cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots;$$

dann ist:

$$\varphi(x) = \frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{3.5.7}\cdot\frac{x}{2!} + \frac{1}{5.7.9}\cdot\frac{x^2}{4!} - \frac{1}{7.9.11}\cdot\frac{x^3}{6!} + \ldots$$

und

$$u_1 = \frac{1}{16}\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx + K_1 = \frac{1}{16}\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx + K_1$$

$$u_2 = -\frac{1}{8}\int\sqrt{x}f(x)dx = -\frac{1}{8}\int\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx + K_2$$

$$u_3 = \frac{1}{16}\int x\sqrt{x}f(x)dx = \frac{1}{16}\int x\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx + K_3$$

Wird in diesen drei Integralen statt $\sqrt{x}$ die neue Veränderliche z eingeführt $z = \sqrt{x}$, so erhält man nach Auswerthung derselben für u_1, u_2 und u_3 die Ausdrücke:

$$u_1 = \frac{1}{8}\sin\sqrt{x} + K_1$$

$$u_2 = -\frac{1}{4}(x\sin\sqrt{x} + 2\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 2\sin\sqrt{x}) + K_2$$

$$u_3 = \frac{1}{8}(x^2 - 12x + 24)\sin\sqrt{x} + \frac{1}{2}(x-6)\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + K_3$$

Diese Werthe in Gleichung *A*) eingesetzt, geben nach geschehener Reduction:

$$x^{\frac{5}{2}}\varphi(x) = (3-x)\sin\sqrt{x} - 3\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + K_1x^2 + K_2x + K_3$$

oder, wenn x durch x^2 ersetzt wird:

$$x^5\varphi(x^2) = (3-x^2)\sin x - 3x\cos x + K_1x^4 + K_2x^2 + K_3$$

und es ist für $x = 0$, $K_3 = 0$.

Diese Gleichung, zweimal nach x differenzirt, gibt alsogleich für $x = 0$, $K_1 = K_2 = 0$; daher hat man schliesslich:

$$\varphi(x^2) = \frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{3.5.7}\cdot\frac{x^2}{2!} + \frac{1}{5.7.9}\cdot\frac{x^4}{4!} - \ldots. =$$

$$= \frac{(3-x^2)\sin x - 3x\cos x}{x^5}.$$

. . . . . .

$$2)\ f(x) = 1 - x + \frac{x^2}{3!} - \frac{x^3}{5!} + \frac{x^4}{7!} - \frac{x^5}{9!} + \ldots. = 1 - \sqrt{x}.\sin\sqrt{x}$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{1.3.5} - \frac{1}{3.5.7}\cdot x + \frac{1}{5.7.9}\cdot\frac{x^2}{3!} - \frac{1}{7.9.11}\cdot\frac{x^3}{5!} + \ldots$$

u_1, u_2 und u_3 sind abermals durch die Integrale gegeben:

$$u_1 = \frac{1}{16}\int\frac{f(x)}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{16}\int\frac{1-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$u_2 = -\frac{1}{8}\int\sqrt{x}f(x)\,dx = -\frac{1}{8}\int(\sqrt{x} - x\sin\sqrt{x})\,dx$$

$$u_3 = \frac{1}{16}\int x^{\frac{3}{2}}f(x)dx = \frac{1}{16}\int(x\sqrt{x} - x^2)\sin\sqrt{x}\,dx$$

Durch Einführung der neuen Veränderlichen $\sqrt{x} = z$ in die drei Integrale erhält man für u_1, u_2 und u_3:

$$u_1 = \frac{1}{8}[\sqrt{x} + (\sqrt{x} - 1)\sin\sqrt{x}] + K_1$$

$$u_2 = -\frac{1}{12}x\sqrt{x} + \frac{1}{4}[\sqrt{x}(6-x)\cos\sqrt{x} + 3(x-2)\sin\sqrt{x}] + K_2$$

$$u_3 = \frac{1}{40}x^2\sqrt{x} - \frac{1}{8}[\sqrt{x}(-x^2 + 20x - 120)\cos\sqrt{x} +$$
$$+ 5(x^2 - 12x + 24)\sin\sqrt{x}] + K_3.$$

Diese Ausdrücke für u_1, u_2 und u_3 in die Gleichung A) substituirt, geben nach kurzer Rechnung für die Function $\varphi(x)$ den Werth:

$$\varphi(x) = \frac{1}{15} + \left(\frac{15}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{8}\right)\cos\sqrt{x} +$$

$$+ \left(\frac{1}{8} + \frac{6}{x\sqrt{x}} - \frac{15}{x^2\sqrt{x}}\right)\sin\sqrt{x} + \frac{K_1}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{K_2}{x^{\frac{3}{2}}} + \frac{K_3}{x^{\frac{5}{2}}}.$$

Wird hier x durch x^2 ersetzt, so folgt, wenn man nachträglich die Gleichung mit x^5 multiplicirt:

$$x^5\varphi(x^2) = \frac{1}{15}x^5 + \left(\frac{1}{8}x^5 + 6x^2 - 15\right)\sin x -$$

$$- \left(\frac{1}{8}x^5 + x^3 - 15x\right)\cos x + K_1x^4 + K_2x^2 + K_3$$

und für $x = 0$ ist $K_3 = 0$.

Diese Gleichung gibt zweimal nach x differenzirt und für $x = 0$ gesetzt: $K_1 = K_2 = 0$; daher:

$$\varphi(x^2) = \frac{1}{15} + \frac{1}{8}(\sin x - \cos x) + \frac{6x^2 - 15}{x^5}\sin x - \frac{x^2 - 15}{x^4}\cos x$$

$$\frac{\varphi(x^2)}{x} = \frac{1}{1.3.5}\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{3.5.7}\cdot\frac{x}{1!} + \frac{1}{5.7.9}\cdot\frac{x^2}{3!} - \frac{1}{7.9.11}\cdot\frac{x^5}{5!} + \ldots$$

und

$$\frac{1}{3.5.7}\cdot\frac{x}{1!} - \frac{1}{5.7.9}\cdot\frac{x^2}{3!} + \frac{1}{7.9.11}\cdot\frac{x^5}{5!} - \ldots = \frac{1}{1.3.5}\cdot\frac{1}{x} -$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$- \frac{\varphi(x^2)}{x} = \frac{(x^5 + 8x^3 - 120x)\cos x - (x^5 + 48x^2 - 120)\sin x}{8x^6};$$

giltig für alle x.

Über eine Reihe neuer mathematischer Erfahrungssätze.

(Fortsetzung.)

Von Dr. **Oskar Simony**,
a. o. Professor an der Wiener Hochschule für Bodencultur.

Unsere auf empirischem Wege erhaltenen Inductionsschlüsse über jene Knotenverbindungen, welche in einem unverdrehten, biegsamen Ringe durch Ausführung eines in sich selbst zurücklaufenden Schnittes erster Art herstellbar sind,[1] bestimmen zwar für beliebige Umlaufszahlen (u) und Drehungszahlen (t) des Schnittes die Arten und die Anzahl der, die jeweilige Knotenverbindung constituirenden einfachen Knoten, sie liefern jedoch noch keinen directen Aufschluss über die jeweilige Anordnung der letzteren längs ihrer gemeinsamen Basis. Infolge dessen war es bisher auch nicht möglich, die Typen (T) der verschiedenen Knotenverbindungen — unter a die kleinere, unter b die grössere der beiden Zahlen u und t verstanden — für beliebige Werthe des Verhältnisses:

$$\frac{b}{a} = k + \frac{\rho}{a}$$

festzustellen; wir mussten uns hiebei vorläufig auf die einfachsten Specialisirungen jenes Kettenbruches:

$$\cfrac{1}{\rho_1 + \cfrac{1}{\rho_2 + \cdots + \cfrac{1}{\rho_s}}}$$

[1] Siehe hierüber meine erste, im LXXXV. Bande der Sitzb. der k. Akad. erschienene, gleichbetitelte Abhandlung, pag. 925—928.

beschränken, welchem der Quotient: $\frac{\rho}{a}$ von Fall zu Fall äquivalent ist.

Um nunmehr die jeweilige symbolische Gleichung für T für beliebige positive ganzzahlige Specialisirungen von ρ_1, $\rho_2, \ldots \rho_s$ vollständig präcisiren zu können, combiniren wir die empirisch erwiesene Thatsache, dass speciell für $u = 2$, $t = -(2k+1)$ bekanntlich $T = [(+)_k]$ ist, mit folgenden zwei Sätzen, welche der Natur der Sache nach einstweilen als willkürliche Hypothesen betrachtet werden müssen:

(𝔄.) Ist allgemein T der den Specialisirungen:

$$u = a,\ t = -(ak + \rho)$$

zugehörige Typus der durch den Schnitt erhaltenen Knotenverbindung $(a-2)^{ter}$ Ordnung, so besteht für $\rho < \frac{1}{2}a$ und $\frac{a}{\rho} = p + \frac{\sigma}{\rho}$ zwischen T und dem Typus:

$$T' = [\varphi\{(+)_k, (+)_{k+1}\}] = [\varphi(A, B)]$$

jener Knotenverbindung, welche den Specialisirungen:

$$u = \rho + \sigma = a',\ t = -(a'k + \rho) = t'$$

entspricht, die symbolische Relation:

$$T = [A^{p-1}\varphi(A, BA^{p-1})].$$

(𝔅). Ist dagegen ρ grösser als $\frac{1}{2}a$, und demgemäss der Quotient: $\frac{a}{a-\rho}$ in der Form: $q + \frac{\tau}{a-\rho}$, $(q \geqq 2)$ darstellbar, so besteht zwischen T und dem Typus:

$$T'' = [\psi(A, B)]$$

jener Knotenverbindung, welche den Specialisirungen

$$u = a - \rho + \tau = a'',\ t = -(a''k + \tau) = t''$$

zugehört, die analoge Beziehung:

$$T = [\psi(AB^{q-1}, B)].$$

---

[1] Da a und ρ immer relative Primzahlen vorstellen, kann ρ nur grösser oder kleiner als $\frac{1}{2}a$ sein.

Auf diese Art ergeben sich zunächst für:

$$u = a,\ t = -(ak+1) \text{ resp.: } t = -(ak+a-1)$$

die erfahrungsgemäss richtigen Relationen:

$$T = [A^{a-2}A] = [A^{a-1}] \text{ resp. } T = [AB^{a-2}],$$

da einerseits für $\frac{a}{\rho} = a$ offenbar $p = a-1,\ a' = 2,\ t' = -(2k+1)$,

anderseits für $\frac{a}{a-\rho} = a$ analog $q = a-1,\ a'' = 2,\ t'' = -(2k+1)$ wird.

Vertauschen wir ferner — unter $c_1, c_2, c_3, \ldots c_{s-1}$ die bei der Ermittlung der Zahlen: $\rho_2, \rho_3, \rho_4, \ldots \rho_s$ successive auftretenden Divisoren verstanden — die allgemeine, für $\frac{\rho}{a}$ bestehende Kettenbruchentwicklung mit dem ihr äquivalenten Gleichungssysteme:

$$\frac{\rho}{a} = \frac{1}{\rho_1 + \frac{c_1}{\rho}},\ \frac{c_1}{\rho} = \frac{1}{\rho_2 + \frac{c_2}{c_1}},\ \frac{c_2}{c_1} = \frac{1}{\rho_3 + \frac{c_3}{c_2}},$$

$$\frac{c_3}{c_2} = \frac{1}{\rho_4 + \frac{c_4}{c_3}}, \ldots \frac{c_{s-1}}{c_{s-2}} = \frac{1}{\rho_s},$$

so ist für $\rho_1 \geq 2$ kraft des Satzes (𝔄) der fragliche Typus: T direct aus jenem Typus: T_1 ableitbar, für welchen

$$u = \rho + c_1,\ t = -\{(\rho + c_1)k + \rho\}$$

wird, während T_1 seinerseits zufolge des Satzes (𝔅) aus dem Typus: T_1'' jener Knotenverbindung hervorgeht, welche für:

$$u = c_1 + c_2,\ t = -\{(c_1 + c_2)k + c_2\}$$

entsteht. Sobald jedoch ρ_1 mit der positiven Einheit zusammenfällt, wird T kraft desselben Satzes und der für diesen Specialfall bestehenden Gleichung:

$$\frac{a}{a-\rho} = \frac{\rho + c_1}{c_1} = 1 + \rho_2 + \frac{c_2}{c_1}$$

unmittelbar durch T_1'' bestimmt, wonach die dem letztgenannten Typus zugehörigen Werthe von u und t sowohl für $\rho_1 \geq 2$ als auch für $\rho_1 = 1$ den Ausgangspunkt für alle übrigen Typenreductionen bilden. — Da die Quotienten:

$$\frac{c_1+c_2}{c_2} = 1+\rho_3+\frac{c_3}{c_2}, \quad \frac{c_2+c_3}{(c_2+c_3)-c_2} = 1+\rho_4+\frac{c_4}{c_3}$$

augenscheinlich stets grösser als 2 bleiben, ergibt sich T_1'' jedesmal nach Satz (𝔄) aus dem Typus: T_2' jener Knotenverbindung, welche den Specialisirungen:

$$u = c_2+c_3, \; t = -\{(c_2+c_3)k+c_2\}$$

entspricht, und T_2' wieder nach Satz (𝔅) aus dem für

$$u = c_3+c_4, \; t = -\{(c_3+c_4)k+c_4\}$$

characteristischen Typus: T_2'', so dass wir auf dem hier eingeschlagenen Wege schliesslich zu der Umlaufszahl: $u = c_{s-2}+ + c_{s-1} = \rho_s+1$ und zu einer der beiden Drehungszahlen: $t = -\{(\rho_s+1)k+1\}$ beziehungsweise: $t = -\{(\rho_s+1)k+\rho_s\}$ geführt werden.

Es besteht also die Verwerthbarkeit unserer beiden Hilfssätze bei der Lösung des vorgelegten Problems darin, dass deren wiederholte Anwendung einen Aufbau der jeweiligen unbekannten Typengleichung auf Grundlage einer durch die Erfahrung gegebenen Typengleichung ermöglicht.

Die analytische Formulirung der hiebei aufzustellenden symbolischen Relationen bedingt dann die Unterscheidung zweier Hauptfälle, je nachdem der für $\frac{\rho}{a}$ resultirende Kettenbruch eine ungerade oder eine gerade Anzahl von Gliedern besitzt. — Ist nämlich erstens — unter $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2r-1}$ beliebige positive ganze Zahlen gedacht —:

$$\rho_1 = a_1, \; \rho_2 = a_2, \; \rho_3 = a_3, \ldots \rho_s = a_{2r-1},$$

so erhält man zur Ermittlung von T in leicht verständlicher Symbolik folgende Reihe von Beziehungen:

$$T = [A^{a_1-1}\varphi_1'(A, BA^{a_1-1})];$$

$$\varphi_1'(A,B) = \psi_1'(AB^{a_2}, B), \quad \psi_1'(A,B) = A^{a_2}\varphi_2'(A, BA^{a_2}),$$
$$\varphi_2'(A,B) = \psi_2'(AB^{a_4}, B), \quad \psi_2'(A,B) = A^{a_4}\varphi_3'(A, BA^{a_4}),$$
$$\varphi_3'(A,B) = \psi_3'(AB^{a_6}, B), \quad \psi_3'(A,B) = A^{a_7}\varphi_4'(A, BA^{a_7}),$$
$$\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_{r-1}'(A,B) = \psi_{r-1}'(AB^{a_{2r-2}}, B), \quad \psi_{r-1}'(A,B) = A^{a_{2r-1}}.$$

Ist hingegen zweitens die Anzahl der Kettenbruchglieder gerade, mithin allgemein:

$$\rho_1 = a_1,\ \rho_2 = a_2,\ \rho_3 = a_3,\ \ldots\ \rho_s = a_{2r},$$

so erfordert die Bestimmung von T die Auflösung des Gleichungssystems:

$$T = [A^{a_1-1}\varphi_1''(A,\ BA^{a_1-1})]$$

$$\varphi_1''(A,\ B) = \psi_1''(AB^{a_2},\ B),\quad \psi_1''(A,\ B) = A^{a_3}\varphi_2''(A,\ BA^{a_3}),$$

$$\varphi_2''(A,\ B) = \psi_2''(AB^{a_4},\ B),\quad \psi_2''(A,\ B) = A^{a_5}\varphi_3''(A,\ BA^{a_5}),$$

$$\varphi_3''(A,\ B) = \psi_3''(AB^{a_6},\ B),\quad \psi_3''(A,\ B) = A^{a_7}\varphi_4''(A,\ BA^{a_7}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$\varphi_{r-1}''(A,\ B) = \psi_{r-1}''(AB^{a_{2r-2}},\ B),\ \psi_{r-1}''(A,\ B) =$$

$$= A^{a_{2r-1}}\varphi_r''(A,\ BA^{a_{2r-1}}),\ \varphi_r''(A,\ B) = AB^{a_{2r}-1}.$$

Beide Systeme von Functionalgleichungen lassen sich unter Einführung der Abkürzungen:

$$A(BA^{a_1-1})^{a_2} = A_1,\ A_1(BA^{a_1-1}A_1^{a_3})^{a_4} = A_2,$$

$$A_2(BA^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5})^{a_6} = A_3,$$

$$\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots$$

$$A_{n-2}(BA^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5}A_3^{a_7}\ldots A_{n-2}^{a_{2n-3}})^{a_{2n-2}} = A_{n-1},$$

$$A_{n-1}(BA^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5}A_3^{a_7}\ldots A_{n-1}^{a_{2n-1}})^{a_{2n}} = A_n,$$

$$\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots$$

ohne Schwierigkeit erledigen[1] und liefern für T die übersichtlichen Resultate:

$$(\mathfrak{A})\ldots(s = 2r-1):T = [R_r] =$$

$$= [A^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5}A_3^{a_7}\ldots A_{r-1}^{a_{2r-1}}],$$

$$(\mathfrak{B})\ldots(s = 2r):T = [R_r\,A_{r-1}(BR_r)^{a_{2r}-1}] =$$

$$[(A^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5}\ldots A_{r-1}^{a_{2r-1}})A_{r-1}(BA^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5}\ldots A_{r-1}^{a_{2r-1}})^{a_{2r}-1}],$$

---

[1] Hiebei sind in Hinblick auf die Thatsache, dass keine Knotenverbindung eine Abänderung der Reihenfolge der sie constituirenden Knoten ermöglicht, natürlich nur solche Substitutionen und Transformationen zulässig, welche das Princip der Unvertauschbarkeit sämmtlicher Factoren in den verschiedenen symbolischen Producten nicht alteriren.

deren vier wichtigste Specialisirungen durch die nachstehenden Gleichungen gebildet werden:

$$(\alpha)\ldots s=2: T=[A^{a_1}(BA^{a_1-1})^{a_2-1}],$$
$$(\beta)\ldots s=3: T=[A^{a_1-1}\{A(BA^{a_1-1})^{a_2}\}^{a_3}],$$
$$(\gamma)\ldots s=4: T=[A^{a_1-1}A_1^{a_3+1}(BA^{a_1-1}A_1^{a_3})^{a_4-1}],$$
$$(\delta)\ldots s=5: T=[A^{a_1-1}A_1^{a_3}\{A_1(BA^{a_1-1}A_1^{a_3})^{a_4}\}^{a_5}].$$

Die erste derselben ist, wie eine Vertauschung von a_1 mit m, von a_2 mit n lehrt, unmittelbar jener Typengleichung äquivalent, welche wir seinerzeit für $s=2$, $\rho_1=m$, $\rho_2=n$ auf rein empirischem Wege gewonnen haben, und ebenso kann die Richtigkeit der übrigen Relationen: (β), (γ), (δ) auf Grundlage unserer Experimente ausreichend controlirt werden.

Führen wir nämlich zunächst in (β) die drei Substitutionsreihen:

$$a_1=a_3=2,\ a_2=p-1;\ a_1=1,\ a_2=m,\ a_3=n;$$
$$a_1=m,\ a_2=1,\ a_3=n$$

ein, von welchen speciell die erste den Annahmen: $a=4p$, $\rho=2p-1=\frac{a-2}{2}$ correspondirt, so entspringen aus (β) die erfahrungsgemäss richtigen Relationen:

$$T=[A\{A(BA)^{p-1}\}^2]=[A^2(BA)^{p-1}A(BA)^{p-1}],$$
$$T=[(AB^m)^n],$$
$$T=[A^{m-1}(ABA^{m-1})^n]=[(A^mB)^nA^{m-1}].$$

Desgleichen liefert die Beziehung (γ) für die Substitutionsreihen:

$$a_1=a_4=2,\ a_2=a_3=1;\ a_1=a_2=1,\ a_3=p-1,\ a_4=2;$$
$$a_1=a_3=1,\ a_2=m,\ a_4=n$$

in vollständiger Übereinstimmung mit jenen empirischen Formeln, welche sich seinerzeit für

$$a=13,\ \rho=5;\ a=4p,\ \rho=2p+1=\frac{a+2}{2};\ s=4,\ \rho_1=1,$$

$\rho_2=m$, $\rho_3=1$, $\rho_4=n$ ergeben haben:

$$T = [A(ABA)^2BA(ABA)] = [(A^2B)^2(ABA)^2],$$
$$T = [(AB)^pB(AB)^{p-1}],$$
$$T = [(AB^m)^2(BAB^m)^{n-1}] = [(AB^m)(AB^{m+1})^{n-1}(AB^m)].$$

Setzen wir endlich in (δ): $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$, $a_5 = 2$, für welche Substitutionen der Quotient: $\frac{\rho}{a}$ den Werth: $\frac{8}{13}$ annimmt, so erhält (δ) die gleichfalls bekannte Specialform:

$$T = [AB(AB^2AB)^2] = [(AB)^2BA(BAB)^2],$$

womit der Nachweis vollendet ist, dass sämmtliche empirische Typengleichungen aus den beiden von uns aufgestellten allgemeinen Relationen für T ableitbar sind.

Um übrigens die letzteren vollständig zu verificiren, haben wir jetzt noch darzuthun, dass das Symbol A in jeder derselben im Ganzen $(a-\rho)$mal, hingegen B nicht öfter als $(\rho-1)$mal auftritt, indem die beiden, durch unsere allgemeinen Typengleichungen **(𝔄)** und **(𝔅)** characterisirten Knotenverbindungen kraft des dritten Erfahrungssatzes aus je $(a-\rho)$ Knoten k^{ter} Art und je $(\rho-1)$ Knoten $(k+1)^{ter}$ Art bestehen müssen.

Der gewünschte Beweis gestaltet sich am übersichtlichsten, wenn wir hiebei von der Betrachtung des in's Unendliche fortlaufenden schematischen Kettenbruches:

$$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}} \text{ in inf.}$$

ausgehen und dessen Näherungsbrüche:

$$\frac{1}{a_1}, \quad \frac{a_2}{a_1a_2+1}, \quad \frac{a_2a_3+1}{a_1a_2a_3+a_1+a_3}, \quad \ldots$$

der Reihe nach mit $\frac{Z_1}{N_1}$, $\frac{Z_2}{N_2}$, $\frac{Z_3}{N_3}$, ... bezeichnen. Es ist dann der Quotient: $\frac{\rho}{a}$ speciell für den ersten Hauptfall gleich $\frac{Z_{2r-1}}{N_{2r-1}}$,

hingegen im zweiten Hauptfalle gleich $\frac{Z_{2r}}{N_{2r}}$, und zufolge der bekannten, allgemein giltigen Gleichungen:

$$Z_n = a_n Z_{n-1} + Z_{n-2}, \quad N_n = a_n N_{n-1} + N_{n-2}$$

einerseits:	andererseits:
$Z_3 = a_3 Z_2 + Z_1,$	$N_3 = a_3 N_2 + N_1,$
$Z_5 = a_5 Z_4 + Z_3,$	$N_5 = a_5 N_4 + N_3,$
. . . . .	. . . . .
$Z_{2r-3} = a_{2r-3} Z_{2r-4} + Z_{2r-5},$	$N_{2r-3} = a_{2r-3} N_{2r-4} + N_{2r-5},$
$Z_{2r-1} = a_{2r-1} Z_{2r-2} + Z_{2r-3},$	$N_{2r-1} = a_{2r-1} N_{2r-2} + N_{2r-3},$

mithin auch:

$$Z_{2r-1} = Z_1 + a_3 Z_2 + a_5 Z_4 + a_7 Z_6 + \ldots + a_{2r-1} Z_{2r-2},$$
$$N_{2r-1} = N_1 + a_3 N_2 + a_5 N_4 + a_7 N_6 + \ldots + a_{2r-1} N_{2r-2}.$$

Dies vorausgeschickt, lassen sich zunächst jene Zahlen: α_n, β_n, welche anzeigen, wie oft die Factoren A und B in dem symbolischen Producte: A_n vorkommen, sehr einfach ausdrücken. Man erhält nämlich für $n = 1, 2$ direct:

$$\alpha_1 = 1 + a_2(a_1 - 1) = N_2 - Z_2, \quad \beta_1 = a_2 = Z_2;$$
$$\alpha_2 = N_2 - Z_2 + a_4\{N_1 - Z_1 + a_3(N_2 - Z_2)\} = N_4 - Z_4,$$
$$\beta_2 = Z_2 + a_4(Z_1 + a_3 Z_2) = Z_4,$$

woran sich der Wahrscheinlichkeitsschluss knüpft, dass allgemein:

$$\alpha_{n-1} = N_{2n-2} - Z_{2n-2}, \quad \beta_{n-1} = Z_{2n-2}; \quad \alpha_n = N_{2n} - Z_{2n}, \quad \beta_n = Z_{2n}$$

ist. — Indem wir denselben einstweilen hypothetisch als richtig annehmen, folglich dem Producte:

$$BA^{a_1-1} A_1^{a_3} A_2^{a_5} A_3^{a_7} \ldots A_{n-1}^{a_{2n-1}}$$

in Hinblick auf die Gleichungen:

$$\frac{Z_{2n} - Z_{2n-2}}{a_{2n}} = Z_{2n-1}, \quad \frac{N_{2n} - N_{2n-2}}{a_{2n}} = N_{2n-1}$$

den Factor A im Ganzen $(N_{2n-1} - Z_{2n-1})$mal, den Factor B hin-

gegen (Z_{2n-1})mal zuschreiben, ergeben sich die für:

$$A_{n+1} = A_n (B A^{a_1 - 1} A_1^{a_3} A_2^{a_5} \ldots A_{n-1}^{a_{2n-1}} A_n^{a_{2n+1}})^{a_{2n+2}}$$

charakteristischen Zahlen: α_{n+1}, β_{n+1} in den Formen:

$$\alpha_{n+1} = N_{2n} - Z_{2n} + a_{2n+2}\{N_{2n-1} - Z_{2n-1} + a_{2n+1}(N_{2n} - Z_{2n})\} =$$
$$= N_{2n+2} - Z_{2n+2},$$
$$\beta_{n+1} = Z_{2n} + a_{2n+2}(Z_{2n-1} + a_{2n+1} Z_{2n}) = Z_{2n+2}.$$

Hienach gilt unser Schluss für α_{n+1}, β_{n+1}, sobald er für α_{n-1}, β_{n-1}; α_n, β_n zutrifft; er gilt also für beliebige positive ganzzahlige Werthe von n, da seine Richtigkeit für $n = 1$ und $n = 2$ bereits erwiesen ist.

Nachdem auf diese Art die Zahlen α_1, β_1; α_2, β_2; ... α_n, β_n; ... definitiv festgestellt worden sind, können nunmehr auch jene Zahlen: x', y'; x'', y'' ermittelt werden, welche anzeigen, wie oft die Factoren A und B in jeder der beiden allgemeinen Typengleichungen vorkommen.

Man gelangt hiebei im ersten Hauptfalle zu den Relationen:

$$x' = N_1 - Z_1 + a_3(N_2 - Z_2) + a_5(N_4 - Z_4) + a_7(N_6 - Z_6) +$$
$$+ \ldots + a_{2r-1}(N_{2r-2} - Z_{2r-2}) = N_{2r-1} - Z_{2r-1} = a - \rho,$$
$$y' = a_3 Z_2 + a_5 Z_4 + a_7 Z_6 + \ldots + a_{2r-1} Z_{2r-2} = Z_{2r-1} - Z_1 = \rho - 1$$

und analog im zweiten Hauptfalle zu den Beziehungen:

$$x'' = N_{2r-1} - Z_{2r-1} + N_{2r-2} - Z_{2r-2} +$$
$$+ (a_{2r} - 1)(N_{2r-1} - Z_{2r-1}) = N_{2r} - Z_{2r} = a - \rho,$$
$$y'' = Z_{2r-1} - Z_1 + Z_{2r-2} + (a_{2r} - 1) Z_{2r-1} = Z_{2r} - Z_1 = \rho - 1,$$

welche übereinstimmend lehren, dass unsere beiden allgemeinen Typengleichungen für beliebige positive ganzzahlige Werthe von r dem dritten Erfahrungssatze genügen.

Dieselben bilden also thatsächlich die vollständige Lösung des uns vorgelegten Problems für $u = a$, $t = -(ak + \rho)$, aus welcher sich die entsprechenden Formeln für $u = a$, $t = +(ak + \rho)$ unmittelbar durch Vertauschung der Symbole: $A = (+)_k$, $B = (+)_{k+1}$ mit: $(-)_k$, $(-)_{k+1}$ ergeben.

Auf Grundlage der Relationen (𝔄) und (𝔅) lassen sich ferner die beiden nachstehenden Sätze beweisen, welche über weitere interessante Eigenschaften der hier in Betracht kommenden Knotenverbindungen Aufschluss geben:

(a) In allen, einem bestimmten Werthe von a zugehörigen Knotenverbindungen, welche ausser Knoten k^{ter} Art auch solche $(k+1)^{ter}$ Art enthalten, gehen dem ersten Knoten $(k+1)^{ter}$ Art so viele Knoten k^{ter} Art voran, als der erste Theilnenner des dem Quotienten: $\frac{\rho}{a}$ äquivalenten Kettenbruches Einheiten besitzt, so dass das Anfangsglied jeder derartigen Knotenverbindung durch einen Knoten k^{ter} Art gebildet wird.

(b) Sind: $T = [AF(A, B)]$, $T_1 = [AF_1(A, B)]$ die Typen der beiden, den Specialisirungen:

$$u = a,\ t = -(ak+\rho);\ u = a,\ t = -(ak+a-\rho)$$

entsprechenden Knotenverbindungen $(a-2)^{ter}$ Ordnung, so besteht zwischen $F(A, B)$ und $F_1(A, B)$ allgemein die Relation:

$$F_1(A, B) = F(B, A),$$

wonach, sobald T bekannt ist, auch T_1 bestimmt erscheint.[1]

---

[1] Bilden wir für die den Substitutionen:

$$\rho_1 = m,\ \rho_2 = n;\ \rho_1 = m,\ \rho_2 = 1,\ \rho_3 = n;\ \rho_1 = 2,\ \rho_2 = p-1,\ \rho_3 = 2;$$
$$\rho_1 = 2,\ \rho_2 = \rho_3 = 1,\ \rho_4 = 2$$

entsprechenden Specialformen der Function: $F(A, B)$, nämlich:

$$A^{m-1}(BA^{m-1})^{n-1}, \qquad A^{m-1}B(A^mB)^{n-1}A^{m-1},$$
$$\{A(BA)^{p-1}\}^2, \qquad ABA^2B(ABA)^2$$

die correspondirenden Specialisirungen des symbolischen Productes: $AF(B, A)$, so liefern die hiebei erhaltenen Ausdrücke:

$$(AB^{m-1})^n, \qquad AB^{m-1}A(B^mA)^{n-1}B^{m-1},$$
$$A\{B(AB)^{p-1}\}^2, \qquad (AB)^2BA(BAB)^2$$

nach Vertauschung von m mit $m+1$ und einigen leichten Umformungen der Reihe nach die Typen jener Knotenverbindungen, welche sich seinerzeit für:

$$\rho_1 = 1,\ \rho_2 = m,\ \rho_3 = n;\ \rho_1 = 1,\ \rho_2 = m,\ \rho_3 = 1,\ \rho_4 = n;$$
$$\rho_1 = \rho_2 = 1,\ \rho_3 = p-1,\ \rho_4 = 2;\ \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \rho_4 = 1,\ \rho_5 = 2$$

ergeben haben. Es ist also auch der Satz (b) auf Grundlage unserer Experimente einer directen Controle durch die Erfahrung zugänglich.

Der Beweis des ersten Satzes ist durch Constatirung der Thatsache geliefert, dass das symbolische Product: R_r gemäss der Bedeutung von A_1 mit:

$$A^{a_1-1}\{A(BA^{a_1-1})^{a_2}\}\,A_1^{a_3-1}\,A_2^{a_5}\,A_3^{a_7}\ldots A_{r-1}^{a_{2r-1}}$$

identisch ist, also das Symbol: $A=(+)_k$ im Ganzen a_1 mal vor B steht.

Ungleich weitläufiger gestaltet sich die Deduction des zweiten Satzes, welcher im ersten, resp. zweiten Hauptfalle nach Einführung der Abkürzungen:

$$B(AB^{a_1-1})^{a_2}=B_1,\quad B_1(AB^{a_1-1}B_1^{a_3})^{a_4}=B_2,$$
$$B_2(AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5})^{a_6}=B_3,$$
$$\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots$$
$$B_{n-2}(AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\ldots B_{n-2}^{a_{2n-3}})^{a_{2n-2}}=B_{n-1},$$
$$B_{n-1}(AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\ldots B_{n-1}^{a_{2n-1}})^{a_{2n}}=B_n,$$
$$\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots\qquad\ldots\ldots$$

in den hinsichtlich ihres Baues vollständig mit (𝔄) und (𝔅) übereinstimmenden Formeln:

$$(\mathfrak{C})\ldots(s=2r-1):T_1=[AR_r']=$$
$$=[AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\ldots B_{r-1}^{a_{2r-1}}],$$
$$(\mathfrak{D})\ldots(s=2r):T_1=[AR_r'B_{r-1}(ABR_r')^{a_{2r}-1}]=$$
$$=[(AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}\ldots B_{r-1}^{a_{2r-1}})B_{r-1}(AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5}\ldots B_{r-1}^{a_{2r-1}})^{a_{2r}-1}]$$

seinen analytischen Ausdruck findet.

Da nämlich kraft der allgemein giltigen Identität:

$$\frac{a-\rho}{a}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{a}{\rho}-1}}$$

die Entwicklung:

$$\frac{\rho}{a}=\cfrac{1}{\rho_1+\cfrac{1}{\rho_2+\cfrac{1}{\rho_3+\ldots+\cfrac{1}{\rho_s}}}}$$

die weitere:

$$\frac{a-\rho}{a}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\rho_1-1+\cfrac{1}{\rho_2+\ldots+\cfrac{1}{\rho_s}}}}$$

zur nothwendigen

Folge hat, liefert die Verwandlung von $\frac{a-\rho}{a}$ in einen Kettenbruch im ersten Hauptfalle die Theilnenner: $1, a_1-1, a_2, a_3 \ldots a_{2r-1}$, im zweiten die Theilnenner: $1, a_1-1, a_2, a_3, \ldots a_{2r}$, so dass für T_1 unter Anwendung der Abkürzungen:

$$AB^{a_1-1} = (A_1),\ (A_1)\{B(A_1)^{a_2}\}^{a_3} = (A_2),$$

$$(A_2)\{B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}\}^{a_5} = (A_3)$$

. . . . . .

$$(A_{n-2})\{B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_{n-2})^{a_{2n-4}}\}^{a_{2n-3}} = (A_{n-1}),$$

$$(A_{n-1})\{B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_{n-1})^{a_{2n-2}}\}^{a_{2n-1}} = (A_n)$$

. . . . . .

im ersten resp. zweiten Hauptfalle ursprünglich die symbolischen Relationen:

$$(\mathfrak{C}) \ldots T_1 =$$

$$[\{(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}..(A_{r-1})^{a_{2r-2}}\}(A_{r-1})\{B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}..(A_{r-1})^{a_{2r-2}}\}^{a_{2r-1}-1}]$$

$$(\mathfrak{D}) \ldots T_1 = [(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_r)^{a_{2r}}]$$

bestehen. Auf diese Art erfordert der Nachweis des zweiten Satzes die allgemeine Begründung der Behauptung, dass einerseits die beiden, scheinbar völlig von einander verschiedenen Gleichungen $(\mathfrak{C})$ und $(\mathfrak{C}')$, andererseits die Relationen: $(\mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{D}')$ gleichbedeutend sind, was sich erst auf Grundlage von drei, im Folgenden abgeleiteten Hilfsgleichungen darthun lässt.

Indem wir hiebei vor Allem zwischen den Symbolen (A_1), (A_2), (A_3); B_1, B_2, B_3 einen directen Zusammenhang herzustellen suchen, gelangen wir unmittelbar zu den Relationen:

$$B(A_1)^{a_2} = B_1, \quad AB^{a_1-1}B_1^{a_3} = (A_2),$$

$$B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4} = B_2, \quad AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5} = (A_3)$$

und folgern aus denselben inductiv, dass allgemein:

$$(\mathfrak{a}) \ldots (A_n) = AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\ldots B_{n-1}^{a_{2n-1}},$$

$$(\mathfrak{b}) \ldots B_n = B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_n)^{a_{2n}}$$

sein muss. Es ist dann — die Richtigkeit dieser Annahmen einstweilen hypothetisch acceptirt — offenbar:

$$(A_n)B_n^{a_{2n+1}} = (A_n)\{B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_n)^{a_{2n}}\}^{a_{2n+1}} = (A_{n+1}),$$

also auch umgekehrt:

$$(A_{n+1}) = (A_n)\,B_n^{a_{2n+1}} = AB^{a_1-1}\,B_1^{a_3}\,B_2^{a_5}\,B_3^{a_7}\ldots B_n^{a_{2n+1}},$$

und:

$$B_n(A_{n+1})^{a_{2n+2}} = B_n(AB^{a_1-1}\,B_1^{a_3}\,B_2^{a_5}\,B_3^{a_7}\ldots B_n^{a_{2n+1}})^{a_{2n+2}} = B_{n+1},$$

d. h. vice versa:

$$B_{n+1} = B_n(A_{n+1})^{a_{2n+2}} = B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_{n+1})^{a_{2n+2}},$$

womit, da eine Vertauschung von n mit $n+1$ in den Gleichungen **(a)** und **(b)** dieselben Resultate liefert, die allgemeine Giltigkeit von **(a)** und **(b)** festgestellt ist.

Ein analoger Gedankengang führt zur Einsicht in die universelle Richtigkeit der dritten Hilfsgleichung:

$$\textbf{(c)}\ldots(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_{n-1})^{a_{2n-2}}(A_n) =$$
$$= (AB^{a_1-2}\,B_1^{a_3}\,B_2^{a_5}\,B_3^{a_7}\ldots B_{n-1}^{a_{2n-1}})\,B_{n-1},$$

welche sich zunächst ebenfalls als hypothetische Verallgemeinerung von zwei speciellen Relationen:

$$(A_1)^{a_2}(A_2) = (A_1)^{a_2+1}\,B_1^{a_3} = (AB^{a_1-2})\,B(A_1)^{a_2}\,B_1^{a_3} =$$
$$= AB^{a_1-2}\,B_1^{1+a_3} = (AB^{a_1-2}\,B_1^{a_3})\,B_1,$$
$$(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3) = (A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4+1}\,B_2^{a_5} =$$
$$= (AB^{a_1-2}B_1^{a_3})\,B_1(A_2)^{a_4}B_2^{a_5} = AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{1+a_5} =$$
$$= (AB^{a_1-2}\,B_1^{a_3}\,B_2^{a_5})\,B_2$$

ergibt. Denn sobald man provisorisch annimmt, dass die Gleichung **(c)** zutrifft, wird das symbolische Product:

$$\{(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_{n-1})^{a_{2n-2}}(A_n)\}\,(A_n)^{a_{2n}-1}(A_{n+1})$$

mit:

$$(AB^{a_1-2}\,B_1^{a_3}\,B_2^{a_5}\,B_3^{a_7}\ldots B_{n-1}^{a_{2n-1}})\,B_{n-1}(A_n)^{a_{2n}-1}(A_{n+1}) =$$
$$= (AB^{a_1-2}\,B_1^{a_3}\,B_2^{a_5}\,B_3^{a_7}\ldots B_{n-1}^{a_{2n-1}})B_{n-1}(A_n)^{a_{2n}}B_n^{a_{2n+1}} =$$
$$= AB^{a_1-2}\,B_1^{a_3}\,B_2^{a_5}\,B_3^{a_7}\ldots B_{n-1}^{a_{2n-1}}\,B_n^{1+a_{2n+1}}$$

identisch, man gewinnt also für jenes Product genau denselben Ausdruck, welcher aus **(c)** durch Vertauschung von n mit $n+1$ hervorgeht.

Mit Hilfe der Gleichungen (a), (b), (c) kann nunmehr die von uns behauptete Coincidenz der Relationen: (𝔈′) und (𝔈), (𝔇′) und (𝔇) direct ersichtlich gemacht werden.

Es ist nämlich kraft der dritten und ersten Hilfsgleichung:

$$\{(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_{r-1})^{a_{2r-2}}\}(A_{r-1}) =$$

$$= \{(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_{r-2})^{a_{2r-4}}(A_{r-1})\}(A_{r-1})^{a_{2r-2}} =$$

$$= (AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\ldots B_{r-2}^{a_{2r-3}})B_{r-2}(A_{r-1})^{a_{2r-2}} =$$

$$= AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\ldots B_{r-2}^{a_{2r-3}}B_{r-1},$$

ferner zufolge der zweiten Hilfsgleichung:

$$\{B(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_{r-1})^{a_{2r-2}}\}^{a_{2r-1}-1} = B_{r-1}^{a_{2r-1}-1},$$

mithin das Product der beiden Factorengruppen in der That gleich AR_r respective: $(\mathfrak{E}') = (\mathfrak{E})$.

Da endlich: $(A_1)^{a_2}(A_2)^{a_4}(A_3)^{a_6}\ldots(A_r)^{a_{2r}}$ gemäss der dritten Hilfsgleichung mit:

$$(AB^{a_1-2}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\ldots B_{r-1}^{a_{2r-1}})B_{r-1}(A_r)^{a_{2r}-1}$$

zusammenfällt, und A_r kraft der ersten Hilfsgleichung dem Ausdrucke:

$$AB^{a_1-1}B_1^{a_3}B_2^{a_5}B_3^{a_7}\ldots B_{r-1}^{a_{2r-1}}$$

entspricht, ist auch $(\mathfrak{D}') = (\mathfrak{D})$, und hiemit der Nachweis des zweiten Satzes perfect.[1]

Ausserdem lehrt eine Betrachtung der jetzt vollständig verificirten Relationen (𝔈) und (𝔇), dass, sobald für eine gegebene Specialisirung von a die Zahlen: $a_1, a_2, a_3, \ldots$ für sämmtliche, unter $\frac{1}{2}$ liegende Werthe des Quotienten: $\frac{\rho}{a}$ bekannt sind, die Typen aller, dieser Specialisirung von a zugehörigen Knotenverbindungen direct angegeben werden können, indem sich die in $B_1, B_2, B_3, \ldots$ auftretenden

[1] Dass derselbe auch nach Vertauschung von A und B mit $(-)_k$ $(-)_{k+1}$ seine Giltigkeit behauptet, ist in Hinblick auf die seiner Ableitung zu Grunde gelegten Fundamentalformeln selbstverständlich.

symbolischen Potenzexponenten lediglich aus den genannten Zahlen zusammensetzen.

Die im Folgenden mitgetheilte Tabelle[1] enthält die Zahlen: $a_1\ a_2\ a_3, \ldots$ zu sämmtlichen Specialisirungen des Quotienten: $\frac{\rho}{a}$ von $a = 17$ bis $a = 100$, für welche ρ eine zwischen 4 und $\frac{a-2}{2}$ resp. $\frac{a-1}{2}$ gelegene relative Primzahl in Bezug auf a vorstellt, und bildet insoferne eine in practischer Hinsicht nützliche Ergänzung unseres empirischen Schema's für $u = 2, 3, 4, \ldots 14, 15, 16$, während für $\rho = 1, 2, 3, 4, \frac{a-2}{2}, \frac{a-1}{2}$ die dem vierten Erfahrungssatze beigegebenen Typengleichungen zu verwerthen sind.

---

[1] Aus den Gleichungen:

$$\frac{1}{\dfrac{a_2+1}{a_1}} = \frac{a_1}{a_1a_2+1} = \frac{N_1}{N_2},\quad \frac{1}{\dfrac{a_3+1}{\dfrac{a_2+1}{a_1}}} = \frac{a_1a_2+1}{a_1a_2a_3+a_1+a_3} = \frac{N_2}{N_3}$$

schliesst man allgemein, dass jener Kettenbruch, welcher durch Vertauschung der Glieder: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_s$ von $\frac{Z_s}{N_s}$ mit: $a_s, a_{s-1}, a_{s-2}, \ldots a_1$ erhalten wird, den Werth: $\frac{N_{s-1}}{N_s}$ besitzt und überzeugt sich auch leicht von der Richtigkeit dieses Schlusses, indem auf Grundlage desselben consequent:

$$\frac{1}{\dfrac{a_{s+1}+1}{a_s+\ldots+\dfrac{1}{a_1}}} = \frac{1}{a_{s+1}+\dfrac{N_{s-1}}{N_s}} = \frac{N_s}{a_{s+1}N_s+N_{s-1}} = \frac{N_s}{N_{s+1}}$$

wird. Sobald demnach die Zahlen: $a_1, a_2, a_3 \ldots a_s$ für eine bestimmte Specialisirung von $\frac{\rho}{a} = \frac{Z_s}{N_s}$ gefunden sind, und N_{s-1} von Z_s verschieden ausfällt, liefert die erwähnte Vertauschung direct den Kettenbruch für $\frac{N_{s-1}}{N_s} = \frac{N_{s-1}}{a}$, welche Thatsache zur Überprüfung der vorliegenden Tabelle benützt werden kann und eine theoretisch wichtige Unterscheidung der Kettenbrüche in zwei Classen begründet, je nachdem die beiden Zahlenreihen: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_s$; $a_s, a_{s-1}, a_{s-2}, \ldots a_1$ für den betreffenden Kettenbruch einander gleich sind oder nicht.

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
17	5	3	2	2		
	6	2	1	5		
	7	2	2	3		
18	5	3	1	1	2	
	7	2	1	1	3	
19	5	3	1	4		
	6	3	6			
	7	2	1	2	2	
	8	2	2	1	2	
20	7	2	1	6		
21	5	4	5			
	8	2	1	1	1	2
22	5	4	2	2		
	7	3	7			
	9	2	2	4		
23	5	4	1	1	2	
	6	3	1	5		
	7	3	3	2		
	8	2	1	7		
	9	2	1	1	4	
	10	2	3	3		
24	5	4	1	4		
	7	3	2	3		
25	6	4	6			
	7	3	1	1	3	
	8	3	8			
	9	2	1	3	2	
	11	2	3	1	2	
26	5	5	5			
	7	3	1	2	2	
	9	2	1	8		
	11	2	2	1	3	
27	5	5	2	2		
	7	3	1	6		
	8	3	2	1	2	
	10	2	1	2	3	
	11	2	2	5		
28	5	5	1	1	2	
	9	3	9			
	11	2	1	1	5	
29	5	5	1	4		

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
29	6	4	1	5			
	7	4	7				
	8	3	1	1	1	2	
	9	3	4	2			
	10	2	1	9			
	11	2	1	1	1	3	
	12	2	2	2	2		
	13	2	4	3			
30	7	4	3	2			
	11	2	1	2	1	2	
	13	2	3	4			
31	5	6	5				
	6	5	6				
	7	4	2	3			
	8	3	1	7			
	9	3	2	4			
	10	3	10				
	11	2	1	4	2		
	12	2	1	1	2	2	
	13	2	2	1	1	2	
	14	2	4	1	2		
32	5	6	2	2			
	7	4	1	1	3		
	9	3	1	1	4		
	11	2	1	10			
	13	2	2	6			
33	5	6	1	1	2		
	7	4	1	2	2		
	8	4	8				
	10	3	3	3			
	13	2	1	1	6		
	14	2	2	1	4		
34	5	6	1	4			
	7	4	1	6			
	9	3	1	3	2		
	11	3	11				
	13	2	1	1	1	1	2
	15	2	3	1	3		
35	6	5	1	5			
	8	4	2	1	2		
	9	3	1	8			

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
35	11	3	5	2		
	12	2	1	11		
	13	2	1	2	4	
	16	2	5	3		
36	5	7	5			
	7	5	7			
	11	3	3	1	2	
	13	2	1	3	3	
37	5	7	2	2		
	6	6	6			
	7	5	3	2		
	8	4	1	1	1	2
	9	4	9			
	10	3	1	2	3	
	11	3	2	1	3	
	12	3	12			
	13	2	1	5	2	
	14	2	1	1	1	4
	15	2	2	7		
	16	2	3	5		
	17	2	5	1	2	
38	5	7	1	1	2	
	7	5	2	3		
	9	4	4	2		
	11	3	2	5		
	13	2	1	12		
	15	2	1	1	7	
	17	2	4	4		
39	5	7	1	4		
	7	5	1	1	3	
	8	4	1	7		
	10	3	1	9		
	11	3	1	1	5	
	14	2	1	3	1	2
	16	2	2	3	2	
	17	2	3	2	2	
40	7	5	1	2	2	
	9	4	2	4		
	11	3	1	1	1	3
	13	3	13			
	17	2	2	1	5	

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
41	5	8	5			
	6	6	1	5		
	7	5	1	6		
	8	5	8			
	9	4	1	1	4	
	10	4	10			
	11	3	1	2	1	2
	12	3	2	2	2	
	13	3	6	2		
	14	2	1	13		
	15	2	1	2	1	3
	16	2	1	1	3	2
	17	2	2	2	3	
	18	2	3	1	1	2
	19	2	6	3		
42	5	8	2	2		
	11	3	1	4	2	
	13	3	4	3		
	17	2	2	8		
	19	2	4	1	3	
43	5	8	1	1	2	
	6	7	6			
	7	6	7			
	8	5	2	1	2	
	9	4	1	3	2	
	10	4	3	3		
	11	3	1	10		
	12	3	1	1	2	2
	13	3	3	4		
	14	3	14			
	15	2	1	6	2	
	16	2	1	2	5	
	17	2	1	1	8	
	18	2	2	1	1	3
	19	2	3	1	4	
	20	2	6	1	2	
44	5	8	1	4		
	7	6	3	2		
	9	4	1	8		
	13	3	2	1	1	2
	15	2	1	14		

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
44	17	2	1	1	2	3	
	19	2	3	6			
45	7	6	2	3			
	8	5	1	1	1	2	
	11	4	11				
	13	3	2	6			
	14	3	4	1	2		
	16	2	1	4	3		
	17	2	1	1	1	5	
	19	2	2	1	2	2	
46	5	9	5				
	7	6	1	1	3		
	9	5	9				
	11	4	5	2			
	13	3	1	1	6		
	15	3	15				
	17	2	1	2	2	2	
	19	2	2	2	1	2	
	21	2	5	4			
47	5	9	2	2			
	6	7	1	5			
	7	6	1	2	2		
	8	5	1	7			
	9	5	4	2			
	10	4	1	2	3		
	11	4	3	1	2		
	12	3	1	11			
	13	3	1	1	1	1	2
	14	3	2	1	4		
	15	3	7	2			
	16	2	1	15			
	17	2	1	3	4		
	18	2	1	1	1	1	3
	19	2	2	9			
	20	2	2	1	6		
	21	2	4	5			
	22	2	7	3			
48	5	9	1	1	2		
	7	6	1	6			
	11	4	2	1	3		
	13	3	1	2	4		

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
48	17	2	1	4	1	2	
	19	2	1	1	9		
49	5	9	1	4			
	6	8	6				
	8	6	8				
	9	5	2	4			
	10	4	1	9			
	11	4	2	5			
	12	4	12				
	13	3	1	3	3		
	15	3	3	1	3		
	16	3	16				
	17	2	1	7	2		
	18	2	1	2	1	1	2
	19	2	1	1	2	1	2
	20	2	2	4	2		
	22	2	4	2	2		
	23	2	7	1	2		
50	7	7	7				
	9	5	1	1	4		
	11	4	1	1	5		
	13	3	1	5	2		
	17	2	1	16			
	19	2	1	1	1	2	2
	21	2	2	1	1	1	2
	23	2	5	1	3		
51	5	10	5				
	7	7	3	2			
	8	6	2	1	2		
	10	5	10				
	11	4	1	1	1	3	
	13	3	1	12			
	14	3	1	1	1	4	
	16	3	5	3			
	19	2	1	2	6		
	20	2	1	1	4	2	
	22	2	3	7			
	23	2	4	1	1	2	
52	5	10	2	2			
	7	7	2	3			
	9	5	1	3	2		

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
52	11	4	1	2	1	2
	15	3	2	7		
	17	3	17			
	19	2	1	2	1	4
	21	2	2	10		
	23	2	3	1	5	
53	5	10	1	1	2	
	6	8	1	5		
	7	7	1	1	3	
	8	6	1	1	1	2
	9	5	1	8		
	10	5	3	3		
	11	4	1	4	2	
	12	4	2	2	2	
	13	4	13			
	14	3	1	3	1	2
	15	3	1	1	7	
	16	3	3	5		
	17	3	8	2		
	18	2	1	17		
	19	2	1	3	1	3
	20	2	1	1	1	6
	21	2	1	1	10	
	22	2	2	2	4	
	23	2	3	3	2	
	24	2	4	1	4	
	25	2	8	3		
54	5	10	1	4		
	7	7	1	2	2	
	11	4	1	10		
	13	4	6	2		
	17	3	5	1	2	
	19	2	1	5	3	
	23	2	2	1	7	
	25	2	6	4		
55	6	9	6			
	7	7	1	6		
	8	6	1	7		
	9	6	9			
	12	4	1	1	2	2
	13	4	4	3		

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
55	14	3	1	13				
	16	3	2	3	2			
	17	3	4	4				
	18	3	18					
	19	2	1	8	2			
	21	2	1	1	1	1	2	
	23	2	2	1	1	4		
	24	2	3	2	3			
	26	2	8	1	2			
56	5	11	5					
	9	6	4	2				
	11	5	11					
	13	4	3	4				
	15	3	1	2	1	3		
	17	3	3	2	2			
	19	2	1	18				
	23	2	2	3	3			
	25	2	4	6				
57	5	11	2	2				
	7	8	7					
	8	7	8					
	10	5	1	2	3			
	11	5	5	2				
	13	4	2	1	1	2		
	14	4	14					
	16	3	1	1	3	2		
	17	3	2	1	5			
	20	2	1	5	1	2		
	22	2	1	1	2	4		
	23	2	2	11				
	25	2	3	1	1	3		
	26	2	5	5				
58	5	11	1	1	2			
	7	8	3	2				
	9	6	2	4				
	11	5	3	1	2			
	13	4	2	6				
	15	3	1	6	2			
	17	3	2	2	3			
	19	3	19					
	21	2	1	3	5			

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
58	23	2	1	1	11		
	25	2	3	8			
	27	2	6	1	3		
59	5	11	1	4			
	6	9	1	5			
	7	8	2	3			
	8	7	2	1	2		
	9	6	1	1	4		
	10	5	1	9			
	11	5	2	1	3		
	12	4	1	11			
	13	4	1	1	6		
	14	4	4	1	2		
	15	3	1	14			
	16	3	1	2	5		
	17	3	2	8			
	18	3	3	1	1	2	
	19	3	9	2			
	20	2	1	19			
	21	2	1	4	4		
	22	2	1	2	7		
	23	2	1	1	3	3	
	24	2	2	5	2		
	25	2	2	1	3	2	
	26	2	3	1	2	2	
	27	2	5	2	2		
	28	2	9	3			
60	7	8	1	1	3		
	11	5	2	5			
	13	4	1	1	1	1	2
	17	3	1	1	8		
	19	3	6	3			
	23	2	1	1	1	1	4
61	5	12	5				
	6	10	6				
	7	8	1	2	2		
	8	7	1	1	1	2	
	9	6	1	3	2		
	10	6	10				
	11	5	1	1	5		
	12	5	12				

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
61	13	4	1	2	4	
	14	4	2	1	4	
	15	4	15			
	16	3	1	4	3	
	17	3	1	1	2	3
	18	3	2	1	1	3
	19	3	4	1	3	
	20	3	20			
	21	2	1	9	2	
	22	2	1	3	2	2
	23	2	1	1	1	7
	24	2	1	1	5	2
	25	2	2	3	1	2
	26	2	2	1	8	
	27	2	3	1	6	
	28	2	5	1	1	2
	29	2	9	1	2	
62	5	12	2	2		
	7	8	1	6		
	9	6	1	8		
	11	5	1	1	1	3
	13	4	1	3	3	
	15	4	7	2		
	17	3	1	1	1	5
	19	3	3	1	4	
	21	2	1	20		
	23	2	1	2	3	2
	25	2	2	12		
	27	2	3	2	1	2
	29	2	7	4		
63	5	12	1	1	2	
	8	7	1	7		
	10	6	3	3		
	11	5	1	2	1	2
	13	4	1	5	2	
	16	3	1	15		
	17	3	1	2	2	2
	19	3	3	6		
	20	3	6	1	2	
	22	2	1	6	3	
	23	2	1	2	1	5

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
63	25	2	1	1	12		
	26	2	2	2	1	3	
	29	2	5	1	4		
64	5	12	1	4			
	7	9	7				
	9	7	9				
	11	5	1	4	2		
	13	4	1	12			
	15	4	3	1	3		
	17	3	1	3	4		
	19	3	2	1	2	2	
	21	3	21				
	23	2	1	3	1	1	2
	25	2	1	1	3	1	2
	27	2	2	1	2	3	
	29	2	4	1	5		
65	6	10	1	5			
	7	9	3	2			
	8	8	8				
	9	7	4	2			
	11	5	1	10			
	12	5	2	2	2		
	14	4	1	1	1	4	
	16	4	16				
	17	3	1	4	1	2	
	18	3	1	1	1	1	3
	19	3	2	2	1	2	
	21	3	10	2			
	22	2	1	21			
	23	2	1	4	1	3	
	24	2	1	2	2	3	
	27	2	2	2	5		
	28	2	3	9			
	29	2	4	7			
	31	2	10	3			
66	5	13	5				
	7	9	2	3			
	13	5	13				
	17	3	1	7	2		
	19	3	2	9			
	23	2	1	6	1	2	

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
66	25	2	1	1	1	3	2
	29	2	3	1	1	1	2
	31	2	7	1	3		
67	5	13	2	2			
	6	11	6				
	7	9	1	1	3		
	8	8	2	1	2		
	9	7	2	4			
	10	6	1	2	3		
	11	6	11				
	12	5	1	1	2	2	
	13	5	6	2			
	14	4	1	3	1	2	
	15	4	2	7			
	16	4	5	3			
	17	3	1	16			
	18	3	1	2	1	1	2
	19	3	1	1	9		
	20	3	2	1	6		
	21	3	5	4			
	22	3	22				
	23	2	1	10	2		
	24	2	1	3	1	4	
	25	2	1	2	8		
	26	2	1	1	2	1	3
	27	2	2	13			
	28	2	2	1	1	5	
	29	2	3	4	2		
	30	2	4	3	2		
	31	2	6	5			
	32	2	10	1	2		
68	5	13	1	1	2		
	7	9	1	2	2		
	9	7	1	1	4		
	11	6	5	2			
	13	5	4	3			
	15	4	1	1	7		
	19	3	1	1	2	1	2
	21	3	4	5			
	23	2	1	22			
	25	2	1	2	1	1	3

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
68	27	2	1	1	13		
	29	2	2	1	9		
	31	2	5	6			
69	5	13	1	4			
	7	9	1	6			
	8	8	1	1	1	2	
	10	6	1	9			
	11	6	3	1	2		
	13	5	3	4			
	14	4	1	13			
	16	4	3	5			
	17	4	17				
	19	3	1	1	1	2	2
	20	3	2	4	2		
	22	3	7	3			
	25	2	1	3	6		
	26	2	1	1	1	8	
	28	2	2	6	2		
	29	2	2	1	1	1	3
	31	2	4	2	3		
	32	2	6	2	2		
70	9	7	1	3	2		
	11	6	2	1	3		
	13	5	2	1	1	2	
	17	4	8	2			
	19	3	1	2	6		
	23	3	23				
	27	2	1	1	2	5	
	29	2	2	2	2	2	
	31	2	3	1	7		
	33	2	8	4			
71	5	14	5				
	6	11	1	5			
	7	10	7				
	8	8	1	7			
	9	7	1	8			
	10	7	10				
	11	6	2	5			
	12	5	1	11			
	13	5	2	6			
	14	5	14				

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
71	15	4	1	2	1	3	
	16	4	2	3	2		
	17	4	5	1	2		
	18	3	1	17			
	19	3	1	2	1	4	
	20	3	1	1	4	2	
	21	3	2	1	1	1	2
	22	3	4	2	2		
	23	3	11	2			
	24	2	1	23			
	25	2	1	5	4		
	26	2	1	2	1	2	2
	27	2	1	1	1	2	3
	28	2	1	1	6	2	
	29	2	2	4	3		
	30	2	2	1	2	1	2
	31	2	3	2	4		
	32	2	4	1	1	3	
	33	2	6	1	1	2	
	34	2	11	3			
72	5	14	2	2			
	7	10	3	2			
	11	6	1	1	5		
	13	5	1	1	6		
	17	4	4	4			
	19	3	1	3	1	3	
	23	3	7	1	2		
	25	2	1	7	3		
	29	2	2	14			
	31	2	3	10			
73	5	14	1	1	2		
	6	12	6				
	7	10	2	3			
	8	9	8				
	9	8	9				
	10	7	3	3			
	11	6	1	1	1	3	
	12	6	12				
	13	5	1	1	1	1	2
	14	5	4	1	2		
	15	4	1	6	2		

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
73	16	4	1	1	3	2	
	17	4	3	2	2		
	18	4	18				
	19	3	1	5	3		
	20	3	1	1	1	6	
	21	3	2	10			
	22	3	3	7			
	23	3	5	1	3		
	24	3	24				
	25	2	1	11	2		
	26	2	1	4	5		
	27	2	1	2	2	1	2
	28	2	1	1	1	1	5
	29	2	1	1	14		
	30	2	2	3	4		
	31	2	2	1	4	2	
	32	2	3	1	1	4	
	33	2	4	1	2	2	
	34	2	6	1	4		
	35	2	11	1	2		
74	5	14	1	4			
	7	10	1	1	3		
	9	8	4	2			
	11	6	1	2	1	2	
	13	5	1	2	4		
	15	4	1	14			
	17	4	2	1	5		
	19	3	1	8	2		
	21	3	1	1	10		
	23	3	4	1	1	2	
	25	2	1	24			
	27	2	1	2	1	6	
	29	2	1	1	4	3	
	31	2	2	1	1	2	2
	33	2	4	8			
	35	2	8	1	3		
75	7	10	1	2	2		
	8	9	2	1	2		
	11	6	1	4	2		
	13	5	1	3	3		
	14	5	2	1	4		

a	p	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
75	16	4	1	2	5			
	17	4	2	2	3			
	19	3	1	18				
	22	3	2	2	4			
	23	3	3	1	5			
	26	2	1	7	1	2		
	28	2	1	2	9			
	29	2	1	1	2	2	2	
	31	2	2	2	1	1	2	
	32	2	2	1	10			
	34	2	4	1	6			
76	5	15	5					
	7	10	1	6				
	9	8	2	4				
	11	6	1	10				
	13	5	1	5	2			
	15	5	15					
	17	4	2	8				
	21	3	1	1	1	1	2	
	23	3	3	3	2			
	25	3	25					
	27	2	1	4	2	2		
	29	2	1	1	1	1	3	
	31	2	2	4	1	2		
	33	2	3	3	3			
	35	2	5	1	5			
77	5	15	2	2				
	6	12	1	5				
	8	9	1	1	1	2		
	9	8	1	1	4			
	10	7	1	2	3			
	12	6	2	2	2			
	13	5	1	12				
	15	5	7	2				
	16	4	1	4	3			
	17	4	1	1	8			
	18	4	3	1	1	2		
	19	4	19					
	20	3	1	5	1	2		
	23	3	2	1	7			
	24	3	4	1	4			

a	p	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
77	25	3	12	2		
	26	2	1	25		
	27	2	1	5	1	3
	29	2	1	1	1	9
	30	2	1	1	3	4
	31	2	2	15		
	32	2	2	2	6	
	34	2	3	1	3	2
	36	2	7	5		
	37	2	12	3		
78	5	15	1	1	2	
	7	11	7			
	11	7	11			
	17	4	1	1	2	3
	19	4	9	2		
	23	3	2	1	1	4
	25	3	8	3		
	29	2	1	2	4	2
	31	2	1	1	15	
	35	2	4	2	1	2
	37	2	9	4		
79	5	15	1	4		
	6	13	6			
	7	11	3	2		
	8	9	1	7		
	9	8	1	3	2	
	10	7	1	9		
	11	7	5	2		
	12	6	1	1	2	2
	13	6	13			
	14	5	1	1	1	4
	15	5	3	1	3	
	16	4	1	15		
	17	4	1	1	1	5
	18	4	2	1	1	3
	19	4	6	3		
	20	3	1	19		
	21	3	1	3	5	
	22	3	1	1	2	4
	23	3	2	3	3	
	24	3	3	2	3	

a	p	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
79	25	3	6	4				
	26	3	26					
	27	2	1	12	2			
	28	2	1	4	1	1	2	
	29	2	1	2	1	1	1	2
	30	2	1	1	1	2	1	2
	31	2	1	1	4	1	2	
	32	2	2	7	2			
	33	2	2	1	1	6		
	34	2	3	11				
	35	2	3	1	8			
	36	2	5	7				
	37	2	7	2	2			
	38	2	12	1	2			
80	7	11	2	3				
	9	8	1	8				
	11	7	3	1	2			
	13	6	6	2				
	17	4	1	2	2	2		
	19	4	4	1	3			
	21	3	1	4	4			
	23	3	2	11				
	27	2	1	26				
	29	2	1	3	7			
	31	2	1	1	2	1	1	2
	33	2	2	2	1	4		
	37	2	6	6				
81	5	16	5					
	7	11	1	1	3			
	8	10	8					
	10	8	10					
	11	7	2	1	3			
	13	6	4	3				
	14	5	1	3	1	2		
	16	5	16					
	17	4	1	3	4			
	19	4	3	1	4			
	20	4	20					
	22	3	1	2	7			
	23	3	1	1	11			
	25	3	4	6				

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
81	26	3	8	1	2			
	28	2	1	8	3			
	29	2	1	3	1	5		
	31	2	1	1	1	1	2	2
	32	2	1	1	7	2		
	34	2	2	1	1	1	1	2
	35	2	3	5	2			
	37	2	5	3	2			
	38	2	7	1	1	2		
82	5	16	2	2				
	7	11	1	2	2			
	9	9	9					
	11	7	2	5				
	13	6	3	4				
	15	5	2	7				
	17	4	1	4	1	2		
	19	4	3	6				
	21	3	1	9	2			
	23	3	1	1	3	3		
	25	3	3	1	1	3		
	27	3	27					
	29	2	1	4	1	4		
	31	2	1	1	1	4	2	
	33	2	2	16				
	35	2	2	1	11			
	37	2	4	1	1	1	2	
	39	2	9	1	3			
83	5	16	1	1	2			
	6	13	1	5				
	7	11	1	6				
	8	10	2	1	2			
	9	9	4	2				
	10	8	3	3				
	11	7	1	1	5			
	12	6	1	11				
	13	6	2	1	1	2		
	14	5	1	13				
	15	5	1	1	7			
	16	5	5	3				
	17	4	1	7	2			
	18	4	1	1	1	1	3	

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
83	19	4	2	1	2	2	
	20	4	6	1	2		
	21	3	1	20			
	22	3	1	3	2	2	
	23	3	1	1	1	1	4
	24	3	2	5	2		
	25	3	3	8			
	26	3	5	5			
	27	3	13	2			
	28	2	1	27			
	29	2	1	6	4		
	30	2	1	3	3	2	
	31	2	1	2	10		
	32	2	1	1	2	6	
	33	2	1	1	16		
	34	2	2	3	1	3	
	35	2	2	1	2	4	
	36	2	3	3	1	2	
	37	2	4	9			
	38	2	5	2	3		
	39	2	7	1	4		
	40	2	13	3			
84	5	16	1	4			
	11	7	1	1	1	3	
	13	6	2	6			
	17	4	1	16			
	19	4	2	2	1	2	
	23	3	1	1	1	7	
	25	3	2	1	3	2	
	29	2	1	8	1	2	
	31	2	1	2	2	4	
	37	2	3	1	2	3	
85	6	14	6				
	7	12	7				
	8	10	1	1	1	2	
	9	9	2	4			
	11	7	1	2	1	2	
	12	7	12				
	13	6	1	1	6		
	14	6	14				
	16	5	3	5			

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
85	18	4	1	2	1	1	2
	19	4	2	9			
	21	4	21				
	22	3	1	6	3		
	23	3	1	2	3	2	
	24	3	1	1	5	2	
	26	3	3	1	2	2	
	27	3	6	1	3		
	28	3	28				
	29	2	1	13	2		
	31	2	1	2	1	7	
	32	2	1	1	1	10	
	33	2	1	1	2	1	4
	36	2	2	1	3	3	
	37	2	3	2	1	3	
	38	2	4	4	2		
	39	2	5	1	1	3	
	41	2	13	1	2		
86	5	17	5				
	7	12	3	2			
	9	9	1	1	4		
	11	7	1	4	2		
	13	6	1	1	1	1	2
	15	5	1	2	1	3	
	17	5	17				
	19	4	1	1	9		
	21	4	10	2			
	23	3	1	2	1	5	
	25	3	2	3	1	2	
	27	3	5	2	2		
	29	2	1	28			
	31	2	1	3	2	3	
	33	2	1	1	1	1	6
	35	2	2	5	3		
	37	2	3	12			
	39	2	4	1	7		
	41	2	10	4			
87	5	17	2	2			
	7	12	2	3			
	8	10	1	7			
	10	8	1	2	3		

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
87	11	7	1	10			
	13	6	1	2	4		
	14	6	4	1	2		
	16	5	2	3	2		
	17	5	8	2			
	19	4	1	1	2	1	2
	20	4	2	1	6		
	22	3	1	21			
	23	3	1	3	1	1	2
	25	3	2	12			
	26	3	2	1	8		
	28	3	9	3			
	31	2	1	4	6		
	32	2	1	2	1	1	4
	34	2	1	1	3	1	3
	35	2	2	17			
	37	2	2	1	5	2	
	38	2	3	2	5		
	40	2	5	1	2	2	
	41	2	8	5			
88	5	17	1	1	2		
	7	12	1	1	3		
	9	9	1	3	2		
	13	6	1	3	3		
	15	5	1	6	2		
	17	5	5	1	2		
	19	4	1	1	1	2	2
	21	4	5	4			
	23	3	1	4	1	3	
	25	3	1	1	12		
	27	3	3	1	6		
	29	3	29				
	31	2	1	5	5		
	35	2	1	1	17		
	37	2	2	1	1	1	4
	39	2	3	1	9		
	41	2	6	1	5		
89	5	17	1	4			
	6	14	1	5			
	7	12	1	2	2		
	8	11	8				

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
89	9	9	1	8					
	10	8	1	9					
	11	8	11						
	12	7	2	2	2				
	13	6	1	5	2				
	14	6	2	1	4				
	15	5	1	14					
	16	5	1	1	3	2			
	17	5	4	4					
	18	4	1	17					
	19	4	1	2	6				
	20	4	2	4	2				
	21	4	4	5					
	22	4	22						
	23	3	1	6	1	2			
	24	3	1	2	2	3			
	25	3	1	1	3	1	2		
	26	3	2	2	1	3			
	27	3	3	2	1	2			
	28	3	5	1	1	2			
	29	3	14	2					
	30	2	1	29					
	31	2	1	6	1	3			
	32	2	1	3	1	1	3		
	33	2	1	2	3	3			
	34	2	1	1	1	1	1	1	2
	35	2	1	1	5	3			
	36	2	2	8	2				
	37	2	2	2	7				
	38	2	2	1	12				
	39	2	3	1	1	5			
	40	2	4	2	4				
	41	2	5	1	6				
	42	2	8	2	2				
	43	2	14	3					
90	7	12	1	6					
	11	8	5	2					
	13	6	1	12					
	17	5	3	2	2				
	19	4	1	2	1	4			
	23	3	1	10	2				

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
90	29	3	9	1	2		
	31	2	1	9	3		
	37	2	2	3	5		
	41	2	5	8			
	43	2	10	1	3		
91	5	18	5				
	6	15	6				
	8	11	2	1	2		
	9	10	9				
	10	9	10				
	11	8	3	1	2		
	12	7	1	1	2	2	
	15	6	15				
	16	5	1	2	5		
	17	5	2	1	5		
	18	5	18				
	19	4	1	3	1	3	
	20	4	1	1	4	2	
	22	4	7	3			
	23	3	1	22			
	24	3	1	3	1	4	
	25	3	1	1	1	3	2
	27	3	2	1	2	3	
	29	3	7	4			
	30	3	30				
	31	2	1	14	2		
	32	2	1	5	2	2	
	33	2	1	3	8		
	34	2	1	2	11		
	36	2	1	1	8	2	
	37	2	2	5	1	2	
	38	2	2	1	1	7	
	40	2	3	1	1	1	3
	41	2	4	1	1	4	
	43	2	8	1	1	2	
	44	2	14	1	2		
92	5	18	2	2			
	7	13	7				
	9	10	4	2			
	11	8	2	1	3		
	13	7	13				

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
92	15	6	7	2			
	17	5	2	2	3		
	19	4	1	5	3		
	21	4	2	1	1	1	2
	25	3	1	2	8		
	27	3	2	2	5		
	29	3	5	1	4		
	31	2	1	30			
	33	2	1	3	1	2	2
	35	2	1	1	1	2	4
	37	2	2	18			
	39	2	2	1	3	1	2
	41	2	4	10			
	43	2	7	6			
93	5	18	1	1	2		
	7	13	3	2			
	8	11	1	1	1	2	
	10	9	3	3			
	11	8	2	5			
	13	7	6	2			
	14	6	1	1	1	4	
	16	5	1	4	3		
	17	5	2	8			
	19	4	1	8	2		
	20	4	1	1	1	6	
	22	4	4	2	2		
	23	4	23				
	25	3	1	2	1	1	3
	26	3	1	1	2	1	3
	28	3	3	9			
	29	3	4	1	5		
	32	2	1	9	1	2	
	34	2	1	2	1	3	2
	35	2	1	1	1	11	
	37	2	1	1	18		
	38	2	2	4	4		
	40	2	3	13			
	41	2	3	1	2	1	2
	43	2	6	7			
	44	2	8	1	4		
94	5	18	1	4			

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
94	7	13	2	3			
	9	10	2	4			
	11	8	1	1	5		
	13	7	4	3			
	15	6	3	1	3		
	17	5	1	1	8		
	19	4	1	18			
	21	4	2	10			
	23	4	11	2			
	25	3	1	3	6		
	27	3	2	13			
	29	3	4	7			
	31	3	31				
	33	2	1	5	1	1	2
	35	2	1	2	5	2	
	37	2	1	1	5	1	2
	39	2	2	2	3	2	
	41	2	3	2	2	2	
	43	2	5	2	1	2	
	45	2	11	4			
95	6	15	1	5			
	7	13	1	1	3		
	8	11	1	7			
	9	10	1	1	4		
	11	8	1	1	1	3	
	12	7	1	11			
	13	7	3	4			
	14	6	1	3	1	2	
	16	5	1	15			
	17	5	1	1	2	3	
	18	5	3	1	1	2	
	21	4	1	1	10		
	22	4	3	7			
	23	4	7	1	2		
	24	3	1	23			
	26	3	1	1	1	8	
	27	3	1	1	13		
	28	3	2	1	1	5	
	29	3	3	1	1	1	2
	31	3	15	2			
	32	2	1	31			

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
95	33	2	1	7	4			
	34	2	1	3	1	6		
	36	2	1	1	1	3	3	
	37	2	1	1	3	5		
	39	2	2	3	2	2		
	41	2	3	6	2			
	42	2	3	1	4	2		
	43	2	4	1	3	2		
	44	2	6	3	2			
	46	2	15	3				
96	5	19	5					
	7	13	1	2	2			
	11	8	1	2	1	2		
	13	7	2	1	1	2		
	17	5	1	1	1	5		
	19	5	19					
	23	4	5	1	3			
	25	3	1	5	4			
	29	3	3	4	2			
	31	3	10	3				
	35	2	1	2	1	8		
	37	2	1	1	2	7		
	41	2	2	1	13			
	43	2	4	3	3			
97	5	19	2	2				
	6	16	6					
	7	13	1	6				
	8	12	8					
	9	10	1	3	2			
	10	9	1	2	3			
	11	8	1	4	2			
	12	8	12					
	13	7	2	6				
	14	6	1	13				
	15	6	2	7				
	16	6	16					
	17	5	1	2	2	2		
	18	5	2	1	1	3		
	19	5	9	2				
	20	4	1	5	1	2		
	21	4	1	1	1	1	1	2

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
97	22	4	2	2	4			
	23	4	4	1	1	2		
	24	4	24					
	25	3	1	7	3			
	26	3	1	2	1	2	2	
	27	3	1	1	2	5		
	28	3	2	6	2			
	29	3	2	1	9			
	30	3	4	3	2			
	31	3	7	1	3			
	32	3	32					
	33	2	1	15	2			
	34	2	1	5	1	4		
	35	2	1	3	2	1	2	
	36	2	1	2	3	1	2	
	37	2	1	1	1	1	1	4
	38	2	1	1	4	4		
	39	2	2	19				
	40	2	2	2	1	5		
	41	2	2	1	2	1	3	
	42	2	3	4	3			
	43	2	3	1	10			
	44	2	4	1	8			
	45	2	6	2	3			
	46	2	9	5				
	47	2	15	1	2			
98	5	19	1	1	2			
	9	10	1	8				
	11	8	1	10				

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
98	13	7	1	1	6		
	15	6	1	1	7		
	17	5	1	3	4		
	19	5	6	3			
	23	4	3	1	5		
	25	3	1	11	2		
	27	3	1	1	1	2	3
	29	3	2	1	1	1	3
	31	3	6	5			
	33	2	1	32			
	37	2	1	1	1	5	2
	39	2	1	1	19		
	41	2	2	1	1	3	2
	43	2	3	1	1	2	2
	45	2	5	1	1	1	2
	47	2	11	1	3		
99	5	19	1	4			
	7	14	7				
	8	12	2	1	2		
	10	9	1	9			
	13	7	1	1	1	1	2
	14	7	14				
	16	6	5	3			
	17	5	1	4	1	2	
	19	5	4	1	3		
	20	4	1	19			
	23	4	3	3	2		
	25	3	1	24			
	26	3	1	4	5		

a	ρ	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
99	28	3	1	1	6	2	
	29	3	2	2	2	2	
	31	3	5	6			
	32	3	10	1	2		
	34	2	1	10	3		
	35	2	1	4	1	5	
	37	2	1	2	12		
	38	2	1	1	1	1	7
	40	2	2	9	2		
	41	2	2	2	2	3	
	43	2	3	3	4		
	46	2	6	1	1	3	
	47	2	9	2	2		
100	7	14	3	2			
	9	11	9				
	11	9	11				
	13	7	1	2	4		
	17	5	1	7	2		
	19	5	3	1	4		
	21	4	1	3	5		
	23	4	2	1	7		
	27	3	1	2	2	1	2
	29	3	2	4	3		
	31	3	4	2	3		
	33	3	33				
	37	2	1	2	2	1	3
	39	2	1	1	3	2	2
	41	2	2	3	1	1	2
	43	2	3	14			
	47	2	7	1	5		

Aus dieser Tabelle geht hervor, dass die Anzahl (s) der Theilnenner, welche bei der Verwandlung der verschiedenen Specialisirungen von $\frac{\rho}{a}$ in Kettenbrüche erhalten werden, für $\rho < \frac{1}{2}a$ bis incl. $a = 100$ zumeist gleich 3 oder 4 oder 5 ist und nur ein einziges Mal, nämlich für $\rho = 34$, $a = 89$ auf 8 steigt. Demgemäss besitzen auch die in unserem empirischen Schema nicht enthaltenen Typengleichungen bis incl. $a = 100$ im Allgemeinen einen einfachen Bau, und verdient im Anschlusse hieran noch speciell die Thatsache eine nähere Erörterung, dass

unter sämmtlichen, einem und demselben Werthe von s und beliebigen Specialisirungen von k zugehörigen Knotenverbindungen stets jene am einfachsten gestaltet sind, für welche $\frac{\rho}{a}$ den Quotienten von irgend zwei unmittelbar aufeinander folgenden Gliedern der Zahlenreihe: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ... vorstellt, deren n^{tes} Glied: e_n durch die Gleichung:

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right\}$$

characterisirt wird. In allen derartigen Fällen ist nämlich $\frac{\rho}{a}$ gleichzeitig ein Näherungsbruch des ins Unendliche fortlaufenden Kettenbruches:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdot\cdot\cdot \text{ in inf.}}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

also für $s = 2r-1$: $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2r-2} = 1$, $a_{2r-1} = 2$,
dagegen für $s = 2r$: $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2r-1} = 1$, $a_{2r} = 2$,
für welche Substitutionen die Gleichungen (𝔄) und (𝔅) in der That ihre einfachsten Formen:

$$T = [(A_1 A_2 \ldots A_{r-1}) A_{r-1}^{\mathfrak{u}}]$$

beziehungsweise:

$$T = [(A_1 A_2 \ldots A_{r-1}) A_{r-1} B(A_1 A_2 \ldots A_{r-1})]$$

annehmen, indem sich A_1, $A_2 \ldots A_{r-1}$ hiebei auf die Ausdrücke: $A_1 = AB$, $A_2 = A_1 B A_1$, $A_3 = A_2 B(A_1 A_2)$, $A_4 = A_3 B(A_1 A_2 A_3) \ldots$ $A_{r-1} = A_{r-2} B(A_1 A_2 \ldots A_{r-2})$ reduciren. [1]

— Unsere letzten, den zwei allgemeinen Typengleichungen (𝔄) und (𝔅) entspringenden Folgerungen beziehen sich auf die Substitution: $k = 0$, für welche die beiden Relationen gemäss dem fünften Erfahrungssatze gleichzeitig jene Knotenver-

[1] Hienach bestehen auch für $\rho_1 = 2$, $\rho_2 = \rho_3 = \ldots \rho_{s-1} = 1$, $\rho_s = 2$ lauter relativ einfache Typengleichungen, indem der fragliche Typus kraft den gemachten Voraussetzungen — unter $[\varphi(A,B)]$ den, der oben characterisirten Typenreihe angehörigen Typus für $\rho = e_s$, $a = e_{s-1} + e_s = e_{s+1}$ verstanden — von Fall zu Fall direct durch Bildung des symbolischen Productes: $A\varphi(A.BA)$ erhalten wird.

bindungen charakterisiren, welche im ersten und zweiten Hauptfalle für $u = \rho$, $t = -a$ erhalten werden. Da nun der Quotient $\frac{a}{\rho}$ im ersten Hauptfalle mit:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_{2r-1}}}}, \text{ im zweiten mit: } a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_{2r}}}}$$

identisch ist, und der Factor: $A^{a_1-1} = (+)_0^{a_1-1}$, sobald er in dem betreffenden symbolischen Producte an erster Stelle steht, gemäss früheren Überlegungen für den Typus der zugehörigen Knotenverbindung gegenstandslos wird, resultiren für die erwähnte Specialisirung von k unter Anwendung der Abkürzungen:

$$(+)_{a_1} = C,\ (+)_{a_1+1} = D;\ C(DC^{a_2-1})^{a_3} = C_1,$$
$$C_1(DC^{a_2-1}C_1^{a_4})^{a_5} = C_2,\ C_2(DC^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6})^{a_7} = C_3,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$C_{n-2}(DC^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6}C_3^{a_8}\cdots C_{n-2}^{a_{2n-2}})^{a_{2n-1}} = C_{n-1},$$
$$C_{n-1}(DC^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6}C_3^{a_8}\cdots C_{n-1}^{a_{2n}})^{a_{2n+1}} = C_n$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

die beiden allgemeinen Transformationsgleichungen:

$$(\mathfrak{E})\ \ldots\ [A_1^{a_3}A_2^{a_5}A_3^{a_7}\cdots A_{r-1}^{a_{2r-1}}] =$$
$$= [(C^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6}\cdots C_{r-2}^{a_{2r-2}})C_{r-2}(DC^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6}\cdots C_{r-2}^{a_{2r-2}})^{a_{2r-1}-1}],$$
$$(\mathfrak{F})\ \ldots$$
$$[(A_1^{a_3}A_2^{a_5}\cdots A_{r-1}^{a_{2r-1}})A_{r-1}(BA^{a_1-1}A_1^{a_3}A_2^{a_5}\cdots A_{r-1}^{a_{2r-1}})^{a_{2r}-1}] =$$
$$= [C^{a_2-1}C_1^{a_4}C_2^{a_6}C_3^{a_8}\cdots C_{r-1}^{a_{2r}}],$$

welche selbstverständlicher Weise auch nach Vertauschung des Symboles (+) mit (—) giltig bleiben.

In jeder derselben charakterisirt das linker Hand stehende symbolische Product eine Knotenverbindung der $(a-a_1-1)^{ten}$ Ordnung, in welcher die Windungszahlen von $\{(a+1)-(a_1+\rho)\}$ Knoten verschwinden, während jene der $(\rho-1)$ übrigen Knoten den gemeinsamen Werth 1 besitzen.

Unsere beiden Gleichungen besagen also in Übereinstimmung mit einem früheren Erfahrungssatze, dass jede derartige Knotenverbindung in eine solche $(\rho-2)^{ter}$ Ordnung transformirbar ist, welche sich aus $\{(a_1+1)\rho-a\}$ Knoten a_1^{ter} Art und $(a-a_1\rho-1)$ Knoten $(a_1+1)^{ter}$ Art zusammensetzt.

Hiebei entsprechen a und ρ in der ersten Transformationsgleichung den Zahlen: N_{2r-1} und Z_{2r-1}, in der zweiten hingegen den Zahlen: N_{2r} und Z_{2r}, lassen sich mithin von Fall zu Fall direct berechnen, indem man aus den gegebenen Specialisirungen von $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2r-1}$ respective $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{2r}$ den Kettenbruch:

$$\frac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_{2r-1}}}} \quad \text{beziehungsweise:} \quad \frac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_{2r}}}}$$

construirt und denselben hierauf in einen gewöhnlichen Bruch verwandelt.

Die vier wichtigsten, aus den zwei allgemeinen Transformationsgleichungen hervorgehenden specielleren Relationen sind folgende:

$$(\alpha')\ldots[A(BA^{a_1}-1)^{a_2}-1]=[(BA^{a_1}-1)^{a_2}-1]=[C^{a_2}-1],$$

$$(\beta')\ldots[\{A(BA^{a_1}-1)^{a_2}\}^{a_3}]=[C^{a_2}(DC^{a_2}-1)^{a_3}-1],$$

$$(\gamma')\ldots[A_1^{a_2+1}(BA^{a_1}-1\,A_1^{a_3})^{a_4}-1]=[C^{a_2}-1\,\{C(DC^{a_2}-1)^{a_3}\}^{a_4}],$$

$$(\delta')\ldots[A_1^{a_3}\{A_1(BA^{a_1}-1\,A_1^{a_3})^{a_4}\}^{a_5}]=$$
$$=[C^{a_2}-1\,C_1^{a_4+1}(DC^{a_2}-1\,C_1^{a_4})^{a_5}-1],$$

und es fällt nicht schwer, uns von ihrer Richtigkeit auch anderweitig zu überzeugen.

Setzen wir nämlich in (α'): $a_1=p+1$, $a_2=q+1$, in (β'): $a_1=a_3=2$, $a_2=p$; $a_1=1$, $a_2=p$, $a_3=q$; $a_1=p$, $a_2=1$, $a_3=q$, ferner in (γ'): $a_1=a_4=2$, $a_2=a_3=1$; $a_1=a_2=1$, $a_3=p-1$, $a_4=2$; $a_1=a_3=1$, $a_2=p$, $a_4=q+1$ und in (δ'): $a_1=a_2=a_3=a_4=1$, $a_5=2$, so ergeben sich nach einigen naheliegenden und daher keiner Erläuterung bedürftigen Umformungen jene acht Transformationsgleichungen, zu welchen wir seinerzeit auf empirischem Wege gelangt sind.

Nachdem hiemit die vollständige Charakteristik jener Knotenverbindungen, welche in einem unverdrehten, biegsamen Ringe durch Ausführung eines Schnittes erster Art entstehen können, gegeben ist, haben wir schliesslich noch die Frage zu discutiren, ob sich die von uns entdeckten Gesetze nicht auch auf Grundlage einer bedeutend geringeren Anzahl von Experimenten mit derselben Sicherheit ableiten lassen?

Hiebei erscheint die Grenze, bis zu welcher man in der Reduction der Experimente herabgehen kann, indirect dadurch präcisirt, dass die noch übrig bleibenden Experimente keine empirischen Regeln zur Typenbestimmung der jeweiligen Knotenverbindung liefern dürfen, welche mit den Resultaten der unberücksichtigt gebliebenen Versuche in theilweisem Widerspruche stehen und demgemäss in letzter Linie auch auf unrichtige allgemeine Typengleichungen führen würden.

Dies wäre zunächst der Fall, wenn man sich bei der Aufstellung einer allgemeinen Formel für T lediglich auf jene leicht ausführbaren Versuche stützen würde, welche sich unter Zulassung beliebiger negativer Drehungszahlen auf die Specialisirungen: $u = 2, 3, 4$ beschränken. Man würde dann direct auf die allgemeine symbolische Gleichung:

$$T = [(+)_k^{\alpha-\rho}(+)_{k+1}^{\rho-1}]$$

geführt werden, welche zwar die Anzahl und die Arten der Knoten allgemein richtig angibt, dagegen deren jeweilige Anordnung längs ihrer gemeinsamen Basis bereits für $u = 5$, $t = -(5k+2)$ falsch bestimmt, indem eine Knotenverbindung von dem Typus: $[(+)_k^2(+)_{k+1}(+)_k]$ durch keinerlei Transformationen in eine solche von dem Typus: $[(+)_k^3(+)_{k+1}]$ verwandelt werden kann.

Zieht man jedoch ausser den drei genannten Versuchsreihen auch noch die den Specialisirungen: $u = 5, 8, 10$ zugehörigen Experimente in Betracht, so ergeben sich für die Typenbestimmung die nachstehenden empirischen Regeln, welche eine ungleich weitergehende praktische Anwendbarkeit besitzen:

(1) Ist allgemein: $\frac{b}{a} = k + \frac{\rho}{a}$, so besitzt der erste Knoten der betreffenden Knotenverbindung $(a-2)^{ter}$ Ordnung immer die Windungszahl: $w_1 = k$, während jene des zweiten Knotens: w_2 gleich k oder $k+1$ wird, je nachdem der ausnahmslos von $\frac{1}{2}$ verschiedene Quotient: $\frac{\rho-1}{a-2} = \mu$ kleiner oder grösser als $\frac{1}{2}$ ausfällt.

(2) Die Windungszahl w_3 des dritten Knotens ist gleich k oder $k+1$, je nachdem der durch die Vertauschung von μ mit 0 beziehungsweise 1 verursachte Fehler[1]: δ_1 die Summe: $S_1 = \delta_1 + \mu$ kleiner oder grösser als $\frac{1}{2}$ macht. Sobald jedoch S_1 mit $\frac{1}{2}$ coïncidirt, hat man w_3 für $\rho < \frac{1}{2}a$ gleich k, für $\rho > \frac{1}{2}a$ gleich $k+1$ zu setzen.

(3) In ganz derselben Weise bestimmen sich die Windungszahlen: $w_4, w_5 \ldots w_{a-1}$ des vierten, fünften, ... $(a-1)^{ten}$ Knotens auf Grundlage der Summen:

$$S_2 = \delta_2 + \mu, \; S_3 = \delta_3 + \mu, \ldots S_{a-3} = \delta_{a-3} + \mu,$$

in welchen $\delta_2, \delta_3, \ldots \delta_{a-3}$ die bei der Vertauschung von $S_1, S_2, \ldots S_{a-4}$ mit 0 respective 1 entstandenen Fehler bedeuten. Hiebei liefert der specielle Summenwerth: $\frac{1}{2}$ die Windungszahlen: k, $k+1$ stets alternirend, muss also für $\rho < \frac{1}{2}a$ bei seinem — vom Ausgangspunkte der Rechnung an gezählten — ersten, dritten, fünften ... Auftreten mit k, bei seinem zweiten, vierten, sechsten ... Auftreten mit $k+1$ identificirt werden, während für $\rho > \frac{1}{2}a$ das Umgekehrte stattfindet.

Dass diese Regeln für $\rho = 1$ und $\rho = a-1$ jederzeit richtig bleiben, ist in Anbetracht ihrer Formulirung unmittelbar evident.

---

[1] Hiebei verstehen wir unter: „Fehler" stets die Differenz zwischen der gegebenen und der substituirten Zahl, so dass beispielsweise δ_1 den Werth μ oder $\mu-1$ besitzt, je nachdem μ mit 0 oder mit 1 vertauscht wird.

Dieselben liefern ferner für $\rho = 2$, $a = 2m+1$ gemäss dem Schema:

$$\mu = \frac{\rho-1}{a-2} = \frac{1}{2m-1} < \frac{1}{2}, \quad w_2 = k, \quad \delta_1 = \frac{1}{2m-1};$$

$$S_1 = \delta_1 + \mu = \frac{2}{2m-1} < \frac{1}{2}, \quad w_3 = k, \quad \delta_2 = \frac{2}{2m-1};$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$S_{m-2} = \delta_{m-2} + \mu = \frac{m-1}{2m-1} < \frac{1}{2}, \quad w_m = k, \quad \delta_{m-1} = \frac{m-1}{2m-1};$$

$$S_{m-1} = \delta_{m-1} + \mu = \frac{m}{2m-1} > \frac{1}{2}, \quad w_{m+1} = k+1, \quad \delta_m = -\frac{m-1}{2m-1};$$

$$S_m = \delta_m + \mu = -\frac{m-2}{2m-1} < \frac{1}{2}, \quad w_{m+2} = k, \quad \delta_{m+1} = -\frac{m-2}{2m-1};$$

$$S_{m+1} = \delta_{m+1} + \mu = -\frac{m-3}{2m-1} < \frac{1}{2}, \quad w_{m+3} = k, \quad \delta_{m+2} = -\frac{m-3}{2m-1}$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$S_{2m-2} = \delta_{2m-2} + \mu = 0 < \frac{1}{2}, \quad w_{2m} = k, \quad \delta_{2m-1} = 0$$

lauter mit der Erfahrung übereinstimmende Resultate, und überzeugt man sich im Anschlusse hieran leicht, dass von den Substitutionen: $\rho = \frac{a-2}{2}, \frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{a+2}{2}, a-2$ das Gleiche gilt.

Dagegen resultiren für die übrigen Specialisirungen von ρ bereits innerhalb jener Grenzen, welche durch unser empirisches Schema gegeben sind, acht falsche Typengleichungen, nämlich für:

$$t = -(13k+3) : T = [\{(+)_k^3 (+)_{k+1} (+)_k^2\}^2],$$

$$\text{„ „} \quad -(13k+4) : T = [\{(+)_k^2 (+)_{k+1} (+)_k\}^3],$$

$$\text{„ „} \quad -(13k+9) : T = [\{(+)_k (+)_{k+1}\} \{(+)_k (+)_{k+1}^3\}^2 \{(+)_k (+)_{k+1}\}],$$

$$\text{„ „} \quad -(13k+10) : T = [\{(+)_k (+)_{k+1}^2\}^2 (+)_{k+1}^3 \{(+)_k (+)_{k+1}^2\}],$$

$$\text{„ „} \quad -(16k+3) : T = [(+)_k \{(+)_k^3 (+)_{k+1} (+)_k^3\}^2],$$

$$\text{„ „} \quad -(16k+5) : T = [(+)_k \{(+)_k (+)_{k+1} (+)_k^3 (+)_{k+1} (+)_k\}^2],$$

$$\text{„ „} \quad -(16k+11) : T = [(+)_k \{(+)_{k+1} (+)_k (+)_{k+1}^3 (+)_k (+)_{k+1}\}^2],$$

$$\text{„ „} \quad -(16k+13) : T = [(+)_k \{(+)_{k+1}^3 (+)_k (+)_{k+1}^3\}^2].$$

— Uebrigens stehen die angeführten Relationen auch nur hinsichtlich der Anordnung der Knoten k^{ter} und $(k+1)^{ter}$ Art längs ihrer gemeinsamen Basis im Widerspruche mit der Erfahrung, während sie deren Anzahl von Fall zu Fall richtig liefern, ja sogar dem allgemeinen Satze (b) vollständig genügen.

In Hinblick auf diese Ergebnisse muss demnach die zuletzt aufgeworfene Frage dahin beantwortet werden, dass, ehe die Richtigkeit der beiden Hilfssätze (A) und (B) theoretisch erwiesen ist, eine gründliche experimentelle Prüfung der von mir aufgestellten Gesetze mindestens noch die Durchführung jener Experimente erheischt, welche ich behufs Ermittlung der Typengleichungen für $u = 13$, $t = -(13k+\rho)$ angestellt habe. Sobald es jedoch gelingt, die beiden Hilfssätze (A) und (B) durch theoretische Betrachtungen zu gewinnen, genügt zur Entwicklung aller hier besprochenen Typengleichungen die Constatirung der einfachen Thatsache, dass ein in zwei Umläufen mit einer Drehung von $3\times360°$ in sich selbst zurückkehrender Schnitt erster Art in einem beliebigen unverdrehten Ringe einen Knoten erster Art erzeugt.

VII. SITZUNG VOM 8. MÄRZ 1883.

Herr Dr. M. Kretschy in Wien dankt für die ihm von der Akademie neuerdings gewährte Subvention zur Beendigung seiner Untersuchung über die Kynurensäure.

Die Direction der Naturforschenden Gesellschaft in Danzig übermittelt den ersten Band des von ihr herausgegebenen Werkes: „Die Flora des Bernsteins und ihre Beziehung zur Flora der Tertiärformation und der Gegenwart", bearbeitet von H. R. Goeppert und A. Menge.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach in Prag übersendet eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung, betitelt: „Versuche und Bemerkungen über das Blitzableitungssystem des Herrn Melsens."

Das c. M. Herr Prof. Dr. Const. Freih. v. Ettingshausen in Graz übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Beitrag zur Kenntniss der Tertiärflora der Insel Java."

Das c. M. Herr Prof. L. Pfaundler in Innsbruck übersendet eine Abhandlung: „Über die Mantelringmaschine von Kravogl und deren Verhältniss zur Maschine von Pacinotti-Gramme."

Das w. M. Herr Hofrath v. Hochstetter überreicht als Obmann der prähistorischen Commission der mathem.-naturw. Classe den sechsten Bericht dieser Commission über die Arbeiten im Jahre 1882.

Ferner überreicht Herr Hofrath v. Hochstetter eine für die Denkschriften bestimmte Abhandlung unter dem Titel: „Die neuesten Funde auf den Gräberfeldern von Watsch und St. Margarethen in Krain und der Culturkreis der Hallstätter Periode."

Das w. M. Herr Director Dr. Steindachner überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn Dr. L. Döderlein ausgeführte Abhandlung unter dem Titel: „Beiträge zur Kenntniss der Fische Japans" (I.) auf Grundlage der von Dr. Döderlein

während eines dreijährigen Aufenthaltes in Tokio gemachten Sammlungen.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung: „Über einen Correspondenzsatz".

Ferner überreicht Herr Prof. Weyr eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. C. Le Paige an der Universität zu Lüttich: „Über eine Eigenschaft der Flächen zweiten Grades."

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. Über Derivate des Pyrens von den Herren Dr. Guido Goldschmiedt und Dr. Rudolf Wegscheider.
2. „Über einige Abkömmlinge der Opiansäure", von Herrn Dr. Rudolf Wegscheider.

Das w. M. Herr Prof. E. Brücke überreicht eine Abhandlung betitelt: „Über das Alkophyr und über die wahre und die sogenannte Biuretreaction."

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin. 2e série. Tome XII. 47e année. Nr. 8. Paris, 1883; 8°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXX 1882—83. Serie terza. Transunti. Vol. VII. Fascicolo 3. Roma, 1883; 4°

Annuario marittimo per l'anno 1883. XXXIII. Annata. Trieste, 1883; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXI. Jahrgang. Nr. 6 u. 7. Wien, 1883; 8°.

Associazione meteorologica italiana: Atti della prima riunione. Torino, 1881; 8°. — La Meteorologia e la Fisica terrestre al III congresso geographico internazionale di Venezia. Relazione del P. Francesco Denza. Roma, 1882; 8°. — Intorno alla Aurora polare del 31 gennaio 1881. Nota del P. Francesco Denza. Torino, 1881; 8°. — Amplitudine della Oscillazione diurna della declinazione magnetica ottenuta all'Osservatorio del R. Collegio Carlo Alberto in Moncalieri negli anni 1879 e 1880. Nota del P. Francesco Denza. Torino, 1881; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VII. Nr. 14 u. 15. Cöthen, 1882; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences Tome XCVI, Nr. 8. Paris, 1883; 4°.

Dewalque, G.: Sur l'origine corallienne des calcaires devoniens de la Belgique. Bruxelles, 1882; 8°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte, XVI. Jahrgang. Nr. 3. Berlin, 1883; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXVI Nr. 1. Wien, 1882; 8°.

Gewerbe-Verein, niederösterr.: Wochenschrift. XLIV. Jahrg. Nr. 6—9. Wien, 1883; 4°.

Hauer, Fr. v.: Berichte über die Wasserverhältnisse in den Kesselthälern von Krain. Wien, 1883; 4°.

Heidelberg, Universität: Akademische Schriften pro 1882. 8 Stücke; 8°.

Hydrographisches Amt, k. k. Marine-Bibliothek: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens. Vol. X. Nr. 12. Jahrgang 1882; 8°.

Ingenieur- und Architekten-Verein, österreichischer: Wochenschrift. VII. Jahrgang Nr. 7—9. Wien, 1883; 4°.

Journal, The — of the nervous and mental disease. N. S. Vol. VII, Nr. 4, October, 1882. New York; 8°.

Kriegsmarine, k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und hydrographische Nachrichten. Jahrg. 1882, Heft 8. Pola, 1882; 8°.

Loew, Oscar und Thomas Bokorny: Die chemische Kraftquelle im lebenden Protoplasma. München, 1882; 8°.

Lorenzoni Giuseppe: Sulle Osservazioni della Cometa 6 (III) 1881. Memoria. Venezia, 1882; 8°.

Louvain, Universität: Annuaires. 1882 & 1883. 46e & 47e année. Louvain, 1882—1883; 8°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel XXVIIe année, 3e série. Tome XIII, 495e livraison. — Mars 1883. Paris; 4°.

Nature. Vol. XXVII. No. 696. London, 1883; 8°.

Observatory, the: A monthly review of astronomy. Nr. 71. 1883, March 1. London; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Verhandlungen. Nr. 1, 1883. Wien; 8°.

Società degli Spettroscopisti italiani: Memorie. Vol. XI. Dispensa 11ª Novembre 1882. Roma; 4°.

Societät, physikalisch-medicinische zu Erlangen: Sitzungsberichte. 14. Heft. November 1881 bis August 1882. Erlangen. 1882; 8°.

Sveriges geologiska Undersökning, Ser. Aa. No. 70, No. 80, 81, 82, 83, 85 & 86. Ser. B. b. No. 1 & 2. Ser. C. No. 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51 & 52. Stockholm, 1881—82; 4° u. 8°. — Bidrag till Norrbottens Geologi af Fredr. v. Svenonius Stockholm, 1880; 8°.

Verein, entomologischer in Stockholm: Entomologisk Tidskrift Arg. 3. 1882. Häft 4. Stockholm, 1882; 8°.

— für Erdkunde zu Halle a/S.: Mittheilungen. Halle a. S. 1882; 8°.

— naturhistorisch-medicinischer zu Heidelberg: Verhandlungen, N. F. III. Band, 2. Heft. Heidelberg, 1882; 8°.

— militär-wissenschaftlicher in Wien: Organ. XXVI. Band. 1. Heft. Wien, 1883; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang Nr. 7 bis 9. Wien, 1883; 4°.

Über einen Correspondenzsatz.

Von **Emil Weyr.**

Alle Curven vom Geschlechte Eins können als Erzeugnisse zweideutiger Gebilde betrachtet werden. Die einfachste zweideutige Beziehung ist die symmetrische, welche die kubischen Involutionen erster Stufe als speciellen Fall in sich enthält. Bei verschiedenen Anlässen hatten wir Gelegenheit, diese symmetrische Verwandtschaft zweiten Grades — das symmetrische Elementensystem zweiten Grades — zu untersuchen und ihre Bedeutung für die Theorie der ebenen Curven dritter Ordnung sechster Classe, und jener der Raumcurven vierter Ordnung erster Art auseinanderzusetzen.[1]

Im Folgenden soll auf einen einfachen Lehrsatz über die zwei-zweideutige Verwandtschaft hingewiesen werden, einen Lehrsatz, welcher mir für die Theorie aller Curven vom Geschlechte Eins, und zwar hauptsächlich für die Theorie eindeutiger Beziehungen auf solchen Curven, von grosser Fruchtbarkeit zu sein scheint.

I.

1. Die Gleichung $f(x, y) = 0$, welche die Beziehung zwischen zwei zweideutigen Systemen (Gebilden) von einfacher Unendlich-

[1] Vergleiche: Über algebraische Raumcurven. Sitzungsb. d. k. böhm. Gesellsch. d. Wissensch., 10. Sept. 1869.

Sopra la corrispondenza del secondo grado fra due sistemi semplicemente infiniti. Annali di matematica pura ed applicata, Serie II, Tomo IV, Milano 1871, pag. 272. Principes d'une théorie des systèmes symétriques d'éléments. Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles. Bordeaux 1874.

Die Erzeugung der Curven dritter Ordnung mittelst symmetrischer Elementensysteme zweiten Grades. Sitzungsb. d. k. Akad. d. Wissensch. Wien 1874. — Beiträge zur Curvenlehre. Wien 1880.

keit festsetzt oder als analytischer Ausdruck dieser Beziehung betrachtet werden kann, enthält sowohl x als auch y im zweiten Grade, und es kommen in ihr acht von einander unabhängige Coëfficienten vor, so dass die Verwandtschaft durch acht Paare entsprechender Elemente vollkommen bestimmt erscheint. Werden nur sieben Paare entsprechender Elemente gewählt, so bleibt eine von den acht Constanten in $f(x, y) = 0$ unbestimmt, und die Verwandtschaftsgleichung erhält die Form $\varphi(x, y) + \lambda\psi(x, y) = 0$. Da nun die Gleichungen $\varphi(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ durch acht Elementenpaare befriedigt werden, so besitzen alle zweideutigen Verwandtschaften, welche sieben Elementenpaare gemeinsam haben, auch noch ein achtes gemeinsames Elementenpaar. Solche acht Elementenpaare genügen selbstverständlich nicht mehr zur Fixirung der Verwandtschaft und muss zu ihnen noch ein neuntes hinzugefügt werden.

2. Sind beide Gebilde gleichartig und conlocal, so erhält man die sich selbstentsprechenden Elemente, die gemeinsamen Elemente, wenn man den Parametern x, y dieselbe geometrische Bedeutung unterlegt und $y = x$ setzt. Dies gibt die biquadratische Gleichung $f(x, x) = 0$, aus welcher vier gemeinsame (selbstentsprechende oder Doppel-) Elemente fliessen.

3. In jedem der beiden Systeme gibt es vier Elemente, die Verzweigungselemente, denen im anderen Systeme zusammenfallende Elemente, die Doppelelemente dieses Systemes entsprechen; denn es gibt vier Werthe von x, für welche die Gleichung $f(x, y) = 0$ zwei gleiche y-Wurzeln liefert, und umgekehrt. Es seien $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ die Verzweigungselemente des Systemes X und $y_1^{12}\ y_2^{12}\ y_3^{12}\ y_4^{12}$ die ihnen entsprechenden Doppelelemente des Systemes Y; und ebenso $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$ die Verzweigungselemente des Systemes Y und $x_1^{12}\ x_2^{12}\ x_3^{12}\ x_4^{12}$ die ihnen entsprechenden Doppelelemente des Systemes X. Wir haben nun in jedem der beiden Systeme diese acht singulären Elemente und es gilt der Satz: „Die acht singulären Elemente des einen Systemes entsprechen in vier von einander verschiedenen Arten projectivisch den acht singulären Elementen des anderen Systemes, und zwar so, dass den Verzweigungselementen des einen die Verzweigungselemente des anderen, und den Doppelelementen des

einen die Doppelelemente des anderen projectivisch zugeordnet erscheinen.“ [1]

4. Wenn in $f(x, y)$ die Coëfficienten von x^2y und xy^2 einander gleich sind, ebenso die Coëfficienten von x^2 und y^2, und schliesslich auch jene von x und y, so wird die Gleichung $f(x, y) = 0$ symmetrisch; befinden sich überdies die beiden gleichartigen Systeme auf einem und demselben Träger, so entsprechen jedem Elemente, ob man es zu dem einen oder dem anderen Gebilde rechnet, immer dieselben zwei Elemente, da die Gleichung $f(x, y) = 0$ durch die Vertauschung von x mit y unverändert bleibt. Die beiden Systeme können von einander nicht mehr unterschieden werden und bilden das, was wir als ein symmetrisches Elementensystem zweiten Grades bezeichneten. [2] Wenn die Gleichung $f(x, y) = 0$ symmetrisch ist, so enthält sie nur mehr fünf von einander unabhängige Constanten; ein symmetrisches Elementensystem zweiten Grades ist folglich durch fünf Paare entsprechender Elemente bestimmt.

Denkt man sich das System als Punktsystem auf einem festen Kegelschnitte K, und wählt zur Festsetzung der Verwandtschaft die fünf nothwendigen und hinreichenden Punktepaare x_i, y_i $(i = 1, 2, \ldots 5)$ auf K, so handelt es sich um eine solche Beziehung der Punkte auf K, dass jedem Punkte x zwei Punkte y' y'' entsprechen, und zwar in vertauschungsfähiger (symmetrischer) Art, so dass von den dem y' entsprechenden zwei Punkten der eine mit x identisch ist, und ebenso auch von den zwei dem y'' entsprechenden Punkten der eine mit x zusammenfalle, und schliesslich sollen in dieser Verwandtschaft auch die fünf Paare x_i, y_i vorkommen. Zieht man die fünf Geraden x_i, y_i, und ist D der Kegelschnitt, welcher dieselben zu Tangenten hat, so sieht man sofort, dass die Tangenten von D den Kegelschnitt K in einander entsprechenden Punkten des fraglichen symmetrischen Punktsystemes schneiden. Also gilt auch umgekehrt: „Befindet sich auf einem Kegelschnitte K ein symmetrisches Punktsystem zweiten Grades, so umhüllen die Verbindungslinien entsprechender Punkte einen zweiten Kegelschnitt D, den Directionskegelschnitt des Systemes.“

[1] Siehe: Sopra la corrispondenza ecc. l. c.

[2] Siehe: Principes d'une théorie des systèmes symmétriques, l. c.

„Die Tangenten eines Kegelschnittes bestimmen auf einem zweiten, derselben Ebene angehörigen Kegelschnitte entsprechende Punkte eines symmetrischen Punktsystemes zweiten Grades. Ebenso gehen durch die Punkte der einen Curve Tangentenpaare der anderen, welche ein symmetrisches Tangentensystem zweiten Grades bilden."

5. Die vier den Curven K, D gemeinschaftlichen Tangenten berühren K in den sich selbst entsprechenden Punkten $\delta_1\ \delta_2\ \delta_3\ \delta_4$ (Doppelpunkte erster Art). Die vier Schnittpunkte $v_1\ v_2\ v_3\ v_4$ von K und D sind offenbar die vier Verzweigungselemente. Denn um die einem v_i-Punkte entsprechenden Punkte zu erhalten, hat man von v_i an D die beiden Tangenten zu legen und mit K zum Durchschnitte zu bringen; diese beiden Tangenten fallen jedoch in die Tangente V_i, die im Punkte v_i den Kegelschnitt D berührt. Es sind folglich die Punkte v_i die Verzweigungspunkte, und die in diesen Punkten an D gelegten Tangenten V_i schneiden K in den Doppelpunkten $d_1\ d_2\ d_3\ d_4$ (zweiter Art), welche den Verzweigungspunkten entsprechen.

6. Enthält das symmetrische Elementensystem zweiten Grades ein in sich geschlossenes Tripel $a_1\ a_2\ a_3$ entsprechender Elemente, so also, dass jedem dieser drei Elemente die beiden anderen entsprechen, so besteht das System aus lauter solchen Tripeln und bildet eine kubische Involution erster Stufe. Denn in diesem Falle ist der Kegelschnitt D dem Dreieck $a_1\ a_2\ a_3$ eingeschrieben, und es gibt folglich unendlich viele Dreiecke, welche dem K eingeschrieben und dem D umgeschrieben sind.[1]

II.

7. Lehrsatz: „Wenn zwei zweideutige gleichartige Systeme conlocal sind, und wenn die Verzweigungselemente des einen Systemes zugleich Verzweigungselemente des andern sind, so haben beide Systeme auch gemeinschaftliche Doppelelemente (den Verzweigungselementen entsprechend) und die beiden Systeme stellen ein symmetrisches Elementensystem zweiten Grades dar."

[1] Grundzüge einer Theorie der kubischen Involutionen. Abhlg. der k. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. Prag 1874.

Der erste Theil des Satzes folgt aus der in Art. 3 besprochenen projectivischen Beziehung zwischen den singulären Elementen beider Systeme. Denn, werden $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$ der Reihe nach identisch mit $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$, so müssen, weil die Gruppen $(x_1\ x_2\ x_3\ x_4\ x_1^{12}\ x_2^{12}\ x_3^{12}\ x_4^{12})$, $(y_1\ y_2\ y_3\ y_4\ y_1^{12}\ y_2^{12}\ y_3^{12}\ y_4^{12})$ projectivisch sind, auch $y_1^{12}\ y_2^{12}\ y_3^{12}\ y_4^{12}$ der Reihe nach identisch werden mit $x_1^{12}\ x_2^{12}\ x_3^{12}\ x_4^{12}$.

Dass beide Systeme ein symmetrisches System zweiten Grades bilden müssen, davon kann man sich folgendermassen überzeugen.

Hat man auf einem Kegelschnitte K zwei zweideutige Punktsysteme, und verbindet je zwei einander entsprechende Punkte durch eine Gerade, so erhält man Tangenten einer Curve vierter Classe mit zwei Doppeltangenten,[1] welche aus den zwei involutorischen Elementenpaaren entspringen. Wenn fünf solcher Elementenpaare auftreten, so hat die Curve vierter Classe fünf Doppeltangenten und muss folglich in einen Doppelkegelschnitt D übergehen, wodurch die beiden Systeme als ein symmetrisches Punktsystem zweiten Grades auf K erscheinen. Nun haben wir aber in unserem Falle nicht nur fünf, sondern acht solche involutorische Paare; ist nämlich x_i einer der Verzweigungspunkte und x_i^{12} der ihm entsprechende Doppelpunkt, ferner ξ_i der dem x_i^{12} auf K unendlich nahe Punkt, so ist sowohl $x_i\ x_i^{12}$ als auch $x_i\ \xi_i$ ein involutorisches Punktepaar, da dem x_i, ob wir es zum Systeme X oder zum Systeme Y rechnen, der Doppelpunkt x_i^{12} als entsprechendes Punktepaar im anderen Systeme zugewiesen ist. Damit erscheint unser Lehrsatz erwiesen.

8. Der Wichtigkeit wegen möge noch ein analytischer Beweis angedeutet werden.

Beide Systeme sind conlocal, gleichartig und durch die Verwandtschaftsgleichung gegeben:

$$x^2(a_1y^2+2b_1y+c_1)+2x(a_2y^2+b_2y+c_2)+(a_3y^2+2b_3y+c_3)=0$$

oder nach y geordnet:

$$y^2(a_1x^2+2a_2x+a_3)+2y(b_1x^2+b_2x+b_3)+(c_1x^2+2c_2x+c_3)=0.$$

[1] Siehe: Curvenlehre Art. 10.

Die Bedingung für das Auftreten zweier gleichen x-Werthe ist:

$$(a_2 y^2 + b_2 y + c_2)^2 - (a_1 y^2 + 2 b_1 y + c_1)(a_2 y^2 + 2 b_3 y + c_3) = 0$$

oder, geordnet:

$$\begin{aligned} &y^4 (a_2^2 - a_1 a_3) + 2 y^3 (a_2 b_2 - a_1 b_3 - a_3 b_1) \\ &+ y^2 (b_2^2 + 2 a_2 c_2 - 4 b_1 b_3 - a_1 c_3 - a_3 c_1) \\ &+ 2 y (b_2 c_2 - b_1 c_3 - b_3 c_1) + (c_2^2 - c_1 c_3) = 0. \end{aligned} \qquad (\alpha)$$

Die Bedingung für das Auftreten zweier gleichen y-Werthe ist ebenso:

$$(b_1 x^2 + b_2 x + b_3)^2 - (a_1 x^2 + 2 a_2 x + a_3)(c_1 x^2 + 2 c_2 x + c_3) = 0$$

oder:

$$\begin{aligned} &x^4 (b_1^2 - a_1 c_1) + 2 x^3 (b_1 b_2 - a_1 c_2 - a_2 c_1) \\ &+ x^2 (b_2^2 + 2 b_1 b_3 - 4 a_2 c_2 - a_1 c_3 - a_3 c_1) \\ &+ 2 x (b_2 b_3 - a_2 c_3 - a_3 c_2) + (b_3^2 - a_3 c_3) = 0. \end{aligned} \qquad (\beta)$$

Die Wurzeln von (α) liefern somit die Verzweigungselemente des Systemes Y und die Wurzeln von (β) jene des Systemes X. Sollen die Verzweigungselemente beiden Systemen gemeinschaftlich sein, so müssen (α) (β) dieselben Wurzeln besitzen, und werden sich daher die linken Seiten dieser Gleichungen nur durch einen Factor λ unterscheiden können; wir haben also die fünf Relationen:

$$(a_2^2 - a_1 a_3) = \lambda (b_1^2 - a_1 c_1) \qquad 1)$$

$$(a_2 b_2 - a_1 b_3 - a_3 b_1) = \lambda (b_1 b_2 - a_1 c_2 - a_2 c_1) \qquad 2)$$

$$\begin{aligned} &(b_2^2 + 2 a_2 c_2 - 4 b_1 b_3 - a_1 c_3 - a_3 c_1) \\ &\qquad = \lambda (b_2^2 + 2 b_1 b_3 - 4 a_2 c_2 - a_1 c_3 - a_3 c_1) \end{aligned} \qquad 3)$$

$$(b_2 c_2 - b_1 c_3 - b_3 c_1) = \lambda (b_2 b_3 - a_2 c_3 - a_3 c_2) \qquad 4)$$

$$(c_2^2 - c_1 c_3) = \lambda (b_3^2 - a_3 c_3). \qquad 5)$$

Wählt man zwei von den vier gemeinschaftlichen Verzweigungselementen zu Fundamentalelementen und betrachtet die Parameter x, y als die Theilverhältnisse bezüglich jener Fundamentalelemente, so wird von den Wurzeln in (α) und (β) eine verschwinden und die andere unendlich gross werden. Die Relationen 1) und 5) übergehen somit in:

$$a_2^2 - a_1 a_3 = 0 \qquad b_1^2 - a_1 c_1 = 0 \qquad 1')$$

$$c_2^2 - c_1 c_3 = 0 \qquad b_3^2 - a_3 c_3 = 0. \qquad 5')$$

Setzt man die hieraus fliessenden Werthe für a_2, c_2, b_1, b_2 in (2) und (4), so ergibt sich $\sqrt{a_3}=\lambda\sqrt{c_1}$ und $\lambda\sqrt{a_3}=\sqrt{c_1}$; hieraus durch Multiplication $\sqrt{a_3^2}=\sqrt{c_1^2}$ oder $a_3^2=c_1^2$ und $\lambda=\pm 1$. Sorgt man dafür, dass in der Verwandtschaftsgleichung der erste Coëfficient a_1 positiv ist, so muss nach (1′) (5′) auch a_3, c_1, c_2 positiv sein. Wir haben somit $a_3=c_1$ zu setzen. Hieraus folgt aber dann nach (1′) $a_2^2=b_1^2$ und nach (2′) $b_3^2=c_2^2$, somit ist $b_1=\pm a_2$ $b_3=\pm c_2$. Nun lässt sich zeigen, dass man in den beiden letzten Gleichungen entweder die beiden oberen oder die beiden unteren Zeichen zu nehmen hat. Diese beiden Fälle werden identisch gemacht, wenn man in der Verwandtschaftsgleichung x in $-x$ und y in $-y$ übergehen lässt.

Über eine Eigenschaft der Oberflächen zweiter Ordnung.

Von Dr. C. Le Paige,
Professor an der Universität in Lüttich.

Werden die Punkte einer Curve zweiter Ordnung C_2 aus zwei Punkten o o' derselben Curve auf eine durch den Pol von o o' gehende Gerade projicirt, so erhält man bekanntlich zwei involutorische Punktreihen J_1^2.

Diese Eigenschaft erscheint als specieller Fall des Pascal'schen Satzes, wenn das Sechseck in ein Viereck und die Tangenten in zwei Gegenecken desselben übergehen. Im Folgenden soll eine analoge Eigenschaft der Oberflächen zweiter Ordnung bewiesen werden.

Es seien A, B, C drei Punkte einer Fläche zweiter Ordnung S_2; verbindet man die einzelnen Punkte der Fläche durch Ebenen mit den Seiten AB, BC, CA des Dreieckes ABC, so erhält man drei Ebenenbüschel, welche eine Homographie dritter Ordnung und zweiter Stufe H_2^3 bilden.[1] In der That ist ein Ebenentripel durch zwei seiner Ebenen vollkommen bestimmt.

Schneidet man irgend eine Gerade l mit je drei einander entsprechenden Ebenen der Büschel AB, BC, CA resp. in den Punkten x, y, z, so erhält man auf l ebenfalls eine Homographie (Projectivität) $\mathfrak{H}_2^3$ dritter Ordnung und zweiter Stufe. Dem Punkte x, in welchem eine durch AB gehende Ebene l schneidet, entsprechen Punkte y, z, welche eine Homographie $\mathfrak{H}_1^2$ zweiter Ordnung erster Stufe bilden (conlocale projectivische Punktreihen). Verbindet man diese Punktepaare y, z mit BC, CA resp. durch Ebenen, so liefern diese Ebenen gerade Schnittlinien, welche die Ebene

[1] Vergleiche: „Essai de Géométrie superieure du troisième ordre". p. 9—29 und p. 105 ff.

ABx in Punkten treffen, die der Schnittcurve unserer Oberfläche S_2 mit der Ebene ABx angehören.

Wir projiciren nun die auf l auftretende Φ_1^2 aus dem Punkte C auf die Ebene ABx; xp sei die Projection von l und y_1, z_1 die Projectionen von x, y. Die Strahlen Az_1, By_1 schneiden sich nun in einem Punkte des in der Ebene ABx gelegenen Kegelschnittes unserer Fläche S_2. Die Tangentialebenen von S_2 in A und B haben eine Gerade c gemeinschaftlich und bestimmen auf der Ebene ABx zwei Schnittgerade At, Bt, welche die ebene Schnittcurve in ABx in den Punkten A resp. B berühren; t sei der Schnittpunkt von c mit der Ebene ABx. Wenn xp durch t hindurchgeht, so geht die auf xp entstehende Projection der Φ_1^2 in eine quadratische Involution J_1^2 über; dies wird offenbar dann eintreten, wenn die Gerade xp die Gerade c schneidet (in t). Man kann, wenn A, B, C und l gegeben sind, in einfacher Weise jenen Punkt x von l bestimmen, welchem in der Φ_2^2 eine J_1^2 entspricht. Die Gerade xp ist in der Ebene Cl enthalten; wenn man also den Schnittpunkt t von c mit der Ebene Cl bestimmt, so wird der in der Ebene ABt enthaltene Schnitt der Oberfläche S_2 die obige Eigenschaft aufweisen und somit den gesuchten Punkt x bestimmen.

Wann wird der Punkt x unbestimmt? Offenbar dann, wenn die Gerade c in der Ebene Cl enthalten ist, oder was dasselbe sagt, wenn l der Ebene Cc angehört.

Wollen wir nun dieselbe Unbestimmtheit auch für die Punkte y und z erhalten, so erkennt man, dass l vollkommen bestimmt erscheint als die gemeinsame Schnittgerade der drei Ebenen Aa, Bb, Cc, wobei b die Schnittgerade der Tangentialebenen in C, A und a die Schnittgerade der Tangentialebenen in B, C bedeutet. Auf dieser Geraden l haben wir nun eine solche Φ_2^3, dass jedem Punkte eine J_1^2 geordnet erscheint. Hieraus folgt, dass diese Φ_2^3 eine cubische Involution J_2^3 dritten Grades und zweiter Stufe sein muss. Wir haben somit das folgende Resultat:

„Es seien ABC irgend drei Punkte einer S_2, σ die durch sie bestimmte Ebene; in A, B, C werde S_2 von den Ebenen α, β, γ, welche sich im Punkte S schneiden, berührt und a, b, c seien die Kanten des Trieders $\alpha\beta\gamma$. Die beiden Trieder $S(A, B, C)$, $S(a, b, c)$ sind perspectivisch. Es sei l ihre Perspectivitätsaxe

und l' die Schnittlinie ihrer Perspectivitätsebene mit der Ebene σ. Die Geraden ll' sind conjugirte Strahlen bezüglich S_2. Die Ebenentripel, welche die Punkte der Fläche S_2 mit den Geraden AB, BC, CA verbinden, schneiden l in Punktetripeln einer cubischen Involution zweiter Stufe; alle Tangentialebenen der Fläche S_2 schneiden die Geraden a, b, c in Punkten, welche aus l' in einer cubischen Ebeneninvolution zweiter Stufe projicirt werden."

Dieses Theorem erlaubt beliebig viele Punkte und Tangentialebenen von S_2 zu construiren. Legt man nämlich durch AB und BC je eine beliebige Ebene und sind x, y die Schnittpunkte dieser Ebenen mit l, so hat man nur den Punkt z aufzusuchen, welcher das Paar xy zu einem Tripel der cubischen Involution zweiter Stufe ergänzt[1], so wird die Ebene CAz die Ebenen ABx, BCy in einem Punkte von S_2 schneiden.

Die auf l entstehende J_2^3 hat offenbar zu dreifachen Punkten: die Schnittpunkte von l mit S_2 und den Schnittpunkt von l mit σ. Wenn somit diese drei Punkte festbleiben, wird auch die J_2^3 auf l nicht variiren. Ist nun C_2 die Schnittcurve von S_2 mit σ, und ist Ω der Schnittpunkt von l mit σ, so ist bekanntlich Ω das Perspectivitätscentrum des Dreieckes ABC mit dem Dreiecke $A'B'C'$, dessen Seiten die Curve C_2 in A, B, C resp. berühren. Die Perspectivitätsaxe beider Dreiecke ist l'. Das Punktetripel ABC bestimmt auf C_2 eine cubische Involution erster Stufe, welche mit zwei dreifachen Punkten in den Schnitten von C_2 mit l' ausgestattet ist und eine cyclische Projectivität auf C_2 darstellt, für welche diese dreifachen Punkte die sich selbst entsprechenden Punkte darstellen.[2]

Alle Tripel ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, ... dieser Involution bilden Dreiecke, welchen derselbe Punkt Ω und dieselbe Gerade l' zukommt. Irgend zwei von diesen Dreiecken werden somit zu einer und derselben cubischen Punktinvolution zweiter Stufe auf l Anlass geben.

---

[1] Siehe Em. Weyr, Sitzb. der k. Akad., Bd. LXXIX, LXXXI und LXXXIII, p. 349. Le Paige. Ebend., Bd. LXXXIII, p. 351, LXXXIV, p. 236, und Essai de Géométrie etc., p. 78.

[2] Siehe Em. Weyr, Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen. Art. 41. Prager Abhandlung 1874.

Ist also M irgend ein Punkt von S_2 und sind $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ die Schnittpunkte von l mit den Ebenen MAB, MBC, MCA, so werden sich die drei Ebenen $\alpha_1 A_1 B_1$, $\alpha_2 B_1 C_1$, $\alpha_3 C_1 A_1$ in einem neuen Punkte M' von S_2 schneiden. Wir haben somit den Lehrsatz:

„Wenn drei Ebenen eines variablen Tetraeders Ma_1 a_2 a_3 um die drei Punkte α_1 α_2 α_3 sich drehen und wenn die drei Ecken a_1 a_2 a_3 auf C_2 Tripel einer cyclischen Projectivität beschreiben, so bewegt sich der vierte Eckpunkt M auf der Fläche S_2."

Da man die Punkte α_1 α_2 α_3 auf l in beliebiger Aufeinanderfolge in die Construction kann eintreten lassen, so wird man aus jedem Punkte M fünf andere solche Punkte ableiten können. Dieses Theorem erlaubt uns in einfacher und rascher Weise beliebig viele Punkte einer durch neun Punkte bestimmten Fläche zweiter Ordnung zu construiren.

Versuch einer Bahnbestimmung des Schmidt'schen Nebels.

Von Dr. J. v. Hepperger,
Assistent an der k. k. Universitäts-Sternwarte zu Wien.

Bald nach dem Bekanntwerden der vom Director der Athener Sternwarte Herrn J. Schmidt gemachten Entdeckung einer in auffallender Nähe des grossen Herbstkometen vom Jahre 1882 befindlichen Nebelmasse mit bedeutender Eigenbewegung, wurde mehrfach darauf aufmerksam gemacht, dass man aller Wahrscheinlichkeit nach berechtigt sei, die Genesis dieser nebeligen Gebilde in einer Lostrennung vom grossen Kometen zu suchen. Und in der That, zeugen die an den Köpfen fast sämmtlicher grösserer Kometen beobachteten, oft mit Gestaltsänderungen des Kernes verbundenen Ausstrahlungen schon an sich von einem bedeutenden destructiven Expansionsvermögen der dieserorts angehäuften Materie, das sich beim Biela'schen Kometen auch wirklich bis zur Katastrophe steigerte, so gewinnt die Annahme, dass der Schmidt'sche Nebel dem Wirken solcher Kräfte seine Entstehung verdanke, überdies noch dadurch an Wahrscheinlichkeit, dass er sich in einem Zeitraume von zwei Tagen in einer sonst unerklärlichen Weise zerstäubte. Zugleich liegt die Vermuthung nahe, dass die einzelnen Theile der in Rede stehenden Nebelmasse sich zu derselben Zeit von irgend einem Theile des grossen Kometen losgelöst haben, für welchen in erster Linie dessen Kopf als das Centrum der grössten Activität supponirt zu werden verdient. Damit jedoch eine solche Vermuthung einigen Anspruch auf Glaubwürdigkeit besitze, bedarf es noch des Nachweises, dass sie mit den praktischen Folgerungen der Mechanik des Himmels nicht im Widerspruche stehe. Leider sind die zu vorliegendem Zwecke verwendbaren Beobachtungen so wenig

zahlreich und die Fehlergrenzen jeder einzelnen hievon so weit gesteckt, dass die Möglichkeit einer genaueren mathematischen Behandlung obigen Problems hiedurch ausgeschlossen erscheint. Die einzigen bis dato bekannt gewordenen Beobachtungen des Schmidt'schen Nebels sind vom Entdecker selbst angestellt worden, datiren vom 9., 10. und 11. October und beziehen sich auf mehrere gleichzeitig gesehene, besonders markante Partien des Nebels.

Es ist evident, dass der Versuch, die Annahme einer Provenienz dieses merkwürdigen Nebelgebildes aus dem grossen Kometen durch Rechnung zu erhärten auf zweifache Weise angestellt werden kann. Der erste Weg, diese Untersuchung zu führen, besteht darin, dass man nach vorangegangener, allerdings etwas willkürlicher Identifizirung zusammengehöriger Partien des Nebels, aus drei Positionen eine Bahn rechnet und hiebei sein Augenmerk darauf richtet, ob es möglich ist, durch Variation der in der allgemeinen Kegelschnittsgleichung auftretenden Constanten einen Durchschnitt der so gerechneten Bahn mit der des grossen Kometen zu erzielen. Dieser Weg wurde von Herrn K. Zelbr betreten und sind die Ergebnisse seiner Untersuchung in den Sitzungsberichten der kais. Akademie der Wissenschaften (LXXXVI. Bd. 1882) niedergelegt. Daraus geht hervor, dass auf diese Weise ein Bahndurchschnitt wohl nicht zu erweisen ist, wenngleich die Elemente beider Bahnen einander ziemlich ähnlich sind.

Der zweite Weg, den man zur Verfolgung des vorgesetzten Zieles einschlagen kann, setzt eine bestimmte Annahme über die Zeit der erfolgten Lostrennung des Nebels vom Kometen voraus, welche Annahme auf Grund der Distanzänderungen beider Himmelskörper gemacht werden kann. Es wird nun durch den Ort, welchen der Komet zum kritischen Zeitpunkte wirklich eingenommen hat, einerseits, und dem scheinbaren Orte des Nebels am Himmelsgewölbe zur Zeit der letzten Beobachtung anderseits ein Kegelschnitt gelegt, dessen Excentricität und Parameter man so zu bestimmen sucht, dass den beiden mittleren Orten (vom 9. und 10. October) hiedurch möglichst gut entsprochen wird.

Dieser Weg führt in vorliegendem Falle auf einen doppelten Vortheil. Der Ort des grossen Kometen kann mit bedeutender

Sicherheit ermittelt werden und steht demnach nur in der Annahme des äussersten Ortes des Nebels ein grösserer Fehler zu vermuthen, der aber in seiner Wirkung auf die Darstellung der mittleren Orte schon bedeutend abgeschwächt erscheinen muss. Nebstbei ist aber auch ein Missgriff bei der Identifizirung zu verschiedenen Zeiten gesehener, einander entsprechender Theile des Nebels viel leichter zu vermeiden.

Die Elementenrechnung führte ich auf folgende Weise durch: Es bezeichne r, l, b respective den Radiusvector, heliocentrische Länge und Breite des Kometen zur Zeit t, in welcher die Trennung des Nebels vom Kometen stattgefunden habe, so dass also r, l, b auch die Position des Nebels zur Zeit t ausdrücken. Die Position des Nebels zur Zeit t' möge in derselben Weise durch r', l', b' ausgedrückt werden. Da die Elemente des grossen Kometen als bekannt angenommen werden können, bleibt von obigen Grössen nur eine einzige unbestimmt und es erscheint zweckmässig, bei einer ersten Rechnung auch diese Unbestimmtheit auszuschliessen, indem man das Verhältniss der geocentrischen Distanzen durch Heranziehen irgend einer mittleren Beobachtung nach der Olber'schen Methode bestimmt, wenngleich unter den gegebenen Umständen diese Art der Bestimmung nur eine sehr unverlässliche bleibt. Bedeuten nun v, v' die wahren Anomalien des Nebels zu den Zeiten t, t' und s die zugehörige Sehne, so ist

$$\cos(v'-v) = \sin b' \sin b + \cos b' \cos b \cos (l'-l)$$

oder auch

$$\sin^2 {}^1/_2(v'-v) = \sin^2 {}^1/_2(b'-b) + \cos b' \cos b \sin^2 {}^1/_2(l'-l)$$

$$s^2 = (r'-r)^2 + 4rr' \sin^2 {}^1/_2(v'-v).$$

Unter Beibehaltung der für ähnliche Rechnungen üblichen Bezeichnungen ist auch

$$\operatorname{tg} i \sin(l-\Omega) = \operatorname{tg} b$$

$$\operatorname{tg} i \cos(l-\Omega) = \frac{\operatorname{tg} b' - \operatorname{tg} b \cos(l'-l)}{\sin(l'-l)}$$

$$\operatorname{tg} u = \frac{\operatorname{tg}(l-\Omega)}{\cos i}; \quad \operatorname{tg} u' = \frac{\operatorname{tg}(l'-\Omega)}{\cos i}.$$

Probe: $u'-u = v'-v$.

Die nächste Aufgabe ist die Bestimmung der Halbaxe des Kegelschnittes a aus der Lambert'schen Gleichung. Die Durchführung eines Versuches unter der Annahme $a = \infty$ wird sofort die Natur des Kegelschnittes erkennen lassen. Ist derselbe eine Hyperbel, so setze man:

$$\sqrt{\frac{r+r'+s}{4a}} = \operatorname{cotg}\varphi; \quad \sqrt{\frac{r+r'-s}{4a}} = \operatorname{cotg}\psi$$

und trachte im Wege fortgesetzter Versuche denjenigen Werth von a zu ermitteln, welcher die Gleichung

$$\frac{Mk(t'-t)}{2a^{3/2}} = \frac{M\operatorname{cotg}\varphi}{\sin\varphi} - \frac{M\operatorname{cotg}\psi}{\sin\psi} - \log\operatorname{cotg}{}^1/_2\varphi + \log\operatorname{cotg}{}^1/_2\psi$$

erfüllt. Hierin ist M = Mod. log. vulg. und k^2 = Anziehungskraft der Sonne. Für den Fall einer Ellipse wäre es überflüssig, hier Formeln anzusetzen. Der Fall einer Parabel wäre nach dieser Methode ein reiner Zufall. Die übrigen Elemente werden nun nach üblichem Verfahren ermittelt.

In der Hyperbel kann man die Perihelszeit auch auf folgende Weise berechnen:

$$\sqrt{\frac{e-1}{e+1}}\operatorname{tg}{}^1/_2 v = \cos\chi$$

$$t - T = \frac{2a^{3/2}}{kM}\left(eM\frac{\cos\chi}{\sin^2\chi} - \log\operatorname{cotg}{}^1/_2\chi\right).$$

Wenn nicht $\sin\chi$ gar zu klein wird, darf man eine gute Übereinstimmung der beiden aus v und v' gefundenen Perihelszeiten erwarten; wenn aber der angeregte Fall eintreten sollte, so müsste man T nach einer anderen Methode berechnen. Bei der Darstellung eines mittleren Ortes aus den Elementen, wird es sich unter allen Umständen empfehlen, dessen wahre Anomalie V aus folgender Formel zu rechnen:

$$\lg(v'-V) = \frac{\sin(v'-v)}{\frac{r'}{r}\cdot\frac{\tau-t}{t'-\tau} + \cos(v'-v)}$$

wo τ die Zeit der mittleren Beobachtung vorstellt, da hieraus auch bei sehr ungleichen Zwischenzeiten schon eine grosse Annäherung an den wahren Werth erreicht wird.

Zuerst versuchte ich eine Bahnbestimmung aus den in den Astronomischen Nachrichten Nr. 2468 mit M, M', M'' bezeichneten Positionen durchzuführen; in Länge und Breite verwandelt lauten dieselben:

Oct.	9·670	M =	160° 51′	—22° 0′		Messung
„	10·658	M' =	159 53	—23 21		Construction.
„	11·657	M'' =	159 7	—24 30		Messung.

Ein Überblick über die successiven Distanzen des Nebels vom Kerne des Kometen schien darauf hinzudeuten, dass man die Zeit der Trennung in die Nähe des 5. October zu verlegen habe. Für diese Zeit war der heliocentrische Ort des grossen Kometen nach den von Herrn K. Zelbr gerechneten Elementen

$$\begin{aligned} T &= 1882 \text{ Sept. } 17\cdot248 \\ \omega &= 69^\circ\,56'\,58'' \\ \Omega &= 346\ 13\ 38 \\ i &= 142\ 3\ 8 \\ \log q &= 7\cdot90682 \end{aligned}$$

folgender

$$\begin{aligned} \text{October } 5\cdot0 \quad l &= 114^\circ\,39'\,23'' \\ b &= -31\ 25\ 14 \\ \log r &= 9\cdot86963. \end{aligned}$$

Bezeichnet nun ρ' die geocentrische Entfernung des Nebels zur Zeit der letzten Beobachtung (Oct. 11·657], so kann man durch passende Auswahl dieser Grösse unter allen Bahnen, welche die beiden äussersten Orte (Oct. 5·0 und Oct. 11·657) genau darstellen, jene erhalten, welche die mittleren Beobachtungen am besten darstellt. Ich machte nun zwei verschiedene Annahmen über den Werth von ρ' und erhielt damit folgende Resultate:

I	II
October 5·0 —11·657 (M'')	October 5·0 —11·657 (M'')
$\log \rho' = 0·0000$	$\log \rho' = 0·1327$
$T =$ Oct. 6·994	$T =$ Sept. 18·268
$\omega = 261°\ 4'7$	$\omega = 147°\ 15'6$
$\Omega = 4\ 5·1$	$\Omega = -23\ 53·6$
$i = 146\ 52·5$	$i = 137\ 17·8$
$\log a = 9·1225$	$\log a = 9·5416$
$\log e = 0·8151$	$\log e = 0·2796$
$\log q = 9·8655$	$\log q = 9·4976$
Oct. 9·670	Oct. 9·670
B—R $\Delta\lambda \cos\beta = +6'$, $\Delta\beta = -20'$	B—R $\Delta\lambda \cos\beta = +21'$, $\Delta\beta = +11'$.

Daraus geht hervor, dass die Voraussetzung einer am 5. October stattgehabten Trennung kein befriedigendes Resultat erzielen lässt. Nachdem ich mich vorläufig überzeugt hatte, dass die Verlegung der supponirten Trennung auf einen späteren Zeitpunkt eine bessere Übereinstimmung erwarten lässt, wiederholte ich die Rechnungen, indem ich als ersten Ort den Kometenort vom 8·0 October verwendete.

October 8·0 — 11·657 (M'')

	III	IV
$\log \rho'$	0·3600	0·4021
T	Oct. 5·343	Oct. 5·890
ω	193° 51'0	198° 57·1
Ω	222 30·4	218 55·4
i	33 1·9	32 32·5
$\log a$	7·6169	7·4329
$\log e$	2·0000	2·2072
$\log q$	9·6125	9·6373
October 9·670		
B—R $\Delta\lambda \cos\beta$	+3'	+8'
B—R $\Delta\beta$	—4'	+4'

♂ October 8·0 $: l = 113°\ 59'\ 16''$, $b = -31\ 39\ 15$, $\log r = 9·91529$

Wenn nur die Beobachtung des Nebels vom 9. October ins Auge zu fassen wäre, so könnte man dieselbe schon sehr gut darstellen, indem man die Bahn durch den Kometenort vom October 9·0 durchlegt. Dann gestaltet sich aber die Abweichung vom Orte, welche der Nebel am 10. October einnahm, zu gross.

V.

October $9\cdot0 - 11\cdot657\,(M'')$

$\log \rho' = 0\cdot7117$

$T =$ Oct. $8\cdot533$

$\omega = 212°\ 48'8$

$\Omega = 209\ \ 51\cdot1$

$i = \ 31\ \ 51\cdot9$

$\log a = \ \ 6\cdot1591$

$\log e = \ \ 3\cdot5592$

$\log q = 9\cdot7181$

☿ Oct. $9\cdot0$: $l = 113°\ 47'\ 34''$

$b = -31\ \ 43\ \ 17$

$\log r = 9\cdot92905$

	October $9\cdot670$	October $10\cdot658$
(B—R) $\Delta\lambda \cos\beta$	$+1'$	$+12'$
(B—R) $\Delta\beta$	$0'$	$+22'$.

Die Position des Nebels ist am 10. October zwar nur durch ein constructives Verfahren erhalten worden und steht sonach an Vertrauungswürdigkeit der vom 9. October nach. Obige Abweichung ist aber dennoch zu bedeutend, um ihren Grund in der Unsicherheit der Construction zu suchen. Von den bisher angesetzten hyperbolischen Elementensystemen entspricht Nr. III den Beobachtungen am besten, wesshalb ich es hier noch genauer anführe, zugleich mit der Darstellung des Ortes vom 10. October.

October $8\cdot0 - 11\cdot657\,(M'')$

$\log \rho' = 0\cdot36000$

$T =$ Oct. $5\cdot3431$

$\omega = 193°\ 51'0$

$\Omega = 222\ \ 30\cdot4$

$i = \ 33\ \ 1\cdot9$

$\log a = 7\cdot61686$

$\log e = 2\cdot00001$

$\log q = 9\cdot61250$

	October $9\cdot670$	October $10\cdot658$
(B—R) $\Delta\lambda \cos\beta$	$+3'$	$+1'$
(B—R) $\Delta\beta$	$-4'$	$0'$

Obzwar aus Vorigem ersichtlich ist, dass durch gleichzeitige entsprechende Änderungen von t und ρ' das Gesammtresultat sich noch um etwas günstiger gestalten liesse, so möge das Bisherige doch genügen, um zu zeigen, dass die Bewegungserscheinungen der mit M, M' und M'' bezeichneten Partien des Schmidt'schen Nebels sich mit der Voraussetzung einer Abtrennung desselben vom Kopfe des grossen Kometen ganz leidlich vertragen. Nach den letzten Elementen wäre die unmittelbare Veranlassung der Abtrennung in dem Auftreten einer Momentankraft zu suchen, welche die durch den parabolischen Fall erlangte Geschwindigkeit auf das Zehnfache steigerte und, nachdem der Winkel, unter welchem sich die beiden Bahnen durchschneiden, 66°5 beträgt, nach einem Punkte des Himmels gerichtet war, dessen heliocentrische Coordinaten in Länge und Breite 154°8 ad −29°0 sind. Die Richtung des Stosses fiele sonach annähernd mit der des Schweifes des grossen Kometen zusammen und die Stärke desselben entspräche einer Geschwindigkeit von 62 geogr. Meilen per Secunde. So unwahrscheinlich die Annahme derartiger Kräfte auf den ersten Blick auch scheinen mag, darf man vorderhand dieselbe dennoch nicht als unzulässig wegweisen, wenn man bedenkt, dass Länge und Form der Schweife grosser Kometen darauf schliessen lassen, dass die sie constituirende Materie[1] noch viel grösseren Kräften ihre Geschwindigkeit verdankt.

Die Erscheinung, welche der Schmidt'sche Nebel an den drei aufeinander folgenden Tagen darbot, beschränkte sich jedoch nicht bloss auf je ein in sich geschlossenes nebelartiges Gebilde, sondern umfasste zu gleicher Zeit deren mehrere, wovon die der Nr. 2468 der Astr. Nachr. beigeschlossene Zeichnung ein anschauliches Bild entwirft. Hienach besass der Nebel am 9. October eine parabolische Figur mit einer stärkeren Verdichtung (M) am Scheitel, welcher in südlicher Richtung in fast gleichen Abständen noch zwei schwächere folgten. Die Lage der südlichsten

[1] Untersuchungen des Lichtes und der lichtbrechenden Kraft von Kometenschweifen verleihen der Annahme ihrer materiellen Zusammensetzung anderen Theorien gegenüber grössere Wahrscheinlichkeit.

hievon wurde von Herrn I. Schmidt dem Director der hiesigen Sternwarte, brieflich mitgetheilt, und war mit Bezug auf die Ekliptik

$$\text{October } 9{\cdot}670\, N = \begin{cases} \lambda = 160°56' \\ \beta = 22°12'' \end{cases}$$

Am 10. October erschien der Nebel schon sehr in die Breite gezogen und liess, der Zeichnung nach zu urtheilen, vier in fast gerader Linie liegende, etwas undeutlich geformte, hellere Flecke unterscheiden, von denen die beiderseits zu äusserst gelegenen hier conform der Schmidt'schen Publication mit *M* und *N* benannt werden mögen. Am 11. October waren nur mehr zwei durch ein sehr schwaches Nebelband mit einander verbundene, kaum sichtbare Wölkchen [*M''*, *N''*] aufzufinden.

Position von *N'*, *N''* nebst Art ihrer Ermittlung.

October 10·658	$N' = 161°39'$	$-23°0'$	Zeichnung
October 11·659	$N'' = 160\ 50$	$-24\ 2$	Messung.

Sowie Meteoritenschwärme zahlreiche Umläufe um die Sonne vollführen, ohne dass die gegenseitigen Wirkungen der einzelnen Theile aufeinander deren Bahnen im Wesentlichen zu stören im Stande sind, ebenso glaubte ich die Ursache der räumlichen Ausbreitung der einzelnen Theile des Nebels nicht in gegenseitigen Äusserungen constanter Kräfte suchen zu müssen, sondern selbe vielmehr den verschiedenen Impulsen zuschreiben zu sollen, durch deren Auftreten die Losreissung vom Hauptkörper stattgefunden hatte.

Jene Gebilde, die am längsten sichtbar blieben, mussten sonach auch die bedeutendsten gewesen sein und konnten daher an Tagen, in welchen überhaupt etwas von der Gesammterscheinung wahrgenommen wurde, nicht ungesehen bleiben. Mit welchen der am 9. und 10. October beobachteten Theil Nebel dieselben zu identificiren sind, kann nur dadurch festgestellt werden, dass man die beiden durch irgend einen Ort des grossen Kometen und die zwei Positionen des Nebels vom 11. October legbaren Bahnsysteme hinsichtlich ihrer Darstellungen der Beobachtungen vom 9. und 10. October untersucht.

Nachdem nun eine einigermassen gute Darstellung der Orte $M, M' M''$ sich nur dadurch erzielen lässt, dass man den Moment der Trennung auf einen Zeitpunkt verlegt, welcher sehr nahe mit October 8·0 übereinstimmt, und die eigenthümliche Art der Ausbreitung der Nebelgebilde auf Gleichzeitigkeit ihrer Abtrennung schliessen lässt, versuchte ich es anfänglich mit einer Bahnbestimmung aus dem Kometenorte von October 8·0 und dem Orte des Nebels N''. Hiebei zeigte sich aber, dass unter Beibehaltung der gewöhnlichen Constante der Sonnenattraction keine Bahn zu erhalten ist, welche der Beobachtung des Nebels vom 9. October auch nur entfernt Genüge zu leisten vermöchte, indem die für October 9·670 aus den Elementen gerechneten Orte weit ausserhalb der beobachteten Nebelsichel zu liegen kommen.

Dieses Resultat ist auch gar nicht überraschend, da sich zwischen dem Kometenorte von October 8·0 und den Punkten M'' respective N'' überhaupt nur Hyperbeln legen lassen, welche sehr kleine Halbaxen haben und demzufolge auch fast geradlinig verlaufende Äste besitzen; während sich aber die Punkte $\mathfrak{P}$, M, M'' in der That fast in einer Geraden befinden, weicht die gegenseitige Lage der Punkte $\mathfrak{P}$, M, N'' schon bedeutend davon ab.

Nachdem ich mich vergewissert hatte, dass eine durch $M-N$ und N'' gehende Bahn den Zeitpunkt der Trennung um mindestens eine Woche zurückverschieben würde, beschloss ich vorläufig eine Bahnbestimmung des scheinbaren Schwerpunktes des Nebels durchzuführen, wobei ich den Nebeltheilen M'' und N'' gleiche Massen imputirte, so dass der angenommene äusserste Punkt der Bahn, dem Mittel der beiden Positionen M'' und N'' entsprechend, folgendermassen lautet:

October 11·658 159°59′ −24°16′.

Die Zeitangaben beziehen sich durchwegs auf mittlere Berliner Zeit, die Coordinaten auf die Ekliptik.

Aus obiger Position rechnete ich dann unter mehrfacher Abänderung der Zeit der Trennung verschiedene Bahnsysteme, die ich so auswählte, dass sie für October 9·670 Orte ergeben, welche mit dem Mittelpunkte der damaligen Figur des Nebels möglichst gut übereinstimmen.

Zeit der Trennung	log ρ'	Aus den Elementen gerechnete Orte für			
		October 9·670		October 10·658	
October 8·0	0·4600	161° 7'	—22° 7'	160°28'	—23°22'
8·0	0·3500	161 19	—21 45		
5·0	0·2300	160 56	—22 21	160 27	—23 20
4·0	0·1300	160 59	—22 10		
4·0	0·0900	161 3	—22 1		
3·0	0·1050	160 56	—22 12	160 27	—23 14
3·0	0·0900	160 58	—22 9	160 29	—33 11

Fasst man bei der Schwerpunktsbestimmung die ganze Erscheinung des Nebels ins Auge, wie sie sich in der Zeichnung, auf welche ich schon früher verwies, wiederspiegelt, so kann man sich der Einsicht nicht verschliessen, dass es auf diese Weise unmöglich ist, Rechnung und Beobachtung miteinander in Einklang zu bringen. Denn während der Schwerpunkt der sichelförmigen Figur M als im Innern derselben gelegen, sich näherungsweise in einer Geraden zwischen den Punkten 160°51' —22°0' und 161°6', —22°15' befindet und sonach, wie sich aus Obigem ergibt, durch Rechnung leicht darstellbar wäre, liesse die Darstellung des Schwerpunktes der Figur M' N' günstigen Falles einen Fehler von 15' in Länge allein übrig. Der Grund hievon liegt eben in der isolirten Stellung des Punktes N', welche das Problem, dessen Lösung ich in dieser Abhandlung anstrebte, so complicirt gestaltet; denn sollte dieser Punkt N' irgend einem Punkte der am folgenden Tage gesehenen Figur des Nebels entsprechen, so müsste seine Bewegung, wie schon ein Blick auf die Zeichnung ersehen lässt, unter dem Einflusse einer, von der Sonne ausgehenden, abstossenden Kraft erfolgt sein. Dann wäre es aber geradezu unerklärlich, wieso der dem Punkte N' entsprechende Nebelfleck, welcher am 9. October beiläufig in der Verlängerung des nordöstlichen Theiles des Sichelnebels, etwa 0·7° von M entfernt, gelegen sein müsste, zu dieser Zeit nicht hatte bemerkt werden können. Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass bei der Schwerpunktsbestimmung die mit N'

bezeichnete Nebelpartie jedenfalls ausser Acht zu lassen ist, da die ihr correspondirenden Massen gewiss nicht zugleich in $M-N$ und $M''-N''$ vertreten sind. Dann empfiehlt es sich aber auch, bei der Schwerpunktsermittlung des Sichelnebels $M-N$ von dessen kleinem, nordöstlichem Anhange Umgang zu nehmen, da sich derselbe einerseits als sehr lichtschwach erwies, ohne eine Spur kernartiger Verdichtung zu zeigen, und anderseits berufen erscheint, sich an den folgenden Tagen in solche Gebilde aufzulösen, welche nach Weglassung von N' die Schwerpunktsbestimmung der noch übrig bleibenden Figur $M'-N'$ und $M''-N'$ nicht weiter beeinflussen. Unter diesen Restrictionen wäre die Lage der scheinbaren Schwerpunkte der Figuren $M-N$ und $M'-N'$ folgende:

October	9·670	160°56′	−22°12′
	10·658	160 30	−22 10.

Diese Orte werden aber von nachstehendem Elementensysteme weit innerhalb der Grenzen der Unsicherheit der Construction dargestellt.

October 3.0—11.658	
T = September 14·069	
ω = 151°37′3	
Ω = −16 9·8	
i = 141 4·2	
$\log a$ = 0·08240	
$\log e$ = 0·10758	
Darstellung von October 9·670	October 10·658
160°56′ −22°12′	160°27′ −23°14′

Während also die Bahnbestimmung für die Punkte M, M' M'' nur dadurch annehmbare Resultate erzielen liess, dass man den Zeitpunkt der Trennung des Nebels vom Kometen auf den 8. October festsetzte, ist es zur befriedigenden Darstellung der Bahn des Schwerpunktes der nebuleusen Gebilde erforderlich, diesen Zeitpunkt um einige Tage zurückzurücken, welche Verschiebung noch bedeutender ausfallen müsste, wenn man eine Bahn durch $\mathcal{H}$, $M-N$ und N'' zu legen versuchte, und hiebei, wie es bisher durchwegs geschah, für die Anziehungskraft der

Sonne auf die in Rede stehenden Nebelgebilde den allgemein angenommenen Werth einsetzt. Abgesehen von anderen Bedenken, welche gegen die Annahme einer zwei- oder mehrmaligen zu so verschiedenen Zeiten erfolgten Lostrennung von Nebelmassen vom grossen Kometen erhoben werden können, spricht schon die einheitliche Form der Figur des Nebels *M—N* klar genug gegen die Zulässigkeit einer derartigen Voraussetzung. Nach all dem bleibt zur Erklärung der Bewegungserscheinungen des Schmidt'schen Nebels nur mehr die Wahl zwischen zwei Hypothesen übrig:

I. Nimmt man an, dass die einzelnen Theile des Nebels von der Sonne in gleicher Weise angezogen werden, wie planetarische Massen, so kann ihre räumliche Ausbreitung, wie aus den bisherigen Rechnungsresultaten hervorgeht, nur unter der weiteren Annahme gegenseitig wirkender, abstossender Kräfte erklärt werden, welche der gewöhnlichen Massenattraction gegenüber als unverhältnissmässig gross supponirt werden müssen. Ein derartiges Verhalten der nebelbildenden Substanz ist aber im höchsten Grade unwahrscheinlich und mit der Vorstellung einer materiellen Zusammensetzung des Nebels geradezu unvereinbar. Sonach glaubte ich diese Hypothese, nach welcher die Trennung innerhalb der ersten fünf Tage des October stattgefunden hätte, nicht weiter festhalten zu sollen.

II. Man kann aber auch von der Voraussetzung ausgehen, dass alle Theile des Nebels materieller Natur seien und dieser Eigenschaft gemäss der gewöhnlichen Solarattraction unterliegen, hiebei jedoch, entweder von Natur aus, oder veranlasst durch den Process der gewaltsamen Lostrennung sich in einem solchen Zustande befinden, der sie noch einer additionellen Kraftäusserung der Sonne aussetzt, welche Kraft in Bezug auf ihre Fernwirkung, analog den übrigen Naturkräften, dem Quadrate der Entfernung, auf welche hin sie wirkt, umgekehrt proportional angenommen werden soll.

Bedenkt man, dass, während die Kerne der Kometen von der Sonne angezogen werden, die Schweife derselben einer abstossenden Wirkung der Sonne ihre Entwicklung verdanken, so erscheint obige Annahme nicht unvereinbar mit den specifischen Eigenthümlichkeiten kometarischer Gebilde. Wenn ich diese neu

eingeführte Wirkung der Sonne, welche von ihr in einem mittleren Sonnentage in einer der Einheit gleichen Entfernung auf den Nebel ausgeübt würde, mit K^2 bezeichne, wird ihre Gesammteinwirkung in der Entfernung r durch $\frac{k^2+K^2}{r^2}$ ausgedrückt. Bei Ausführung der Rechnungen unter dieser Hypothese bleiben zwei Grössen willkürlich, nämlich ρ' und k^2+K^2, welch' letztere Grösse, die ich der Einfachheit halber mit k_1^2 benennen will, durch Annahme eines gewissen Werthes für die Halbaxe a bestimmt wird.

Bei der Bahnbestimmung aus $\mathcal{N}-N''$ wurden als mittlere Orte N und das arithmetische Mittel der der Zeichnung des Nebels vom 10. October entlehnten Positionen der beiden inneren Nebelflecke angenommen.

Dieselben lauten:

October	9·670	N	160° 56′	—22° 12′
	10·658		160 46	—23 9.

Ich werde nun eine Zusammenstellung der diesbezüglichen Rechnungsresultate folgen lassen mit dem Bemerken, dass Z die angenommene Zeit der Trennung bedeutet.

Z	$\log \rho'$	a	Darstellung der Orte von October 9·678 $\Delta\lambda$	October 9·678 $\Delta\beta$	October 10·658 $\Delta\lambda$	October 10·658 $\Delta\beta$
October 9·0	0·5500	∞	(B—R) +52′	— 2′	+38′	+24′
9·0	0·5500	—0·010	0	—56	—28	— 5
9·0	0·4000	∞	—15	—55	+ 6	— 5
9·0	0·4000	—0·010	—71	—83	—35	—24
8·0	0·4000	∞	+14	+ 2	+ 5	+10
8·0	0·4000	—3·981	+ 2	— 1	+ 1	+ 8*
8·0	0·3600	∞	— 5	—11	— 2	+ 3
8·0	0·3600	—3·981	—11	—14	— 6	+ 1
7·5	0·3528	2·000	+15	+10	+ 7	+11
7·5	0·3528	4·000	+ 4	+ 5	+ 1	+ 8
7·5	0·3330	3·236	— 2	— 1	— 2	+ 5
7·5	0·3330	2·856	0	0	— 1	+ 5**

Aus diesem Schema ersieht man, dass man die Zeit der Trennung nicht über den 8. October hinaus verlegen darf, weil sonst die Abweichung der gerechneten von den angenommenen Orten zu gross ausfiele. Aus dem gleichen Grunde darf man aber für Z auch nicht einen vor dem 7. October gelegenen Zeitpunkt wählen, abgesehen davon, dass man hiedurch auf Ellipsen geführt würde, deren Halbaxen durch kleine, echte Brüche dargestellt werden, und sonach Umlaufszeiten von nur wenigen Wochen entsprechen.

Ich werde hier noch die beiden Elementensysteme ansetzen, welche die besten der in obigem Schema enthaltenen, mit Asterisken versehenen Darstellungen der mittleren Orte liefern:

* October 8·0 —11·659 (N'')	** October 7·5 —11·659 (N'')
T = October 6·207	T = October 4·991
$\omega = 141°\ 23'0$	$\omega = 117°\ 36'8$
$\Omega = 219\ \ 4·8$	$\Omega = 225\ \ 26·8$
$i = 32\ \ 33·6$	$i = 33\ \ 28·0$
$\log a = 0·60000$	$\log a = 0·45570$
$\log e = 0·02301$	$\log e = 9·97831$
$\log q = 9·33573$	$\log q = 9·14330$
$\log k_1 = 9·39160$	$\log k_1 = 9·24815$
(Hyperbel)	(Ellipse).

Von diesen beiden Elementensystemen glaube ich dem elliptischen den Vorzug einräumen zu sollen, da sowohl die Darstellung der mittleren Orte hiedurch günstiger sich gestaltet, als auch der Werth von k_1 dem Gauss'schen Werthe der Constante k näher liegt. Für die Zeit der Trennung des Nebels vom Kometen wäre sonach October 7·5 anzunehmen.

Nachdem ich ursprünglich von der Voraussetzung ausgegangen war, dass die Auflösung der nebeligen Gebilde nur unter dem Einflusse gleichzeitiger, an Stärke und Richtung verschiedener Impulse stattgefunden habe, durch welche die Abtrennung vom Kometen veranlasst worden ist, die Gesammterscheinung jedoch nicht in befriedigender Weise hieraus erklärt werden konnte, musste ich mich noch zur Zusatzhypothese bequemen, dass die einzelnen Theile des Nebels auch verschiedenen Wir-

kungen der Sonne ausgesetzt seien. Dann lässt sich auch eine Bahn finden, welche aus $\mathfrak{P}$—M'' unter Beibehaltung des Werthes $Z =$ October 7·5 gerechnet, die Orte M und M' in vollkommen zufriedenstellender Weise darstellt. Die Elemente dieser Bahn sind folgende:

$$\begin{aligned} &\text{October } 7\cdot5 \quad -11\cdot657\,(M'')\\ T &= \text{October } 3\cdot909\\ \omega &= 203^\circ\ 25^\circ7\\ \Omega &= 228\ \ 27\cdot8\\ i &= \ \ 34\ \ \ 3\cdot3\\ \log a &= 9\cdot02929\\ \log e &= 0\cdot50666\\ \log q &= 9\cdot37391\\ \log k_1 &= 8^n83809. \end{aligned}$$

Hieraus ergeben sich folgende Positionen für

October 9·670		October 10·658	
160° 50′	—22° 0′	159° 56′	—23° 21′
$M =$ 160 51	—22 0	$M' =$ 159 53	—23 21
B—R = +1′	0′	B—R = —3′	0′

Gestützt auf die Resultate der bisher gepflogenen Untersuchungen, glaube ich mich dahin aussprechen zu dürfen, dass die Bewegungserscheinungen des Schmidt'schen Nebels mit ausreichender Genauigkeit durch Rechnung dargestellt werden können, wenn man annimmt, dass sich der Nebel in seiner Gesammtheit in der Nacht vom 7. auf den 8. October vom Kometen losgelöst habe, die einzelnen Theile des Nebels jedoch verschiedenen Kraftäusserungen der Sonne unterworfen seien. Während nämlich die mit M, M', M'' bezeichneten Nebelmassen sich so bewegten, als ständen sie unter dem Einflusse einer abstossenden Wirkung der Sonne, deren Mass $k_1 = -0{\cdot}06888$ ist, erfordert die Darstellung der Bewegung der Massen N, N'' die Hypothese einer erhöhten durch $k_1 = 0\cdot17707$ gemessenen anziehenden Wirkung der Sonne. Der am 11. October gesehene, zwischen M'' und N'' gespannte Nebelbogen wäre sonach von Materie gebildet gewesen, für welche k_1 verschiedene, aber zwischen den

Grenzen —0·07 und 0·18 gelegene Werthe besitzt. Für östlich von der Bahnlinie NN'' gelegene Nebelmassen, wie die mit N' bezeichnete, wäre $k_1 > 0{\cdot}18$.

Es ist klar, dass die Beweiskraft der Übereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung für die Richtigkeit der gemachten Annahmen durch die Inanspruchnahme einer variirten Sonnenwirkung bedeutend abgeschwächt wird, wesshalb ich auch gar nicht beanspruche, einen derartigen Beweis erbracht zu haben, sondern mich begnüge, gezeigt zu haben, dass unter gewissen Voraussetzungen die Bewegungserscheinungen des Schmidt'schen Nebels in ihrer Gesammtheit sich durch Rechnung darstellen lassen.

Bahnbestimmung des Planeten „Adria".

II. Theil.

Von **Eduard Freih. v. Haerdtl**,
stud. phil.

Da ich in einer früheren Abhandlung über die Bahnbestimmung des Planeten „Adria" — vorgelegt in der Sitzung am 15. Juni 1882 — einen Theil meiner Rechnung bereits veröffentlicht habe, setze ich, im Anschlusse an diese, nur die letzterhaltenen Ecliptical-Elemente nochmals hier an:

Adria (143)

Epoche 1880 März 29·0

$$\left.\begin{aligned} L &= 197^\circ\,14'\,22''6 \\ \pi &= 221\;\;20\;\;11\cdot6 \\ \Omega &= 333\;\;40\;\;33\cdot4 \\ i &= \;\;11\;\;28\;\;53\cdot6 \end{aligned}\right\}\text{mittl. Äq. 1880.}$$

$$\varphi = \;\;4\;\;9\;\;37\cdot5$$

$$\mu = 773''010163.$$

Meine Erwartung, dass die Auffindung des Planeten Adria keine grosse Mühe verursachen werde, ging auch wirklich in Erfüllung. Am 3. November 1881 beobachtete nämlich Herr J. Palisa in Wien nach der von mir aufgestellten Oppositionsephemeride den Planeten, doch war es in Folge der ungünstigen Witterung nicht möglich, weitere Beobachtungen anzustellen.

Im Sinne: Beobachtung weniger Rechnung, zeigten sich die folgenden Differenzen:

ΔAR	ΔD
$+7^s\cdot75$	$+52''9.$

Die Verwerthung dieser Beobachtung zur Verbesserung voranstehender Elemente war meine nächste Aufgabe. Bevor ich aber daran gehen konnte, musste erst die strenge Störungsrechnung durchgeführt werden.

Die durch Jupiter und Saturn bewirkten Störungswerthe, zu deren Bestimmung ich mich der Methode der Variation der Constanten bediente, wurden für die Dauer von Februar 24. 1875 bis December 4. 1882 ermittelt.

Nachfolgend setze ich die Werthe an, welche die Rechnung für die Differentialquotienten mit den Massenannahmen:

$$\mathfrak{Y} = \frac{1}{1047 \cdot 879} \qquad \mathfrak{h} = \frac{1}{3501 \cdot 6}$$

ergab.

			$w^2\left(\frac{d^2\mu}{dt^2}\right)$	$w\left(\frac{dL}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\pi}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$	$w\left(\frac{di}{dt}\right)$
1875	Feb.	24	—2″5330	+ 4″978	+ 6″100	—2′ 5″426	+ 0″390	—1″146
	April	15	—3·2567	+ 2·583	+ 7·932	—2 35·667	— 0·781	—1·685
	Mai	15	—3·9451	— 0·928	+10·063	—3 2·754	— 3·019	—2·307
	Juni	24	—4·4884	— 5·659	+12·133	—3 23·783	— 6·648	—2·958
	Aug.	3	—4·7241	—11·560	+13·534	—3 36·353	—11·871	—3·533
	Sept.	12	—4·4575	—18·240	+13·479	—3 40·146	—18·555	—3·882
	Oct.	22	—3·5270	—24·708	+11·272	—3 38·023	—25·951	—3·825
	Dec.	1	—1·9254	—29·533	+ 6·768	—3 35·925	—32·625	—3·245
1876	Jan.	10	+0·1090	—31·320	+ 0·763	—3 39·647	—36·849	—2·181
	Feb.	19	+2·1379	—29·484	— 5·177	—3 50·463	—37·450	—0·862
	März	30	+3·7254	—24·612	— 9·539	—4 3·615	—34·474	+0·397
	Mai	9	+4·6394	—18·083	—11·619	—4 11·566	—29·047	+1·347
	Juni	18	+4·8908	—11·327	—11·637	—4 8 741	—22·645	+1·893
	Juli	28	+4·6386	— 5·317	—10·314	—3 53·693	—16·455	+2·071
	Sept.	6	+4·0764	— 0·502	— 8·420	—3 28·464	—11·157	+1·974
	Oct.	16	+3·3670	+ 3·042	— 6·525	—2 56·743	— 7·001	+1·708
	Nov.	25	+2·6237	+ 5·445	— 4·958	—2 22·402	— 3·971	+1·354
1877	Jan.	4	+1·9157	+ 6·904	— 3·857	—1 48·758	— 1·933	+0·976
	Feb.	13	+1·2794	+ 7·635	— 3·226	—1 18·161	— 0·706	+0·611
	März	25	+0·7295	+ 7·835	— 3·010	— 52·048	— 0·115	+0·285
	Mai	4	+0·2661	+ 7·671	— 3·118	— 31·020	+ 0·004	+0·012
	Juni	13	—0·1198	+ 7·275	— 3·466	— 15·119	— 0·208	—0·201
	Juli	23	—0·4416	+ 6·735	— 3·976	— 3·926	— 0·631	—0·353

			$w^2\left(\frac{d^2\mu}{dt^2}\right)$	$w\left(\frac{dL}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\pi}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$	$w\left(\frac{di}{dt}\right)$
1877	Sept.	1	—0″7129	+ 6″107	— 4″594	+ 3″067	—1″159	—0″445
	Oct.	11	—0·9455	+ 5·416	— 5·269	+ 6·408	—1·713	—0·486
	Nov.	20	—1·1479	+ 4·663	— 5·959	+ 6·557	—2·228	—0·481
	Dec.	30	—1·3248	+ 3·846	— 6·623	+ 3·934	—2·658	—0·442
1878	Feb.	8	—1·4778	+ 2·965	— 7·227	— 1·064	—2·974	—0·375
	März	20	—1·6073	+ 2·021	— 7·732	— 8·046	—3·158	—0·291
	April	29	—1·7126	+ 1·017	— 8·110	— 16·550	—3·204	—0·200
	Juni	8	—1·7921	— 0·034	— 8·339	— 26·065	—3·118	—0·111
	Juli	28	—1·8444	— 1·119	— 8·408	— 36·049	—2·909	—0·025
	Aug.	27	—1·8684	— 2·225	— 8.311	— 45·935	—2·596	+0·045
	Oct.	6	—1·8631	— 3·331	— 8·059	— 55·162	—2·203	+0·098
	Nov.	15	—1·8276	— 4·419	— 7·669	—1′ 3·208	—1·758	+0·130
	Dec.	25	—1·7610	— 5·467	— 7·165	—1 9·608	—1·290	+0·137
1879	Feb.	3	—1·6629	— 6·460	— 6·587	—1 14·001	—0·833	+0·121
	März	15	—1·5330	— 7·385	— 5·978	—1 16·157	—0·419	+0·082
	April	24	—1·3713	— 8·224	— 5·380	—1 15·987	—0·078	+0·020
	Juni	3	—1·1782	— 8·956	— 4·838	—1 13·574	+0·161	—0·057
	Juli	13	—0·9548	— 9·562	— 4·403	—1 9·199	+0·276	—0·147
	Aug.	22	—0·7032	—10·026	— 4·118	—1 3·836	+0·252	—0·240
	Oct.	1	—0·4265	—10·335	— 4·012	—0 56·630	+0·081	—0·332
	Nov.	10	—0·1290	—10·476	— 4·102	— 49·870	—0·233	—0·414
	Dec.	26	+0·1835	—10·439	— 4·381	— 43·906	—0·677	—0·478
1880	Jan.	29	+0·5040	—10·216	— 4·827	— 39·574	—1·228	—0·517
	März	19	+0·8242	— 9·803	— 5·395	— 37·585	—1·850	—0·526
	April	18	+1·1348	— 9·201	— 6·021	— 38·428	—2·501	—0·501
	Mai	28	+1·4258	— 8·414	— 6·629	— 42·265	—3·135	—0·442
	Juli	7	+1·6872	— 7·450	— 7·146	— 48·894	—3·701	—0·349
	Aug.	6	+1·9097	— 6·322	— 7·503	— 57·734	—4·156	—0·228
	Sept.	25	+2·0853	— 5·051	— 7·650	—1′ 7·889	—4·458	—0·085
	Nov.	4	+2·2075	— 3·658	— 7·560	—1 18·255	—4·578	—0·070
	Dec.	14	+2·2716	— 2·167	— 7·241	—1 27·662	—4·502	+0·226
1881	Jan.	23	+2·2752	— 0·607	— 6.727	—1 35·002	—4·229	+0·371
	März	4	+2·2175	+ 0·992	— 6.073	—1 39·392	—3·778	+0·492
	April	13	+2·0991	+ 2·599	— 5·359	—1 40·213	—3·181	+0·580
	Mai	3	+1·9219	+ 4·179	— 4·669	—1 37·210	—2·486	+0·625
	Juli	2	+1·6887	+ 5·699	— 4·092	—1 30·469	—1·755	+0·618
	Aug.	11	+1·4018	+ 7·124	— 3·710	—1 20·397	—1·059	+0·556
	Sept.	20	+1·0643	+ 8·419	— 3·595	—1 7·660	—0·476	+0·438
	Oct.	30	+0·6790	+ 9·547	— 3·808	—0 53·148	—0·090	+0·265
	Dec.	9	+0·2484	+10·467	— 4·386	— 37·904	+0·016	+0·043

		$w^2\left(\frac{d^2\mu}{dt^2}\right)$	$w\left(\frac{dL}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\pi}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$	$w\left(\frac{di}{dt}\right)$
1882	Jan. 18	—0″2255	+11″135	— 5″357	—23″044	— 0″240	—0″218
	Feb. 27	—0·7407	+11·506	— 6·727	— 9·725	— 0·935	—0·504
	April 8	—1·2951	+11·527	— 8·490	+ 0·872	— 2·138	—0·799
	Mai 18	—1·8865	+11·141	—10·617	+ 7·662	— 3·907	—1·082
	Juni 27	—2·5125	+10·285	—13·073	+ 9·667	— 6·284	—1·328
	Aug. 6	—3·1697	+ 8·878	—15·802	+ 6·026	— 9·290	—1·506
	Sept. 15	—3·8525	+ 6·826	—18·737	— 3·876	—12·919	—1·586
	Oct. 25	—4·5511	+ 4·013	—21·794	—20·357	—17·127	—1·532
	Dec. 4	—5·2514	+ 0·269	—24·886	—42·722	—21·850	—1·306

Die Anfangsconstanten wurden nun so bestimmt, dass sie für die Osculationsepoche — 1880 März 29·0 — verschwinden, und mit den so ermittelten Werthen die summirten Reihen gebildet.

Ermittelt man endlich für diejenigen Intervalle der Störungsrechnung, welche zunächst der Beobachtungen liegen, mit Hilfe der Formeln der mechanischen Quadratur die numerischen Integrale, so lässt dieses Verfahren für die der Rechnung zu Grunde gelegten Orte folgende Störungswerthe finden:

	1875 Feb. 25·5	März 28·5	Mai 2·5	1877 Oct. 9·5
$\Delta\mu$	+ 0″50319	+ 0″44588	+ 0″37073	+ 0″62968
ΔL	— 4′ 3″42	— 3′44″75	— 3′28″85	— 1′37″59
$\Delta\pi$	+1°18 3·35	+1°16 11·74	+1°13 49·39	+16 7·46
$\Delta\varphi$	+ 2 37·25	+ 2 42·77	+ 2 50·16	+ 2 20·51
$\Delta\Omega$	+ 5 37·40	+ 5 37·50	+ 5 36·40	+ 33·63
Δi	+ 17·94	+ 16·84	+ 15·23	+ 4·27
	1880 März 15·54377	April 13·45245	April 30·42276	1882 Nov. 3·41843
$\Delta\mu$	— 0″00781	+ 0″01005	+ 0″02241	+ 0″23285
ΔL	+ 3″30	— 3′55	— 7″15	+ 7′51″94
$\Delta\pi$	+ 12·64	— 14·63	— 31·05	— 19 28·99
$\Delta\varphi$	+ 1·88	— 2·25	— 4·83	— 3 6·80
$\Delta\Omega$	+ 0·69	— 0·89	— 1·98	— 1 32·12
Δi	+ 0·18	— 0·19	— 0·40	— 5·47

Bringt man diese Störungswerthe an obige Elemente an und rechnet mit diesen die Darstellung der Beobachtungen, so ergeben sich folgende Differenzen:

				ΔAR	ΔD
1875	Februar	25.	—	0″81	— 0″45
	März	28.	—	3·97	+ 3·01
	Mai	2.	—	4·11	+ 3·50
1877	October	9.	—	3·92	+ 0·81
1880	März	15.	—	1·17	+ 9·23
	April	13.	—	0·03	— 4·88
	April	30.	—	3·29	— 2·92
	November	3.	—	1′56·34	+52.91.

Der geringe Betrag der Differenzen in den ersten sieben Orten, bedingt durch das Zugrundelegen der neuen, strengen Störungswerthe, zeigt, welch hohen Grad der Genauigkeit die Methode erreichen lässt, nach der ich die Störungen mit Rücksicht auf die ersten Potenzen der Massen ermittelt habe.

Da auch die Differenzen in dem letzten Ort keine so grossen sind, dass sie eine wesentliche Änderung der Elemente verursachen können, bediente ich mich bei der Aufstellung der Normalgleichungen für die ersten sieben Orte der früher aufgestellten Differentialquotienten mit den osculirenden Elementen vom November 3. 1882.

Macht man für die Variablen die Substitutionen:

$$x = 0\cdot18392\, dL$$
$$y = 3\cdot41984\, d\mu$$
$$z = 0\cdot45320\, d\Phi$$
$$t = 0\cdot19153\, d\Psi$$
$$u = 0\cdot18150 \sin i d\Omega$$
$$w = 0\cdot00631\, di$$
$$v = 2\cdot00346,$$

in welchen Relationen die Coëfficienten logarithmisch angeführt sind, so lauten die homogen gemachten Bedingungsgleichungen:

1.	$7_n89237 = 9\cdot96398x$	$+0_n00000y$	$+9\cdot92714z$	$+9\cdot95054t$	$+9\cdot36085u$	$+9\cdot47935w$
2.	$8_n58333 = 9\cdot90781$	9_n94560	$9\cdot87738$	$9\cdot89873$	$9\cdot32729$	$9\cdot25112$
3.	$8_n60196 = 9\cdot80659$	9_n84205	$9\cdot79752$	$9\cdot74370$	$9\cdot29752$	$9\cdot82796$
4.	$8_n58279 = 9\cdot81894$	9_n58963	9_n90967	$8\cdot79764$	$9\cdot43784$	9_n37490
5.	$8_n04528 = 9\cdot99666$	$7\cdot62856$	$9\cdot99467$	9_n66080	$9\cdot38946$	9_n39481
6.	$6_n45556 = 0\cdot00000$	7_n40490	$0\cdot00000$	9_n64718	$9\cdot39705$	9_n55942
7.	$8_n49767 = 9\cdot96597$	7_n69576	$9\cdot96888$	9_n61790	$9\cdot36883$	9_n60630
8.	$0\cdot00000 = 9\cdot88402$	$9\cdot62180$	9_n83039	$0\cdot00000$	7_n56252	9_n66744

9.	$7_n64975 = 9_n74986\,x$	$+9\cdot78529\,y$	$+9_n71450\,z$	$+9_n73038\,t$	$+9\cdot99423\,u$	$+9\cdot69484\,w$
10.	$8\cdot47511 = 9_n68775$	$9\cdot72025$	9_n66807	9_n61364	$9\cdot96577$	$9\cdot49101$
11.	$8\cdot54061 = 9_n61069$	$9\cdot63769$	9_n60944	9_n42951	$9\cdot88981$	$9\cdot06128$
12.	$7\cdot90502 = 9\cdot68736$	9_n40376	9_n73643	$9\cdot07355$	9_n97786	$9\cdot54864$
13.	$8\cdot96174 = 9_n77840$	7_n91505	9_n77121	$9\cdot52240$	$0\cdot00000$	9_n60758
14.	$8_n68496 = 9_n82144$	8_n03894	9_n80590	$9\cdot61874$	$9\cdot99055$	9_n74651
15.	$8_n46192 = 9_n80981$	8_n03346	9_n79140	$9\cdot62711$	$9\cdot95569$	9_n78477
16.	$9\cdot72008 = 9\cdot55121$	$9\cdot31107$	9_n45130	$9\cdot72718$	9_n84709	$0\cdot00000,$

wovon die ersten acht Gleichungen den Rectascensionen, die letzten den Declinationen angehören. Die Coëfficienten der Normalgleichungen ergeben sich mit:

$[aa] = +8\cdot07019$	$[bb] = +3\cdot53065$	$[cc] = +7\cdot80519$	$[as] = +10\cdot51401$
$[ab] = -2\cdot82430$	$[bc] = -2\cdot55586$	$[cd] = -0\cdot67131$	$[bs] = -\ 2\cdot94008$
$[ac] = +5\cdot07275$	$[bd] = -2\cdot17391$	$[ce] = -1\cdot34764$	$[cs] = +\ 7\cdot75778$
$[ad] = +1\cdot45198$	$[be] = +0\cdot82859$	$[cf] = +0\cdot38496$	$[ds] = +\ 4\cdot39288$
$[ae] = -2\cdot46946$	$[bf] = -0\cdot28175$	$[cn] = -0\cdot93039$	$[es] = +\ 1\cdot59782$
$[af] = +0\cdot41615$	$[bn] = +0\cdot63651$		$[fs] = +\ 2\cdot54587$
$[an] = +0\cdot79656$			$[ns] = +\ 2\cdot78314$

$[dd] = +4\cdot60533$	$[ee] = +6\cdot98967$	$[ff] = +3\cdot52966$
$[de] = -0\cdot30750$	$[ef] = -1\cdot74506$	$[fn] = +0\cdot06990$
$[df] = +0\cdot27197$	$[en] = -0\cdot35072$	
$[dn] = +1\cdot21630.$		

Die Auflösung der Normalgleichungen ergibt endlich für die Unbekannten die Werthe:

$$\begin{aligned} x &= 9\cdot40667 \\ y &= 9\cdot83385 \\ z &= 8_n\,35699 \\ t &= 9\cdot69899 \\ u &= 8_n\,27346 \\ w &= 8\cdot25950, \end{aligned}$$

welchen in den Elementen die Änderungen entsprechen:

$$\begin{aligned} dL' &= +\ \ 16''83 \\ d\pi' &= +4'59\cdot65 \\ d\mathfrak{S}' &= -\ \ \ 2\cdot22 \\ d\varphi &= -\ \ 24\cdot33 \\ di' &= +\ \ \ 1\cdot81 \\ d\mu &= +0''026149 \end{aligned}$$

Um diese Variationen unmittelbar an die obigen Elemente anbringen zu können, war es nöthig, die ersteren auf die Ecliptik als Fundamentalebene zu übertragen.

Die Rechnung ergab nun hiefür:

$$\begin{aligned} dL &= + \quad 17''02 \\ d\pi &= +4'59\cdot84 \\ d\Omega &= - \quad 1\cdot09 \\ d\varphi &= - \quad 24\cdot33 \\ di &= + \quad 2\cdot11 \\ d\mu &= +0''026149. \end{aligned}$$

Bringt man diese Änderungen an obige Elemente an, so erhält man schliesslich folgende verbesserte Elemente:

Adria (143)

Epoche 1880, März 29·0

$$\left.\begin{aligned} L &= 197°14'39''62 \\ \pi &= 221\ 25\ 11\cdot44 \\ \Omega &= 333\ 40\ 32\cdot31 \\ i &= \ 11\ 28\ 55\cdot71 \end{aligned}\right\} \text{mittl. Äq. 1880}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \ 4\ 9\ 13\cdot17 \\ \mu &= 773''036312. \end{aligned}$$

Stellt man nun mit diesen Elementen und obigen Störungen die Beobachtungen dar, so erübrigen folgende Differenzen:

			ΔAR	$D\Delta$
1875	Februar	25.	—0″38	—0″87
	März	28·	—3·86	+0·49
	Mai	2.	—0·08	—1·93
1877	October	9.	+0·16	—3·39
1880	März	15.	—0·15	+8·71
	April	13.	+0·01	—7·56
	April	30.	+5·09	—6·25
1882	November	3.	+1·53	—0·70.

Die Darstellung ist im Ganzen eine befriedigende. Auffällig sind nur die Differenzen in den Declinationen der drei Einzelbeobachtungen aus dem Jahre 1880, welche einen grösseren Fehler in einer der Declinationen als sehr wahrscheinlich

erscheinen lassen. Mit Rücksicht darauf, dass die Differenzen in der naheliegenden zweiten und dritten Beobachtung fast dieselben sind und durch eine gleiche Drehung der Bahnlage sich wegschaffen liessen, vermuthe ich, dass die Declination des 15. März es ist, an der ein grösserer Fehler haftet.

Da die Rectascensionen durch voranstehende Elemente sehr gut dargestellt werden, die Unsicherheit der Bahnlage aber nur durch weitere Beobachtungen weggeschafft werden könnte, habe ich ein nochmaliges Auflösen der Normalgleichungen mit Weglassung der Declinationen aus dem Jahre 1880 unterlassen. Wenn ich mit Hilfe meiner, am Schlusse dieser Abhandlung mitgetheilten Oppositionsephemeride weitere Beobachtungen erhalte, gedenke ich für das Jahr 1875 mit Hilfe meiner neu zu berechnenden Oppositionsephemeride eine Sichtung der Beobachtungen vorzunehmen und hierauf für 1875 neue Normalorte zu bilden. Wenn man endlich der Rechnung noch einen Normalort, aus den Beobachtungen des Jahres 1880 gebildet, zu Grunde legen wird, glaube ich durch ein neues Ausgleichen nach der Methode der kleinsten Quadrate ein vollkommen sicheres Resultat zu erlangen.

Nachdem nun durch die Berücksichtigung der Beobachtung aus dem Jahre 1882 die Elemente verbessert waren, ergab die Fortsetzung der Störungsrechnung bis 1885 December 25. für die Differentialquotienten folgende Werthe:

		$w^2\left(\frac{d^2\mu}{dt^2}\right)$	$w\left(\frac{dL}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\pi}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$	$w\left(\frac{di}{dt}\right)$
1883 Jan.	13	−5″9120	− 4″539	−27″834	−1′10″776	−26″893	−0″869
Feb.	22	−624785	−10·599	−30·471	−1 41·630	−32·022	−0·189
April	3	−6·8512	−17·989	−32·529	−2 10·696	−36·815	+0·754
Mai	13	−6·8936	−26·650	−33·744	−2 30·684	−40·715	+1·950
Juni	22	−6·4288	−36·086	−33·855	−2 31·630	−42·941	+3·328
Aug.	1	−5·2933	−45·246	−32·749	−2 3·080	−42·655	+4·733
Sept.	10	−3·4243	−52·506	−30·605	−0 58·781	−39·286	+5·920
Oct.	20	−0·9661	−56·038	−27·921	+0 36·835	−32·931	+6·614
Nov.	29	+1·6976	−54·639	−25·344	+2 25·827	−24·618	+6·638
1884 Jan.	8	+4·0633	−48·443	−23·331	+4 2·447	−16·005	+5·990
Feb.	17	+5·7266	−38·951	−21·918	+5 5.288	− 8·658	+4·897
März.	28	+6·5331	−28·246	−20·785	+5 26·294	− 3·428	+3·649

		$w^2\left(\frac{d^2\mu}{dt^2}\right)$	$w\left(\frac{dL}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\pi}{dt}\right)$	$w\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)$	$w\left(\frac{di}{dt}\right)$
1884 Mai	7	+6″5694	−18″116	−19″531	+5′ 10″859	−0″352	+2·491
Juni	16	+6·0480	− 9·612	−17·873	+4 31·496	+1·035	+1·555
Juli	26	+5·1960	− 3·086	−15·729	+3 41·400	+1·334	+0·875
Sept.	4	+4·1963	+ 1·546	−13·169	+2 50·973	+1·065	+0·426
Oct.	14	+3·1732	+ 4·570	−10·352	+2 6.868	+0·592	+0·162
Nov.	23	+2·2039	+ 6·315	− 7·473	+1 32·524	+0·134	+0·026
1885 Jan.	2	+1·3302	+ 7·085	− 4·716	+1 8·957	−0·198	−0·027
Feb.	11	+0·5721	+ 7·135	− 2·231	+0 55·576	−0·364	−0·033
März	23	−0·0638	+ 6·667	− 0·013	+ 50·806	−0·370	−0·019
Mai	2	−0·5792	+ 5·837	+ 1·512	+ 52·559	−0·243	−0·005
Juni	11	−0·9808	+ 4·768	+ 2·685	+ 58·629	−0·025	+0·000
Juli	21	−1·2782	+ 3·552	+ 3·408	+1 6·925	+0·239	−0·012
Aug.	30	−1·4825	+ 2·259	+ 3·733	+1 15·669	+0·508	−0·046
Oct.	9	−1·6057	+ 0·944	+ 3·730	+1 23·507	+0·743	−0·100
Nov.	18	−1·6597	+ 0·350	+ 3·486	+1 29·536	+0·911	−0·170
Dec.	28	−1·6558	+ 1·591	+ 3·082	+1 33·275	+0·989	−0·253

Da die im Berliner Jahrbuch, vom Jahre 1885 ab, mitgetheilten Coordinaten der störenden Planeten sich auf das Äquinoctium 1890 beziehen, war es nöthig, auch die Elemente des Planeten Adria auf das gleiche Äquinoctium zu übertragen. Um diese Änderungen streng zu berücksichtigen, rechnete ich mit den Elementen, welche für 1884 November 23 gelten, die Übertragung von 1880 auf 1890. Es fand sich:

$$\begin{aligned} \pi_1 - \pi_0 &= +8\,'22''2629 \\ \Omega_1 - \Omega_0 &= +8\ 30\cdot3722 \\ i_1 - i_0 &= +\ +\ \ 4\cdot5120 \\ \omega_1 - \omega_0 &= -\ \ \ 8\cdot1093. \end{aligned}$$

Diese Incremente sind daher den durch mechanische Quadratur ermittelten Störungswerthen beizulegen, wenn man das Äquinoctium 1890 den weiteren Rechnungen zu Grunde legt.

Vergleicht man mit Hilfe der Störungsrechnung die heliocentrischen Längen des Planeten mit denen der Erde, so ergibt die Interpolation für die nächste Oppositionszeit den 30. Jänner 1884. Da die Störungen für diesen Moment folgende Beträge erreichen:

$$\begin{aligned}
\Delta L &= -\ 2'31''81\\
\Delta\pi &= -25\ 59\cdot77\\
\Delta\Omega &= -\ 8\ 37\cdot49\\
\Delta\varphi &= -\ 7\ 34\cdot03\\
\Delta i &= +\ \ 27\cdot96\\
\Delta\mu &= -\ 0''83672,
\end{aligned}$$

wurden der Ephemeridenrechnung folgende Elemente zu Grunde gelegt:

Epoche 1880, März 29·0

$$\left.\begin{aligned}
L &= 138°21'51'24\\
\pi &= 220\ 59\ 11\cdot67\\
\Omega &= 333\ 31\ 54\cdot82\\
i &= \ 11\ 29\ 23\cdot67
\end{aligned}\right\}\ \text{mittl. Äq. 1880}$$

$$\begin{aligned}
\varphi &= \ \ 4\ \ 1\ 39\cdot14\\
\mu &= 772''199592.
\end{aligned}$$

Die Rechnung selbst, siebenstellig durchgeführt, ergab für die Oppositionsephemeride der Adria:

12ʰ mittlere Zeit		*AR* (143)	*D* (143)	Log. d. Entf. von ☉	Aberrations-Zeit
1884 Jan.	12	9ʰ 19ᵐ 24ˢ·44	+23°51'54''3	0·264247	15ᵐ 16ˢ·3
	13	9 18 34·58	53 25·6	0·262825	13·3
	14	9 17 43 50	54 56·2	0·261459	10·4
	15	9 16 51·23	56 25·8	0·260152	7·8
	16	9 15 57·80	57 54·1	0·258906	5·1
	17	9 15 3·23	59 20·8	0·257722	2 6
	18	9 14 7·56	24 0 45·6	0·256602	0·2
	19	9 13 10·85	2 8·1	0·255546	14 58·1
	20	9 12 13·16	3 28·2	0·254554	56·1
	21	9 11 14·61	4 45·5	0·253629	54·2
	22	9 10 15·24	5 59·6	0·252772	52·4
	23	9 9 15·07	7 10·2	0·251983	50·8
	24	9 8 14·15	8 17·2	0·251262	49·3
	25	9 7 12·61	9 20·1	0·250612	48·0
	26	9 6 10·55	10 18·6	0·250032	46·7

12h mittlere Zeit		AR (143)	D (143)	Log. d. Entf. von ♁	Aberrations-Zeit
Jan.	27	9h 5m 8·01	+24°11'12"6	0·249523	14m45·8
	28	9 4 5·04	12 1·7	0·249086	44·9
	29	9 3 1·72	12 45·7	0·248722	44·3
	30	9 1 58·15	13 24·5	0·248430	43·7
	31	9 0 54·39	13 57·7	0·248210	43·2
Feb.	1	8 59 59·54	14 25·2	0·248062	42·8
	2	8 58 46·66	14 46·7	0·247987	42·7
	3	8 57 42 83	15 2·0	0·247985	42·7
	4	8 56 39·14	15 11·0	0·248055	42·9
	5	8 55 35·65	15 13·4	0 248196	43·1
	6	8 54 32·44	15 9·4	0·248409	43·6
	7	8 53 29·58	14 58·8	0·248692	44·1
	8	8 52 27·14	14 41·6	0·249046	44·8
	9	8 51 25·19	14 17·5	0·249469	45·6
	10	8 50 23·81	13 46·5	0·249961	46·6
	11	8 49 23·06	13 8·5	0·250522	47·7
	12	8 48 22·99	12 23·6	0·251150	49 1
	13	8 47 23·69	11 31·8	0·251844	50·5
	14	8 46 25·22	10 32·9	0·252604	52·0
	15	8 45 27·63	9 26·9	0·253430	53·6
	16	8 44 30·98	8 13·9	5·254320	55·6
	17	8 43 35·34	6 53·9	0·255272	57·6

Opp. in *AR*: Febr. 1; Lichtstärke = 1·00; Grösse = 12·4.

Wenn ich endlich die Hoffnung ausspreche, dass das Gelingen mehrerer Beobachtungen nach dieser Epheremide mir es ermöglichen werden, die erlangten Elemente noch zu vervollkommnen, glaube ich doch mit Sicherheit behaupten zu können, dass Beobachtung und Rechnung nur mehr innerhalb weniger Secunden differiren werden.

Schliesslich lasse ich noch die Jahresephemeride für 1884 folgen:

0h mittl. Zeit		*AR*	*D*	Log Δ	log *r*
Jan.	8	9h 23m 1	+23°43′	0·271	0·442
Jan.	28	9 4·6	+24 12	0·249	0·440
Febr.	17	8 44·2	+24 7	0·255	0·438
März	8	8 31·8	+23 16	0·285	0·435
März	28	8 27·2	+21 55	0·327	0·433
April	17	8 35·0	+20 10	0·372	0·431
Mai	7	8 50·6	+18 2	0·417	0·429
Mai	27	9 11·7	+15 36	0·455	0·426
Juni	16	9 37·1	+12 50	0·488	0·424
Juli	6	10 4·5	+ 9 43	0·513	0·422
Juli	26	10 33·8	+ 6 17	0·533	0·421
Aug.	15	11 3·8	+ 2 35	0·546	0·419
Sept.	4	11 34·9	— 1 19	0·554	0·417
Sept.	24	12 6·5	— 5 22	0·556	0.415
Oct.	14	12 38·5	— 9 27	0·553	0·414
Nov.	3	13 11·2	—13 32	0·543	0·413
Nov.	23	13 43·9	—17 29	0.527	0·412
Dec.	13	14 16·7	—21 11	0·505	0·411
Dec.	33	14 48·9	—24 45	0·477	0·410

Versuche und Bemerkungen über das Blitzableitersystem des Herrn Melsens.

(Mit 3 Holzschnitten.)

Von **E. Mach.**

Auf der Pariser Elektricitätsausstellung 1881 lernte ich unter der freundlichen Anleitung des Erfinders das Blitzableitersystem des Herrn Melsens kennen, dessen physikalisch interessanteste Seite, von technischen Fragen ganz absehend, ich hier einer kurzen Erörterung unterziehen möchte.

Herr Melsens schliesst das ganze zu schützende Gebäude in ein Netz von Drähten, so zu sagen in einen Drahtkorb ein, indem er von dem bekannten Satze ausgeht, dass die elektrische Ladung sich nur auf der äussern Oberfläche des Leiters befindet. Dieses System, welches bereits mehrfach praktisch ausgeführt ist, empfiehlt Herr Melsens besonders für Magazine von Explosivkörpern. Durch Versuche mit Drahtkörben, die kleine Thiere enthielten, hat er sich überzeugt, dass diese auf starke durch die Körbe geleitete Batterieentladungen durchaus nicht reagiren, ein Verhältniss, das sich schon aus Faraday's Versuchen ergibt. [1]

---

[1] Faraday, experimental rechearches in electricity Vol I. §§. 1173. 1174. — Bei Gelegenheit einer vor Jahren angestellten längeren Versuchsreihe, von welcher bisher nur ein kleiner Theil aus Rücksicht für einen jüngern Mitbeobachter publicirt worden ist, habe ich auch den Faraday'schen Versuch angestellt, und wahrgenommen, dass der Beobachter in einem isolirten leitenden Kasten die stärksten Entladungen nicht empfindet. (Sitzber. d. Wiener Academie, Bd. 80, II. Abth. Juli 1879). Auch der Faraday'sche Influenzsatz (welcher gewöhnlich in der Form $\int \frac{dV}{dn} dS = -4\pi Q$ ausgedrückt wird) lässt sich an einem solchen Kasten

Die Sache liegt übrigens nicht ganz so einfach, als es bei flüchtiger Betrachtung den Anschein hat. Der erwähnte Oberflächensatz ist nämlich ein Satz der Elektrostatik, während der Fall der Entladung ein dynamischer Fall ist. Aus dem Oberflächensatz folgt auch gar nicht, dass durch das Innere eines Leiters keine Entladung stattfinden könne, wie denn ein galvanischer Strom in der That im Innern des Leiters der Laplace'schen Gleichung (nach Green'scher Bezeichnung) $\Delta V = o$ genügt, und doch durch den ganzen Querschnitt des Leiters fliesst, und wie ja durch den Entladungsschlag einer Flaschenbatterie der ganze Draht und nicht bloss dessen Oberfläche geschmolzen wird. Niemand wird auch bezweifeln, dass ein Multiplicator in einer Querleitung, welche zwei Stellen des Drahtkorbes von ungleichem Niveau verbindet, bei Durchleitung eines Stromes durch den Korb eine Stromanzeige geben muss. Ja bei stationären Strömen, welche Inductions- und Oscillationsvorgänge ausschliessen, wird es sogar gänzlich gleichgiltig sein, ob jene Zweigleitung, bei unverändertem Widerstand dieselben Punkte verbindend, innerhalb oder ausserhalb des Korbes verläuft.

Dieser scheinbare Widerspruch zwischen den wohlconstatirten Thatsachen, auf welche Herr Melsens baute, und der zulässigen theoretischen Auffassung, muss sich nun, wie ich schon 1881 mündlich gegen Herrn Melsens bemerkte, sehr einfach aufklären lassen.

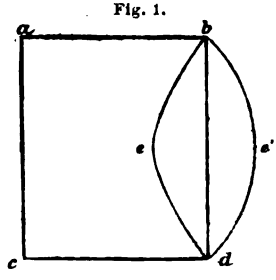
Vor allem wollen wir aber die Thatsachen genauer in Augenschein nehmen. Zur Anzeige schwacher Entladungen können wir

---

bestätigen. Eine in den Kasten eingeschlossene erregte Influenzmaschine verursacht an demselben keine elektrische Anzeige, auch wenn man die eine Elektrode direct mit der Oberfläche in leitende Verbindung bringt. Dagegen wird bei Ableitung der einen Elektrode nach aussen der Kasten sofort erregt. An einer von Herrn Ingenieur J. Popper construirten, im hiesigen Institut ausgeführten hermetisch verschlossenen Influenzmaschine, bei welcher nur die Elektroden, die zugleich als Axe dienen, aus der Hülle hervorragen, zeigen sich analoge Erscheinungen. Bei dieser Gelegenheit wurde noch bemerkt, dass eine Voss'sche „selbsterregende" Influenzmaschine, die Fähigkeit der Selbsterregung verliert, wenn sie längere Zeit in einer geschlossenen Metallhülle, also in einem unelektrischen Felde, verbleibt.

uns mit Vortheil des für kleine elektrische Funken sehr empfindlichen Knallsilbers bedienen. [1] Eine Spur Knallsilber, zwischen die Spitzen zweier Nadeln eingeschaltet, von welchen die eine mit der Erde verbunden, die andere mit einem Metallknopf versehen ist, kann leicht durch eine dem letztern genäherte geriebene Hartgummistange zur Explosion gebracht werden. Verbinde ich die äussere Belegung einer geladenen Flasche mit der Gasleitung, und setze dann die innere Belegung mit der Wasserleitung in Verbindung, so explodirt das Knallsilber schon durch die Seitenentladung, wenn nur die eine Nadel mit der Wasserleitung verbunden, die andere aber isolirt ist, obgleich die Wasser- und Gasleitung des Institutes durch zwei Gasmotoren direct in metallischem Contact stehen. Selbst in weitabgelegenen Zimmern genügt diese Seitenentladung noch, wenn die isolirte Nadel mit einem Metallkörper von hinreichender Capacität communicirt. Eine so sichere und laute Anzeige kleiner Funken haben wir von einem Thier nicht zu erwarten.

Fig. 1.



In Fig. 1 stelle *a b c d* den verticalen Durchschnitt eines Drahtkorbes vor. Wird der Korb auf ein Stanniolblatt *c d* und mit diesem auf einen Isolirschemmel gestellt, so gibt ein in demselben eingeschlossenes empfindliches Elektroskop keine Anzeige, wenn der Korb kräftig geladen und wieder entladen wird. Auch wenn das Stanniolblatt mit der äussern Flaschenbelegung verbunden ist, und kräftige Flaschenfunken durch den Korb gesendet werden, besteht dieses Verhältniss fort. Dieselben Versuche mit demselben Erfolg lassen sich wiederholen, indem man den Drahtkorb durch einen Sturz aus Goldpapier ersetzt, der natürlich mit Drahtfenstern zur Beobachtung des Elektroskopes zu versehen ist.

---

[1] Die ersten hieher gehörigen Beobachtungen haben sich mir dargeboten bei Gelegenheit einer 1880 mit Herrn Dr. G. Pick ausgeführten Versuchsreihe über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Entzündung in Explosivkörpern. Ein Ergebniss dieser noch nicht publicirten Versuche ist erwähnt in „Séances de la société française de physique." Paris 1881, p. 213.

Wir bringen nun in dem Drahtkorb eine Zweigdrahtleitung *b e d* aus 1 Millimeter dickem Kupferdraht an, in welcher bei *a* durch zwei Nadeln, deren Spitzen um etwa einen Millimeter von einander abstehen eine Unterbrechung gebildet wird, die das Knallsilber enthält. Leitet man eine kräftige Flaschenladung durch den Korb, so bleibt das Knallsilber von derselben unberührt.

Die Explosion bleibt aber auch aus, wenn wir die Zweigleitung, ohne sonst das Geringste an derselben zu ändern, ausserhalb des Drahtkorbes zwischen denselben Punkten *b* und *d* anlegen, so dass sie nun nach *b e' d* verläuft. Die Explosion tritt hingegen mit Sicherheit ein, sobald wir den Drahtkorb durch den Goldpapiersturz ersetzen, und zwar sowohl wenn der Zweigdraht innerhalb, als auch wenn er ausserhalb des Sturzes verläuft.

Der Oberflächensatz ist also zunächst nicht allein massgebend. Der wesentliche Unterschied zwischen dem Drahtkorb und dem Goldpapiersturz liegt viel mehr in dem bedeutend grösseren Leitungswiderstande des letzteren, der ein viel höheres Potentialgefälle bei der Entladung bedingt. Hiedurch werden die elektromotorischen Kräfte in der Zweigleitung genügend gross, um ein Überschlagen der kleinen Unterbrechungsstelle herbeizuführen.

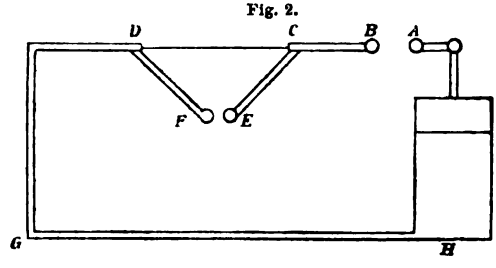
Es würde sich nun zunächst darum handeln, eine Vorstellung über die Grösse der Potentialniveaudifferenzen zu gewinnen, welche in einem Draht bei der Blitzentladung auftreten können. Dies hat nun seine Schwierigkeit. Zwar finden sich hie und da Angaben über die Schmelzung von Drähten durch Blitzschläge, aus welchen man einen Schluss auf die in einem Leiterstück gethane Arbeit $Q\,V_m$ ziehen könnte, in welchem Ausdruck Q die durchgeflossene Elektricitätsmenge und V_m die mittlere Potential-Niveaudifferenz (in mechanischem Masse) am Anfange und Ende des Leiterstückes bedeutet. Allein auch wenn Q bekannt wäre, könnten wir nur die mittlere und nicht die grösste auftretende Niveaudifferenz bestimmen. Auch Angaben über die Dauer der Blitzentladung im Falle einer Schmelzung liegen meines Wissens nicht vor. Wäre diese Dauer T gegeben, so würde diese fragliche Arbeit durch $T\,W\,J^2$, wobei W den Widerstand und J die mittlere Stromstärke bedeutet, und die mittlere Niveaudifferenz durch $V_m = J\,W$ bestimmt würde. Die letzte Gleichung sagt nur, dass

in demselben Draht mit der per Secunde entladenen Menge die Niveaudifferenz wächst. Schmilzt der Draht, so hört natürlich jeder Schutz gegen den Blitz auf. Die höchsten Niveaudifferenzen, welche für uns noch ein Interesse haben, sind jene, welche den grössten Stromstärken entsprechen, bei welchen der Draht glüht, ohne noch zu schmelzen. Die bezeichneten Wege können wegen zu grosser Unvollständigkeit der Beobachtungen, auf welche Lücke hier nur hingewiesen werden sollte, nicht betreten werden.

Auch die Niveaudifferenzen in einem galvanisch glühenden Draht sind für unseren Fall nicht massgebend. Gewiss sind dieselben denjenigen gegenüber, welche wirklich in Betracht kommen, sehr klein, denn sie sind, wie bekannt, ohne feinere Veranstaltungen elektroskopisch gar nicht sichtbar. Das galvanische Glühen kommt auch bei sehr verschiedenen Differenzen in verschiedener, aber immer verhältnissmässig langer Zeit erst zu Stande, indem die durch den Strom erzeugte Wärme den gleichzeitigen Wärmeverlust überwiegt, und dadurch die Temperatur allmälig anwächst.

Der einzige Fall, welcher unserer Frage genügend nahe liegt, ist jener der Entladung einer Flaschenbatterie durch einen Draht.

Fig. 2.



Eine grosse Flaschenbatterie, in Fig. 2 durch *H* angedeutet, entladet sich durch die Ausladerkugeln *A B*, durch den dünnen Platindraht *C D* von 30 Centimeter Länge und durch die dicken Drähte *D G H*. Von den Enden *C D* des Platindrahtes führen noch dicke Drähte zu einem Funkenmikrometer *E F*. Die Schlagweite *A B* der Batterie (deren Capacität etwa 500 Meter beträgt) wird so abgeglichen, dass der Drath lebhaft glüht, ohne zu schmelzen. Nähert man dann die Kugeln des Funkenmikrometers einander auf 3 Millimeter, so hört der Draht auf zu glühen, und bei *E F* überspringt ein Funke. Hieraus dürfen wir schliessen, dass das im vorliegenden glühenden Draht auftretende Potentialgefälle etwa hundertmal kleiner ist, als es zur Durchbrechung der Luft sein müsste. Die Potentialniveaudifferenz an den Enden

des Drahtes ist hiernach in absolutem Masse ($C\ G\ S$) etwa 33, wie ich nach Versuchen mit einem modificirten Thomson'schen absoluten Elektrometer angeben kann.

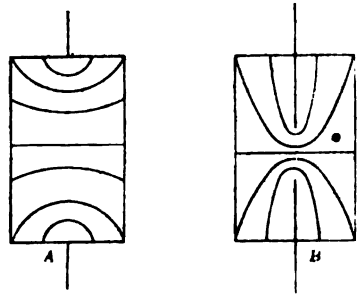
Das Potentialgefälle würde natürlich dasselbe bleiben, wenn wir einen dickeren Draht in derselben Zeit zum Glühen bringen könnten. Mit Rücksicht darauf nun, dass Leiter von grösserer Capacität (Wolken, Erde) eine längere Entladungszeit in Anspruch nehmen, dürfen wir voraussetzen, dass durch Blitzschläge glühende Drähte ein noch kleineres Potentialgefälle aufweisen. Allerdings hat das Material des Drahtes (bei Blitzableitern meist Eisen) einen beträchtlichen Einfluss. Einen für den Versuch passenden Eisendraht hatte ich nicht zur Hand. Doch werden wir für die folgende Überlegung ohne Schaden annehmen, dass die Potentialgefälle in Platin und Eisen von derselben Ordnung sind.

Wir sind nun im Stande, von den Verhältnissen bei der Entladung durch den Drahtkorb ein mehr zutreffendes Bild zu entwerfen. Durchschreiten wir in dem Schliessungsbogen eines stationären galvanischen Strom den Widerstand $d\ W$ im Sinne des positiven Stromes, so nimmt die Potentialfunction um $d\ V = \frac{V_1 - V_0}{W} dW$ ab, wobei $V_1 - V_0$ die gesammte elektromotorische Kraft, W den gesammten Widerstand bedeutet. Die Abnahme der Potentialfunction, welche einem bestimmten Theile des Widerstandes entspricht, wollen wir kurz den Abfall derselben nennen. In der offenen galvanischen Kette liegt der ganze Abfall zwischen den Poldrähten in der Luft. In der geschlossenen Kette vertheilt er sich nach dem Verhältniss der Widerstände. Ähnliche, wenngleich wegen der Oscillations- und Inductionsvorgänge complicirtere Verhältnisse bestehen vor und während der Funkenentladung.

Vor der Entladung liegt der ganze Abfall zwischen der inneren Flaschenbelegung und dem Drahtkorb. Der ganze Korb hat nur ein Niveau. Auch nach der Entladung, ob der Korb abgeleitet, oder isolirt ist und geladen bleibt, hat er in der ganzen Ausdehnung wieder nur ein Niveau. Während der Entladung aber vertheilt sich der Abfall zwischen die Luftstrecke und den Korb. Unsere Versuche zeigen aber, dass wenn der Korb keinen zu grossen Widerstand darstellt, auch dann noch der grösste

Theil des Abfalles in der Luftstrecke liegt, und dass die Theile des Korbes immer nur kleine Niveaudifferenzen gegen einander erhalten. Befinden sich auch die in dem Korb enthaltenen Körper nicht in einem unelektrischen Felde, so sind sie doch in einem sehr schwachen elektrischen Felde (von kleinem Potentialgefälle) eingeschlossen. [1]

Fig. 3.



Die fraglichen Verhältnisse werden sehr anschaulich, wenn wir uns die Oberflächenpunkte des Korbes als unerschöpfliche Wärmequellen denken, deren Temperaturen den Werthen der Potentialfunction entsprechen, wenn wir den Innenraum des Korbes mit einem wärmeleitenden Medium ausfüllen, und den stationären Temperaturzustand abwarten. Dann stellen bekanntlich die isothermischen Flächen zugleich die Potentialniveauflächen vor. Was uns das Green-Dirichlet'sche Princip sagt, tritt hiedurch dem Gefühl sehr nahe. Man sieht dann sofort, dass eine über die ganze Korbfläche gleiche Temperatur oder Potentialfunction auch die Gleichheit der Temperatur oder Potentialfunction in dem ganzen Korbraum zur Folge hat, welcher Fall dem Oberflächensatz entspricht. Bei Ungleichheit der Temperatur oder Potentialfunction auf der Korbfläche schlagen isothermische oder Niveauflächen durch den Korbraum hindurch, wie dies Figur 3 *A* schematisch andeutet. Sind aber die Gefälle auf der Oberfläche überall klein, so sind sie auch klein in dem ganzen Raum, wenn nicht besonders unzweckmässige Veranstaltungen getroffen wurden etwa durch eine Querleitung mit kleiner Unterbrechungsstelle, durch welche alle Niveauflächen hindurchschlagen müssen, wie die schematische Zeichnung Figur 3, *B* ersichtlich macht.

---

[1] Wenn also bei den in der Anmerkung 1, erwähnten Versuchen der Beobachter die Entladungen nicht empfindet, und das Elektroskop keine Anzeige gibt, so kann dies nur daher rühren, dass sehr kleine elektromotorische Kräfte und auch diese nur durch sehr kurze Zeiten im Innern des Kastens wirksam sind.

Oscillations- und Inductionsvorgänge der Funkenentladung können die dargelegten Verhältnisse nur unwesentlich ändern. Über die elektrischen Oscillationen, welche jedesmal auftreten, wenn bei genügendem Potentialgefälle die Isolatoren sich plötzlich in Leiter verwandeln (durchbrochen werden), und wenn nun sehr grosse elektromotorische Kräfte in Körpern von verhältnissmässig kleinen Widerständen wirksam werden, muss aber doch noch eine Bemerkung hinzugefügt werden. Solche Oscillationen sind auch bei der Blitzentladung zu erwarten. Die Potentialniveauwerthe des Entladungsweges sinken dabei nicht einfach auf Null, sondern sie zeigen sehr rasche Schwankungen (mit Zeichenwechsel). Befindet sich ein Körper in der Nähe des Entladungsweges, der keine oder andere Niveauschwankungen durchmacht, so kann gegen denselben, wie dies bei den eingangs erwähnten Versuchen mit Knallsilber beobachtet wurde, eine „Seitenentladung" eintreten.[1] Gegen diese Eventualität ist ein in dem vollkommen geschlossenen Korb enthaltener Körper geschützt, da er von selbst alle Niveauschwankungen des Korbes mitmacht, und eine bedeutende Niveaudifferenz gegen die Theile der Korbfläche nicht annehmen kann.

Wir kommen demnach zu folgendem Schluss: Wenn auch die theoretische Auffassung des Systems des Herrn Melsens ein wenig modificirt werden muss, so kann man doch behaupten, dass dieses, selbst wenn die Leitungsdrähte durch die Blitzentladung glühen, beinahe einen absoluten Schutz gewährt. Die in dem Gebäude eingeschlossenen Körper befinden sich selbst dann noch zwar nicht in einem unelektrischen, aber doch in einem sehr schwach elektrischen Felde.

---

[1] Andere auf den Oscillationen beruhende Erscheinungen sind beschrieben worden von Mach und Gruss, Sitzungsberichte Bd. 78. Juli 1878.

Über die Mantelringmaschine von Kravogl und deren Verhältniss zur Maschine von Pacinotti-Gramme nebst Vorschlägen zur Construction verbesserter dynamoelektrischer Maschinen.

Von Prof. Dr. **L. Pfaundler.**

(Mit 1 Tafel.)

Herr Regierungsrath Professor Dr. v. Waltenhofen hat jüngst[1] die Freundlichkeit gehabt, darauf hinzuweisen, dass ich 1870 den ersten continuirlichen dynamoelektrischen Strom durch umgekehrte Anwendung des Kravogl'schen elektromagnetischen Motors erzeugt und die Möglichkeit dieses Experimentes 1867 kurz nach dem Bekanntwerden des Siemens'schen Princips ausgesprochen habe. Angesichts der grossen Bedeutung, welche die dynamoelektrischen Ströme gewonnen haben, dürfte es einiges Interesse bieten, Näheres darüber zu erfahren, wie jener Apparat construirt und der Versuch damit angeordnet war, welcher jenen ersten continuirlichen dynamoelektrischen Strom geliefert hat.[2] Es ergibt sich dabei die Gelegenheit, die Maschinen von Pacinotti, Gramme und Kravogl von einem

---

[1] „Beiträge zur Geschichte der neueren dynamoelektrischen Maschinen etc." Sitzber. d. k. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 1882; auszugsweise in Wiedem. Ann. XVIII, 253.

[2] Eine genaue Abbildung der Kravogl'schen Maschine ist nirgends erschienen; schematische Abbildungen und Beschreibungen finden sich im Innsbrucker Gymnasialprogramm von meinem früheren Assistenten Franz Kiechl und in dem von mir bearbeiteten F. Müller'schen Lehrbuche, Bd. III, pag. 517. Messungen über den Wirkungsgrad dieser Maschine als Motor hat A. v. Waltenhofen in Dingler's Journal 183, p. 417 veröffentlicht.

gemeinsamen Gesichtspunkte aus darzustellen und dabei die Bedeutung eines Bestandtheiles der letztgenannten Maschine, nämlich des Ringmantels, hervorzuheben, da gerade dieser Umstand besonders geeignet erscheint, das Verwandtschaftsverhältniss dieser Maschine mit der von Pacinotti-Gramme klar hervortreten zu lassen.

Zu den nachfolgenden Erörterungen wollen wir uns zunächst einer schematischen Zeichnung eines geradlinig angeordneten Apparates bedienen und dann erst auf die ringförmigen Constructionen übergehen.

1. Wird eine Drahtspirale Figur 1, deren Enden unter sich verbunden sein mögen, über den aus zwei permanenten Magneten zusammengesetzten feststehenden Stab *NSSN* von links nach rechts verschoben, so entstehen bekanntlich in den Windungen derselben die durch die Pfeile angedeuteten Ströme, welche durch die feststehenden Stromsammler (Bürsten) in *a* und *c* aufgenommen und im Schliessungskreise *aec* in der Richtung des dortigen Pfeiles fortgeleitet werden können. Dieselben, wenn auch schwächeren Ströme entstehen durch Vorbeibewegen der Spirale an einem ausserhalb befindlichen Doppelmagnet *snns* mit entgegesetzter Lage der Pole. Sind beide Doppelmagnete vorhanden, so unterstützen sich ihre Wirkungen. Dieselben werden noch gesteigert werden, wenn wir statt des äusseren Stabes einen cylindrischen Mantel in Form einer aufgeschlitzten Röhre mit den Polen wie in *snns* um die Spirale herumgelegt haben.

Wir erhalten auf diese Weise einen einfachen permanentmagnetoelektrischen Apparat aus drei Bestandtheilen, die wir Kern, Spirale und Mantel nennen wollen.[1]

2. Diesen Apparat können wir zunächst in der Weise abändern, dass wir einen der beiden genannten Magnete, nämlich entweder den Kern oder den Mantel, durch einen Influenzmagnet, d. h. durch ein Stück weiches Eisen ersetzen, welches durch Influenz des anderen, permanenten Magnetes entgegengesetzt magnetisch geworden ist.

[1] Der grösseren Deutlichkeit wegen ist in den folgenden Figuren bis Figur 4 statt des cylindrischen Mantels immer nur ein Stab wie in Figur 1 als Repräsentant des Mantels gezeichnet.

Wir kommen durch diese Anordnung in die Möglichkeit, der Schwierigkeit auszuweichen, welche etwa der separaten Festhaltung des Kerns innerhalb der bewegten Spirale sich entgegenstellt, indem wir den Kunstgriff Pacinotti's anwenden und das weiche Eisen mit der Spirale zugleich verschieben, während die durch Influenz erzeugten Pole stehen bleiben.

Wir verschieben also entweder den weichen Eisenkern sammt der Spirale innerhalb des permanent magnetischen Mantels (Pacinotti) oder umgekehrt den aus weichem Eisen bestehenden Mantel sammt Spirale über den permanent magnetischen Kern (Kravogl). Auf diese Weise erhalten wir zwei verschiedene, theilweise permanentmagnetoelektrische Apparate, die wir durch die Namen „System Pacinotti" und „System Kravogl" bezeichnen wollen.

3. Um nun unter Zuhilfename des Siemens'schen Principes diese Apparate in dynamo-elektrische zu verwandeln, müssen wir den Permanentmagnet durch einen Elektromagnet ersetzen, der durch den eigenen Strom des Apparates geladen wird. Vorher müssen wir aber untersuchen, ob die durch die Bewegung der Spirale erzeugten Ströme geeignet sind, die vorhandenen Magnetismen zu verstärken.

Theilen wir zu diesem Zwecke die ganze Länge des Apparates in vier Abschnitte *da*, *ab*, *bc*, *cd'*, die wir mit I, II, III, IV bezeichnen, so ergibt eine kurze Überlegung mit Hilfe des Gesetzes von Lenz, dass die Ströme in den Abschnitten II und IV günstig, jene in den Abschnitten I und III ungünstig auf die Magnetismen einwirken und zwar sowohl auf jene des Kernes als auch auf jene des Mantels. Es wirken nämlich alle jene Windungen, welche sich momentan von einem Indifferenzpunkte gegen einen Pol bewegen, im selben Sinne magnetisirend, wie ursprünglich die Pole liegen; dagegen suchen alle jene Windungen, welche von einem Pol gegen einen Indifferenzpunkt wandern, einen dem vorhandenen entgegengesetzten Magnetismus zu erzeugen. Bestehen daher beide Theile (Kern und Mantel) aus weichem Eisen, so kann ein schwacher darin vorhandener Magnetismus durch Bewegen der Spirale nicht verstärkt, eine dynamo-

elektrische Wirkung also mit diesem Apparate noch nicht erzielt werden.

Um dies dennoch zu erreichen, gibt es zwei ganz verschiedene Wege. Entweder muss man die schädliche elektromagnetische Einwirkung auf das weiche Eisen fortnehmen oder eine günstige Einwirkung hinzufügen, so dass also jedenfalls ein Überwiegen günstiger Magnetisirung stattfindet.

Den letzteren Weg hat Gramme 1871 eingeschlagen, wobei er das von Pacinotti 1860 ersonnene, von ihm selbstständig nochmals erfundene Ringsystem zu Grunde legte; den ersteren Weg habe ich selbst Anfangs 1870 betreten, indem ich die von Kravogl 1867 gebaute Mantelringmaschine benützte.

4. Wir wollen nun an den schematischen Zeichnungen Figur 2 und 3 zeigen, wie aus beiden früher betrachteten magnetoelektrischen Apparaten dynamoelektrische Apparate auf den angegebenen beiden entgegengesetzten Wegen erhalten werden. Um das Gramme'sche System zu erhalten, leiten wir den von der Bürste *a* ausgehenden Strom um die ausserhalb stehenden Elektromagnete und führen ihn dann zur Bürste *c'* zurück. Dadurch versehen wir die Pole *s*, *n*, *s* des Mantels mit solchem Überschuss erwünschten Magnetismus, dass hiedurch die schädliche magnetische Einwirkung von Seite der Spirale überwogen wird. Ebenso wird durch den von den Polen *s*, *n*, *s* aus erregten Influenzmagnetismus in *N*, *S* und *N* die schädliche Einwirkung des Spiralstroms auf den Kern überwogen. Dabei erscheint es vortheilhaft, den Mantel an den Indifferenzstellen zu trennen, um die Influenz der Pole desselben vollständiger gegen den Kern zu richten. Der äussere Magnet steht fest, Spirale nebst Kern werden bewegt.

Um dagegen den anderen Weg einzuschlagen, entfernen wir in Figur 3 die rechtsseitige Hälfte des Kernes und sorgen überdies dafür, dass die beiden äusseren Viertel der Spirale keinen Strom zu leiten bekommen, so dass also nur das Mittelstück der Spirale zwischen den Bürsten zur Wirkung gelangt. Der in demselben entstehende Strom macht den feststehenden Kern zu einem Elektromagnet, dessen Pole *N* und *S* durch Influenz in dem mit der Spirale rotirenden Mantel die Pole *s* und

n erwecken, wodurch die schädliche Einwirkung der Spirale auf den Magnetismus des Mantels überwogen wird. Wie man sieht, verhält sich dieser Apparat in zweifacher Weise entgegengesetzt zum vorigen. Einmal ist das Innere nach Aussen, das Äussere nach Innen verlegt, dann ist dort hinzugefügt, hier weggenommen.

5. Die eben beschriebene Anordnung enthält noch eine Unvollkommenheit; der erzeugte Strom magnetisirt zwar den Kern *NS* nach Wunsch, wirkt dagegen auf den Mantel nicht ganz nach Wunsch, indem er den Nordpol *n* aus der Mitte ans rechtsseitige Ende zu verschieben sucht. Diese Schädlichkeit wird zwar, wie bereits erwähnt, ebenso wie bei Gramme durch die überwiegende Influenz des elektromagnetischen Pols *S* überwogen, aber nicht gänzlich getilgt. Es wäre daher besser, auch von dem Mantel das Stück von *b* bis *d'* zu entfernen. Dann aber muss, unter Aufgebung des Kunstgriffes Pacinotti's, auf das Mitgehen des Mantels mit der Spirale verzichtet werden. Der dynamoelektrische Apparat kommt dadurch auf die sehr einfache Form Figur 4. Eine endlose Spirale geht zwischen feststehendem Eisenkern und Eisenmantel hindurch. Die Bürsten werden so gestellt, dass sie nur jenen Theil der Spirale zwischen sich einschliessen, der sich von dem Indifferenzpunkte der entstehenden Magnete entfernt.

Sehen wir von der Frage der Zweckmässigkeit in technischer Hinsicht vorläufig ab und nennen einen vollkommenen dynamoelektrischen Apparat denjenigen, bei welchem alle stromdurchflossenen Windungen und alle erzeugten Magnetismen reciprok wirksam sind, so haben wir in der eben beschriebenen Anordnung einen solchen vollkommenen dynamoelektrischen Apparat; denn es kommen bei ihm keinerlei Drahtwindungen vor, die nicht zugleich Inductionswirkung erfahren und zugleich günstig magnetisiren; ferner kommt kein Magnetismus vor, der nicht durch den Strom verstärkt wird und selbst den Strom verstärkt. Bei der Gramme'schen Einrichtung ist dies nicht der Fall; die Windungen des Elektromagnetes erleiden keine Inductionswirkung und die magnetisirende Wirkung der Ringwindungen ist eine ungünstige, indem sie die Pole des Influenzmagnetes zu verschieben sucht, welcher Schädlichkeit durch Verstellung der

Bürsten nur zum Theile begegnet wird. Man kann die Sache auch so ausdrücken, dass man sagt, bei der Gramme'schen Anordnung ist der Kern theils ein günstiger Influenzmagnet, theils ein ungünstiger Elektromagnet, aber die Pole beider fallen nicht zusammen, sondern sind um ihren halben Abstand verschoben und geben einen resultirenden Magneten, dessen Pole von der günstigsten Lage abweichen. Ebenso fällt bei dem Apparate Figur 3 der Elektromagnetismus des Mantels nicht ganz zusammen mit dem Influenzmagnetismus desselben. Dagegen fallen bei der Anordnung der Figur 4 Elektromagnetismus und Influenzmagnetismus sowohl im Kern, als auch im Mantel zusammen. Man ersieht sofort, dass diese Anordnung im Wesentlichen als eine Umkehrung des Motors von Page in einen dynamoelektrischen Apparat zu betrachten ist, wobei allerdings noch der äussere Mantel als Verbesserung hinzugetreten ist.

6. Gehen wir nun zur ringförmigen Anordnung über, indem wir die Spirale, den Kern und den cylindrischen Mantel kreisförmig gebogen und die Enden *d*, *d'* vereinigt denken.

Figur 5*a* und 5*b* gibt eine schematische Darstellung einer solchen Maschine, wobei der Deutlichkeit wegen die vordere Hälfte des gegen die Axe hin aufgeschlitzten Mantels weggelassen ist.

Wir wollen einen solchen Apparat im Allgemeinen eine „Mantelringmaschine" nennen. Dabei ist vorderhand ganz davon abgesehen, wie es erreicht wird, dass die einzelnen Theile unabhängig von einander festgehalten oder in Rotation versetzt werden können. Es versteht sich, dass die Einzelwindungen der Figur als Repräsentanten ganzer Drahtspulen zu betrachten sind. Die Verbindung der letzteren mit der Axe geschieht durch speichenartige Leiter, welche durch den Schlitz des Mantels hindurchgehen. Die übrigen Details, Zusätze oder Fortlassungen sind es nun, welche diese Maschine zu einer Maschine nach Pacinotti, Gramme oder Kravogl machen. Auch ist jede der so erhaltenen Abarten sowohl als Inductor als auch als Motor zu gebrauchen, je nachdem man Arbeit zuführt und Strom erntet, oder umgekehrt. Setzt man die Richtung des Stromes in der Spirale stets so voraus, wie es die Pfeile der Figur 5*a*

angeben, so ist der Inductor stets rechtsläufig, der Motor linksläufig. Die Contactbürsten bleiben an ihren Stellen gegenüber den Indifferenzpunkten des Ringkernes.

7. Die aus der allgemeinen Form der Mantelringmaschine ableitbaren Specialmaschinen sind nun folgende:

I. Der permanent-magnetische Motor oder Inductor.

Ringkern und Mantel sind permanente Magnete, der Mantel wird von Aussen festgehalten, die Spirale rotirt allein, der Ringkern ist innerhalb der Spulen auf Frictionsrollen gestellt, aus einem hohlen Stahlmagnete gebildet, dessen eine Hälfte mit Blei ausgegossen ist und desshalb (nach Kravogl's Kunstgriff) durch seine eigene einseitige Schwere in constanter Lage festgehalten wird. Der theilweise eintretenden Hebung dieses Ringes in der Richtung der Rotation der Spirale durch Reibung und elektromagnetische Anziehung wird durch Nachrücken des Mantels und der Contactbürsten Rechnung getragen. Diese Anordnung ist bisher nicht zur Ausführung gelangt und dürfte auch keinerlei Vortheile gewähren.

II. Theilweise permanent magnetischer Motor oder Inductor (magnetoelektrische Maschine).

A. System Pacinotti. Der an den Indifferenzstellen getheilte Mantel ist ein Permanentmagnet und wird von Aussen festgehalten, der Ringkern ist ein Influenzapparat und rotirt mit der Spirale. Hieher gehören die Gramme'schen Maschinen mit Stahlmagnet.

B. System Kravogl. Der Ringkern ist ein Permanentmagnet und wird durch einseitige Schwere festgehalten, der Mantel erhält durch Influenz feststehende Pole und rotirt mit der Spirale. (Hat keine praktische Bedeutung.)

II. Electromagnetischer Motor, dynamoelektrischer Inductor.

A. System Pacinotti-Gramme. Der getheilte Mantel ist ein durch den erzeugten Inductionsstrom geladener Elektro-

magnet, der von Aussen festgehalten wird und durch Influenz den Ringkern in einen Influenzmagnet mit feststehenden Polen verwandelt. Der Ringkern rotirt mit der Spirale. Die elektromagnetische Wirkung der Spirale auf den Ringkern wird durch die Influenz des elektromagnetischen Mantels überwältigt.

B. System Kravogl-Pfaundler.[1] Der zur Hälfte vorhandene Ringkern[2] ist ein durch den erzeugten Inductionsstrom geladener Elektromagnet, der durch seine Schwere festgehalten wird und durch Influenz den Mantel in einen Influenzmagnet mit feststehenden Polen verwandelt. Die Spirale rotirt mit dem Mantel. Dabei bleibt die Hälfte der Spirale für den Strom unterbrochen.[3] In Figur 5*a* würde die vorhandene Hälfte des Ringkernes das Stück *SON* und die rechtsseitige Hälfte der Spirale die ausgeschaltete sein.[4]

IV. System nach Vorschlag des Verfassers.

Mit Rücksicht auf die unter 5 geltend gemachten Bemerkungen möchte in theoretischer Hinsicht nachfolgende in Figur 6 skizzirte Maschine den Vorzug verdienen. *nnss* stellt den feststehenden halbkreisförmigen Mantel vor, wobei die vordere Hälfte der Deutlichkeit wegen weggelassen ist, *SON* den innerhalb der Spirale auf Frictionsrollen (diese in der Figur weg-

---

[1] Der Name Pfaundler bezieht sich, wie schon erwähnt, nicht auf die Erfindung des Kravogl'schen Motors, sondern nur auf seine Adoptirung als dynamoelektrischer Apparat; Kravogl selbst hatte nur die Erzeugung von Arbeitskraft durch den Strom im Auge gehabt.

[2] Kravogl's Ringkern war noch etwas kleiner als die Hälfte.

[3] Bei Kravogl's Maschine betrug die ausgeschaltete Partie der Spirale einen noch grösseren Bruchtheil.

[4] Die Benützung dieser Maschine als dynamoelektrische geschah zuerst im physikalischen Hörsaale der Universität Innsbruck durch blosses Antreiben des Rades mit der freien Hand ohne Riemenscheibe, wobei ein Strom gleich dem eines Aussenelementes erfolgte, dann später im Februar 1870 vor vielen Zuschauern mit Wasserkraft in der Maschinenfabrik von Lang in Milten bei Innsbruck. Bei letzterer Gelegenheit konnten keine Messungen gemacht werden.

gelassen) stehenden Kern aus weichem Eisen, der durch seine Schwere festgehalten wird. Zwischen beiden durch geht die Spirale. Um der stattfindenden Vorrückung des Kernes zu folgen, ist der Mantel verstellbar angeordnet und wird stets so gestellt, dass er den ganzen Kern bedeckt. Derselben Vorrückung wird die Stellung der Bürsten angepasst.

8. Was nun die Art und Weise betrifft, wie bei dieser und der vorhergehenden Construction (III *B*) die Ausschaltung der einen Hälfte der Spirale bewerkstelligt wird, so mag zunächst auf die zwar sinnreiche, aber in der Praxis wenig bewährte Construction von Kravogl verwiesen sein. Seitdem Gramme die so zweckmässigen Bürstencontacte erfunden hat, ist jene Construction ohnedies veraltet.

Wenn es sich nur darum handeln würde, eine beliebige Anzahl von Spulen zwischen *WS* und *O* Figur 6 neben einander in den Stromkreis einzuschalten, so könnte man so verfahren, dass man zwei Reihen von Contactstellen am Umfange der Axe anbringt, von jeder Spule beide Endstücke zur Axe führt und je das eine Ende mit einem Contactstück der einen Reihe, das andere Ende mit einem der anderen Reihe verbindet. Alle jene Spulen, deren zugehörige Contactstellen dann mit Bürsten bedeckt sind, wären neben einander in den Strom eingeschaltet. Um die Spulen hintereinander einzuschalten, könnte wohl auch eine ähnliche Anordnung getroffen werden, wobei dann jene Bürsten, welche mit den zusammenstossenden Enden zweier Nachbarspulen in Verbindung stehen, unter einander zu verbinden wären und nur die erste Bürste der einen und die letzte Bürste der anderen Reihe als Strompole zu fungiren hätten. Allein diese Anordnung wäre zu complicirt und gäbe zu häufigen Unterbrechungen Anlass. Einfacher erreicht man das Ziel durch die in Figur 6 skizzirte Einrichtung, wobei jedoch die in Wirklichkeit auf der Mantelfläche der Axe auszuführende Einrichtung der Übersichtlichkeit wegen so gezeichnet ist, dass sie auf der Stirnfläche der Axe ausgeführt erscheint.

Man denke sich zunächst die gewöhnliche Einrichtung der Gramme'schen Maschine ausgeführt, also zwischen je 2 Spulen einen Leitungsdraht angebracht, der die Spirale mit je einem der auf der Mantelfläche der Axe befindlichen Con-

tactstücke verbindet. (Die letzteren sind in der Figur schwarz dargestellt.)

Zwei einander diametral gegenüberliegende dieser Contactstücke denke man sich zerschnitten und die Theile von einander isolirt. An den correspondirenden Stellen sei auch die Spirale zerschnitten und jedes Drahtende separat durch die Leitungen a_1 und a_2, c_1 und c_2 mit den getheilten Contactstücken verbunden, wie die Figur es zeigt. Die beiden Polbürsten $+r$ und $-r$ werden nicht ganz an der höchsten und tiefsten Stelle, sondern beide auf der benachbarten Contactstelle nach links angebracht. (Unter Umständen wird es sogar vortheilhaft sein, sie noch weiter gegen den Leiter b hin zu verstellen.) Es ist nun klar, dass immer wenigstens Eine der beiden getheilten Contactstellen ausserhalb des Bogens zwischen den beiden Bürsten zu liegen kommen wird. Dort ist also der Strom immer unterbrochen; es muss also noch dafür gesorgt werden, dass jede dieser getheilten Contactstellen leitend überbrückt wird, so oft sie zwischen die beiden Bürsten geräth, damit dort nie eine Stromunterbrechung eintrete. Zu diesem Zwecke sind die getheilten Contactstücke mit je zwei concentrischen halbkreisförmigen Fortsätzen versehen, deren Lage aus der Figur ersehen werden mag. Endlich ist noch eine Bürste m angebracht, welche diesen Fortsätzen aufruht und dieselben leitend überbrückt. Die Wirksamkeit dieser Einrichtung ist nun leicht zu übersehen. Bei der in der Figur gezeichneten Lage sind beide getheilte Contactstücke ausserhalb des Bogens, in welchem der Strom kreisen soll, die Unterbrechung der rechtsseitigen Hälfte als eine doppelte. Wie nun die Spirale und damit die Axe nach rechts rotirt, tritt an der Unterseite des letzteren ein getheiltes Contactstück in den Bogen zwischen den Bürsten ein; aber im selben Moment werden beide Stücke durch die Bürste m leitend verbunden und fungiren nun wie ein ungetheiltes Stück, bis sie die obere Bürste $-r$ verlassen; in diesem Momente wird auch ihre leitende Verbindung aufgehoben, da die Bürste m von ihnen abstreift. Das Weitere ist von selbst verständlich.

9. Zum Schlusse mögen noch die Vortheile und Nachtheile der letztbeschriebenen Maschine erörtert werden.

Es wurde bereits unter 5 nachgewiesen, dass diese Maschine den theoretischen Vorzug der vollen Reciprocität besitzt, so dass also das dynamoelektrische Princip mit möglichst geringem Verluste zur Anwendung kommt und der Strom nicht durch unnöthigen Widerstand innerhalb der Maschine geschwächt wird. Dagegen scheint es auf den ersten Anblick ein Nachtheil, dass die Spirale und der Magnet nur zur Hälfte ausgenützt werden. Allein es ist nicht zu übersehen, dass dieser Umstand wohl die absolute Leistungsfähigkeit der Maschine, nicht aber deren relative Leistung im Verhältniss zur aufgewendeten Arbeit beeinträchtigen kann. Es werden daher wohl die Anschaffungskosten aber nicht die Betriebskosten erhöht sein. Es verhält sich hier ähnlich, wie bei der Expansionsdampfmaschine, welche schwächer wirkt, als eine gleich grosse Maschine ohne Expansion, da bei letzterer die ganze Hubhöhe hindurch der volle Dampfdruck zur Wirkung kommt, was bei ersterer nicht der Fall ist. Dafür wird aber bei jener mehr Wärme erspart und die Betriebskosten vermindert. Ein weiterer Umstand, der in demselben Sinne wirken mag, ist die geringere Intensität des magnetischen Feldes, welches die Windungen durchschneiden. Man wird also jedenfalls grössere oder mehrere Maschinen brauchen, um dasselbe Quantum Arbeit in Strom umzusetzen.

Viel schwerer wiegend sind die Bedenken in technischer Beziehung. Die Schwierigkeit der soliden Ausführung, die Schwerzugänglichkeit der inneren Theile während des Gebrauches, die grosse Reibung des Kernes infolge des starken Druckes desselben gegen die dem Mantel zugekehrte Wandung des Spulenkranzes, dadurch hervorgebrachte einseitige Drucke auf die Axe; diese und andere Übelstände lassen befürchten, dass es vielleicht nicht möglich sein werde, der Maschine die nöthige Tourenzahl zu geben, ohne sie zu gefährden. Ich bin leider nicht in der Lage, dies durch Versuche selbst zu erproben.

Wie oben bemerkt, ist der beschriebene Apparat als ein umgekehrt gebrauchter Motor von Page aufzufassen, bei welchem die hin und her gehende Bewegung in eine rotirende umgewandelt ist. Es fragt sich nun, ob nicht doch unter Umständen eine Rückkehr zur geradlinigen Anordnung von Vortheil sein könnte, da hiedurch die oben erwähnten Übelstände vermieden

werden könnten. Bei der Dampfmaschine ist bekanntlich bis jetzt noch immer die geradlinige Anordnung der rotirenden überlegen. Der Einwurf, dass dann der Strom kein continuirlicher mehr wäre, ist nicht stichhaltig; denn es kann ja leicht die Einrichtung getroffen werden, dass eine grössere Anzahl von Spulen und Eisenkernen in verschiedenen Phasen gleichzeitig benützt werden. Bei den jetzigen Maschinen werden ja auch nicht einzelne Windungen, sondern ganze Spulen gleichzeitig aus- und eingeschaltet. Es wird sich darum handeln, ob man den zu bewegenden Massen die nöthige grosse Geschwindigkeit zu geben vermag. Unter allen Umständen scheint mir diese Frage des Studiums der Techniker werth zu sein.

Über Chlor- und Bromoxylderivate des Benzols.

Von **Rudolf Benedikt.**

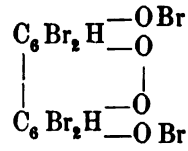
(Aus dem Laboratorium für analytische Chemie an der k. k. technischen Hochschule in Wien.)

Dritte Abhandlung.[1]

(Mit 1 Holzschnitt.)

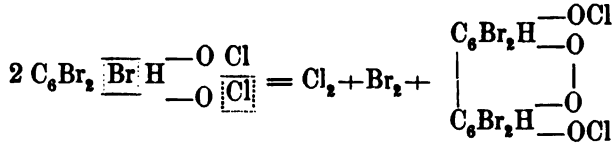
(Vorgelegt in der Sitzung am 1. März 1883.)

Erhitzt man Tribromresorcinbrom $C_6Br_3H(OBr)_2$ auf 150 bis 160°, so erhält man einen Körper von der empirischen Zusammensetzung $C_6Br_3HO_2$, welchem ich in einer früheren Mittheilung die Formel

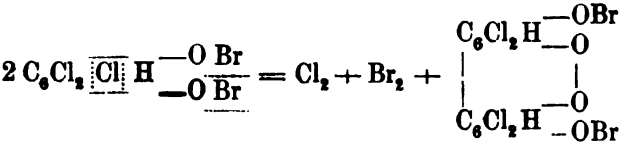


und den vorläufigen Namen „Debrom-Tribromresorcinbrom" beigelegt habe. Die Untersuchung, deren Resultate ich in Folgendem mittheile, ist nun vornehmlich in der Absicht unternommen worden, die Richtigkeit dieser Formel zu constatiren.

Zu diesem Zwecke versuchte ich, Tribromresorcinchlor $C_6Br_3H(OCl)_2$ und Trichlorresorcinbrom $C_6Cl_3H(OBr)_2$ herzustellen, um ihr Verhalten beim Erhitzen zu studiren. Falls die obige Formel richtig ist, so war zu erwarten, dass sich diese beiden Körper dabei nach folgenden Gleichungen zersetzen.



[1] Vergl. Wiener Ak. Ber. 1879, II, Mai-Heft und Monatshefte f. Ch., I, 349.



und somit gleiche Molekule Chlor und Brom abgeben.

Das Studium der Producte, welche bei der Einwirkung von Chlor auf Tribromresorcin und von Brom auf Trichlorresorcin entstehen, hat zwar andere Resultate ergeben, aber auch diese sind in vollkommen befriedigenden Einklang mit der Formel des „Debrom-Tribromresorcinbroms" zu bringen, so dass ich nun nicht mehr anstehe, diese Verbindungendgiltig als Dibromoxyltetrabromdiphenochinon zu bezeichnen.

Die vorliegende Mittheilung enthält ausserdem die Beschreibung zweier neuer Phenolderivate. Es sind dies:

$C_6Cl_3H_2$. OCl Trichlorphenolchlor und
$C_6Cl_3H_2$. OBr Trichlorphenolbrom.

I. Derivate des Resorcins.

Trichlorresorcinbrom
$C_6Cl_3H(OBr)_2$.

Das Trichlorresorcin, welches man zur Darstellung dieses Körpers benöthigt, kann direct aus Resorcin erhalten werden. Die Ausbeute ist eine sehr gute, wenn man sich genau an folgende Vorschrift hält.

Man leitet in eine Lösung von 100 Grm. Resorcin in 250 CC. Eisessig einen ziemlich raschen Chlorstrom ein, so dass sich die Masse bedeutend erwärmt, aber nicht in's Sieden kommt. Dabei entweichen Ströme von Salzsäure. Man unterbricht die Operation, wenn eine mit einem Glasstabe genommene Probe anscheinend vollständig erstarrt, und giesst den Inhalt des Kolbens in eine Reibschale aus, worin er beim Erkalten zu einem Kuchen erstarrt, den man zerdrückt und durch Absaugen so vollständig als möglich von einer geringen Menge Mutterlauge befreit. Unterlässt man diese Vorsicht, so verharzt der grösste Theil des Trichlorresorcins bei dem nun folgenden Umkrystallisiren aus siedendem Wasser.

Der Schmelzpunkt des reinen Trichlorresorcins wurde zu 83° gefunden, übereinstimmend mit der Angabe Reinhard's.[1] Claassen's[2] Präparat, für welches er den Schmelzpunkt 69° fand, war wohl nicht ganz rein.

Trichlorresorcin wurde sehr fein zerrieben, in einer Mischung von gleichen Theilen Wasser und Salzsäure suspendirt und mit einem Überschuss von in Wasser gelöstem Brom versetzt. Der Niederschlag wurde abfiltrirt und zweimal aus Chloroform umkrystallisirt.

Die Analyse ergab:

	Gefunden		Berechnet für $C_6Br_2Cl_3HO_2$
Cl.....	27·96	27·43	28·67
Br.....	43·04	43·92	43·07.

Pulverisirt man diese Krystalle und erwärmt sie mit Natriumbisulfit oder mit Zinn- und Salzsäure, so verwandeln sie sich in voluminöse weisse Nadeln, welche nach dem Umkrystallisiren aus Wasser bei circa 80° schmelzen und alle Eigenschaften des Trichlorresorcins besitzen.

Eine Chlorbestimmung ergab:

	Gefunden	Berechnet für $C_6Cl_3H_3O_2$
Cl.....	49·21	49·89.

Die Substanz war bromfrei.

Der neue Körper enthält somit die beiden Bromatome an Sauerstoff, die drei Chloratome an Kohlenstoff gebunden und ist unzweifelhaft Trichlorresorcinbrom $C_6Cl_3H(OBr)_2$.

Das Trichlorresorcinbrom bildet kleine gelbliche Krystalle, welche bei 100° schmelzen.

Erhitzt man es auf 130—140°, so zersetzt es sich unter Abgabe brauner Dämpfe. Zur quantitativen Bestimmung der Zersetzungsproducte wurde genau so verfahren wie beim Tribromphenolbrom, nur wurden die entweichenden Gase und Dämpfe nicht in Jodkaliumlösung, sondern, weil auf eine gleich-

[1] J. pr. Chem. 1878, 336.

[2] Inaug. Diss. Göttingen, 1878.

zeitige Abspaltung von Chlor und Brom Rücksicht zu nehmen war, in eine verdünnte, mit einigen Tropfen Schwefelsäure versetzte Eisenvitriollösung eingeleitet. Nach Beendigung der Operation wurde die vorgelegte Flüssigkeit mit Wasser noch mehr verdünnt und mit einem grossen Überschuss von heisser Salpetersäure versetzt, der man mehr als die zur vollständigen Ausfällung nöthige Menge Silbernitrat zugesetzt hatte. Dann wurde nahezu bis zum Sieden erhitzt, um etwa ausgeschiedenes metallisches Silber in Lösung zu bringen. Um die Quantitäten von Chlor und Brom in dem Niederschlage zu bestimmen, wurde derselbe auf einem tarirten Filter gesammelt, bei 120° getrocknet, gewogen und sodann im Chlorstrom geschmolzen und neuerdings gewogen.

Die Zersetzung des Trichlorresorcinbroms ist keine glatte, wie aus den folgenden Zahlen hervorgeht.

	Gefunden	Berechnet für Abspaltung von Br_2 aus $C_6Cl_3Br_2HO_2$
Br.....	35·78	43·07
Rückstand	60·60	56·93.

Eine Abgabe von Chlor findet nicht statt.

An den kälteren Theilen des Kölbchens findet sich eine geringe Menge einer krystallinischen Substanz ansublimirt, der grösste Theil des Rückstandes besteht aber aus einer nicht krystallisirbaren firnissartigen Masse, welche sich in Äther und Alkohol leicht löst und die grösste Ähnlichkeit mit den durch Erhitzen von Tribromphenolbrom [1] und von Dibromoxyltetrabromdiphenochinon erhaltenen Substanzen zeigt, hingegen vollständig verschieden von dem Dibromoxyltetrabromdiphenochinon selbst ist.

---

[1] Ernst Mennel bezeichnet gelegentlich einer interessanten Mittheilung über Bromoxylderivate der Komensäure in einer Fussnote (J. f. pract. Ch., 1882, 468) mein Tribromphenolbrom als „Bromoxyltribromphenol". Dieser Name ist nicht zutreffend, dagegen wäre die Bezeichnung „Bromoxyltribrombenzol" berechtigt. Dass die Bromoxylderivate mit schwefliger Säure leicht in die entsprechenden substituirten Phenole übergehen, ist nicht neu, sondern wurde schon von Claassen (l. c.) beobachtet.

Monochlordibromresorcin-Chlorbrom.

$$C_6 Cl Br_2 H \begin{matrix} -O\,Cl \\ -O\,Br. \end{matrix}$$

Auch die Darstellung des Tribromresorcins verlangt die Einhaltung bestimmter Verhältnisse, weil man sonst leicht schlechte Ausbeuten und ein schwer zu reinigendes Product erhält.

Man vermischt am besten die Lösungen von 50 Grm. Resorcin in 2 Liter Wasser und von 216 Grm. oder 72 CC. Brom in 1 Liter roher Salzsäure mit einander, lässt erkalten und krystallisirt den Niederschlag aus verdünntem Weingeist um.

Oder man löst einen Theil Resorcin fünf Theile Eisessig und lässt die berechnete Menge Brom hinzutropfen. Man erhält beim Erkalten einen festen Kuchen, aus dem man gerade so wie beim Trichlorresorcin die Mutterlauge möglichst vollständig entfernen muss; endlich krystallisirt man aus verdünntem Weingeist um.

Schlämmt man 50 Grm. Tribromresorcin in einer Mischung von 500 C.C. Wasser und eben so viel Salzsäure auf und leitet einen Chlorstrom ein, so wird der zuerst sehr voluminöse Niederschlag nach und nach pulverig. Man saugt sodann Luft hindurch, um das überschüssige Chlor zu vertreiben, filtrirt, presst ab und krystallisirt zweimal aus Chloroform um.

Die Untersuchung von Präparaten von verschiedenen Darstellungen ergab folgende Resultate:

	Gefunden			Berechnet für $C_6Br_3Cl_2HO_2$
	I	II	III	
Cl	18·18	17·53	16·99	17·07
Br	56·12	56·84	57·04	57·69.

Erwärmt man die fein gepulverten Krystalle mit Natriumbisulfit und krystallisirt das Product aus Eisessig um, so erhält man, wie aus der folgenden Analyse hervorgeht, ein Monochlordibromresorcin $C_6 Cl Br_2 H(OH)_2$. Dasselbe schmilzt bei 86°.

	Gefunden	Berechnet für $C_6Br_2ClH(OH)_2$
Cl	12·41	11·73
Br	51·83	52·89.

Demnach ist der neue Körper nicht, wie erwartet wurde, Tribromresorcinchlor $C_6Br_2H(OCl)_2$, welches mit Natriumbisulfit Tribromresorcin geben müsste, sondern

$$C_6Br_2ClH\begin{matrix}-OCl\\-OBr\end{matrix}$$

Monochlordibromresorcin-Chlorbrom.

Es bildet kleine gelbe Krystalle, welche unzersetzt schmelzen. Erhitzt man es auf 175°, so gibt es ziemlich genau ein Molekül Brom, aber kein Chlor ab:

	Gefunden		Berechnet für Abgabe von Br_2 aus $C_6Br_2Cl_2HO_2$
Br	38·27	37·70	38.46
Rückstand	58·01	—	61·54.

Beim Erkalten erstarrt der Rückstand krystallinisch. Man wäscht ihn mit kaltem Äther, worin er unlöslich ist und krystallisirt ihn aus Chloroform um.

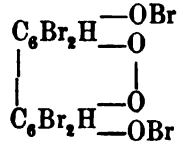
Die Analyse ergab:

	Gefunden		Berechnet für $C_6BrCl_2HO_2$
Cl	27·07	27·09	27·73
Br	32·83	32·45	31·25

Dieser Körper ist seinem ganzen Verhalten nach

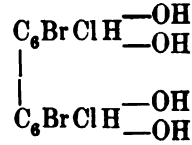
$$\begin{matrix}C_6BrClH\begin{matrix}-OCl\\-O\end{matrix}\\|\qquad\quad|\\|\qquad\quad|\\C_6BrClH\begin{matrix}-O\\-OCl\end{matrix}\end{matrix}$$

Dichloroxyldichlordibromdiphenochinon und somit dem Zersetzungsproducte des Tribromresorcins, dem Dibromoxyltetrabromdiphenochinon



analog zusammengesetzt, dem er auch in allen seinen Eigenschaften gleicht. Er beginnt bei 180° sich zu bräunen und schmilzt über 200° unter Zersetzung.

Erwärmt man ihn mit Zinn und Salzsäure, so verwandelt er sich in eine weisse voluminöse Masse, welche aus Eisessig krystallisirt, die für ein Dichlordibromtetraoxydiphenyl



berechneten Zahlen gibt:

	Gefunden	Berechnet für $C_{12}Br_2Cl_2H_6O_4$
Cl	16·21	15·95
Br	35·42	35·95.

Es schmilzt bei 265° unter Zersetzung.

Auch das Dichloroxyldichlordibromdiphenochinon zersetzt sich beim Erhitzen auf 220 — 230° (gerade so wie das Dibromoxyltetrabromdiphenochinon), gibt aber nicht, wie man erwarten sollte, Chlor, sondern nur Brom ab und verwandelt sich in eine amorphe Masse. Die Zersetzung ist keine glatte, da sich bei einer Bestimmung 22·7 Procente Brom anstatt der berechneten 31·25 Procente abspalteten.

Bisher sind vier Pentahalogenresorcine dargestellt worden, deren Verhalten beim Erhitzen über den Schmelzpunkt nunmehr verglichen werden soll. Es sind dies:

Trichlorresorcinchlor,

Trichlorresorcinbrom,

$C_6ClBr_2H\begin{matrix}-OBr\\-OCl\end{matrix}$ Monochlordibromresorcin-Chlorbrom,

$C_6Br_3H\begin{matrix}-OBr\\-OBr\end{matrix}$ Tribromresorcinbrom.

Trichlorresorcinchlor ist unzersetzt flüchtig, das Chlor ist in dieser Verbindung somit viel fester an Kohlenstoff und Sauerstoff gebunden, als das Brom in den analog zusammengesetzten Chlorbrom- und Bromverbindungen.

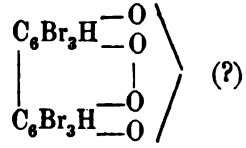
Trichlorresorcinbrom kann aus demselben Grunde kein Chlor, sondern nur Brom abgeben und hinterlässt einen Rückstand, welcher keine Halogenoxylgruppen mehr enthält und wahrscheinlich der Hauptmasse nach aus einem Körper von der Formel

$$C_6Cl_3H\begin{matrix}-O-\\-O-\end{matrix}C_6Cl_3H$$

besteht. Der Rückstand besitzt alle Eigenschaften der durch Erhitzen von Tribromphenolbrom und von Tetrabromdioxydiphenchinon-Brom erhaltenen Körper

$$C_6Br_2H_2O—OC_6Br_2H_2 \quad (?)$$

und



(?)

Alle dieser Substanzen sind bisher nicht krystallisirt erhalten worden und lösen sich leicht in Äther und Alkohol auf.

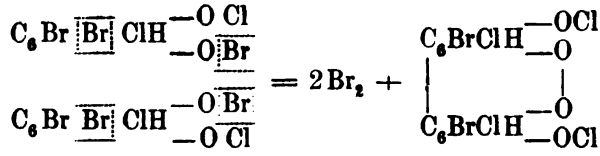
Monochlordibromresorcin-Chlorbrom spaltet glatt ein Molekül Brom ab und hinterlässt einen krystallinischen, in Äther unlöslichen Rückstand. Derselbe enthält, wie sich aus seinem Verhalten gegen Zinn und Salzsäure ergibt, noch gerade so, wie vor dem Erhitzen, die Hälfte seines Chlorgehaltes an Sauerstoff gebunden, es hat somit keine Atomwanderung stattgefunden.

Dadurch ist nachgewiesen, dass

$$C_6Br_2ClH\begin{matrix}-OCl\\-OBr\end{matrix}$$

beim Erhitzen das an Sauerstoff gebundene Bromatom und ein zweites, am Benzolkern befindliches, abgibt.

Da ferner der krystallinische Rückstand als Diphenylderivat erkannt wurde,[1] so müssen seine Entstehung und seine Formel in folgender Weise ausgedrückt werden:



2 Mol. Monochlordibrom-resorcin-Chlorbrom — Dichloroxyldichlordibrom-diphenochinon.

Tribromresorcinbrom verhält sich dieser Verbindung ganz analog.

II. Derivate des Phenols.

Trichlorphenolchlor.
$C_6Cl_3H_2.OCl.$

Zur Darstellung von Trichlorphenolchlor und Trichlorphenolbrom diente ein Trichlorphenol, welches aus der Fabrik des Herrn Dr. Theodor Schuchardt bezogen und „durch Einleiten von Chlor in verflüssigtes und auf 80° erwärmtes Phenol erhalten worden war. Mit dem Einleiten wurde aufgehört, als das Phenol beim Abkühlen auf 30° erstarrte".

Erwärmt man dieses Präparat mit verdünnter Kalilauge, so geht nicht alles in Lösung, sondern es hinterbleibt ein geschmolzener Rückstand, welcher beim Abkühlen erstarrt und sodann durch Abfiltriren von der alkalischen Flüssigkeit getrennt

---

[1] Siehe auch Wiener Akademie-Berichte, 1878, II, October-Heft. — Berliner Berichte, 11, 2168.

werden kann. 500 Grm. rohes Trichlorphenol gaben 25 Grm. dieses Körpers, mithin 5 Procente.

Aus Alkohol krystallisirt, bildet er lange Nadeln von angenehmem Geruch, welche bei 42° C. schmelzen und unzersetzt destilliren.

Die Analyse ergab folgende Zahlen:

	Gefunden	Berechnet für $C_6Cl_4H_2$
C	33·24	33·33
H	1·38	0·93
Cl	65·34	65·74

Demnach liegt ein Tetrachlorbenzol vor.

Vergleicht man die Eigenschaften dieses Tetrachlorbenzols mit der Beschreibung der drei isomeren Tetrachlorbenzole, welche Beilstein und Kurbatow[1] gegeben haben, so ergibt sich, dass es keinesfalls das symmetrische (Cl : Cl : Cl : Cl = 1 : 2 : 4 : 5) sein könne, dessen Schmelzpunkt zu 137—138° angegeben wird. Dagegen bleibt ein Zweifel bestehen, ob es mit dem unsymmetrischen (Cl : Cl : Cl : Cl = 1 : 3 : 4 : 5) oder mit dem benachbarten (Cl : Cl : Cl : Cl = 1 : 2 : 3 : 4) Tetrachlorbenzol identisch sei. Der Schmelzpunkt des ersteren ist zu 50—51°, der des letzteren mit 45—46° angegeben, während der Schmelzpunkt des aus Phenol erhaltenen Productes bei 42° liegt und sich mithin dem des benachbarten Tetrachlorbenzols mehr nähert.

Das unsymmetrische Tetrachlorbenzol soll beim Nitriren ein bei 21—22°, das benachbarte ein bei 64·5° schmelzendes Tetrachlornitrobenzol geben. Mein Tetrachlorbenzol gab beim Kochen mit rauchender Salpetersäure ein Product, welches auch nach dem Umkrystallisiren aus Alkohol keinen einheitlichen Schmelzpunkt zeigte, der Beginn des Schmelzens lag aber über 60°, es scheint also ein benachbartes Tetrachlorbenzol vorzuliegen.

Das Vorkommen von Tetrachlorbenzol in rohem Trichlorphenol lässt sich kaum anders als durch den Austausch der Hydroxylgruppe des Phenols gegen Chlor erklären. Gibt man

[1] Ann. Chem. Pharm., 192, 236.

nun zu, dass dieses Tetrachlorbenzol das benachbarte sei und zieht man in Betracht, dass Trichlorphenol auch durch Chloriren des gewöhnlichen Dichlorphenols (OH : Cl : Cl = = 1 : 2 : 4) erhalten werden kann, so bleibt für das Trichlorphenol nur die Formel

$$\overset{1\ \ 2\ \ 3\ \ 4}{C_6H_2OH.Cl.Cl.Cl}$$

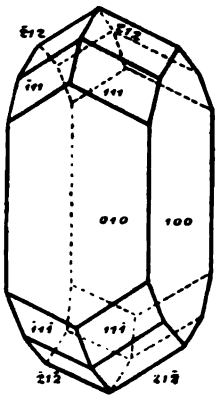
übrig. Anderseits sprechen mancherlei gewichtige Gründe dafür, dass die Chloratome sich in Bezug auf die Hydroxylgruppe in der Stellung OH : Cl : Cl : Cl = 1 : 2 : 4 : 6 befinden. Zur Behebung dieses Widerspruches müssten weitere Versuche angestellt werden.

Trichlorphenolchlor. 50 Grm. Trichlorphenol werden in einer starkwandigen Flasche in verdünnter Kalilauge gelöst. Dann verdünnt man auf 500 CC. und setzt 500 CC. rauchende Salzsäure hinzu. Die ganze Flüssigkeit ist nunmehr durch das ausgeschiedene, sehr voluminöse Trichlorphenol in einen dicken Brei verwandelt, in welchen man Chlor einleitet. Die Einwirkung geht sehr langsam vor sich. Man lässt, nachdem man eine Chlorirung mit etwa 100 Grm. Braunstein vorgenommen hat, am besten einige Stunden stehen und chlorirt dann ein zweites, eventuell ein drittes Mal. Ballt sich das Trichlorphenol zu grösseren zusammenhängenden Massen, welche durch den Chlorstrom nicht zertheilt werden, so bläst man das Chlor durch einen Luftstrom aus, entleert in eine grosse Reibschale und zerreibt sorgfältig, dann chlorirt man neuerdings. Endlich nimmt der Niederschlag, welcher anfangs die ganze Flüssigkeit erfüllt hat, nur noch etwa ein Viertheil derselben ein. Man entfernt das Chlor durch Durchleiten von Luft, filtrirt und presst ab und krystallisirt zweimal aus Chloroform um.

Eine Chlorbestimmung ergab:

	Gefunden	Berechnet für $C_6Cl_4H_2O$
Cl.....	61·43	61·21.

Das Trichlorphenolchlor bildet glänzende Säulen. Ich verdanke der Freundlichkeit des Herrn Prof. Ditscheiner die folgenden Angaben über deren Form.



Prismatisch. $a:b:c = 1:0{\cdot}6159:0{\cdot}5073$.

Beobachtete Flächen: 111, 212, 010, 100.

	Beobachtet	Berechnet
010.111	= 53°46′	*
111.111	= 42 45	*
010.100	= 90 0	90° 0′
010.212	= 69 42	69 52
111.100	= 111 25	111 23
111.100	= 68 38	68 37
212.100	= 64 50	64 54
212.100	= 114 50	115 6

Es schmilzt bei 119° und ist unzersetzt destillirbar.

Aus siedendem Alkohol lässt es sich umkrystallisiren, ohne sich zu zersetzen.

Übergiesst man Krystalle von Trichlorphenolchlor mit concentrirter Kalilauge, so färben sie sich schön blau, ohne ihre Form zu ändern. Beim Kochen zersetzen sie sich vollständig und liefern neben braunen amorphen Körpern viel Trichlorphenol. Kalte Salpetersäure ist ohne Einwirkung, kochende löst das Trichlorphenolchlor unter lebhafter Gasentwicklung auf.

Verhalten gegen Schwefelsäure. Das Trichlorphenolchlor verhält sich beim Erhitzen mit Schwefelsäure durchaus nicht analog dem Tribromphenolbrom, welches dabei quantitativ in das gewöhnliche Tetrabromphenol übergeht.

Das Trichlorphenolchlor entwickelt nämlich beim Erwärmen mit Schwefelsäure reichlich Salzsäure, gleichzeitig bräunt sich die Flüssigkeit. Giesst man sodann die ganze Masse in Wasser ein und destillirt mit Wasserdampf, so geht vornehmlich nur ein Körper über, welcher nach einmaligem Umkrystallisiren aus Alkohol bei 64—65° schmilzt. Die Chlorbestimmung ergab:

	Gefunden	Berechnet für $C_6Cl_3H_3O$
Cl	54·01	53·92

Derselbe ist somit Trichlorphenol.

Der bei der Destillation verbleibende Rückstand wurde abfiltrirt und mit kaltem Alkohol gewaschen. Dabei gingen

harzige Antheile in Lösung und es hinterblieben Krystallblättchen von dem Ansehen und den Eigenschaften des Chloranils, welche nach dem Umkrystallisiren aus Alkohol analysirt wurden:

	Gefunden	Berechnet für $C_6Cl_4O_2$
Cl.....	57·40	57·72.

Die Zersetzung des Trichlorphenolchlors mit Schwefelsäure verläuft daher nach der Gleichung:

$$\underset{\text{Trichlorphenolchlor}}{3C_6Cl_3H_2.OCl} + H_2O = \underset{\text{Chloranil}}{C_6Cl_4O_2} + \underset{\text{Trichlorphenol}}{2C_6Cl_3H_2.OH} + 2HCl$$

Trichlorphenolbrom.
$C_6Cl_3H_2.OBr.$

50 Grm. Trichlorphenol werden in verdünnter Kalilauge gelöst und mit dem gleichen Volumen concentrirter Salzsäure versetzt. Dann fügt man überschüssiges, in Salzsäures gelöstes Brom hinzu. Man lässt unter häufigem Schütteln einige Stunden stehen, filtrirt ab und krystallisirt aus Chloroform um. Man erhält kleine, wenig gefärbte Krystalle, welche bei 99° schmelzen.

	Gefunden	Berechnet für $C_6Cl_3H_2.OBr$
Cl.....	39·24	38·52
Br.....	28·58	28·93.

Erhitzt man das Trichlorphenolbrom über seinen Schmelzpunkt, so entweicht Brom und es hinterbleibt eine amorphe Masse.

Schmilzt man es unter Schwefelsäure, so verwandelt es sich in Trichlorbromphenol $C_6Cl_3Br.OH$, welches nach dem Umkrystallisiren aus Eisessig die folgenden Zahlen gab:

	Gefunden	Berechnet für C_6Cl_3BrHOH
Cl.....	37·61	38·52
Br.....	29·71	28·93.

Das Trichlorphenolbrom verhält sich somit dem Tribromphenolbrom vollkommen analog.

Einwirkung von Chlor auf Tribromphenol. Lässt man einen Chlorstrom auf Tribromphenol einwirken, welches in verdünnter Salzsäure suspendirt ist, so wird dasselbe nach und

nach in eine körnige Masse von weit geringerem Volumen verwandelt.

Beim Umkrystallisiren eines derartigen Productes aus Chloroform wurden kleine glänzende Krystalle erhalten, welche sich bei der Analyse als nicht homogen erwiesen, sondern aus zwei oder mehreren isomorphen Substanzen bestanden. Durch fractionirte Krystallisation wurden Partien mit verschiedenen Chlor- und Bromgehalt erhalten, eine genaue Trennung war aber nicht leicht zu erzielen, wesshalb ich auf diesen mir nicht sehr wesentlich scheinenden Versuch nicht weiter einging. Aus den Analysen der einzelnen Fractionen, sowie jener substituirten Phenole, welche sie mit saurem schwefligsaurem Natron geben, kann aber gefolgert werden, dass sich bei der Einwirkung von Chlor auf Tribromphenol gleichzeitig

$C_6Br_3H_2 . OBr$ Tribromphenolbrom,

$C_6Br_2ClH_2 . OBr$ Monochlordibromphenolbrom,

$C_6BrCl_2H_2 . OBr$ Dichlormonobromphenolbrom,

und vielleicht noch chlorreichere Producte bilden.

Ein gleiches Verdrängen von am Benzolkern gebundenem Brom wurde oben bei der Einwirkung von Chlor auf Tribromresorcin beschrieben. Beim Tribromphenol muss man sich vorstellen, dass ein Theil des verdrängten Broms auf unangegriffenes Tribromphenol einwirkt und dieses in Tribromphenolbrom verwandelt.

Vor Kurzem hat Langer [1] das Hexachlorphenol $C_6Cl_5 . OCl$ beschrieben.

Es ist mir bisher nicht gelungen, dasselbe direct aus Pentachlorphenol zu erhalten, es scheint mir aber gewiss, dass es möglich sein wird, durch Abänderung der Versuchsbedingungen zum Ziele zu gelangen.

---

[1] Berl. Ber., 15.

Über Derivate des Pyrens.

Von Dr. **Guido Goldschmiedt** und Dr. **Rudolf Wegscheider.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth. XXXVIII.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 8. März 1883)

Einwirkung von Chlor auf Pyren.

Durch eine Lösung von Pyren in Chloroform wurde bei Zimmertemperatur ein rascher Chlorstrom geleitet. Es entwichen Ströme von Chlorwasserstoff und die Temperatur der Flüssigkeit stieg beträchtlich; dabei schied sich in reichlicher Menge eine gelbe krystallinische Substanz ab, so dass der Kolbeninhalt zu einem dünnen Brei gestand. Es ist daher nothwendig, dass Chlor durch eine Röhre von ziemlich grossem Durchmesser in die Lösung eintreten zu lassen, damit keine Verstopfung eintrete. Sowohl das sich Ausscheidende, als das in Lösung Bleibende bildet ein schwer zu entwirrendes Gemenge von Chlorsubstitutionsproducten des Pyrens. Zur Trennung derselben diente die fractionirte Krystallisation aus Alkohol, Chloroform und Xylol; für die bis 200° schmelzenden Fractionen wurde fast ausschliesslich Alkohol verwendet, für höher schmelzende vorwiegend Chloroform. Xylol erwies sich als ein sehr geeignetes Lösungsmittel für die höchstschmelzenden Antheile. Nur in ganz untergeordnetem Masse wurden auch Äther und Eisessig in Anwendung gebracht. Der Versuch, einzelne Fractionen durch Sublimation zu reinigen, führte nicht zum Ziele, da hiebei theilweise Zersetzung eintrat.

Schliesslich gelang es, ein Mono-, ein Di-, ein Tri- und ein Tetrachlorpyren zu isoliren, ferner die Anwesenheit eines zweiten Dichlorpyrens wahrscheinlich zu machen. Ausser diesen fünf Körpern war nur noch ein leicht schmelzbares Harz in sehr

geringer Menge nachweisbar. Welche Schwierigkeit die Trennung der Chlorsubstitutionsproducte des Pyrens bot, wird am besten durch den Umstand charakterisirt, dass zu diesem Zwecke circa 400 Schmelzpunktsbestimmungen vorgenommen werden mussten. Was die Mengenverhältnisse der einzelnen Substanzen betrifft, so ist zu bemerken, dass bei längerem, über dreiviertel Stunden fortgesetztem Einleiten von Chlor als Hauptproduct Tetrachlorpyren entsteht; eine gewisse Menge der chlorärmeren Producte wird jedoch immer vom Tetrachlorpyren umhüllt und dadurch der weiteren Chlorirung entzogen. Bei kürzerer Dauer des Einleitens erhält man neben Tetrachlorpyren Trichlorpyren in bedeutender Menge; um viel Monochlorpyren zu erhalten, darf man höchstens eine Viertelstunde Chlor einleiten. Die beiden Dichlorpyrene entstehen immer nur in untergeordnetem Masse. Über die Eigenschaften der erhaltenen Körper sei Folgendes bemerkt:

1. Monochlorpyren bildet feine, flache, lange, glänzende goldgelbe Nadeln. Es schmilzt bei 118—119° und ist schon in der Kälte sehr leicht löslich in Äther, Chloroform, Schwefelkohlenstoff, Benzol und Xylol. Ferner ist es leicht löslich in Essigäther (schon in der Kälte), in Alkohol, beim Erwärmen auch in Petroläther, Amylalkohol und Eisessig. In kaltem Eisessig ist es ziemlich löslich. Endlich löst es sich in heissem Methylalkohol, dagegen nicht in Wasser. Aus allen seinen Lösungsmitteln erhält man es beim Erkalten oder Verdunsten in mehr oder weniger flachen Nadeln. Die aus Essigäther auskrystallisirten hatten sich parallel aneinandergelegt, so dass sie das Aussehen dünner gestreifter Blättchen zeigten. In concentrirter Schwefelsäure löst sich die Verbindung beim Erwärmen mit prachtvoll veilchenblauer Fluorescenz. Beim Kochen mit rauchender Salpetersäure färbt sie sich roth und geht theilweise in Lösung. Beim Verdünnen mit Wasser fällt ein Nitroproduct heraus.

Die Chlorbestimmung wurde durch Glühen mit Kalk ausgeführt und gab folgende Zahlen:

0·1533 Grm. Substanz lieferten 0·0974 Grm. AgCl.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_9Cl$
Cl	15·71	15·01

Monochlorpyrenpikrinsäure wurde dargestellt, indem zur alkoholischen Lösung von 0·13 Grm. Monochlorpyren mehr als die theoretische Menge in Alkohol gelöster Pikrinsäure (0·17 Grm.) hinzugefügt wurde. Nach dem Einengen und Erkaltenlassen krystallisirten rothe, wie Pyrenpikrinsäure aussehende Nadeln heraus, welche abfiltrirt und mit Alkohol gewaschen wurden. Die so erhaltene Verbindung ist sehr leicht löslich in heissem Alkohol, schmilzt bei 177—178° und zerfällt leicht in ihre Bestandtheile. Bei längerem Liegen an der Luft färbt sie sich gelb; durch kochendes Wasser wird sie leicht zersetzt.

Auch heisser Alkohol zerlegt sie, wenn nicht überschüssige Pikrinsäure zugegen ist. Löst man die reine Verbindung in heissem Alkohol, so krystallisirt freies Monochlorpyren heraus; fügt man aber Pikrinsäure hinzu und bringt durch Aufkochen alles in Lösung, so erhält man wieder die Verbindung.

Der Substanz kommt die Formel $C_{16}H_9Cl + C_6H_2(NO_2)_3(OH)$ zu, wie aus dem Ergebnisse einer quantitativ ausgeführten Zerlegung erhellt.

0·0959 Grm. Substanz lieferten bei der Zerlegung mit Ammoniak 0·0489 Grm. Monochlorpyren vom richtigen Schmelzpunkte.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_9Cl + C_6H_2(NO_2)_3(OH)$
$C_{16}H_9Cl$	50·99	50·81

Die Monochlorpyrenpikrinsäure ist also den Pikrinsäureverbindungen der Kohlenwasserstoffe analog zusammengesetzt; die Substituirung eines Wasserstoffatoms im Kohlenwasserstoffmolekül durch Chlor hebt zwar die Fähigkeit, eine Pikrinsäureverbindung zu liefern, nicht auf, vermindert aber deren Beständigkeit sehr bedeutend. Es darf daher wohl vermuthet werden, dass auch Pikrinsäureverbindungen von Substitutionsproducten anderer Kohlenwasserstoffe existenzfähig sind.

2. α-Dichlorpyren bildet schwefelgelbe, flache, glänzende Nadeln vom Schmelzpunkte 154—156°. Es ist schon in der Kälte sehr löslich in Schwefelkohlenstoff, leicht löslich in Äther, Chloro-

form, Benzol, Xylol, Petroläther, Essigäther und heissem Eisessig, ziemlich löslich in heissem, schwer in kaltem Alkohol, sehr schwer in Methylalkohol, unlöslich in Wasser. Alkoholische Lösungen fluoresciren blau, alle übrigen grün.

Beim Erkalten der Lösung in Alkohol oder Eisessig krystallisirt der Körper in Nadeln, ebenso beim Verdunsten der Benzol- oder Essigätherlösung. Aus Äther erhält man beim Verdunsten feine, seidenglänzende Nadeln, aus Chloroform verfilzte, aus Petroläther und Schwefelkohlenstoff verzweigte Nadeln. Eine Pikrinsäureverbindung liess sich nicht darstellen. In concentrirter Schwefelsäure löst sich das α-Dichlorpyren beim starken Erwärmen. Die Lösung zeigt eine sehr intensive, prachtvoll veilchenblaue Fluorescenz. Beim Glühen mit Ätzkalk liefert es Pyren vom Schmelzpunkt 144—147° (Schmelzpunkt der Pikrinsäureverbindung des Letzteren 216°).

Eine Chlorbestimmung gab Zahlen, welche mit der Formel $C_{16}H_8Cl_2$ in Einklang stehen.

0·3382 Grm. Substanz lieferten nach dem Glühen mit Kalk 0·3659 Grm. AgCl.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_8Cl_2$
Cl	26·75	26·20

3. β-Dichlorpyren (?). Eine bei 194—196° schmelzende Fraction, deren Schmelzpunkt sich beim Umkrystallisiren kaum mehr änderte, deren Menge übrigens für eine weitere Reinigung nicht ausreichte, wurde zu einer Chlorbestimmung verwendet. Die Substanz ist ziemlich schwer löslich in Alkohol und Eisessig, etwas leichter in Chloroform.

0·2844 Grm. Substanz lieferten 0·3163 Grm. AgCl.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_8Cl_2$
Cl	27·50	26·20

Der Chlorgehalt entspricht einem mit Trichlorpyren verunreinigten Dichlorpyren, in welchem der Gehalt an Trichlorpyren

etwa 15% des Gesammtgewichtes beträgt. Da einem so zusammengesetzten Gemenge von α-Dichlorpyren mit Trichlorpyren ein weit niedrigerer Schmelzpunkt zukommt, ist die Substanz als ein nicht ganz reines isomeres Dichlorpyren anzusprechen.

4. Trychlorpyren bildet dünne weiche verfilzte Nadeln. Ihre Farbe ist weiss, mit einem schwachen Stich ins Gelbe. Sie lösen sich in der Hitze leicht in Xylol, ziemlich leicht in Benzol und Schwefelkohlenstoff (in letzterem auch in der Kälte kaum weniger), ziemlich schwer in Chloroform, Amylalkohol und Petroläther, schwer in Äther, Eisessig, Essigäther, sehr schwer in Methyl- und Äthylalkohol, nicht in Wasser. Aus allen diesen Lösungsmitteln krystallisirt der Körper beim Erkalten aus, besonders reichlich aus Amylalkohol und Xylol, auch wohl aus Eisessig und Benzol, dagegen sehr wenig aus Methylalkohol, Äther oder Chloroform, fast nicht aus Schwefelkohlenstoff. Beim schwachen Erwärmen mit concentrirter Schwefelsäure wird wenig gelöst; wendet man dabei viel Schwefelsäure an, so tritt veilchenblaue Fluorescenz ziemlich intensiv auf, jedoch nicht so stark, wie bei den chlorärmeren Substitutionsproducten des Pyrens. Beim starken Erhitzen tritt vollständige Lösung ein, aber die Färbung der Flüssigkeit wird dunkel und die Fluorescenz undeutlich.

Trichlorpyren schmilzt bei 256—257°. Die Formel $C_{16}H_7Cl_3$ stützt sich auf folgende analytische Daten:

I. 0·4065 Grm. Substanz lieferten nach dem Glühen mit Kalk 0·5731 Grm. AgCl.

II. 0·2685 Grm. Substanz gaben bei der Verbrennung 0·6260 Grm. CO_2 und 0·0598 Grm. H_2O.

In Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_7Cl_3$
C	63·59	62·85
H	2·47	2·29
Cl	34·86	34·86

5. Tetrachlorpyren erhält man in Gestalt langer, feiner, prachtvoll seidenglänzender, biegsamer Nadeln, deren Farbe blassgelb mit einem Stich ins Grüne ist. Es ist leicht löslich in heissem Xylol, ziemlich löslich in heissem Benzol, ziemlich schwer in

heissem Amylalkohol, schwer in Schwefelkohlenstoff, heissem Essigäther, Eisessig und Chloroform, in kaltem Benzol und Xylol, sehr schwer in Petroläther, heissem Methyl- oder Äthylalkohol, Äther, kaltem Eisessig oder Chloroform, fast unlöslich in kaltem Methyl-, Äthyl- oder Amylalkohol, Äther und Essigäther. Von concentrirter, fast siedender Schwefelsäure wird es nur sehr schwer angegriffen. Hiebei tritt anfangs eine schwache rosenrothe Färbung auf.

Vergleicht man die Löslichkeitsverhältnisse der verschiedenen Chlorsubstitutionsproducte des Pyrens, so bemerkt man, dass die Löslichkeit in allen angewandten Flüssigkeiten mit steigendem Chlorgehalt abnimmt.

Tetrachlorpyren schmilzt über 330°. Beim Glühen mit Ätzkalk liefert es eine kleine Menge Pyren vom Schmelzpunkt 149°. Zur Feststellung der Zusammensetzung wurden folgende Analysen ausgeführt:

I. 0·1685 Grm. Substanz lieferten nach dem Glühen mit Kalk 0·2829 Grm. AgCl.

II. 0·2246 Grm. Substanz gaben bei der Verbrennung 0·4656 Grm. CO_2 und 0·0429 Grm. H_2O.

In Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_6Cl_4$
C	56·54	56·47
H	2·12	1·76
Cl	41·51	41·76

Einwirkung concentrirter Schwefelsäure auf Pyren.

Fein gepulvertes Pyren wurde in Portionen zu 10 Grm. mit 5 Cbcm. concentrirter Schwefelsäure am Wasserbade erwärmt.[1] Es empfiehlt sich, die Mischung der Substanzen durch beständiges

[1] Pyren und concentrirte Schwefelsäure reagiren schon bei gewöhnlicher Temperatur aufeinander. Wenn man Pyren mit Schwefelsäure in einer Reibschale verreibt, so tritt eine erhebliche SO_2-Entwicklung ein, jedoch bleibt ein grosser Theil des Pyrens auch bei Anwendung eines Überschusses von H_2SO_4 unangegriffen.

Drehen des Kolbens zu befördern. Sein Inhalt wird dicker und färbt sich unter Entbindung von Schwefeldioxyd grünlichschwarz. Es werden dann noch zweimal $2^1/_2$ Cbcm. Schwefelsäure hinzugefügt. Wenn eine Probe sich in Wasser klar löst, was nach etwa 20 Minuten der Fall ist, giesst man das ganze nunmehr sehr zähflüssige Reactionsproduct in Wasser. Die dunkelgelbbraune Lösung wird erhitzt, von kleinen Mengen Pyren, welche der Reaction entgingen, filtrirt, mit Bleiweiss abgesättigt und durch Filtriren vom Bleisulfat von dem überschüssigen Bleicarbonat getrennt. Der Filterrückstand wurde dann noch mit heissem Wasser gewaschen. Die so erhaltene Lösung des Bleisalzes scheidet beim Erkalten gelbe Häute ab. Die Schwerlöslichkeit des Bleisalzes bewirkt auch, dass der Niederschlag von Bleisulfat beachtenswerthe Mengen von pyrensulfosaurem Blei zurückhält, welche durch wiederholtes Auskochen mit Wasser grossentheils gewonnen werden können; jedoch ist die aus den Auszügen erhaltene Pyrensulfosäure sehr unrein. Daher ist es nicht empfehlenswerth, diese Auszüge mit der übrigen Lösung zu vereinigen, wenn es sich um Darstellung reiner pyrensulfosaurer Salze handelt.

Die kochende Lösung des Bleisalzes wurde mit Schwefelwasserstoff zerlegt. Das Schwefelblei ist in der Lösung der Sulfosäure nicht unlöslich und daher die Ausfällung des Bleis keine vollständige. Man bringt deshalb nach dem Abfiltriren des Niederschlages die Flüssigkeit auf ein kleines Volum und leitet noch einmal Schwefelwasserstoff ein. Dann wird die filtrirte Lösung am Wasserbad zur Trockne verdampft. Es hinterbleibt ein grüner unkrystallinischer teigiger Rückstand. Er ist in Wasser leicht löslich; die Lösung ist hellgelb mit grüner Fluorescenz. In Äther ist die Sulfosäure unlöslich, in Alkohol schwer löslich. Kocht man das Rohproduct mit Alkohol, so bleibt ein gelbes Pulver zurück, und der Alkohol scheidet beim Erkalten ebenfalls ein gelbes Pulver ab; jedoch gelang es nicht, eine aschenfreie Fraction zu erhalten. Eine aschenhältige, aus Alkohol ausgefallene Fraction verlor beim Stehen im Exsiccator $6 \cdot 35\%$, beim Trocknen bei 120° $9 \cdot 83\%$ ihres Gewichtes (für $C_{16}H_{10}S_2O_6 + 2aq$ würden sich $9 \cdot 05\%$ berechnen). Von 120—270° bleibt das Gewicht constant; von 200° an tritt jedoch Schwärzung ein. In der Wärme verbreitet

die Substanz einen eigenthümlichen Geruch; getrocknet ist sie sehr hygroskopisch.

Da es nicht gelang, die freie Sulfosäure rein darzustellen, wurde ihre Zusammensetzung durch die Analyse des Kalisalzes festgestellt. Es wurde Sulfosäure in wässriger Lösung mit K_2CO_3 übersättigt, mit Thierkohle gekocht, die alkalische Flüssigkeit mit Sulfosäure genau neutralisirt, zur Trockne gebracht und durch Auskochen mit Alkohol gereinigt. Der ungelöst bleibende Theil des Salzes bildet gelbe Krusten und wurde durch Filtration von der tiefrothen, grün fluorescirenden alkoholischen Lösung getrennt, welche übrigens noch erhebliche Mengen des Kalisalzes enthielt. Das gereinigte Kalisalz wurde in Wasser gelöst und entweder durch Eindampfen oder durch Fällung mit Alkohol zur Abscheidung gebracht. Im ersteren Falle erhielt man gelbe Häute, in letzterem aber ein hellgelbes, aus mikroskopischen Prismen bestehendes Pulver. Bei 180° schwärzt sich die Substanz.

Analysen:

I. 0·2042 Grm. wasserfreie (bei 120° getrocknete) Substanz gaben bei der Verbrennung 0·3290 Grm. CO_2 und 0·0403 Grm. H_2O.

II. 0·4961 Grm. wasserfreie Substanz gaben nach dem Schmelzen mit Soda und Salpeter 0·5493 Grm. $BaSO_4$.

III. 0·4672 Grm. wasserfreie Substanz gaben 0·1812 Grm. K_2SO_4.

IV. 0·2201 Grm. bei 100° getrockneter, daher, wie aus dem folgenden ersichtlich, noch $\frac{1}{2}$ Mol. Wasser enthaltender Substanz (entsprechend 0·2157 Grm. wasserfreier Substanz) gaben 0·0837 Grm. K_2SO_4.

In 100 Theilen:

	Gefunden				Berechnet für
	I	II	III	IV	$C_{16}H_8(SO_3K)_2$
C	43·94	—	—	—	43·84
H	2·19	—	—	—	1·83
S	—	15·18	—	—	14·61
K	—	—	17·39	17·39[1]	17·81

[1] Bezogen auf wasserfreies Salz.

Es liegt also das Kalisalz einer **Pyrendisulfosäure** vor. Dasselbe enthält, wenn es durch Abdampfen der wässerigen Lösung gewonnen wird, $2^1/_2$ Mol. Krystallwasser, von denen zwei im Exsiccator oder bei 100°, das letzte halbe erst bei 120° weggehen. Das mit Alkohol gefällte Salz gibt zu niederen Krystallwassergehalt, welcher aber bei Salzen verschiedener Darstellung schwankend war. Es dürfte daher nicht ein Krystallwassergehalt von 2 Mol. bei demselben anzunehmen sein, sondern vielmehr ein Gemenge des Salzes mit $2^1/_2$ Mol. Krystallwasser und des wasserfreien vorliegen.

I. 0·5141 Grm. der lufttrockenen Substanz verloren bei 120° 0·0469 Grm. H_2O.

II. 0·5458 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 120 bis 130° 0·0497 Grm. H_2O.

III. 0·3784 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 120° 0·0355 Grm. H_2O.

IV. 0·2569 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 120 bis 130° 0·0176 Grm. H_2O.

V. 0·1519 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 120 bis 130° 0·0119 Grm. H_2O.

VI. 0·1118 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 120 bis 130° 0·0080 Grm. H_2O.

Die Wasserbestimmungen I. bis III. wurden mit dem beim Eindampfen der wässerigen Lösung abgeschiedenen, IV. bis VI. mit dem durch Alkohol gefällten Salze ausgeführt.

In 100 Theilen:

	Gefunden						Berechnet für	
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	$C_{16}H_8(SO_3K)_2 + 2\frac{1}{2}aq$	$C_{16}H_8(SO_3K)_2 + 2aq$
H_2O	9·12	9·11	9·38	6·74	7·83	7·16	9·32	7·59

Dass von den $2^1/_2$ Mol. Krystallwasser im Exsiccator oder bei 100° nur 2 Mol. entweichen, ergibt sich aus Folgendem:

0·3784 Grm. lufttrockene Substanz verloren im Exsiccator 0·0303 Grm. H_2O. Hierauf wurde bei 100° getrocknet, der Gewichtsverlust stieg aber nur bis 0·0307 Grm.

Auf 100 Theile berechnet:

		Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_8(SO_3K)_2+2\frac{1}{2}aq$ Abgabe von 2 aq.
Wasserverlust	im Exsiccator	8·01	7·45
	bei 100°	8·11	

Diese Bestimmung wurde endlich durch eine andere controlirt, welche beweist, dass das bei 100° getrocknete Salz noch $^1/_2$ Mol. Wasser enthält.

0·2988 Grm. bei 100° getrocknete Substanz verloren bei 120° 0·0058 Grm. H_2O.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_8(SO_3K)_2+\frac{1}{2}aq$
H_2O	1·94	2·01

Pyrendisulfosaurer Baryt wurde durch Absättigen der Säure in siedender wässeriger Lösung mit Bariumcarbonat, Filtriren, Kochen der Lösung mit Thierkohle und Eindampfen, in der Form schwefelgelber Häute erhalten, welche bei 250° sich zu schwärzen beginnen.

0·4426 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 210° 0·0505 Grm. H_2O.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_8S_2O_6Ba+3\frac{1}{2}aq$
H_2O	11·41%	11·25%

0·3921 Grm. wasserfreie Substanz gaben 0·1843 Grm. $BaSO_4$.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_8S_2O_6Ba$
Ba	27·64	27·59

Das Kalksalz wurde als gelbes Pulver beim Absättigen der mit Alkohol gereinigten Pyrendysulfosäure mit Calciumcarbonat, Filtriren und Eindampfen erhalten.

Die Calciumbestimmung ergab folgendes Resultat:

0·5212 Grm. wasserfreie (bei 140° getrocknete) Substanz lieferten 0·1721 Grm. $CaSO_4$.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_8S_2O_6Ca$
Ca	9·71	10·00

Das Salz enthält 2 Mol. Krystallwasser, welche erst bei 130° vollständig entweichen.

I. 0·1493 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 130° 0·0126 Grm. H_2O.

II. 0·5628 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 140° 0·0416 Grm. H_2O.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für $C_{16}H_8S_2O_6Ca+2aq$
	I.	II.	
H_2O . .	8·44	7·39[1])	8·26

Ein Molekül Krystallwasser entweicht jedoch schon beim Stehen über Schwefelsäure.

0·1493 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei viertägigem Stehen im Exsiccator 0·0064 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet auf $C_{16}H_8S_2O_6Ca+2aq$ für Abgabe von 1aq
H_2O	4·29	4·13

Die Darstellung eines Silbersalzes gelang nicht.

Einwirkung von schmelzendem Ätzkali auf Pyrendisulfosäure.

Wir haben pyrendisulfosaures Kali unter verschiedenen Bedingungen mit Ätzkali verschmolzen, ohne dass es uns gelungen

---

[1] Die zu niedrige Ziffer ist wahrscheinlich die Folge einer theilweisen Entwässerung der an der Gefässwand abgeschiedenen Krusten beim Eindampfen der wässerigen Lösung.

wäre, daraus das entsprechende Phenol zu erhalten. Beim Beginn des Schmelzens tritt starkes Schäumen ein und der Inhalt des Silbertiegels färbt sich roth. Dabei wird ein eigenthümlicher Geruch bemerkbar, ähnlich demjenigen, welchen die freie Sulfosäure beim Erwärmen zeigt. Beim ersten Male wurde die Schmelze fortgesetzt, bis eine Probe sich klar in Wasser löste und beim Ansäuren viel Schwefeldioxyd entwickelte. Der Tiegelinhalt wurde nach dem Erkalten in verdünnte Schwefelsäure eingetragen; dabei schied sich eine braune Substanz ab, welche abfiltrirt wurde. Sie bestand, wie das Mikroskop erkennen liess, theilweise aus gelben Krystallen.

Behandelt man sie mit Weingeist, so bleibt eine Schmiere ungelöst. Das in Lösung gegangene wurde mit Alkohol und Thierkohle behandelt. Man erhielt so braune glänzende Nadeln, unter dem Mikroskop grosse gelbliche Spiesse, die aber noch immer mit dunkelgefärbter Materie verunreinigt waren. Sie sind in heissem Wasser schwer, in kaltem fast unlöslich. Die Lösung zeigte rosenrothe Fluorescenz, reagirte neutral und gab mit Eisenchlorid keine Färbung. In Sodalösung oder Kalilauge ist die Substanz leicht löslich; aus diesen intensiv veilchenblau fluorescirenden Lösungen wird sie durch Säuren in braunen Flocken gefällt. In Alkohol ist sie ebenfalls leicht löslich und wird daraus durch Wasser gefällt. Sie sublimirt nicht; der Schmelzpunkt konnte wegen Schwärzung nicht genau bestimmt werden, er liegt aber jedenfalls über 180°. Die Menge dieses Körpers betrug, obwohl er erst theilweise gereinigt war, höchstens $^1/_2\%$ vom Gewicht des angewendeten pyrendisulfosauren Kalis; es war daher nicht möglich, seine Zusammensetzung festzustellen, umsoweniger, da der Körper bei den folgenden Versuchen nicht mehr erhalten wurde.

Beim Destilliren mit Zinkstaub gibt er eine Substanz, welche beim Auskrystallisiren aus alkoholischer Lösung unter dem Mikroskop die charakteristischen Formen des Pyrens zeigt und eine schon aus heisser alkoholischer Lösung herausfallende rothe Pikrinsäureverbindung liefert.

Die von der Ausscheidung filtrirte schwefelsaure Lösung der Schmelze gab an Äther nur wenig einer tiefbraunen Schmiere ab, welche sich nicht reinigen liess; auch der durch Abdampfen der Lösung erhaltene Rückstand gab an Alkohol keine krystallisirende

organische Substanz ab. Sowohl die Ätherausschüttelung, als die schwefelsaure Lösung zeigten veilchenblaue, mit Alkalien grün werdende Fluorescenz.

Ein zweites Mal wurde das Schmelzen länger fortgesetzt. Der Tiegelinhalt zeigte einen metallischen grünen Reflex und es entwichen aromatische Dämpfe. Daher wurde die Schmelze in eine mit einer Kühlröhre versehene eiserne Retorte übergefüllt und das Erhitzen fortgesetzt, bis brennbare Gase entwichen. Das Destillat bestand aus einer kleinen Menge eines mit einem Öl verunreinigten krystallinischen Körpers, welcher nach dem Abpressen zwischen 130—140° schmolz und durch den Schmelzpunkt seiner Pikrinsäureverbindung (220°) als Pyren erkannt wurde.

Beim Eintragen des Retortenrückstandes in Schwefelsäure schied sich unter Entwicklung von viel Schwefeldioxyd ein braunschwarzer unkrystallinischer Körper ab, dessen Gewicht mehr als die Hälfte des angewendeten pyrendisulfosauren Kali betrug. Er war theilweise löslich in Wasser, leichter in Alkohol, sehr leicht in Äther. Da seine Reinigung nicht gelang, wurde er mit Zinkstaub destillirt. Hiebei wurde eine kleine Menge eines Kohlenwasserstoffs erhalten, welcher nach passender Reinigung (mit Alkohol und Thierkohle) der Hauptsache nach als Pyren erkannt wurde (Schmelzpunkt des Kohlenwasserstoffs 141—143°, seiner Pikrinsäureverbindung 218°). Daneben konnte eine Spur eines in Alkohol schwer löslichen, bei 230—232° schmelzenden Körpers nachgewiesen werden.

Durch Ausschüttelung der schwefelsauren Lösung der Schmelze mit Äther erhielt man nur Schmieren, deren Reinigung nicht gelang. Destillirt man sie, so geht ein braunes, gleich erstarrendes Öl über. Das Destillat ist aber auch nicht krystallinisch. Es ist in Wasser löslich und gibt mit Eisenchloridlösung eine röthliche Färbung.

Eine andere Schmelze wurde in der Absicht, etwaige Zwischenproducte zu fassen, fünf Minuten nach Eintritt der Rothfärbung unterbrochen. Beim Eintragen der Schmelze in überschüssige Schwefelsäure entsteht ein grünlichgelber krystallinischer Niederschlag, welcher sich merkwürdigerweise als das Kalisalz einer Pyrenmonosulfosäure erwies. Das Salz

wurde in Weingeist gelöst und von schwarzen Schmieren filtrirt. Es bildet mikroskopische Nadeln, die in Weingeist leicht, in absolutem Alkohol schwer löslich sind. Es enthält 1 Molekül Krystallwasser, welches zur Hälfte im Exsiccator entweicht. Die zweite Hälfte geht bei 100° ziemlich langsam weg, schneller bei höheren Temperaturen. Das Trocknen über 100° erfordert jedoch Vorsicht; schon bei 118° ist eine geringe Schwärzung bemerkbar.

Die Formel $C_{16}H_9SO_3K$ stützt sich auf folgende Analysen:

I. 0·2680 Grm. der wasserfreien Substanz gaben 0·0694 Grm. K_2SO_4.

II. 0·1805 Grm. wasserfreie Substanz gaben 0·0474 Grm. K_2SO_4.

III. 0·2600 Grm. wasserfreie Substanz gaben 0·2003 Grm. $BaSO_4$.

IV. 0·2124 Grm. wasserfreie Substanz gaben 0·4609 Grm CO_2 und 0·0602 Grm. H_2O.

In 100 Theilen:

	Gefunden				Berechnet für $C_{16}H_9SO_3K$
	I.	II.	III.	IV.	
C . . .	—	—	—	59·18	60·00
H . . .	—	—	—	3·14	2·83
K . . .	11·60	11·77	—	—	12·18
S . . .	—	—	10·81	—	10·00

Der Krystallwassergehalt wurde durch folgenden Trockenversuch bestimmt:

0·2875 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 118° 0·0189 Grm. H_2O.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_9SO_3K+H_2O$
H_2O	5·28	5·32

Dass die Hälfte desselben im Exsiccator entweicht, ergibt sich aus folgender Wasserbestimmung:

0·5071 Grm. Substanz, welche längere Zeit im Exsiccator gestanden waren, verloren bei 100° 0·0138 Grm. H_2O.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_9SO_3K + \frac{1}{2}aq$
H_2O	2·72	2·73

Es ist auffallend, dass pyrenmonosulfosaures Kali durch Schwefelsäure nicht zersetzt wird; einen ähnlichen Fall hat auch C. Liebermann[1] beobachtet, nämlich dass anthracenhydrürsulfosaures Natron von überschüssiger Jodwasserstoffsäure nicht angegriffen wird.

Die vom pyrenmonosulfosauren Kali abfiltrirte gelbrothe, beim Stehen nachdunkelnde Flüssigkeit gab beim Ausschütteln mit Äther nur Schmieren; sie zeigte ebenso wie bei den übrigen Kalischmelzen eine schön veilchenblaue und nach dem Übersättigen mit Alkalien eine prachtvolle und intensive grüne Fluorescenz. Nach dem Ausschütteln blieben nur geringe Mengen organischer Substanz in Lösung, welche bei der Aufarbeitung nicht in der zur näheren Untersuchung erforderlichen Reinheit erhalten werden konnten.

Aus den angeführten Versuchsergebnissen folgt das eine mit Sicherheit, dass mindestens ein Theil der Pyrendisulfosäure in der Kalischmelze successive die Sulfogruppen abspaltet; vermuthlich verdanken jedoch das in kleiner Menge entstehende krystallisirte Product und die Schmieren einer nebenherlaufenden Ersetzung der Sulfogruppe durch Hydroxyl ihre Entstehung. Dass auch Condensation stattfindet, könnte man vielleicht mit Rücksicht auf den bei der Zinkstaubdestillation erhaltenen, bei 232° schmelzenden Kohlenwasserstoff annehmen. Dass von Kohlenwasserstoffen sich ableitende Sulfosäuren in der Kalischmelze die Sulfogruppe gegen Wasserstoff vertauschen, ist nur ausnahmsweise beobachtet worden. So erhält man aus Anthracenhydrürsulfosäure nach C. Liebermann[2] in der Kalischmelze Anthracenhydrür und Anthracen; auch die von Barth und Herzig[3] bewerkstelligte glatte Überführung von Mesitylendisulfosäure in

[1] Lieb. Ann. Chem. CCXII, S. 45—46.
[2] Ber. d. deutsch. chem. Ges. XII. 190.
[3] Monatschr. f. Chemie, I., 812 ff.

Oxymesitylensäure (die nach Fittig und Hovgewerff[1] aus Mesitylenmonosulfosäure entsteht) kann in diesem Sinne gedeutet werden.

Die angeführten Beobachtungen zeigen ausserdem, dass Hydroxylderivate beim Pyren ungleich schwieriger als bei anderen Kohlenwasserstoffen zu erhalten sind. Die gleiche Erfahrung hat der eine von uns[2] bereits früher bei Versuchen, das Amidopyren in Pyrenphenol überzuführen, gemacht.

Destillation des pyrendisulfosauren Kali mit Cyankalium oder Blutlaugensalz.

Die Überführung des pyrendisulfosauren Kalis in ein Pyrencyanür wurde durch Destillation mit Cyankalium oder gelbem Blutlaugensalz in verschiedenen Mengenverhältnissen, sowie mit und ohne Zusatz von Eisenpulver versucht. Am vortheilhaftesten ist folgendes Verfahren: pyrendisulfosaures Kali wird in Portionen zu 6 Grm. mit je 8 Grm. entwässertem gelbem Blutlaugensalz und einer entsprechenden Menge reinen Eisenpulvers gut verrieben und aus einer kleinen Retorte aus schwer schmelzbarem Glase destillirt.

Die Temperatur wurde nach und nach bis zur schwachen Rothgluth gesteigert, wobei darauf zu achten ist, dass die Bildung eines gelben Rauches möglichst vermieden wird. Neben dem Ammoniakgeruch war auch ein charakteristischer, dem organischen Reactionsproduct zukommender Geruch bemerkbar. Man erhielt so neben etwas Ammoniumcarbonat ein öliges, sofort erstarrendes Destillat, und zwar 0·8 Grm. für je 6 Grm. sulfosaures Salz.

Das Rohdestillat bildet eine feste rothe compacte Masse. Nur einzelne Theile sind deutlich krystallinisch. Es wurde mit Wasser behandelt, um Ammoniumsalze zu entfernen, dann in Benzol gelöst und von übergerissenen Theilchen des Retortenrückstandes abfiltrirt, endlich aus Benzol, Alkohol und Petroläther umkrystallisirt, wobei wiederholt kleine Mengen von dunkel-

[1] Ann. Chem. Pharm. CL. 333.

[2] G. Goldschmiedt, Monatshefte f. Chemie. II. 586.

gefärbter Schmiere ungelöst blieben und durch Filtriren abgetrennt werden konnten. Anwendung von Thierkohle erwies sich als nicht vortheilhaft. Es zeigte sich, dass mindestens zwei Körper vorhanden waren, von denen einer über 300°, der andere bei 150° schmilzt. Eine annähernde Trennung in Fractionen, die bis zu circa 150° oder höher schmolzen, wurde durch lange fortgesetztes Umkrystallisiren aus Petroläther erzielt. Für die vollständige Reinigung der bei 150° schmelzenden Substanz erwies sich Auflösen in Benzol und fractionirtes Fällen mit Petroläther als sehr vortheilhaft. Man fällt zuerst eine kleine Menge aus, welche ein Gemenge der bei 150° und der über 300° schmelzenden Substanz ist, dann die Hauptmasse und erhält endlich durch Abdestilliren des Gemisches von Benzol und Petroläther noch ein par Fractionen. Dabei ist jedoch zu beachten, dass bei Anwendung von zuviel Benzol überhaupt keine Fällung eintritt, dagegen wenn zu wenig Benzol genommen wurde, alles auf einmal herausfällt. So wurde endlich der grössere Theil der niedrig schmelzenden, leichter löslichen Fractionen auf den Schmelzpunkt 149 bis 150° oder einen wenig davon abweichenden gebracht. Eine beträchtliche Menge jedoch zeigte hartnäckig zwischen 120 bis 140° liegende, meist unscharfe Schmelzpunkte. Das Auftreten pyrenähnlicher Krystalle in denselben, liess es räthlich erscheinen, sie in die Pikrinsäureverbindung zu verwandeln, und in der That gelang es durch wiederholtes Umkrystallisiren aus Alkohol, einerseits über 200° schmelzende schwerlösliche und zwischen 120—150° schmelzende leichtlösliche Fractionen der Pikrinsäureverbindung zu erhalten. Die ersteren schmolzen schliesslich bei 222—223° und gaben nach dem Zerlegen mit Ammoniak einen Körper, der nach einmaligem Umkrystallisiren aus Alkohol bei 147—149° schmolz und alle Eigenschaften des Pyrens zeigte. Die leichtlöslichen Fractionen gaben nach dem Zerlegen mit Ammoniak das bei 149—150° schmelzende Cyanür, waren also ein Gemenge desselben mit seiner Pikrinsäureverbindung und freier Pikrinsäure.

Pyrenmonocyancür. Das bei 149—150° schmelzende Cyanür ist wenn rein, fast weiss, gewöhnlich aber mehr weniger grün. Es ist schon in der Kälte sehr leicht löslich in Chloroform und Benzol, beim Erwärmen sehr leicht in Xylol, leicht in allen

anderen angewendeten Lösungsmitteln (Methyl-, Äthyl- und Amylalkohol, Äther, Schwefelkohlenstoff, Eisessig, Essigäther, Petroläther). Aus Petroläther krystallisirt es sofort beim Erkalten in kleinen Nadelbüscheln, auch aus Methyl- und Amylalkohol krystallisirt es reichlich in feinen Nadeln aus.

Aus Äthylalkohol krystallisirt es beim Erkalten der heissen Lösung ebenfalls in feinen Nadeln, beim Verdunsten auch in undeutlichen Krystallwarzen. Beim Erkalten der heissen Eisessiglösung trat nur eine ganz unbedeutende Abscheidung ein. Beim Verdunsten erhielten wir es aus Äther in Aggregaten theils derber, theils feiner Nadeln aus Chloroform in kugeligen Massen, aus Schwefelkohlenstoff in stengeligen Krusten, aus Eisessig theils in Nadeln, theils in Krystallwarzen (wie aus Alkohol), aus Essigäther in derben, aus Benzol in verfilzten Nadeln. Alle Lösungen fluoresciren grün, die in Alkohol, Äther oder Benzol jedoch intensiver als die in Petroläther. Das Cyanür verbrennt mit russender Flamme.

Die Analysen ergaben, dass ein Monocyanpyren vorliegt.

I. 0·1771 Grm. Substanz gaben 0·5829 Grm. CO_2 und 0·0689 Grm. H_2O.

II. 0·2332 Grm. Substanz gaben beim Barometerstand 748·5 Mm. und der Temperatur 22° 15 Cbcm. Stickstoff.

III. 0·1997 Grm. Substanz gaben beim Barometerstand 733·4 Mm. und der Temperatur 23° 13 Cbcm. Stickstoff.

In 100 Theilen:

	Gefunden			Berechnet für $C_{16}H_9(CN)$
	I.	II.	III.	
C	89·76	—	—	89·87
H	4·32	—	—	3·96
N[1] . . .	—	7·16	7·05	6·17

[1] Wie sich bei nachträglicher Prüfung herausstellte, enthielt das zur Kohlensäureentwicklung verwendete kohlensaure Mangan sehr geringe Spuren von Stickstoff, wodurch die etwas zu hohe Stickstoffzahl erklärt ist.

Monocyanpyrekrinsäure erhält man als ziegelrothe Nadeln vom Schmelzpunkte 133—134°, wenn man alkoholische Lösungen von Monocyanpyren und von mehr als dem doppelten Gewicht Pikrinsäure mischt und abdestillirt, bis die Flüssigkeit für die Siedetemperatur nahezu eine gesättigte Lösung geworden ist. Beim Erkalten krystallisirt dann die Verbindung aus; sie wird abfiltrirt und, ohne zu waschen, schnell zwischen Fliesspapier abgepresst oder besser auf eine poröse Thonplatte gebracht. Sie ist noch viel zersetzlicher als die Monochlorpyrenpikrinsäure. Destillirt man bei der Darstellung die Lösung nicht genug ab, so krystallisirt das unverbundene Cyanür heraus, da der überschüssige Alkohol die Entstehung der Verbindung hindert; sie wird schon von kaltem Alkohol zerlegt. Kaltes Wasser greift sie an, heisses zerlegt sie vollständig; beim Übergiessen mit Ammoniak wird sie sofort weiss.

Wie aus nachfolgenden Analysen hervorgeht, verbinden sich 2 Mol. Monocyanpyren mit 1 Mol. Pikrinsäure.

I. 0·2457 Grm. Substanz gaben 0·0903 Grm. pikrinsaures Ammon.

II. 0·1663 Grm. Substanz gaben 0·1101 Grm. Monocyanpyren vom richtigen Schmelzpunkte.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für $2C_{16}H_9(CN)+C_6H_2(OH)(NO_2)_3$
	I.	II.	
$C_{16}H_9(CN)$	—	66·21	66·47
$C_6H_2(OH)(NO_2)_3$.	34·21	—	33·53

Pyrendicyanür. Die über 300° schmelzende Fraction des Reactionsproductes von pyrendisulfosaurem Kali auf Ferrocyankalium war in untergeordneter Menge vorhanden; sie stellte ein in den gebräuchlichen Lösungsmitteln ziemlich schwer lösliches körniges gelbes Pulver dar, dessen krystallinische Structur unter dem Mikroskope erkennbar war. Die Lösungen fluoresciren sehr stark grün. Eine kleine Quantität wurde einmal aus Benzol in Gestalt glänzender grünlichweisser Blättchen erhalten. Die Substanz scheint sich bei höheren Temperaturen theilweise zu

zersetzen, da die Lösungen in Benzol oder Xylol bei Kochhitze dunkler werden.

Nach einer mit dieser Substanz ausgeführten Stickstoffbestimmung zu schliessen, war dieselbe noch nicht ganz rein; jedesfalls geht aber aus derselben hervor, dass sie der Hauptmenge nach Dicyanpyren ist.

0·2142 Grm. Substanz gaben 19·5 Cbcm. Stickstoff, abgelesen bei der Temperatur 23° und dem Barometerstand 753·3 Mm.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_8(CN)_2$
N	10·15	11·11

Einwirkung von Aetzkali auf die Pyrencyanüre.

Es wurde zuerst versucht, aus dem Monocyanpyren durch anhaltendes Kochen desselben mit concentrirter wässeriger Kalilauge die entsprechende Monocarbonsäure darzustellen; hiebei zeigte es sich, dass durch diese Behandlung keine oder nur unmerkliche Einwirkung erfolgt. Selbst die concentrirteste alkoholische Kalilösung wirkt nur äusserst langsam verseifend, so dass nach tagelangem Kochen am Rückflusskühler die äusserst träge Ammoniakentwicklung nicht beendet ist. Das Cyanür wurde deshalb in einem Silbertiegel mit Ätzkali und wenig Wasser erwärmt; erst nachdem der grösste Theil des Wassers verdampft ist, macht sich Ammoniakgeruch bemerkbar. Die Schmelze, die früher dunkel ist, nimmt schliesslich eine hellere Farbe an. Es wurde bis zum Aufhören der Ammoniakentwicklung erhitzt und die Schmelze in Wasser gelöst. Ein geringer darin unlöslicher Rückstand (aus kleinen Krystallflittern bestehend), wurde von der alkalischen gelben, grün fluorescirenden Lösung durch Filtration getrennt und aus dieser dann durch verdünnte Schwefelsäure die Carbonsäure gefällt. Diese scheidet sich als sehr voluminöser, gelatinöser und opalisirender Niederschlag ab, der abfiltrirt und gewaschen, dann noch durch zweimaliges Lösen in kohlensaurem Natron, Filtriren der Lösung und Fällen mit verdünnter Schwefelsäure gereinigt wurde; der so erhaltene flockige gelblichgrün gefärbte Niederschlag wurde aus Äther-Alkohol

unter Anwendung von Thierkohle umkrystallisirt, wobei er beim Stehen unter dem Exsiccator in Form gelblicher Warzen auskrystallisirt. Der Schmelzpunkt der Säure liegt bei 267°. Sie sublimirt bei sehr vorsichtigem Erwärmen in langen Nadeln vom gleichen Schmelzpunkt; wird aber die Temperatur hiebei nicht möglichst tief gehalten, so zerfällt sie theilweise in Pyren und Kohlensäure. Beim Erhitzen mit Kalk ist dieser Zerfall ein nahezu quantitativ der Theorie entsprechender. Der Kalk bleibt dabei ganz weiss. Die Säure ist nicht ganz unlöslich in Wasser, ziemlich leicht löslich in heissem, absolutem Alkohol und in Äther. Die Analyse führte zur Formel einer Pyrenmonocarbonsäure.

0·2042 Grm. Substanz gaben 0·6197 Grm. CO_2 und 0·0757 Grm. H_2O.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_9(COOH)$
C	82·76	82·93
H	4·12	4·06

Barytsalz. Pyrenmonocarbonsäure wurde in verdünntem Ammoniak gelöst, zur Vertreibung des überschüssigen Ammoniaks eingedampft und die wässerige Lösung des Ammoniaksalzes mit Chlorbariumlösung versetzt. Es scheidet sich sofort ein dem freien Auge schon krystallinisch erscheinendes gelbliches Pulver aus, welches unter dem Mikroskope als aus schönen Prismen bestehend sich erweist.

0·1730 Grm. der bei 140° getrockneten Substanz gaben bei der Verbrennung 0·3992 Grm. CO_2, 0·0438 Grm. H_2O und 0·0530 Grm. $BaCO_3$.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $(C_{17}H_9O_2)_2Ba$
C	64 79	65·07
H	2·81	2·87
Ba	21·31	21·83

0·1849 Grm. des lufttrockenen Salzes verloren bei 100° 0·0119 Grm. Wasser, was einem Krystallwassergehalte von $2^1/_2$ Mol. entspricht.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $(C_{17}H_9O_2)_2Ba + 2^1/_2 aq$
H_2O	6·43	6·69

Kalksalz. Es wurde auf dieselbe Weise dargestellt, wie das Barytsalz und besteht aus mikroskopischen krystallinischen Blättchen.

0·1408 Grm. bei 140° getrockneter Substanz gaben beim Einäschern und Glühen auf constantes Gewicht 0·0144 Grm. Ätzkalk.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $(C_{17}H_9O_2)_2Ca$
Ca	7·78	7·55

0·1450 Grm. lufttrockener Substanz verloren beim Trocknen bei 140° 0·0042 Grm. Wasser, was einem Molekül Krystallwasser entspricht.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $(C_{17}H_9O_2)_2Ca + H_2O$
H_2O . . .	2·89	3·28

Silbersalz, erhalten durch Fällen von Pyrenmonocarbonsaurem Ammon mit Silbernitrat; es ist ein anfangs gelblicher Niederschlag, der sich aber bald schwärzt und bei der Analyse einen zu hohen Silbergehalt lieferte.

Ein Versuch, den Äthyläther der Pyrenmonocarbonsäure durch Sättigen ihrer alkoholischen Lösung mit Salzsäuregas darzustellen, führte zu keinem brauchbaren Reactionsproducte; nach dem Abdestilliren eines Theiles des Alkohols schied sich beim Verdünnen des Rückstandes mit Wasser ein schwarzes, zähes Öl ab, welches, da der Versuch mit sehr geringen Mengen der Säure ausgeführt worden war, bei der Reinigung keinen Erfolg versprach und deshalb nicht weiter untersucht worden ist.

Die in der wässrigen Lösung der Kalischmelze unlösliche Substanz bestand im Wesentlichen aus Pyren, welches von dem

zweiten in untergeordneter Menge entstandenen Körper in Folge der sehr geringen Löslichkeit des letzteren in Alkohol getrennt werden konnte. Das Pyren wurde an Krystallform und Schmelzpunkt erkannt und durch Überführung in die Pikrinsäureverbindung noch ausserdem identificirt. Der in Alkohol kaum lösliche Körper löst sich etwas reichlicher in Benzol und krystallisirt beim Verdunsten in schönen weissen Blättchen. Der Schmelzpunkt dieser Verbindung liegt über 300°. Die vorhandene Substanz war nicht einmal zu einer Analyse ausreichend. Wir machen darauf aufmerksam, dass der eine von uns beim Verseifen des Idrylcyanürs[1] ein analoges Product erhalten hat.

Was das Verhalten des Pyrendicyanürs gegen Ätzkali betrifft, so war es bei der geringen Menge der im Zustand annähernder Reinheit isolirten Substanz nicht möglich, an einem solchen Präparate, dessen Verhalten gegen Alkalien zu studiren. Wir haben dies daher mit den Fractionen gethan, deren Schmelzpunkte zwischen 241° und 300° gelegen waren, die also vorzugsweise aus Dicyanür bestehen mussten und die wir zu diesem Zwecke vereinigt haben. Alkoholische Kalilauge wirkte auch hier äusserst langsam ein; ungefähr 0·3 Grm. eines solchen Gemisches von Mono- und Dicyanür waren nach 112stündigem Kochen noch nicht ganz zersetzt; denn es ging noch immer Ammoniak weg. Beim Erhitzen mit Ätzkali und wenig Wasser tritt Verseifung erst ein, nachdem das Wasser ganz oder nahezu ganz verdampft ist. Wie beim Monocyanür, haben wir auch hier eine kleine Quantität eines über 300° schmelzenden krystallinischen Körpers durch Filtration der alkalischen Lösung der Schmelze abgeschieden. Demselben war auch Pyren beigemengt, welches in bekannter Weise am Schmelzpunkt und den auffallenden Eigenschaften seiner Pikrinsäureverbindung erkannt werden konnte.

Die alkalische Lösung, welcher eine sehr starke grüne Fluorescenz eigenthümlich war, wurde mit Salzsäure gefällt und die stark gefärbte, sehr voluminöse und gelatinös sich abscheidende Säure abfiltrirt. Diese wurde in kohlensaurem Natron gelöst, von einer sehr geringen Menge eines schwarzen unlös-

[1] G. Goldschmiedt, Monatshefte f. Chemie, I, 234.

lichen Rückstandes filtrirt und abermals ausgefällt. Diese Procedur wurde noch zweimal wiederholt. Die Fällung wurde jedesmal etwas heller, doch war der Erfolg dieser Reinigungsversuche kein befriedigender. Auch Kochen der Lösung in Soda oder der alkoholischen, veilchenblau fluorescirenden Lösung der freien Säure mit Thierkohle führte nicht zu einem reinen Präparate. Es wurde deshalb die Säure in Ammoniak gelöst, die Flüssigkeit eingedampft und mit Chlorcalcium gefällt; es fällt ein krystallinischer gelblicher Niederschlag, der sich als Kalksalz der Pyrenmonocarbonsäure erwies. Mit diesem Salze wurde die im Vorstehenden aufgeführte Analyse ausgeführt. Das Filtrat vom Kalksalz wurde mit Salzsäure ausgefällt, gewaschen und getrocknet. Die so erhaltene Säure schmilzt erst über 300°, gleicht aber sonst in ihren äusseren Eigenschaften ganz der Monocarbonsaure. Ihr Kalksalz ist ziemlich leicht löslich, desgleichen das Barytsalz, welches aus den Lösungen nicht wie jenes der Monocarbonsäure durch Fällung erhalten werden kann, sondern erst nach längerem Stehen unter dem Exsiccator zur Ausscheidung kommt. Die unreine Säure, welche wir besassen, gab hiebei ein rothes Barytsalz; unsere Bemühungen, es zu reinigen, waren vergeblich. Doch spricht alle Wahrscheinlichkeit dafür, dass wir es mit der erwarteten Pyrendicarbonsäure zu thun hatten.

Es kann als eine den beschriebenen Derivaten des Pyrens (Sulfosäuren, Cyanüre, Carbonsäuren) gemeinsame Eigenschaft angeführt werden, dass dieselben mit grosser Leichtigkeit die den Wasserstoff substituirenden Seitenketten unter Rücksubstitution von Wasserstoff wieder abspalten. In der Kalischmelze entsteht aus der Bisulfosäure Monosulfosäure und die Reaction geht bei stärkerem Erhitzen sogar bis zur Bildung von Kohlenwasserstoff. Desgleichen entsteht aus der Disulfosäure vorzugsweise Monocyanür und auch hier wird eine geringe Quantität Pyren regenerirt. Auch die Umwandlung von Monocyanür in Monocarbonsäure erfolgt unter nebenhergehender Bildung des zu Grunde liegenden Kohlenwasserstoffes. Es ist dies eine Erscheinung

welche, worauf bereits hingewiesen wurde, nicht ohne Analogie ist; doch scheint es uns, dass nirgends die Abspaltung der Seitenketten von hochmolekularen Kohlenwasserstoffen so vielfach beobachtet worden ist, wie im vorliegenden Falle. Es dürfte dies in Zusammenhang stehen mit der eigenthümlichen, der Untersuchung so grosse Schwierigkeiten entgegenstellenden Constitution des Pyrens. Der eine von uns, der sich schon seit längerer Zeit mit dem Studium der Oxydationsproducte des Pyrens beschäftigt, hofft übrigens, der Lösung dieser so lange offenen Frage auf diesem Wege näher zu kommen.

Über einige Abkömmlinge der Opiansäure.

Von Dr. **Rudolf Wegscheider.**

(Aus dem Universitätslaboratorium des Prof. v. Barth. LXXXIX.)

Matthiessen und Wright[1] haben zuerst beobachtet, dass die Opiansäure beim längeren Erhitzen über ihren Schmelzpunkt eine Veränderung erleidet; sie haben den entstandenen neuen Körper als ein Condensationsproduct bezeichnet und ihm die Formel $C_{40}H_{38}O_{19} = 4C_{10}H_{10}O_5 - H_2O$ beigelegt. Gegen diese Angabe machen sich zweierlei Bedenken geltend. Die Entstehung eines Condensationsproductes aus einer Aldehydsäure könnte zwar nicht überraschen; befremden muss es aber, dass die Reaction so leicht, ohne Anwendung eines wasserentziehenden Mittels und bei einer mit Rücksicht darauf auffallend niedrigen Temperatur vor sich geht. Noch weit unanfechtbarer ist jedoch der Einwand, welcher gegen die von Matthiessen und Wright aufgestellte Formel erhoben werden muss. Der Zusammentritt von vier Molekülen eines Körpers zu einem Molekül eines Condensationsproductes unter Austritt von einem Molekül Wasser ist nicht nur bei den zahlreichen Condensationsprocessen, welche insbesondere in den letzten Jahren eingehend untersucht worden sind, nie beobachtet worden, sondern er ist auch nach den allgemein angenommenen Anschauungen über die Structur chemischer Verbindungen nicht wohl erklärlich. Eine neue Untersuchung des in Rede stehenden Körpers schien daher geboten. Ich habe ihn durch circa sechsstündiges Erhitzen von Opiansäure auf 180—190° dargestellt. Man erhält so ein klebriges, ziemlich sprödes braungelbes Harz, welches beim Übergiessen mit Alkohol weiss wird und sich theilweise löst.

[1] Ann. Chem. Pharm. Suppl. VII., 65.

Das Ganze wurde gröblich zerkleinert und durch Kochen mit viel Alkohol in Lösung gebracht. Beim Erkalten scheidet sich ein Haufwerk von zarten weissen Nadeln ab, welche den gesuchten Körper darstellen. Die gelben, schwach grün fluorescirenden Mutterlaugen wurden, da beim theilweisen Abdestilliren nichts mehr auskrystallisirte, zur Trockne gebracht und der Rückstand mit Wasser gekocht. Hiebei blieb eine kleine Menge ungelöst, welche sich als identisch mit der Krystallisation aus Alkohol erwies, jedoch durch ein rothes Harz verunreinigt war. Die wässerige Lösung enthielt nur unveränderte Opiansäure, welche durch das Aussehen, den Schmelzpunkt (150°), eine Verbrennung und die Überführung in Rufiopin mittelst concentrirter Schwefelsäure identificirt wurde. Unter den angegebenen Umständen waren 40% der angewendeten Opiansäure in den neuen Körper übergeführt worden. Dieser wurde durch Umkrystallisiren aus Alkohol gereinigt, bis der Schmelzpunkt sich nicht mehr änderte. So wurden feine weisse Nädelchen erhalten, die von 223° an erweichten und bei 225—227° schmolzen. Sie sind sehr leicht löslich in Essigäther und kaltem Chloroform, leicht löslich in Eisessig, Benzol, heissem Amylalkohol und Xylol, ziemlich löslich in heissem Methyl- und Äthylalkohol, wenig in Äther, fast nicht in heissem Wasser, nicht in Wasser von gewöhnlicher Temperatur und kalten Alkalien. Aus den Lösungen in Amylalkohol und Xylol krystallisirt die Substanz leicht beim Erkalten.

Die Analyse lieferte Zahlen, welche mit der Formel $C_{30}H_{28}O_{14} = 3C_{10}H_{10}O_5 - H_2O$, die nach Analogie der Condensationen aromatischer Aldehyde zu erwarten war, besser in Einklang stehen als mit Matthiessen's und Wright's Formel $C_{40}H_{38}O_{19}$.

0·1965 Grm. Substanz gaben bei der Verbrennung 0·4234 Grm. CO_2 und 0·0792 Grm. H_2O.

In Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_{30}H_{28}O_{14}$	Berechnet für $C_{40}H_{38}O_{19}$
C	58·76	58·82	58·39
H	4·48	4·58	4·62

Auch eine Analyse, die ich schon früher mit einem zufällig erhaltenen Präparate ausgeführt und bei einer anderen Gelegenheit mitgetheilt habe [1], bestätigt die Formel $C_{30}H_{28}O_{14}$ (Gefunden C 58·69%, H 4·99%). Die Analysenresultate Matthiessen's und Wright's sind in der mir zugänglichen Literatur nicht angeführt.

Um mir über die Constitution des vermeintlichen Condensationsproductes Aufklärung zu verschaffen, habe ich es der Einwirkung des Ätzkali unterworfen. Zwei Gramm wurden mit 10 Grm. KHO und etwas Wasser kurze Zeit im Silbertiegel gekocht. Der Tiegelinhalt ging in eine dünne Gallerte über. Als eine Probe nach dem Ansäuern an Äther eine farblose wasserlösliche Säure abgab, welche mit Eisenchlorid-, Bleizucker- und Silbernitratlösung die Reactionen der Hemipinsäure gab, wurde das Ganze in verdünnte Schwefelsäure eingetragen. Die fast farblose Lösung schied nach dem Erkalten weisse Nadeln ab. Durch einmaliges Umkrystallisiren aus Wasser erhielt man sehr lange, dünne, seidenglänzende, biegsame Nadeln vom Schmelzpunkte 102—103°, welche neutral reagirten, keine Eisenreaction gaben, sich in kaltem Wasser schwer lösten und sublimirbar waren. Die Analyse lieferte noch einen weiteren Beweis für das Vorliegen von Mekonin.

0·1652 Grm. Substanz lieferten bei der Verbrennung 0·3708 Grm. CO_2 und 0·0800 Grm. H_2O.

In Procenten:

	Gefunden	Berechnet für $C_{10}H_{10}O_4$
C	61·22[2]	61·86
H	5·38	5·15

Die vom Mekonin abfiltrirte Lösung wurde siebenmal mit Äther ausgeschüttelt und dadurch vollständig von organischer

[1] Monatshefte f. Chemie. III., 368.

[2] Zu niedrig wahrscheinlich in Folge eines kleinen Gehaltes an Hemipinsäure oder Opiansäure.

Substanz befreit. Der Ätherrückstand wurde aus Wasser umkrystallisirt. Zuerst schied sich etwas Mekonin ab, dann folgte eine in Wasser leicht lösliche, in Prismen krystallisirende Säure, welche Krystallwasser enthielt und nach dem Trocknen bei 166° unter Wasserabspaltung schmolz. Ihre wässerige Lösung gab mit Eisenchloridlösung eine gelbbraune Fällung, mit Bleizucker einen im Überschuss des Reagens löslichen Niederschlag, mit Silbernitratlösung nach dem Kochen eine Abscheidung, die aus einem schweren weissen Krystallpulver bestand.

Die Analyse ergab folgendes Resultat:

0·1887 Grm. bei 100° getrockneter Substanz gaben bei der Verbrennung 0·3724 Grm. CO_2 und 0·0794 Grm. H_2O.

In Procenten:

	Gefunden:	Berechnet für $C_{10}H_{10}O_6$
C	53·82[1]	53·10
H	4·68	4·42

Hiemit ist die Bildung von Hemipinsäure bewiesen.

Die Ausbeute an Mekonin und Hemipinsäure kommt der nach der Gleichung

$$2C_{30}H_{28}O_{14} + 2H_2O = 3C_{10}H_{10}O_4 + 3C_{10}H_{10}O_6.$$

zu erwartenden so nahe, als mit Rücksicht auf die unvermeidlichen Verluste bei der Aufarbeitung erwartet werden kann. Andere Producte waren nicht nachweisbar; die Reaction geht also ganz glatt vor sich. Dieser Verlauf des Processes lässt die Annahme als unhaltbar erscheinen, dass das sogenannte Condensationsproduct aus drei Molekülen Opiansäure in der Weise entstanden sei, dass der Sauerstoff einer Aldehydgruppe mit je einem dem Benzolkern angehörigen Wasserstoffatome der beiden anderen Opiansäuremoleküle als Wasser ausgetreten sei, oder dass in irgend einer andern Weise bei der „Condensation" neue Kohlen-

[1] Offenbar zu hoch in Folge der unvollständigen Abscheidung des Mekonins.

stoffbindungen eingeführt wurden. Berücksichtigt man, dass nach Matthiessen und Foster[1] Opiansäure beim Erhitzen mit ganz concentrirter Kalilauge in Mekonin und Hemipinsäure zerfällt, so wird man vielmehr zu der Annahme gedrängt, dass Ätzkali aus dem Körper $C_{30}H_{28}O_{14}$ Opiansäure regenerirt und diese dann weiter umgewandelt wird. Und in der That lässt sich die Richtigkeit dieser Vermutung leicht experimentell nachweisen.

Kocht man nämlich den Körper mit ziemlich concentrirter Kalilauge, so löst er sich rasch. Hierauf säuert man an. Hat man nicht zu wenig Substanz genommen oder zu sehr verdünnt, so scheidet sich eine Säure ab. Sollte jedoch keine Ausscheidung eintreten, so erhält man die Säure leicht durch Ausschütteln mit Äther. Sie bildet nach dem Umkrystallisiren aus Wasser weisse, lange, dünne, seidenglänzende Nadeln vom Schmelzpunkt 148—149°, ist in kaltem Wasser schwer, in heissem leicht löslich und gibt mit Eisenchlorid- oder Bleizuckerlösung keinerlei Reaction. Erhitzt man sie mit concentrirter Schwefelsäure, so erhält man eine schön rothe Lösung. Kurz, sie gibt sich unzweifelhaft als Opiansäure zu erkennen.

Aus dem vorhergehenden ergibt sich unabweislich die Folgerung, dass in dem durch Erhitzen der Opiansäure entstehenden Körper die Opiansäurereste nicht durch Kohlenstoff-, sondern durch Sauerstoffbindung verknüpft sind. Der Körper ist also ein complicirtes Anhydrid, ähnlich denen, welche aus mehreren aromatischen Oxysäuren (z. B. den drei Oxybenzoësäuren, der Phloretinsäure) dargestellt worden sind. Seine Eigenschaften sind auch denen der bezeichneten Anhydride durchaus ähnlich; er ist daher als Triopianid zu bezeichnen. Zwar sind die meisten Vertreter dieser Körperclasse mit Phosphoroxychlorid dargestellt worden; für die Paraoxybenzoësäure ist es jedoch von Klepl[2] nachgewiesen worden, dass sie auch beim Erhitzen complicirte Anhydride gibt. Allerdings besteht zwischen dem Triopianid und den übrigen complicirten Anhydriden ein wesentlicher Unterschied, wie denn auch die Opiansäure sich von den

[1] Ann. Chem. Pharm. Suppl. I., 332.

[2] Journ. f. prakt. Chemie. N. F. XXV., 52.

angeführten Oxysäuren durch die Aldehydgruppe und den Mangel eines Hydroxyls, in dem der Wasserstoff nicht substituirt wäre, unterscheidet. Die Anhydride der Oxysäuren entstehen nämlich aus n Molekülen Säure durch Austritt von n—1 Molekülen Wasser. Hievon ausgenommen ist nur das Anhydrid der Paraoxybenzoësäure $C_7H_4O_2$, welches, wenn man mit Klepl annimmt, dass sein Molekulargewicht ein Vielfaches der einfachsten Formel ist, aus n Molekülen Säure durch Austritt von n Molekülen Wasser entsteht. Das Triopianid entsteht dagegen aus drei Molekülen Säure durch Austritt von einem (n—2) Molekül Wasser. Seine Formel lässt sich nur unter der Annahme erklären, dass die Aldehydgruppe —COH, die man ja als Anhydrid von $—CH(OH)_2$ auffassen kann, an der Verknüpfung der Molekülе betheiligt ist. Von den zwei möglichen Formeln

$$C_6H_2(COOH)(OCH_3)_2—CH[O—CO—C_6H_2(OCH_3)_2(COH)]_2$$

und

$$C_6H_2(OCH_3)_2(COH)—CO—O—CH(OH)—C_6H_2(OCH_3)_2—$$
$$—CO—O—CO—C_6H_2(OCH_3)_2(COH)$$

stimmt nur die zweite mit den Eigenschaften des Triopianids überein, da dieses nicht den Charakter einer Säure zeigt. Zur Prüfung ihrer Richtigkeit reichte mein Material nicht aus. Das nächstliegende wäre wohl die Darstellung des Acetylproductes. da die Formel ein Hydroxyl enthält; jedoch sind wegen der Aldehydgruppen Nebenreactionen zu erwarten.

Ich habe noch versucht, Substitutionsproducte des Triopianids darzustellen, um dadurch weitere Beweise für die empirische Formel $C_{30}H_{28}O_{14}$ herbeizuschaffen, jedoch erfolglos, da es zu leicht in Opiansäure übergeht.

Einwirkung vom Brom. Triopianid wurde mit Brom verrieben. Man erhielt dadurch ein zähes rothes, beim Reiben knirschendes Harz. Lässt man längere Zeit stehen, so verdunstet das überschüssige Brom grösstentheils. Schliesslich wurden die nunmehr hell braungelben Krusten pulverisirt und zur vollständigen Entfernung des Broms und Bromwasserstoffs anhaltend auf 100° erwärmt. Krystallisirt man dann aus Weingeist oder aus

Toluol um, so zeigt sich, dass das Reactionsproduct aus zwei Körpern besteht, von denen der eine bei ungefähr 200°, der andere nur in untergeordneter Menge vorhandene höher schmilzt; ersterer ist in Weingeist leichter, in Toluol schwerer löslich als letzterer. Nachdem durch Umkrystallisiren aus den genannten Lösungsmitteln eine rohe Trennung der Gemengtheile bewirkt und Spuren dunkler Schmieren entfernt worden waren, wurde das bei 200° schmelzende Hauptproduct der Reaction mit Wasser ausgekocht. Hiebei bleiben kleine Mengen des höher schmelzenden Nebenproductes ungelöst. Das in Lösung gehende wurde wiederholt aus Wasser umkrystallisirt. So erhält man zu Büscheln vereinigte oder baumförmig verzweigte kleine weisse Nadeln vom Schmelzpunkte 204°. Sie sind leicht löslich in Methyl- und Äthylalkohol, Äther, Chloroform, Essigäther, in der Hitze auch in Amylalkohol, Eisessig, Benzol und Xylol, sehr wenig in Schwefelkohlenstoff, fast unlöslich in Petroläther. In heissem Wasser sind sie ziemlich, in kaltem, sehr schwer löslich. Beim Erkalten der heissen Lösungen krystallisirt die Substanz aus Xylol sofort in Nadelbüscheln, langsam aus Amylalkohol, Eisessig oder Benzol, und zwar aus Amylalkohol in nur mit der Lupe deutlich erkennbaren kurzen Prismen, aus Benzol und schöner aus Eisessig in zum Theil sternförmig angeordneten Prismen. Beim Verdunsten erhält man sie aus Alkohol in Nadeln, aus Äther in Krystallwarzen, aus Essigäther theils in Nadeln, theils als undeutliches Krystallpulver. Sie ist eine entschiedene Säure. Mit Ammoniak, Baryt, Silber-, Kupfer-, Quecksilber-, Bleioxyd und Nickeloxydul bildet sie wasserlösliche Salze. Ihre wässerigen Lösungen geben mit Eisenchlorid oder Bleizucker keinerlei Reaction. Sie krystallisirt wasserfrei.

Die Analyse führte zur Formel einer Bromopiansäure.

I. 0·2515 Grm. Substanz gaben 0·3813 Grm. CO_2 und 0·0712 Grm. H_2O.

II. 0·3291 Grm. Substanz gaben nach dem Glühen mit Kalk 0·2143 Grm. AgBr.

III. 0·1083 Grm. Substanz gaben nach dem Glühen mit Kalk 0·0693 Grm. AgBr.

In Procenten:

	Gefunden			Berechnet für $C_{10}H_9BrO_5$
	I.	II.	III.	
C	41·35	—	—	41·52
H	3·15	—	—	3·11
Br	—	27·71	27·23	27·68

Eine Bromopiansäure, welche mit der von mir erhaltenen jedenfalls identisch ist, wurde bereits von Prinz[1] durch Einwirkung von Bromwasser auf Opiansäure dargestellt, aber nicht rein erhalten.

Das Barytsalz wurde durch Kochen der wässerigen Lösung reiner Bromopiansäure mit Baryumcarbonat, Filtriren und Verdampfen der Lösung im Vacuum über Schwefelsäure in der Form krystallinischer Krusten erhalten, welche in Wasser sehr leicht löslich sind. Sie enthalten noch ein Molekül Krystallwasser, welches bei 100° entweicht. Über 130° beginnt Zersetzung; dabei verbreitet sich ein angenehmer gewürzhafter Geruch.

0·4105 Grm. Substanz verloren bei 100° 0·0088 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $(C_{10}H_8BrO_5)_2Ba+H_2O$
H_2O	2.14%	2·46%

0·4017 Grm. wasserfreie Substanz gaben 0·1348 Grm. $BaSO_4$.

	Gefunden	Berechnet für $(C_{10}H_8BrO_5)_2Ba$
Ba	19·74%	19·21%

Das bereits erwähnte, bei der Einwirkung von Brom auf Triopianid entstehende Nebenproduct schmilzt nach dem Umkrystallisiren aus Xylol bei 250—251°, ist sehr leicht löslich in Chloroform, leicht in Essigäther und Benzol, in der Hitze auch in Xylol, Eisessig und Amylalkohol, ziemlich schwer im Äther und Schwefelkohlenstoff, schwer in Methyl- und Äthylalkohol, fast unlöslich in Petroläther und siedendem Wasser, unlöslich in kaltem. In kochender Kalilauge ist es löslich; säuert man nach

[1] Journ. f. prakt. Chemie. N. F. XXIV. 367—368.

längerem Kochen an, so erhält man Bromopiansäure. Durch Wasser wird es selbst im zugeschmolzenen Rohr bei 100° nicht zerlegt. Es liegt daher wahrscheinlich ein Bromsubstitutionsproduct des Triopianids vor. Zur Analyse war das erhaltene nicht ausreichend. Ein Versuch, den Körper durch Erhitzen im Ölbade auf 220—225° aus Bromopiansäure darzustellen, ergab dass diese dabei grossentheils unter Bildung eines krystallisirenden Destillats zersetzt wird. Daneben bildet sich allerdings auch eine kleine Menge der gesuchten Substanz.

Einwirkung von Salpetersäure. Triopianid löst sich in kalter concentrirter Salpetersäure ohne Veränderung und fällt beim Verdünnen mit Wasser wieder heraus. Beim Eintragen von Triopianid in ein lauwarmes Gemisch gleicher Theile concentrirter Salpetersäure und Schwefelsäure erhielt ich dagegen ein, ohne weitere Reinigung bei 248—249° schmelzendes Nitroproduct, welches ähnliche Löslichkeitsverhältnisse zeigte wie die Muttersubstanz und daher wahrscheinlich aus ihr durch blosse Nitrirung entstanden war. Als ich jedoch den Versuch im Grossen wiederholte, ging die Reaction weiter und beim Eingiessen in Wasser schied sich nur wenig aus. Auch war das Herausgefallene verschieden von dem bei 248—249° schmelzenden Körper; es verhielt sich wie unreine Nitroopiansäure.

Bei der Einwirkung von verdünnter Sazsäure auf Opiansäure entstehen, wie ich früher mitgetheilt habe[1], Isovanillin und Protocatechualdehyd, aber keine Methylnoropiansäure; es findet also in erster Linie Kohlensäureabspaltung statt. Es schien nun der Mühe werth, die Hemipinsäure der gleichen Behandlung zu unterwerfen, da die Möglichkeit nicht ausgeschlossen war, dass wenigstens bei einem Theile der Substanz das in der Protocatechusäurestellung zu den Methoxylen befindliche Carboxyl abgespalten werde und so Derivate der (1, 2, 3) Dioxybenzoësäure entstehen könnten. Der Versuch hat jedoch nicht das gewünschte Resultat ergeben. Es wurde ebenso wie bei der

[1] Monatshefte f. Chemie. III, 789 ff.

Darstellung des Isovanillins verfahren, was Mengenverhältnisse und Temperatur betrifft. In der Röhre befanden sich nach dem Erhitzen lange flache Nadeln, die sich in allen Eigenschaften als Isovanillinsäure erwiesen. Da ich es in der Literatur nicht angegeben finde, will ich erwähnen, dass die Isovanillinsäure fast unzersetzt sublimirt. Das Filtrat davon enthält Protokatechusäure; Methylnorhemipinsäure war nicht isolirbar, während sie bei Einwirkung concentrirter Salzsäure auf Hemipinsäure sehr leicht entsteht. Verdünnte Salzsäure wirkt also auf Opiansäure und Hemipinsäure in aller Strenge analog ein; Methyl wird nur gleichzeitig mit Kohlensäure abgespalten. Aus Opiansäure entstehen Aldehyde, aus Hemipinsäure die entsprechenden Säuren.

Seite

Mach, Versuche und Bemerkungen über das Blitzableitersystem des Herrn Melsens. (Mit 3 Holzschnitten.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 632

Pfaundler, Über die Mantelringmaschine von Kravogl und deren Verhältniss zur Maschine von Pacinotti-Gramme nebst Vorschlägen zur Construction verbesserter dynamo-elektrischer Maschinen. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 640

Benedikt, Über Chlor- und Bromoxylderivate des Benzols. III. Abhandlung. (Mit 1 Holzschnitt.) 652

Goldschmiedt u. *Wegscheider*, Über Derivate des Pyrens . . 666

Wegscheider, Über einige Abkömmlinge der Opiansäure . . 691

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 50 kr. = 5 RMk.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden drei gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVII. BAND. IV. HEFT.

Jahrgang 1883. — April.

(Mit 1 Tafel und 13 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

1883.

INHALT

des 4. Heftes April 1883 des LXXXVII. Bandes, II. Abth. der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

VIII. Sitzung vom 5. April 1883: Übersicht 703

Lieben u. *Haitinger*, Untersuchungen über Chelidonsäure . . 707

IX. Sitzung vom 12. April 1883: Übersicht 710

Janovsky, Über Nitro- und Amidoderivate des Azobenzols. (Mit 6 Holzschnitten.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] . . . 714

Lippmann u. *Fleissner*, Zur Kenntniss der Azyline. (Mit 6 Holzschnitten.) 722

Goldschmiedt, Über das Pyrenchinon 747

Schwarz, Astronomische Untersuchung über eine von Archilochus und eine in einer assyrischen Inschrift erwähnte Sonnenfinsterniss. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 35 kr. = 70 Pfg.] 763

Pernter, Psychrometerstudie. [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] . . . 777

Preston, Eine dynamische Erklärung der Gravitation. [Preis: 12 kr. = 24 Pfg.] 795

Preston, Über die Möglichkeit, vergangene Wechsel im Universum durch die Wirkung der jetzt thätigen Naturgesetze — auch in Übereinstimmung mit der Existenz eines Wärmegleichgewichtes in vergrössertem Massstabe — zu erklären. [Preis: 18 kr. = 36 Pfg.] 806

X. Sitzung vom 19. April 1883: Übersicht 824

Lieben u. *Haitinger*, Untersuchungen über Chelidonsäure . . 827

Bauer, Über eine neue Säure der Reihe $C_nH_{2n-4}O_6$ 829

— Zur Kenntniss der Pimelinsäure 833

Weyr, Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung. [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] 837

Liznar, Zur Theorie des Lamont'schen Variations-Apparates für Horizontal-Intensität. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 10 kr. = 20 Pfg.] 873

Preis des ganzen Heftes: 1 fl. 40 kr. = 2 RMk. 80 Pfg.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVII. Band. IV. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

VIII. SITZUNG VOM 5. APRIL 1883.

Das Präsidium des k. k. technischen und administrativen Militär-Comités übermittelt die von diesem Comité graphisch dargestellten Ergebnisse von hydrometrischen Beobachtungen unter dem Titel: „Die Wasserhöhe der Donau bei Wien und Budapest und die Höhe des Grundwassers in vier im Weichbilde der Stadt Wien und in drei im Weichbilde der Stadt Budapest befindlichen Beobachtungsstationen in den Jahren 1876 bis 1882".

Der k. schwed.-norweg. Lieutenant Herr H. Nysom in Christiania übermittelt die von ihm bearbeitete hydrographische Karte des südlichen Norwegens.

Der Prälat des Stiftes Kremsmünster dankt für die der Sternwarte dieses Stiftes überlassenen akademischen Publicationen.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. E. Mach in Prag übersendet eine vorläufige Mittheilung über Versuche mit einer Influenzmaschine, an welcher die zur Elektricitätsentwicklung aufgewendete Arbeit direct bestimmt werden konnte, ohne auf die Reibungsarbeit Rücksicht zu nehmen.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. A. Weiss übersendet als XI. Beitrag seiner Arbeiten des pflanzenphysiologischen Institutes der deutschen Universität in Prag eine Abhandlung unter dem Titel: „Beiträge zur Kenntniss der absoluten Festigkeit von Pflanzengeweben".

Herr Prof. J. V. Janovsky an der höheren Staatsgewerbeschule in Reichenberg übersendet eine Abhandlung: „Über Nitro- und Amidoderivate des Azobenzols."

Herr Levin Kuglmayr, Lehrer an der Baugewerkschule in Wien, übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Beitrag zur Contourbestimmung der Conoide."

Der Secretär legt noch folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Die Kraft der Überzeugung. Ein mathematisch-philosophischer Versuch“, von Herrn W. Šimerka, Pfarrer in Jenschowitz (Böhmen).
2. „Beitrag zur Construction autographischer Telegraphen-Apparate (Copir-Telegraphen) nach dem Principe des Casella“, von Herrn E. Babinsky in Ellwangen.

Das w. M. Herr Prof. L. Schmarda überreicht eine Abhandlung: „Beiträge zur Anatomie der Stylommatophoren,“ von Herrn Alfred Nalepa, Assistent an der zoologischen Lehrkanzel der Wiener Universität.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine vorläufige Mittheilung: „Untersuchungen über Chelidonsäure,“ die er in Gemeinschaft mit Herrn L. Haitinger ausgeführt hat.

Herr Prof. Dr. Ed. Lippmann in Wien überreicht eine in Gemeinschaft mit Herrn F. Fleissner ausgeführte Arbeit: „Zur Kenntniss der Azyline“.

Herr Bernhard Schwarz, stud. phil. in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Astronomische Untersuchung über eine von Archilochus und eine in einer assyrischen Inschrift erwähnte Sonnenfinsterniss.“

Herr Dr. J. M. Pernter in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Psychrometerstudie“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique: Bulletin. 52e année, 3e série, tome 5. Nr. 1. Bruxelles, 1883; 8°. — Tables générales du Recueil des Bulletins. 2e série. Tomes XXI à L. (1867 à 1880.) Bruxelles, 1883; 8°.

— de Médecine: Bulletin. 47e année, 2e série. Tome XII, Nrs. 9—12. Paris, 1883; 8°.

Accademia, R. dei Lincei: Atti. Anno CCLXXX. 1882—83. Serie terza. Transunti. Vol. VII. Fascicolo 4°. Roma, 1883; 4°.

Akademie, kaiserliche, Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XIX. Nr. 3—4. Halle a. S. 1883; 4°.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 3ᵉ année, 6ᵉ série. 1ᵉʳ Cahier. Paris, 1883; 8°. — Personnel. Paris 1883; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXI. Jahrgang. Nr. 8, 9 u. 10. Wien, 1883; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VII, Nr. 11, 16—23. Cöthen, 1883; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVI. Nrs. 9—12. Paris, 1883; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVI. Jahrgang Nr. 4. Berlin, 1883; 8°.

— österreichische für Meteorologie. Zeitschrift. XVIII. Band. März-Heft 1883. Wien, 1883; 8°.

— österreichische zur Förderung der chemischen Industrie: Berichte. V. Jahrgang 1883, Nr. 1. Prag, 1883; 4°.

— physikalisch-chemische: Bulletin. Tome XV. Nr. 2. St. Petersburg, 1883; 8°.

Halle, Universität: Akademische Druckschriften pro 1882. — 115 Stücke 4° u. 8°.

Istituto di Bologna: Memorie della Accademia delle scienze. Serie IV. Tomo II. Bologna, 1880, 4°.

— — Accademia delle scienze della sua origine a tutto il 1880. Bologna, 1881; 8°.

Johns Hopkins University Circulars. Vol. II. Nr. 21. Baltimore, February, 1883; 4°.

Lund, Universität: Acta. Tom. XV, XVI et XVII. 1878—1881. Lund, 1878—79, 80 u. 81. 4°.

— — Festskrift till kgl. Universitetet i Köpenhamn vid dess fyrahundra års Jubileum i Juni 1879 från kgl. Carolinska Universitet i Lund. Lund, 1879; 4°.

— — Universitets Bibliothek: Accessions-Katalog 1879—81. Lund; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes geographischer Anstalt von Dr. A. Petermann. XXIX. Bd., 1883. IV. Gotha, 1883; 4°. — Ergänzungsheft Nr. 71. Gotha, 1883; 4°.

Musée royal d'Histoire naturelle de Belgique: Annales. Tome X. Les Arachnides de Belgique par Léon Becker. Bruxelles, 1882; folio.

Museum of comparative Zoology at Harvard College: Memoirs. Vol. VII. Nr. 2. Part II. Cambridge, 1882; 4°.

— — Annual Report for 1881—82. Cambridge, 1882; 8°.

— — Bulletin. Vol. X. Nrs. 2—4. Cambridge, 1882; 8°.

— — A Plan for securing Observations of the Variable Stars by Edward C. Pickering. Cambridge, 1882; 8°. — Statement of Work done at the Harvard College Observatory during the years 1877—1882; by Edward C. Pickering. Cambridge, 1882; 8°.

Nature: Vol. XXVII. Nrs. 697—700. London, 1883; 8°.

Naturforscher-Verein zu Riga: Correspondenzblatt. XXV Riga, 1882; 8°.

Poehl, Alexander Dr.: Über das Vorkommen und die Bildung des Peptons ausserhalb des Verdauungsapparates und über die Rückverwandlung des Peptons in Eiweiss. St. Petersburg, 1882; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1882. XXXII. Band, Nr. 4. October, November, December. Wien, 1882; 8°.

— — Verhandlungen. Nr. 2—5. Wien, 1883; 8°.

Società degli Spettroscopisti italiani. Memorie. Vol. XI. Disp. 12ª. Roma, 1883; 4°. Vol. XII. Disp. 1ª. Roma, 1883; 4°.

— italiana di Antropologia, Etnologia e Psicologia comparata. Vol. XII. Fascicolo 3ª. Firenze, 1882; 8°.

— di scienze naturali ed economiche di Palermo; Giornale. Vol. XV. Anno XV (1880—1882). Palermo, 1882; 4°.

Verein, naturforschender in Brünn: Verhandlungen. XX. Band 1881. Brünn, 1882; 8°.

— — Bericht der meteorologischen Commission über die Ergebnisse im Jahre 1881. Brünn, 1882; 8°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang, Nr. 10 bis 13. Wien, 1883; 4°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. III. Jahrgang 1883. 2. Heft. Februar. Berlin, 1883; 8°.

Untersuchungen über Chelidonsäure.

(Vorläufige Mittheilung.)

Von Ad. Lieben und L. Haitinger.

Die im Jahre 1838 von Probst entdeckte Chelidonsäure ist ihrer chemischen Constitution nach auch heute noch so gut wie unbekannt, und es ist bisher nicht gelungen, Beziehungen zwischen ihr und anderen bekannten Körpern festzustellen.

Mit einer umfassenden Untersuchung über diese Säure beschäftigt, deren vollständige Durchführung noch längere Zeit in Anspruch nehmen dürfte, wollen wir einige der bisher von uns erhaltenen Resultate vorläufig mittheilen, um uns ungestörtes Fortarbeiten auf diesem Gebiete zu sichern.

Lerch, der 1846 zuerst die Zusammensetzung der Chelidonsäure ermittelt und ihre Salze ausführlich untersucht hat, betrachtet sie als dreibasische Säure. Lietzenmayer dagegen hält es für wahrscheinlicher, dass sie eine zweibasische Säure sei und fasst die metallreicheren Salze, deren Darstellung ihm gelungen ist, als basische Verbindungen auf.

Unsere Versuche haben uns zu der Meinung geführt, dass die neutralen dreibasischen Salze Lerch's, oder die basischen Salze Lietzenmayer's überhaupt gar nicht mehr der Chelidonsäure, sondern einer neuen Säure entsprechen, die unter Aufnahme der Elemente des Wassers aus der Chelidonsäure hervorgeht und die besondere, von denen der Chelidonsäure verschiedene Reactionen zeigt. Wenn man nämlich Chelidonsäure oder ihre Salze mit Alkalien oder Erdalkalien bis zu stark basischer Reaction versetzt, wobei Gelbfärbung eintritt, und dann mit Essigsäure ansäuert, so gibt die sauere gelbe Lösung mit Blei- und Silbersalzen gelbe

Niederschläge, während Chelidonsäure weisse Niederschläge liefert, — und mit Eisenchlorid eine gelbrothe Färbung (Chelidonsäure gibt nur nach sehr langem Stehen eine braune Färbung). Das aus der essigsauren Lösung gefällte gelbe Bleisalz entspricht der Formel $Pb_2C_7H_2O_7 + H_2O$, aus der man auf die Existenz einer vierbasischen Säure (die jedoch wahrscheinlich nur zwei Carboxylgruppen enthält), aus der zweibasischen Chelidonsäure unter dem Einfluss kräftiger Basen in der Kälte entstanden, schliessen kann. Wenn man eine alkalische Chelidonsäurelösung mit Schwefelsäure übersättigt und dann mit Äther ausschüttelt, so kann man die freie Säure selbst erhalten, welche noch die oben angegebenen, von der Chelidonsäure verschiedenen Reactionen zeigt, sich aber ausnehmend leicht wieder in Chelidonsäure zurückverwandelt. Was diese letztere anlangt, so halten wir sie für zweibasisch.

Folgender Versuch ist geeignet die Constitution der Chelidonsäure wesentlich aufzuklären.

Wenn man freie Alkalien oder alkalische Erden statt in der Kälte vielmehr bei Siedhitze auf Chelidonsäure wirken lässt, so entsteht nicht nur Oxalsäure, wie bereits bekannt, sondern ausserdem auch Aceton[1], das wir mit vollständiger Sicherheit nachgewiesen haben.

Durch ein sorgfältiges qualitatives und quantitatives Studium dieser Reaction haben wir gefunden, dass gar kein anderes Product dabei gebildet wird, und dass die Chelidonsäure beim Kochen mit Kalk ganz glatt im Sinne der Gleichung zerfällt:

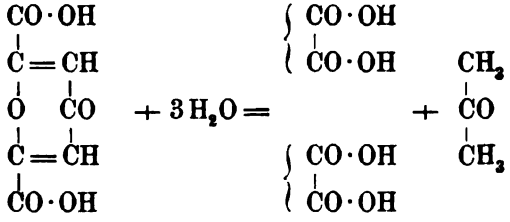
$$C_7H_4O_6 + 3H_2O = 2H_2C_2O_4 + C_3H_6O.$$

Daraus lässt sich schliessen, dass im Molecül der Chelidonsäure 3 C so gestellt sind, dass sie, wenn die Elemente des Wassers aufgenommen werden, sich leicht als Aceton abspalten, während die 2 C, die zunächst an die zwei Carboxyle gebunden sind, fähig sein müssen, bei derselben Reaction Carboxylgruppen zu bilden.

---

[1] Nach einer mündlichen Mittheilung von Lerch hat auch er bei der Zersetzung der Chelidonsäure durch kochende Alkalien stets einen eigenthümlichen Geruch beobachtet, der einigermassen an Aceton erinnerte.

Wir verschieben die Discussion und theoretische Verwerthung unserer Resultate auf einen späteren Zeitpunkt und stellen einstweilen nur behufs verständlicherer Interpretation der obigen Gleichung eine (noch unerwiesene) rationelle Formel für Chelidonsäure auf:



Mit Zink und Essigsäure behandelt, liefert die Chelidonsäure eine krystallinische Säure als Reductionsproduct, die bei circa 140° schmilzt und sich durch ihr gesammtes Verhalten wesentlich von der Chelidonsäure unterscheidet. Die Reduction ist von einer, übrigens nur geringfügigen, Kohlensäure-Entwicklung begleitet.

Ein interessantes Derivat der Chelidonsäure ist die von Lietzenmayer beschriebene, durch Einwirkung von Ammoniak entstehende Verbindung $C_7H_7NO_6$. Nach unseren Versuchen halten wir es für wahrscheinlich, dass darin der Stickstoff weder als Amido-, noch als Imidogruppe, sondern vielmehr mit allen drei Valenzen an Kohlenstoffatome gebunden enthalten ist. Durch Kochen mit Alkalien oder Erhitzen mit Wasser auf 150° wird die Ammonchelidonsäure, wie wir sie vorläufig nennen wollen, nicht oder kaum angegriffen; durch Erhitzen mit Wasser auf 195° wird nicht etwa Ammoniak, wohl aber Kohlensäure abgespalten und ein vollständig neutrales, in Wasser sehr leicht lösliches Zersetzungsproduct erhalten.

Behandelt man die zweibasische Ammonchelidonsäure mit Brom bei Gegenwart von Wasser, so wird unter reichlicher Bildung von H Br eine 2 Br enthaltende dreibasische krystallinische Säure gewonnen, die namentlich durch eine Purpurfärbung, die sie mit Eisenchlorid gibt, ausgezeichnet ist; sie enthält wahrscheinlich nur zwei Carboxyle.

IX. SITZUNG VOM 12. APRIL 1883.

In Verhinderung des Vicepräsidenten führt Herr Dr. L. J. Fitzinger als Alterspräsident den Vorsitz.

Herr Dr. J. Horbaczewsky, Assistent an der Lehrkanzel für angewandte medicinische Chemie der Wiener Universität, dankt für die ihm zur Fortsetzung seiner Untersuchungen über künstliche Darstellung der Harnsäure von der Akademie gewährte Subvention.

Das c. M. Herr Prof. E. Ludwig übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. M. Abeles, welche die Ergebnisse einer in seinem Laboratorium ausgeführten Untersuchung: „Über Secretion aus der überlebenden durchbluteten Niere" enthält.

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Axenbestimmung der Contouren von Flächen zweiter Ordnung", von Herrn Prof. Heinr. Drasch an der Oberrealschule in Steyr.
2. „Ein Beitrag zur Kinematik der Geraden", von Herrn Miloslav Pelišek, Assistent an der deutschen technischen Hochschule in Prag.
3. „Über die drei algebraischen Flächen umschriebene Regelfläche", von Herrn Wilh. Wirtinger in St. Pölten.
4. „Zur Reduction hyperelliptischer Integrale zweiter Ordnung auf elliptische Integrale", von Herrn Dr. E. Grünfeld in Wien.
5. „Über ein einfaches graphisches Verfahren zur Auflösung der cubischen und biquadratischen Gleichungen," von Herrn Eduard Wenzel, w. Lehrer am Staats-Gymnasium in Reichenberg.

Das w. M. Herr Hofrath v. Hochstetter überreicht eine Abhandlung des Herrn Dr. E. Hussak, Privatdocenten an der Universität in Graz: „Über den Cordierit in vulcanischen Auswürflingen."

Der Secretär überreicht eine von den Herren Professoren Dr. Sigm. v. Wroblewski und Dr. K. Olszewski an der Universität zu Krakau eingesendete Mittheilung: „Über die Verflüssigung des Sauerstoffes und die Erstarrung des Schwefelkohlenstoffes und Alkohols."

Das w. M. Herr Hofrath Dr. Langer überreicht eine Abhandlung von Herrn Prof. Dr. E. Zuckerkandl in Graz: „Über die Verbindungen zwischen den arteriellen Gefässen der menschlichen Lunge."

Das w. M. Herr Prof. v. Barth überreicht eine in seinem Laboratorium von Herrn Dr. Guido Goldschmiedt ausgeführte Arbeit: „Über das Pyrenchinon." I. Abhandlung.

Das wirkliche Mitglied Herr Regierungsrath Professor v. Oppolzer überreicht „Tafeln zur Berechnung der Mondesfinsternisse".

Herr Adolf Ameseder, Assistent an der technischen Hochschule in Wien, überreicht eine Abhandlung: „Über Configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung erster Species."

Herr J. Liznar, Adjunct der Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus, überreicht eine Notiz: „Zur Theorie des Lamont'schen Variations-Apparates für Horizontal-Intensität".

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Academia, real de ciencias medicas, fisicas y naturales de la Habana: Tomo XIX. Entrega 223 u. 224. Febrero y Marzo 15. Habana, 1883; 8°.

Accademia, R. delle scienze di Torino: Atti. Vol. XVIII, Disp 1ª (Novembre—Dicembre 1882) Torino, 1882; 8°.

Akademija jugoslavenska znanosti i umjetnosti: Rad. Knjiga LXI, svezak II. U Zagrebu, 1882; 8°. — Knjiga LXIV, IIª. U Zagrebu, 1882; 8°. — Izvješće o zagrebačkom potresu 9. studenoga 1880; sastavio Josip Torbar. U Zagrebu, 1882; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3e période. Tome IX. Nr. 2. — Fevrier 1883. Genève, Lausanne, Paris, 1883; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVI. Nr. 13. Paris, 1883; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. IV. Jahrgang 1883. Heft III. März. Berlin, 1883; 4°.

Faculté des lettres de Bordeaux: Annales. IVe anné Nr. 6. Bordeaux, Londres, Berlin, Paris, Toulouse; 1882; 8°.

Gesellschaft, deutsche geologische: Zeitschrift XXXIV. Band, 4. Heft. October bis December 1882. Berlin, 1882; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXVI. Nr. 2. Wien, 1883; 8°.

— naturforschende zu Leipzig: Sitzungsberichte. IX. Jahrgang 1882. Leipzig, 1883; 8°.

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift. XVIII. Band. April-Heft 1883. Wien; 8°.

— k. k. zoologisch-botanische in Wien: Verhandlungen. Jahrgang 1882. XXXII. Band. Wien, 1883; 8°.

Hydrographisches Amt, k. k. Marine-Bibliothek: Mittheilungen aus dem Gebiete des Seewesens, Vol. XI. Nr. 1 u. 2. Jahrgang 1883. Pola, 1883; 8°.

Journal, the American of science. Vol. XXV. Nr. 147. March, 1883. New Haven; 8°.

— of Nervous and mental disease. N. S. Vol. VIII. Nr. 1. January, 1883. New York; 8°,

— für praktische Chemie. N. F. Band 27. 4. u. 5. Heft. Leipzig 1883; 8°.

Kriegsmarine. k. k.: Kundmachungen für Seefahrer und hydrographische Nachrichten. Jahrgang 1883. Heft 1 u. 2. Pola, 1883; 8°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 27e année, 3e série — Tome XIII. 496e livraison — Avril 1883. Paris; 4°.

Moore, Frederic, F. Z. S., A. L. S., etc: Descriptions of new indian lepidopterous insects. Part II. Calcutta, 1882; gr. 4°.

— — The Lepidoptera of Ceylon. Part VI. London, 1882; 4°.

Nationalmuseum, germanisches: 28. Jahresbericht. Nürnberg, Januar 1882; 4° — Anzeiger für Kunde der deutschen Vorzeit. Nr. 1—12. Nürnberg, 1882; 4°.

Observatory, the astronomical of Harvard College: Annals. Vol. XIII. Part. I. Cambridge, 1882; gr. 4°.

— the: A Monthly Review of Astronomy. Nr. 72. London, 1883; 8°.

Osservatorio del real Collegio Carlo Alberto in Moncalieri: Ser. II. Vol. II. Nos. 7, 9 u. 10. Torino, 1882; gr. 4°.

— Reale di Brera in Milano: Publicazioni. No. XXII. Milano, 1882; gr. 4°.

Société des Ingénieurs civils: Mémoires et Compte rendu des Travaux: 36e année, 4e série, 12e cahier. Paris, 1882; 8°.

Society, the Asiatic of Bengal: Journal. Vol. LI. Part II, Nr. IV. 1882. Calcutta, 1883; 8°.

— the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLIII. No. 4. February 1883. London; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and Monthly Record of Geography. Vol. V. Nr. 3 u. 4. March and April 1883. London; 8°.

— the Zoological of London: Proceedings of the scientific meetings for the year 1882. Part III. London, 1882; 8°.

— — Transactions. Vol. XI — Part 7. London, 1882; 4°.

Strassburg, kaiserliche Universitäts- und Landesbibliothek: Akademische Schriften im Jahre 1881/82. 84 Stücke 4° u. 8°.

Vereeniging, Nederlandsche dierkundige: Tijdschrift. Supplement Deel I. Aflevering I. Leiden, 1883; 8°.

Verein, militär-wissenschaftlicher in Wien: Organ. XXVI. Band, 2. Heft. 1883. Wien; 8°.

— Offenbacher für Naturkunde: 22. und 23. Bericht in den Vereinsjahren vom 29. April 1880 bis 4. Mai 1882. Offenbach a. M., 1883; 8°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter IV. Jahrgang Nr. 6 und Ausserordentliche Beilage Nr. IV. Wien, 1883; 8°.

Zeitschrift für physiologische Chemie. VII. Band, 3. Heft. Strassburg, 1883; 8°.

Über Nitro- und Amidoderivate des Azobenzols.

Von Prof. **J. V. Janovsky.**

(Mit 6 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. April 1883.)

Durch directe Nitrirung von Azobenzolparasulfosäure entstehen als Hauptproducte zwei Mononitrosäuren, von denen ich die leichter lösliche (β) Säure in der letzten Arbeit[1] beschrieb und deren Stellung der Formel:

$$\underset{(3)}{C_6H_4(NO_2)}.\underset{(1)}{N}=\underset{(1)}{N}\underset{(4)}{C_6H_4}.SO_3H$$

entspricht, da sie beim völligen Abbau Metaphenylendiamin (Schmelzpunkt 63° C) (α-Phenylendiamin) liefert.

Die zweite, schwerer lösliche Säure, welche neben einer in Wasser fast unlöslichen harzigen Substanz beim Umkrystallisiren zurückbleibt, konnte wegen Mangel an Substanz nicht eingehend untersucht werden. Es ist mir nun gelungen, eine Methode zu finden, bei welcher man an beiden Säuren eine fast gleiche Ausbeute erhält. Die schwer lösliche Säure scheint während des Abdampfens der Salpetersäure sich in Metasäure zu verwandeln; um also beide Säuren zu erhalten, müssen beide nach der Einwirkung getrennt werden. Auch entsteht hauptsächlich Parasäure wenn die Menge der Salpetersäure nicht viel grösser ist als pro 1 Theil Azobenzolparasulfosäure, 6 Theile Salpetersäure von 1·40 V. G. Die beste Ausbeute erhält man auf folgende Art:

100 Grm. Azobenzolparasulfosäure werden in 500 bis 550 Grm. Salpetersäure von 1·40 V. G. eingetragen, die Masse

---

[1] Siehe Monatsheft f. Chem. 1882 p. 238 u. ff.

bis zur völligen Lösung auf 115° C erwärmt, wobei eine heftige Reaction eintritt, und nachher erkalten gelassen, ohne zuvor zu verdünnen. Nach dem Erkalten auf 8—10° C erstarrt die Lösung zu einem Krystallbrei, der aus dünnen langen glänzenden Nadeln besteht; dieselben werden abgenutscht und die Mutterlauge nochmals mehrere Stunden stehen gelassen, wobei noch eine Partie der schwer löslichen Nadeln sich abscheidet. Durch Umkrystallisiren des am Platinfilter zurückgebliebenen Rückstandes erhält man die Nitrosäure gleich rein in Krystallen, welche nach dem Trocknen wie Azobenzolparasulfosäure aussehen. Die Metasäure ist in der Mutterlauge neben geringen Mengen der schwer löslichen Säure enthalten.

50 Grm. geben circa 28 Grm. an schwer löslicher Säure.
27·3 Grm. an Metasäure.
1·0 „ Harz.

Die Analyse beider Säuren bewies die Existenz einer Nitrogruppe. Die Menge des Stickstoffs und Schwefels bestätigt dies auch; der Schwefelgehalt ist S = 10·22 und 10·34, die theoretische Menge ist 10·424. Die Menge des Stickstoffs ist N = 14·31 statt 14·007, beide Säuren entsprechen also der Formel

$$C_{12}H_8(NO_2).N_2.SO_3H$$

unterscheiden sich aber wesentlich in ihren Eigenschaften und Zersetzungsproducten. Während die Metasäure zerfliesslich ist, schwer krystallisirt und stark tingirte Lösungen gibt, krystallisirt die zweite in schönen Nadeln die sich lange trocken halten und mit Wasser orangegelb aber nicht intensiv gefärbte Lösungen geben. Aus verdünnter Salpetersäure, welche selbst verdünnte wässerige Lösungen der Nitrosäure fällt, krystallisirt dieselbe in rhombischen, der Sulfanilsäure ähnlichen Blättern (Fig. 1), die lebhaft polarisiren; aus Wasser aber in langen Nadeln, die orangegelb sind und einen Brillantglanz besitzen. Die wässerige Lösung gelatinirt, wenn sie heiss gesättigt (zu circa 30%) erkaltet. Die Löslichkeit der Säure ist in 100 Theilen 3·1 Grm. bei 10° C.

Die Formel der Säure ist $C_{12}H_8NO_2.N_2.SO_3H + 3$ aq.

Die Säure krystallisirt aus Wasser bei freiwilligem Verdunsten mit 3 Molekülen Krystallwasser[1] in breiten Nadeln, welche schiefe Endflächen besitzen und lebhaft polarisiren. Unter dem Mikroskope sehen die Nadeln aus wie Fig. 2.

Fig. 1.

Die Farbe ist goldorange wie die der Azoparasulfosäure; beim Erhitzen detonirt die Säure schwach.

Die Salze sind alle sehr charakteristisch und können selbst die Alkalisalze durch Fällung verdünnter Lösungen der Säure erhalten werden. Das Kalisalz krystallisirt in orangerothen rhombischen Tafeln, die ähnlich denen der oben angeführten Säure (Fig. 1) sind.

Fig. 2.

Die Analyse gab in 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet
Ka	11·224	11·305.

Das Kaliumsalz verliert über 120° C kein Krystallwasser, wenn es zuvor über Schwefelsäure getrocknet ist.

Die Formel ist also: $C_{12}H_8NO_2N_2 . SO_3Ka$.

100 Theile Wasser lösen bei 17° C — 0·161
82° C — 1·760.

Selbst verdünnte Lösungen werden durch Kalilauge oder kohlensaures Kalium gefällt, die Fällung besteht aus scharf begrenzten perlmutterglänzenden rhombischen Tafeln.

Das Natriumsalz fällt ebenfalls mit Natronlauge wie das obige Kalisalz und bildet monokline Tafeln oder monokline Prismen, ist blassgelb und gibt beim Trocknen Wasser ab.

Fig. 3.

100 Theile gaben 9·95 H_2O
6·795 Na — statt 7·04.

Die Formel ist $C_{12}H_8 . NO_2 . N_2 . SO_3Na + 2$ aq.

Das Baryumsalz $(C_{12}H_8(NO_2) . N_2 . SO_3)^2Ba$ krystallisirt in blass rothgelben Schüppchen, welche unter dem Mikroskope

[1] Die Säure gibt getrocknet 15·31% statt 14·90% Wasser.

aus concentrisch gruppirten Prismen (mit Pyramidenflächen) bestehen; dasselbe ist in Wasser äusserst schwer löslich und fällt fast vollständig mit Barytwasser heraus.

Die Analyse ergab 18·09 statt 18·210 Baryum.

Das Silbersalz und Bleisalz sind mikrokrystallinisch und zwar in feinen concentrisch gruppirten Nadeln, verpuffen beim Erhitzen lebhaft und geben beim Trocknen kein Wasser ab.

Setzt man zur Lösung der beschriebenen Nitrosäure Zinn und Salzsäure, so färbt sie sich zuerst braun, dann scheidet sich ein schmutzig gelber Niederschlag ab, der erst beim Erwärmen mit überschüssigem Zinn nach und nach sich auflöst. Ist der Abbau beendet, so löst sich Alles völlig klar auf. Die Producte des völligen Abbaues werde ich später angeben, da sie identisch sind mit denen der Amidosulfosäure. Mit Natriumamalgam entsteht ein brauner Syrup, der nach dem Ausfällen mit Salzsäure und Extraction mit Alkohol Krystalle liefert, die wahrscheinlich einer Polyazoverbindung angehören und vielleicht analog den Amidoazokörpern zusammengesetzt sind. Durch reservirten Abbau mit Zinnchlorür gelang es mir und meinem Assistenten Herrn H. Schwitzer, ein Amidoderivat der Azobenzolparasulfosäure zu erhalten.

Amidoazobenzolparasulfosäure.

Wenn pro Molekül der getrockneten Nitrosäure 3 Moleküle Zinnsalz und wenig Salzsäure zugefügt werden, so scheidet sich zuerst ein Niederschlag von Nitrosäure aus, der dann nach und nach sich zu einer braunen Flüssigkeit reducirt. Erwärmt man 2 Stunden am Wasserbade, so scheidet sich fast alle Amidosäure in Form eines schmutzig gelben Niederschlages aus, die darüber stehende Flüssigkeit ist braun, doch nicht intensiv gefärbt. Der Niederschlag ist, wenn er gewaschen wird, zinnfrei. Zinntetrachlorid neben geringen Mengen von Sulfanilsäure und Phenylendiamin, welche offenbar durch eine zu weit gehende Zersetzung der Amidosäure entstanden, bleiben in der Mutterlauge.

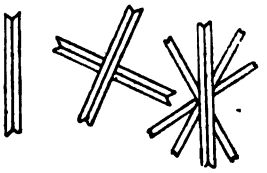
Der Niederschlag löst sich schwer in kochendem Wasser; die Krystalle sind blassgelb und lösen sich mit schmutziggelber Farbe (etwa wie Fe_2Cl_6) in Wasser.

		Gefunden	Berechnet
Die Analyse ergab	N...	15·531	15·160
(auf wasserfreie Substanz bezogen)	S...	11·462	11·552

Die Säure gibt äusserst schwierig Wasser ab. Die Analyse deutet auf eine Amidoazobenzolsulfosäure.[1]

Aus viel heissem Wasser krystallisirt die Säure in verfilzten mikroskopischen Nadeln, welche immer parallel zum $\infty P\infty$ verwachsen sind. Die Löslichkeit der Säure

Fig. 4.

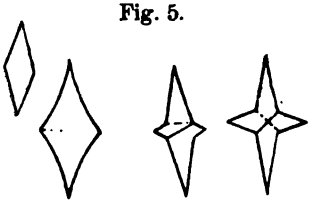


ist in 100 Theilen bei 97° C 0·390
„ 15° C 0·104

Die Säure ist sehr beständig und liefert wohl charakterisirte Salze.

Das Kaliumsalz ist goldglänzend (orangegelb in der Flüssigkeit), krystallisirt in schön ausgebildeten Krystallen, die in kaltem Wasser schwer löslich, in heissem leicht löslich sind.

Fig. 5.



Die Analyse ergab Ka 11·956 statt 12·310.

Das Kalisalz wie auch die Säure entwickeln beim Kochen mit concentrirter Kalilauge Ammoniak.

Das Kaliumsalz ist wasserfrei. Die Formel:

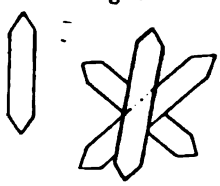
$$C_{12}H_8(NH_2).N_2.SO_3Ka.$$

Das Natronsalz scheidet sich in oft centimeterlangen biegsamen Nadeln nach längerem Stehen der Lösung aus, die nicht sehr charakteristisch sind und schwalbenschwanzartig verwachsen erscheinen. Die Lösung ist blass gefärbt und färbt sich nicht mit Säuren.

---

[1] Die Analyse allein kann hier nicht entscheiden, da wegen des hohen Molekulargewichtes die Bestimmung des Wasserstoffes ungenau wird; es könnte möglicherweise auch eine Hydrazoamidosäure sein, wogegen aber das Verhalten von Oxydationsmitteln spricht.

Fig. 6.



Das Baryumsalz fällt aus der Lösung in goldglänzenden Krystallen, nach dem Erkalten sind dieselben broncefärbig, und geben beim Trocknen Wasser ab. Die Krystalle sind sehr charakteristisch und zwar rhombisch $\infty \breve{P}\infty$, $\infty \breve{P}\infty$, $\breve{P}\infty$

	Gefunden	Berechnet	
100 Theile enthalten	9·41	9·46	Wasser
	19·77	19·82	Baryum

Die Formel ist $(C_{12}H_8(NH_2).N_2.SO_3)^2Ba + 4$ aq.
oder $C_{12}H_8NH_2.N_2.SO_3ba + 2$ aq.

Die Löslichkeit bei 15° C ist in 100 Theilen — 0·104 Salz.

Das Silbersalz fällt in langen Nadeln, die aber unter der Flüssigkeit sich sehr leicht reduciren.

Um die Stellung der Nitro-, beziehungsweise Amidogruppen zum Azostickstoff festzustellen, wurde sowohl die Paranitrosäure als auch die aus ihr durch reservirte Reduction erhaltene Amidosäure abgebaut; ich musste das thun, um sicher zu sein, dass während des Abbaues keine Umlagerung etwa stattgefunden hat. Wird die Nitrosäure mit Zinn-, und Salzsäure abgebaut, so reducirt sie sich zuerst, wie oben angegeben, zu Amidosäure und löst sich dann erst bei längerer Einwirkung von nascirendem Wasserstoff vollständig. Wird das Zinn mit Schwefelwasserstoff ausgefällt, so liefert die Mutterlauge nach dem Eindampfen, wobei sie sich schwach lila färbt, ein Gemisch von Sulfanilsäure und Phenylendiaminhydrochlorat; durch mehrmaliges Extrahiren mit Alkohol, welcher die Sulfanilsäure zurücklässt und nachheriges Umkrystallisiren erhält man das Phenylendiaminsalz rein. Das Hydrochlorat wird mit Oxydationsmitteln grünblau, dann schmutzigviolett, mit Kaliumchromat und Schwefelsäure liefert es Chinon. Um aber völlig sicher zu sein, dass das Phenylendiamin frei von Sulfonilsäure wäre (da die letztere auch Chinon liefert), wurde das Chlorhydrat mit Kaliumcarbonat destillirt und das erstarrte Destillat mit Oxydationsmitteln behandelt; auch da trat die charakterische grünblaue Färbung des β-Phenylendiamins unter Bildung von Chinon ein

Das destillirte Phenylendiamin zeigt den Schmelzpunkt 139—40°, ist somit Paraphenylendiamin (1·4).

Die Structur der Nitro- und Amidosäure ist somit

$$C_6H_4.NO_2.N=N.C_6H_4.SO_3H$$
$$(4)\ (1)\ \ (1)\ \ (4)$$

und

$$C_6H_4.NH_2.N=N.C_6H_4.SO_3H$$
$$(4)\ (1)\ \ (1)\ \ (4)$$

Die letztere Formel fällt nun mit der Formel zusammen, welche für die Sulfosäure des Echtgelbs (Anilingelb) angenommen wird. Das letztere wird aus Sulfanilsäure durch Diazotirung und Condensirung mit Anilin erzeugt. Es ist mir nicht bekannt, dass dieses Product einem völligen Abbau unterzogen wurde. Das Product wurde früher durch Sulfirung des Amidoazobenzols erhalten, welches wiederum durch molekülare Umlagerung aus Diazoamidobenzol erzeugt wurde. Das letztere Product, das ist das Amidoazobenzol, soll angeblich nach G. Schmidt[1] identisch mit dem aus dem Gerhardt'schen Nitroazobenzol erhaltenen Amidoproduct sein. Thatsächlich lässt sich nur das aus Sulfanilsäure erhaltene Product mit meiner Amidosäure vergleichen, da die Stellung des Nitroazobenzols nicht genau bekannt und bei der Sulfirung des durch Umlagerung erhaltenen Amidoazobenzols mehrere nicht genau studirte Sulfosäuren resultiren:[2]

Liefert das Anilingelb (das Natronsalz der Sulfosäure des Amidoazobenzols) auch Sulfanilsäure und Paraphenylendiamin, so muss, da die Eigenschaften beider Körper total ungleich sind, angenommen werden, dass die von mir aus Azobenzol direct dargestellten Amidoproducte nicht identisch sind mit den durch Umlagerung aus Diazoamidobenzol erhaltenen. Der charakteristische in die Augen fallende Unterschied ist, dass die aus Azobenzol erhaltene Amidosulfosäure sehr schwer löslich ist, mit Säuren nicht die für das Echtgelb charakteristische purpurrothe Färbung

---

[1] Die Arbeit ist nur als Correspondenz aus Petersburg in den Ber. d. deutsch. Gesellsch., Jhrg. V. p. 480.

[2] Schmidt reducirte Azoxynitrobenzol und erhielt Amidoazoxybenzol und Amidoazobenzol, doch sind nähere Angaben über die Stellung nicht bekannt.

gibt und ein schwer lösliches Natron- und Kalisalz liefert. Schliesslich erwähne ich hier gelegentlich, dass Herr Rodatz in den Annalen der Chemie und im heurigen Jahrgang des Chemischen Centralblattes eine Formel der Diparasulfosäure des Azobenzols aufgestellt hat, welche ich schon in den Sitzungsberichten der kaiserlichen Akademie Bd. LXXXV. 762, also im März 1882 veröffentlichte. Die späteren Untersuchungen haben auch noch meine frühere Angabe bestätigt, dass bei der directen Sulfirung von Azobenzol ausser der Diparadisulfosäure, Dimetadisulfosäure entsteht.

[1] Bd. 215, p. 213.

Zur Kenntniss der Azyline.

Von **E. Lippmann** und **F. Fleissner.**

(Mittheilung aus dem Universitäts-Laboratorium im Convictgebäude.)

(Mit 6 Holzschnitten.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. April 1883.)

Indem wir die hier begonnenen Studien fortsetzten, sahen wir bald ein, dass die in unserer ersten Mittheilung[1] vorgeschlagene Formel $R_2N-C_6H_3=N-N=C_6H_3-NR_2$, wo R irgend einen Alkylrest bedeutet, nicht mehr das richtige Spiegelbild des Verhaltens dieser Körperklasse gegenüber verschiedenen Reagentien, wie nascirenden Wasserstoff, salpetrige Säure, Alkyljodide etc., liefert.

Wie sich aus dem Folgenden ergeben wird, müssen wir an der obigen Formel eine kleine, aber wesentliche Veränderung vornehmen, wenn dieselbe ihrem Zwecke entsprechen soll, wir müssen uns die beiden Stickstoffatome in der Azobindung in den Benzolkern eingetreten denken:

$$R_2N-C_6H_4-N=N-C_6H_4-NR_2.$$

Man erkennt leicht, dass diese letztere Formel sich von der obigen durch einen Mehrgehalt von 2 Wasserstoffatomen unterscheidet, und dass hierdurch diese Verbindungen als tertiäre Azoverbindungen characterisirt werden. Unsere Untersuchungen zeigen, dass trotz der gleichen Bindung der Stickstoffatome, sich diese Derivate von den Azoverbindungen nach mancherlei Richtungen wesentlich unterscheiden, wesshalb wir den Namen Azylinverbindungen beibehalten möchten.

---

[1] Monatshefte 1882, 705.

Stickoxyd wirkt auf ein tertiäres Amin derart ein, das 2NO 1 Molekul H_2O abspalten, so dass 2N an Stelle von 2 Wasserstoff treten.

$$2NO + 2C_6H_5(C_2H_5)_2N = \left.\begin{matrix} C_6H_4N=NC_6H_4 \\ C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix}\right\} NN \left\{\begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix}\right. + H_2O + O.$$

Es tritt selbstverständlich kein freier Sauerstoff hier auf. Derselbe wird zur Oxydation des ursprünglich angewendeten tertiären Amins verwendet. In der That findet man in der alkoholischen Mutterlauge der Azyline harzige unerquickliche Nebenproducte, die auf eine Oxydation schliessen lassen. Die Analysen der drei Anfangsglieder der Reihe, welche mit wiederholt gereinigtem Material durchgeführt wurden, zeigten, dass wir zu der Annahme eines Mehrgehaltes von 2 Wasserstoff im Molekül berechtigt sind. Im Stickstoffgehalt dieser Basen findet diese Thatsache keinen Ausdruck, ebensowenig in der Analyse der höheren Homologen, so dass die früher gemachten Angaben hier ihre Giltigkeit beibehalten. Ebenso klar ist es, dass die Eigenschaften dieser Verbindungen sich nicht verändert haben.

Dimethylanilinazylin.

I. 0·1602 Grm. gaben, nach Kopfer verbrannt, 0·4186 Grm. CO_2 und 0·113 Grm. H_2O.

II. 0·2152 Grm. gaben 0·5633 Grm. Kohlensäure und 0·146 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für	
	I.	II.	$C_{16}H_{18}N_4$	$C_{16}H_{20}N_4$
C	71·3	71·3	72·18	71·6
H	7·8	7·54	6·76	7·41

Diäthylanilinazylin.

I. 0·2163 Grm. gaben 0·587 Grm. Kohlensäure und 0·1704 Grm. H_2O.

II. 0·219 Grm. gaben 0·5973 Grm. Kohlensäure und 0·1746 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Versuch		Berechnet für	
	I.	II.	$C_{20}H_{26}N_4$	$C_{20}H_{28}N_4$
C	74·0	74·38	74·53	74·07
H	8·7	8·86	8·07	8·64

Dipropylanilinazylin.

I. 0·228 Grm. gaben 0·6351 Grm. Kohlensäure und 0·2013 Grm. Wasser.

II. 0·1975 Grm. gaben 0·5488 Grm. Kohlensäure und 0·1739 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Versuch		Berechnet für	
	I.	II.	$C_{24}H_{34}N_4$	$C_{24}H_{36}N_4$
C	75·96	75·78	76·2	75·78
H	9·0	9·47	8·9	9·47

Herr Prof. Schrauf war so freundlich die Messungen der Krystalle des Diäthylanilinazylin vorzunehmen und theilte uns hierüber folgendes mit:

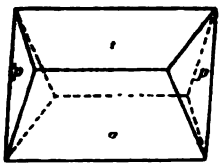
Diäthylanilinazylin.

Monosymmetrisch $\eta = 90° 30'$ $a : b : c = 1 : 0{\cdot}7108 : 0{\cdot}9493$. Beobachtete Flächen. $a(100)$; $m(110)$; $t(101)$; $e(\bar{5}01)$; $p(321)$; $\pi(\bar{3}21)$; $\sigma(\bar{4}27)$ — $b(010)$ nur als Spaltfläche beobachtet. Vorherrschende Combinationen: $atempi - atp - atp\sigma$ (σ meist gekrümmt).

	Gerechnet	Beobachtet
am	$= 54° 18'$	$54° 16'$
at	$= 42 \quad 2$	$42 \quad 2$
ae	$= 12 \quad 8$	$12 \quad 20$
pp	$= 79 \quad 54$	$79 \quad 58$
ap	$= 43 \quad 17$	$43 \quad 24$
tp	$= 45 \quad 26$	$45 \quad 24$
mp	$= 18 \quad 52$	$19 \quad 0$

	Gerechnet	Gefunden
$a\pi$	= 46° 15′	46° 30′
$m\pi$	= 17 39	17 50
$a\sigma$	= 69 33	69 50
$p\sigma$	= 80 11	80 11

Fig. 1.



Die Krystalle dieser Substanz sind bei einer Grösse von circa 4 Mm. lichtröthlichbraun und fluoresciren mit blauem Schiller. Sie sind dichroitisch, für Schwingungen parallel der Symmetrieebene dunkelbraun, senkrecht dagegen hellgelb. $\beta_\rho = 1{\cdot}507$. Axenaustritt nicht beobachtet. Volumgewicht bestimmt mit 0·12 Grm. Substanz annähernd 1·107 bei 15° C.“

Derivate der Azyline.

Chloroplatinat des Dimethylanilinazylins.

Die salzsaure Lösung der Base wurde mit Platinchlorid gefällt. Der mit der Pumpe abgesaugte Niederschlag wurde mit HCl-hältigem Wasser gewaschen. Dichroitisches Krystallpulver, das im auffallenden Licht grün, im durchfallenden roth erscheint.

I. 0·2712 Grm. gaben 0·2827 Grm. Kohlensäure und 0·0875 Grm. H_2O.

II. 0·2718 Grm. gaben 0·2840 Grm. Kohlensäure und 0·0733 Grm. H_2O.

I. 0·2667 Grm. gaben geglüht 0·0765 Grm. Platin.

II. 0·2432 Grm. gaben geglüht 0·0702 Grm. Platin.

0·4500 Grm. gaben bei 21° C. und 745 Mm. 35 CCN.

0·2816 Grm. lieferten mit CaO geglüht etc. 0·363 Grm. Chlorsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für $C_{16}H_{20}N_4+PtCl_6H_2$
	I.	II.	
C	28·5	28·42	28·44
H	3·57	2·98	2·94
Pt.....	28·65	28·86	28·69
N	8·73	—	8·26
Cl.....	31·83	—	31·44

Chloroplatinat des Diäthylanilinazylins.

Mikroskopisch kleine braunrothe, kupfergrün schillernde Täfelchen sechsseitigem Umrisses.

Trimetrisch; *c* (001) die Fläche der Tafel begrenzt durch die Tracen von *a* (100) *m* (110).

$am = 57^1/_2$
$am' = 58^1/_2$ beobachtet unter dem Mikroskop.
$mm' = 63$

Dichroitisch; für Schwingungen parallel der Kante *ac* dunkelbraunroth, senkrecht hellgelb.“ (Schrauf.)

0·2687 Grm. gaben 0·2687 Grm. Kohlensäure und 0·0973 Grm. Wasser.

0·228 Grm. gaben mit CaO geglüht etc. 0·2638 Grm. Chlorsilber.

0·2466 Grm. gaben bei 18° C. 745 Mm. 18CCN.

0·3053 Grm. gaben 0·0805 Grm. Platin.

0·2770 Grm. gaben 0·0730 Grm. Platin.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für $C_{20}H_{28}N_4+PtCl_6H_2$
C.....32·82			32·72
H..... 4·02			4·09
Cl .....28·6			29·04
N..... 8·1			7·65
Pt .....26·36	26·36		26·35

Ferrocyanwasserstoffsaures Diäthylanilinazylin.

Eine alkoholische Lösung der Base wurde durch eine solche von Ferrocyanwasserstoffsäure nach Liebigs Methode bereitet,

gefällt, durch Decantation gewaschen und mit der Pumpe abgesaugt.

Braune rhomboedrische Blättchen mit dem Winkel von 30°. Für die Schwingungen parallel der kürzeren Diagonale dunkel, für dieselben parallel der längeren hellgelbbraun.

0·4539 Grm. gaben geglüht 0·0694 Grm. Fe_2O_3.

	Gefunden	Berechnet für $[(C_{10}H_{14}N_2)_2]H_4FeCy_6$
Fe	10·7	10·4

Pikrat des Dipropylanilinazylins.

Durch Fällen einer kalten alkoholischen Lösung des Azylins mittelst Pikrinsäure, in Alkohol gelöst, erhalten, stellt es orangerothe in kaltem Wasser vollkommen unlösliche Krystalle vor.

0·2006 Grm. gaben 0·3803 Grm. CO_2 und 0·0898 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_{24}H_{36}N_4 2[C_6H_3(NO_2)_3O_3]$
C	51·7	51·51
H	4·94	5·1

Pikrat des Diamylanilinazylins.

bildet kleine citronengelbe Krystalle die in Alkohol, Wasser sehr schwer löslich sind: ihre Analyse ergab Folgendes:

0·2000 Grm. gaben 0·406 Grm. Kohlensäure und 0·1087 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{32}H_{52}N_4 2[C_6H_3(NO_2)_3O]$
C.....	55·36	55·58
H	6·04	6·1

Perjodide.

Dieselben werden durch Fällung einer alkoholischen Lösung der Base durch eine gleiche Jodlösung erhalten. Meistens metallisch glänzend, zeichnen sie sich durch Dichroismus aus. Ähnliche Verbindungen gehen gewisse Derivate der Ammoniumbasen, z. B.

das Tetraäthylammoniumjodur, ein;[1] aber auch Alkaloide, wie Chinin, Cinchonin etc. bilden analoge Verbindungen, welche Joergensen,[2] der dieselben sehr ausführlich untersucht hat, Acidperjodide genannt hat.

Die Perjodide der Azyline sind in Wasser unlöslich, werden von Alkalien, HgO, Silbernitrat vollkommen zersetzt, indem sich durch Einwirkung der ersteren Jod und jodsaures Kalium bildet und das Azylin regenerirt wird.

Sie sind als Additionsproducte, nicht als Substitutionsderivate der Azyline aufzufassen. (Ob nicht nach dem Vorgange von Joergensen ein Theil des Jod als HJ gebunden ist, mag dahingestellt bleiben.)

1·0025 Grm. Perjodid wurden durch Kochen mit Natronlauge zersetzt, mit Chloroform das Azylin ausgeschüttelt und die Lösung am Wasserbade in einer tarirten Schale verdunstet.

Der bei 100° C. getrocknete Rückstand wog 0·464 Grm., dies entspricht 45·95%, während die Formel $2C_{20}H_{28}N_4 + 6J$ 46·28% Azylin verlangt. In der wässrigen Lösung befindet sich Jodkalium mit Kaliumjodat gemengt.

Diäthylanilinazylin-Perjodid.

Das aus Amylalkohol umkrystallisirte Präparat stellt, nach einer Mittheilung von Prof. Schrauf, sehr kleine mikroskopische Flitterchen vor, die unter dem Mikroskop gelegentlich Krystallcontouren zeigen. „Die Form ist ähnlich einer sechsseitigen, nach der Makroaxe verzogenen Tafel trimetrischer Symmetrie. An den kleinsten Flitterchen konnte der Winkel von 60° beobachtet werden. Eine kleine Tafel zeigt eine Bruchfläche mit scharf verlaufender Contour, die gegen die Makroaxe den Winkel von 45° bildete. Überaus wichtig ist an diesem Körper der grosse Unterschied in der Stärke der Lichtabsorption, welche für eine bestimmte Schwingungsrichtung selbst Undurchsichtigkeit des Körpers hervorruft. Und zwar erfolgt das Maximum der Absorption für Vibrationen parallel der Makroaxe. Hier ist der Körper undurchsichtig und tief dunkelschwarzblau. Für Vibra-

[1] Weltzien, Annalen Chem. Pharm. 86, 91.

[2] Journ. f. pract. Chem. 2, 3, 14, 15 N. F.

tionen senkrecht dagegen ist der Körper hell lavendelgrau ins grüne und durchsichtig. Der Strich ist smaragdgrün, der Flächenschiller bläulich violett."

0·3947 Grm. gaben 0·4877 Grm. Kohlensäure und 0·126 Grm. Wasser.

0·2764 Grm. gaben mit Kalk geglüht etc. 0·2777 Grm. Jodsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $4C_{10}H_{14}N_2+6J$
C	33.69	34·04
H	3·54	3.9
J	54·27	54·04

Dipropylanilinazylin-Perjodid.

Prachtvoll violette glänzende Nadeln, die man aus Alkohol umkrystallisiren kann.

0·2811 Grm. gaben 0·3947 Grm. Kohlensäure und 0·1282 Grm. Wasser.

0·2513 Grm. gaben, mit CaO geglüht etc., 0·2319 Grm. Jodsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $4C_{12}H_{18}N_2+6J$
C	38·2	37·8
H	5·0	4·73
J	49·87	50.06

Dibutylanilin-Perjodid.

Dunkle Krystalle mit blauem Flächenschimmer.

0·1961 Grm. gaben, mit CaO geglüht etc., 0·1675 Grm. JAg.

	Gefunden	Berechnet für $4C_{14}H_{22}N_2+6J$
J	46·2	46·6

Diamylanilinazylin-Perjodid.

Schwarze Kryställchen mit violettem Flächenschimmer.

0·246 Grm. gaben 0·3961 Grm. Kohlensäure und 0·1356 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $4C_{16}H_{26}N_2+6J$
C	43·9	43·98
H	6·1	5·95

Einwirkung von salpetriger Säure auf die Azyline.

Zu der Lösung der Base in Eisessig wurde tropfenweise eine wässrige, berechnete Mengen Kaliumnitrit enthaltend, zugesetzt. Die ursprünglich dunkelgrüne Farbe der Lösung geht in eine rothbraune über, wodurch das Ende der Reaction angezeigt wird. Als wir diesen Versuch mit dem Dimethylanilinazylin anstellten, erhielten wir, nachdem die saure Lösung mit Soda neutralisirt ward, einen Krystallbrei aus kleinen Nädelchen bestehend. Dieser wurde abgesaugt, aus Alkohol umkrystallisirt, schliesslich in diesem Mittel gelöst und mit Ligroin gefällt. Gelbe, stahlblau glänzende Nadeln. Schmelzpunkt 162 bis 163° C., die sich nicht mit Säuren verbinden und in jeder Beziehung identisch befunden wurden mit dem von Schraube zuerst dargestellten, später von Weber[1] und Wurster[2] genauer studirten Paranitrodimethylanilin.

I. 0·1754 Grm. gaben 0·3738 Grm. Kohlensäure und 0·102 Grm. Wasser.

II. 0·1825 Grm. gaben 0·3898 Grm. Kohlensäure und 0·0964 Grm. Wasser.

0·2243 Grm. gaben bei 22° C. und 733 Mm. 34·5 CC. Stickstoff.

In 100 Theilen:

---

[1] Berichte, VII, 714, X, 761.

[2] Ber. 12, pag. 528.

	Gefunden		Berechnet für $C_6H_4(NO_2)(CH_3)_2N$
	I.	II.	
C.....	58·11	58·15	57·83
H.....	6·4	5·95	6·0
N.....	16·8	—	16·9

Zur Verallgemeinerung dieser Reaction wurde nun auch das Diäthylanilinazylin, genau auf dieselbe Weise, in das bisher noch unbekannte Nitroproduct des Diäthylanilins übergeführt und deshalb mit dem durch Oxydation aus dem Nitrosodiäthylanylin dargestellten Präparat verglichen. Auch hier wurde vollkommene Identität constatirt.

Darstellung des Nitrodiäthylanilins aus Nitrosodiäthylanilin.

Letzteres wurde genau nach den Angaben von Kopp[1] aus salpetrigsaurem Natrium, Salzsäure und Diäthylanilin dargestellt. Es zeigte nach dem Umkrystallisiren aus Alkohol den richtigen Schmelzpunkt von 84° C. Dieses so bereitete Nitrosoderivat wurde in schwefelsaurer Lösung mit berechneten Mengen Kaliumpermanganat versetzt, längere Zeit stehen gelassen und mit Äther ausgeschüttelt, dann aus Alkohol und Ligroin umkrystallisirt. Ausbeute: das Gewicht der angewandten Nitrosoverbindung.

Das so erhaltene Präparat zeigte genau den Schmelzpunkt von 76° C., wie das aus Azylin bereitete. Beide krystallisiren in schwefelgelben Nadeln; die schwach blau fluoresciren sind in heissem Alkohol leicht, in Ligroin schwierig löslich.

Prof. Schrauf theilt mir über die Krystallform des aus dem Azylin dargestellten Nitroproducts Folgendes mit:

„Beobachtete Flächen *a* (100), *c* (001), *m* (110), *d* (10$\bar{1}$), *b*(010). Spaltfläche; *ac* sind vorherrschend entwickelt. Monosymmetrisch

$$a : b : c = 1·0342 : 1 : 0·8245 \quad \eta = 99° 27'$$

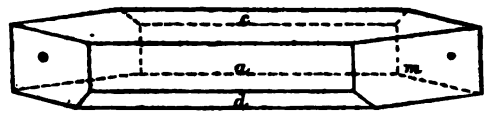
beobachtet:

---

[1] A. Kopp, Ber. 8, 621.

$ac = 80° 33'$
$ad = 51° 6'$
$am = 45° 34'$
$cm = 83° 26'$ gerechnet $83° 24'$.

Fig. 2.



Die Substanz ist schwach dichroitisch; für Schwingungen parallel der Orthoaxe (Kante *ac*) gelbbräunlich, für Schwingungen senkrecht dagegen, lichtschwefelgelb. Axenaustritt nicht beobachtet."

I. 0·1984 Grm. gaben 0·452 Grm. Kohlensäure und 0·1281 Grm. Wasser.

II. 0·2554 Grm. gaben bei 741 Mm. und 20° C. 31 CCN.

III. 0·2429 „ „ „ 749 „ „ 18° „ 31 „

IV. 0·2243 „ „ 0·5072 Grm. Kohlensäure und 0·147 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden				Berechnet für $C_6H_4(NO_2)(C_2H_5)_2N$
	I.	II.	III.	IV.	
C.....	62·1	—	—	61·66	61·85
H	7·1	—	—	7·28	7·21
N	—	14·1	14·5	—	14·3

Die zu den Analysen I und II verwendete Substanz wurde aus dem Azylin durch NHO_2, jene zu den Analysen III und IV aus Nitrosodiäthylanilin durch Oxydation bereitet.

Beide Nitroproducte zeigen einen stärkeren basischen Charakter als jenes des Dimethylanilin, sie geben beide ein krystallisirtes Platinsalz, welches sich in dünnen, säulenförmigen Kryställchen mit Prismenwinkel von 61° ausscheidet und asymmetrisch krystallisirt (Schrauf).

0·3049 Grm. gaben 0·074 Grm. Platin.

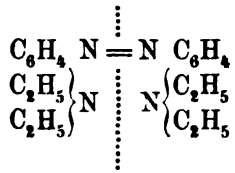
	Gefunden	Berechnet für $2[C_6H_4(NO_2)(C_2H_5)_2N]+H_2Cl_6Pt$
Pt.....	24·27	24·37

Die Ausbeute an der Nitroverbindung aus Azylin ist, wenn man die Lösung des Kaliumnitrats langsam unter Kühlung einfliessen lässt, eine befriedigende.

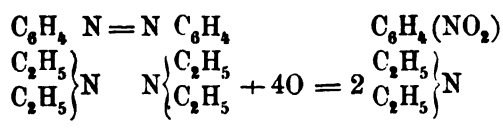
1·9491 Grm. gaben, mit NHO_2 behandelt, nachdem die Flüssigkeit mit Pottasche neutralisirt war, wobei etwas Substanz in die alkalische, stark gelb gefärbte Lösung überging, einen Niederschlag, der abgesaugt, getrocknet 1·5 Grm. wog. Dies entspricht, da die Theorie 2·5 verlangt, einer Ausbeute von 65·6%.

Die salpetrige Säure wirkt bei dieser Reaction oxydirend, indem sie selbst zu NO reducirt wird; ähnlich wie bei der Reaction auf Protocatechusäure und Brenzkatechin[1] wird ein Aminflügel zum Theil oxydirt zu CO_2 und H_2O und wenig harzigen Producten.

Die Spaltung eines Azylins von nachfolgender Structur



konnte in der Weise vor sich gehen, dass sich 2N loslösen und 2NO, respective $2NO_2$ an ihre Stelle treten, oder dass die doppelte Bindung in der Richtung der punktirten Linie gelöst wird und sich je 2O an 1 Atom N anlagern:



[1] Barth, Monatsh., 1880; Gruber, Sitzb. d. Wien. Akad., 79.

In der That musste, wenn die Reaction nach dieser letzteren Gleichung vor sich ging, bei dem Process kein oder nur eine sehr kleine Menge Stickgas frei werden. In einem mit CO_2 gefüllten Apparat, wo die Säure durch Glühen von Natriumbicarbonat entwickelt wurde, bewerkstelligte man die langsame Zersetzung von 0·5602 Grm. Diäthylanilinazylin durch einen Überschuss von salpetrigsauren Kalium.

Die CO_2 wurde durch Kalilauge in 2 Waschflaschen, das NO durch eine Lösung von 50 Grm. Chromsäure in 100 Grm. verdünnter Salpetersäure[1] absorbirt. Das sich etwa entwickelnde Gas wurde in einem Eudiometer, welches mit einer mit Eisenvitriol gesättigten Lösung gefüllt war, aufgefangen. Wir erhielten eine kaum messbare Menge N anstatt der berechneten 38·5 CC. Hieraus ergibt sich unzweifelhaft, dass sich an den Stickstoff Sauerstoff anlagert, um ein Paranitroderivat zu bilden, was nur erklärt werden kann, wenn sich schon vorher im Azylin der Stickstoff in der Parastellung befand.

Einwirkung von Wasserstoff im Entstehungszustand.

Von den Wasserstoffentwicklern benützten wir bald das Zinnchlorür, obgleich Zinn und Salzsäure, Jodwasserstoffsäure und amorpher Phosphor, Kupferchlorür auch reducirend wirken. Diäthylanilinazylin wurde in concentrirter Salzsäure gelöst, mit einer sehr concentrirten Zinnchlorürlösung[2] bis zur Entfärbung versetzt, kurze Zeit gekocht, schnell erkalten gelassen und in concentrirte überschüssige Natronlauge eingegossen, um das Zinnoxyd zu lösen und schliesslich mit Äther extrahirt.

Nach Entfernung desselben erhielten wir eine ansehnliche Menge eines Öls, 91% der theoretischen Ausbeute, welches einen constanten Siedepunkt 260—62° C. (uncorr.) zeigte. Das so erhaltene Reductionsproduct, im Vacuum noch einmal destillirt, stellt ein farbloses Öl vor, welches sich wie Anilin an der Luft schnell bräunt.

---

[1] Böhmer, Zeitschr. f. anal. Chem., 21, 212.

[2] Hierbei bildet sich nicht die geringste Menge Anilin.

0·2823 Grm. gaben 0·7586 Grm. Kohlensäure und 0·2469 Grm. H_2O.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_4(NH)_2(C_2H_5)_2N$
C	73·28	73·6
H	9·71	9·75

Es hatten sich demnach 4H an die beiden Stickstoffatome angelagert, um 2 Moleküle Diäthylparaphenylendiamin zu bilden.

$$\begin{matrix} C_6H_4 & N = N & C_6H_4 & & C_6H_4(NH_2) \\ \left.\begin{matrix} C_2H_4 \\ C_2H_4 \end{matrix}\right\} N & & N \left\{\begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix}\right. & + 4H = 2 & \left.\begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix}\right\} N \end{matrix}$$

Indessen hätte die Anlagerung von Wasserstoff die Bildung einer Hydrazoverbindung veranlassen können, die ähnliche Zahlen in der Analyse verlangen würde.

$$\begin{matrix} C_6H_4 - NH - NH & C_6H_4 \\ \left.\begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix}\right\} N & N \left\{\begin{matrix} C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix}\right. \end{matrix}$$

Zur Entscheidung dieser Frage wurde aus Nitrosodiäthylanilin mittelst Zinnchlorür das bisher noch nicht bekannte Diäthylparaphenylendiamin dargestellt. Dasselbe zeigte sofort den constanten Siedepunkte 260—62° C. (uncorr.).

Beide Basen, jene aus Azylin wie die aus Nitrosodiäthylanilin zeigten nun gegenüber Sauerstoff und verschiedenen Reagentien vollkommen gleiches Verhalten.

Mit Eisenchlorid Rothfärbung, dann Fällung
„ unterchlorigsauren Natrium, Braunfärbung,
„ chromsaurer Kalium, violette Färbung,
„ Pikrinsäure in Alkohol, Grünfärbung, später gelben körnigen Niederschlag,
„ Jodlösung und Kupfervitriollösung, Rothfärbung.

Zum Behufe weiterer Identificirung stellten wir aus beiden Amidoderivaten verschiedener Abkunft die Platinsalze dar und

verglichen dieselben. Die salzsaure Lösung liefert mit Platinchlorid versetzt nach längerer Zeit ein schönes krystallinisches Platinsalz, das langsam auskrystallisirt, rothe, schnell aus der Lösung herausgefallen, gelbe Farbe zeigt.

Prof. Schrauf war so freundlich, uns hierüber Folgendes mitzutheilen:

„Die Form der vorliegenden Krystalle versinnlicht Fig. 3. Es sind 2 Mm. grosse, sehr dünntafelförmige Individuen von gelbbrauner Farbe und mit theilweise gekrümmten Flächen. Nimmt man die nachfolgenden Indices der Flächen an: $a(100)$, $b(010)$, $p(111)$, $s(13\bar{3})$, $t(10\bar{3})$, so folgt aus den möglichen Beobachtungen:

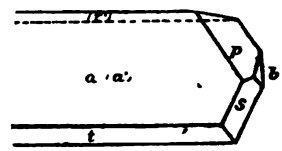
$$at = 62°\ 5'$$
$$ap = 47\ 45$$
$$as = 75\ 0$$
$$ps = 61\ 5$$
$$bs = 38\ 5$$
$$bp = 51\ 40$$
$$ts = 58\ 30$$
$$bt = 96\ 30$$
$$ab = 92\ 5$$

Kante $\frac{a}{t} : \frac{a}{s} = 62°$

$$\frac{a}{t} : \frac{a}{p} = 52$$

$$\frac{a}{s} : \frac{a}{p} = 66$$

Fig. 3.



das Parametersystem:

asymmetrisch; $(100)\,(010) = 92°\ 5'$; $(010)\,(001) = 82°\ 30$
$(100)\,(001) = 86\ 30'$

$$a : b : c = 0{\cdot}94 : 1 : 1{\cdot}58,$$

welches theilweise ähnlich ist jenem des Tetraäthylphenyldiamins.

Auf der Fläche a (100) ist eine der Schwingungsrichtungen, nahe parallel der Kante $\frac{a}{p}$, und bildet mit der Kante $\frac{a}{t}$ den

Winkel 43°. Für diese Richtung ist die Axenfarbe braun, für die darauf senkrechte Richtung ist hingegen der Farbenton hell bräunlich gelb.“

I.	0·3337 Grm.	gaben	0·3598 Grm.	CO_2 und	0·1272 Grm. H_2O.
II.	0·3244 „	„	0·4624 „	Chlorsilber.	
III.	0·2031 „	„	0·2913 „	„	
IV.	0·3485 „	„	0·0838 „	Platin.	
V.	0·3338 „	„	0·0802 „	„	
VI.	0·2790 „	„	0·0673 „	„	
VII.	0·253 „	„	0·0603 „	„	
VIII.	0·3640 „	„	0·0873 „	„	
IX.	0·3657 „	„	0·3946 „	CO_2 und	0·1471 Grm. H_2O.
X.	0·2068 „	„	0·2960 „	Chlorsilber.	

	Gefunden									
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
C	29·4	—	—	—	—	—	—	—	29·43	—
H	4·2	—	—	—	—	—	—	—	4·47	—
Cl	—	35·04,	35·38	—	—	—	—	—	—	35·38
Pt	—	—	—	23·98,	24·03,	24·10,	23·91,	23·93	—	—

Berechnet für $2[C_6H_4(NH_2)(C_2H_5)_2N]+4HCl+PtCl_4$

29·61
4·19
35·04
23·98

Analysen I bis inclusive VII dieses saueren[1] Platinsalzes wurden mit Präparaten gemacht, die aus dem Azylin, während jene von VIII bis X aus Nitrosodiäthylanilin dargestellt worden sind.

[1] Dass hier wirklich ein solches Salz vorliegt, wird durch das Verhältniss von Platin zu Chlor bewiesen, welches hier genau 1 : 8, während es in den gewöhnlichen Chloroplatinaten bekanntlich 1 : 6 ist.

Einwirkung der Alkyljodide auf die Azyline.

Dieselbe geht bereits bei 100° C. vor sich, die dunkelgrüne Farbe der Lösung verwandelt sich in eine dunkelrothe, wenn man 1 Molekul der Base mit 4 Molekulen des betreffenden Alkyljodids z. B. Diäthylanilinazylin und etwas Alkohol im zugeschmolzenen Rohre erhitzt. Nach einigen Stunden erstarrt der Röhreninhalt zu einer festen Masse. Derselbe wird mit der Pumpe abgesaugt, dann in wenig H_2O gelöst und mit Ätheralkohol gefällt. Man erhält das Gewicht des angewandten Anylins oder 33% der theoretischen Ausbeute. Allerdings kann man aus der durch freies Jod braungefärbten Mutterlauge durch Eindampfen und Fällen mit Ätheralkohol neue Mengen gewinnen, allein die Reinigung ist dann schwierig, und umständlich. Es ist vortheilhafter, die Jodide anzuwenden, als die analogen Bromide oder Chloride, weil die Reinigung von unerquicklichen Nebenproducten noch schwieriger wird.

Der Röhreninhalt wurde in der oben angegebenen Weise gereinigt, das krystallinische Jodid in Wasser gelöst, mit Ätheralkohol wiederholt gefällt.

I. 0·3843 Grm. gaben 0·499 Grm. CO_2 und 0·185 Grm. H_2O.

II. 0·3976 Grm. gaben 0·516 Grm. CO_2 und 0·1971 Grm. H_2O.

III. 0·3985 Grm. gaben, mit CaO geglüht etc., 0·3971 Grm. Jodsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden			Berechnet für $C_6H_4<^{N(C_2H_5)_2HJ}_{N(C_2H_5)HJ}$
	I.	II.	III.	
C.....	35·39	35·49	—	35·3
H.....	5·6	5·38	—	5·48
J.....	—	—	53·93	53·5

Dieses Jodid ist also aus dem Azylin durch Lösung der doppelten Bindung und Anlagerung von Äthylgruppen und Jodwasserstoff entstanden.

Sehr wahrscheinlich bildet sich anfangs ein den Perjodiden ähnlich zusammengesetztes aber unbeständiges Additionsproduct des Azylins mit dem Alkyljodid. Dieses zerfällt nach einiger Zeit in Jodwasserstoffsäure und harzartige Nebenproducte. Wie direct angestellte Versuche nun zeigen, ist die Jodwasserstoffsäure im Stande unter Jodabscheidung die Azobindung zu lösen, so dass sich 2H an den Azylinstickstoff anlagern und zunächst Diäthylparaphenylendiamin entsteht:

$$\begin{matrix} C_6H_4 & N=N & C_6H_4 \\ C_2H_5 & N & C_2H_5 \\ C_2H_5 & & C_2H_4 \end{matrix} \Big\rangle N + 4HJ = 4J + 2 \begin{matrix} C_6H_4(H_2N) \\ C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix} \Big\rangle N$$

2 Molekül Jodäthyl wirken aber noch weiter ein, so dass schliesslich das Endprodukt das Jodhydrat des Tetraäthylphenylendiamins vorstellt.

$$\begin{matrix} C_6H_4(H_2N) \\ C_2H_5 \\ C_2H_5 \end{matrix} \Big\rangle N + 2\,C_2H_5J = C_6H_4 < \begin{matrix} N(C_2H_5)_2 \\ N(C_2H_5)_2 \end{matrix} \quad 2HJ$$

Dieses Jodid bildet ein wirres Krystallaggregat, leicht in Wasser, schwer in Alkohol löslich, färbt sich unter Jodausscheidung an der Luft violett.

Tetraäthylphenylendiamin.

Diese Base entsteht durch Behandlung des betreffenden Jodids mit Kalilauge.

Man schüttelt mit Äther, entfernt diesen und destillirt. Bei 280° C. (uncorr.) siedet dieselbe und erstarrt im Destillirrohre schon zu schönen Krystallen. Dieselben sind in Alkohol, Äther, Chloroform, Benzol, Ligroin sehr leicht löslich, mussten desshalb aus Weingeist und Wasser umkrystallisirt werden.

So erhielten wir bei 52° C. schmelzende, sich an der Luft ein wenig bläuende Krystalle.

Wir verdanken Prof. Schrauf folgende Mittheilung über dieselben:

„Von dieser Substanz liegen theils weisse, limpide, papierdünne, bis 1 Cm. grosse Blättchen, theils bräunlich und undurchsichtig gewordene, dicktafelförmige oder, durch das Vorherrschen

der 3 Pinacoide, würfelähnliche Formen vor. Die Ausbildung der Krystalle ist schlecht. Die Mehrzahl derselben hat gestreifte, gekrümmte, vertiefte Flächen; ebene Flächen sind sehr selten. Die Substanz ist wegen ihrer Pseudosymmetrie in morphologischer und optischer Beziehung sehr interessant und zeigt ähnliche Phänomene, wie das bekannte gelbe Blutlaugensalz.

Monosymmetrisch, mit klinoquadratischem Habitus

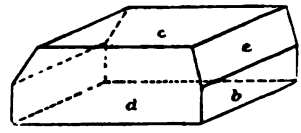
$$\eta = 90° 30' \quad a : b : c = 0{\cdot}99 : 1 : 1{\cdot}833.$$

Beobachtete Flächen:

$$c(001),\ a(100),\ b(010),\ d(201),\ e(011).$$

Fig. 4.

$ed = 74° 50'$ beobachtet.
$ce = 61\ \ 15$
$ca' = 90\ \ 32$



Die optischen Axen liegen in der Symmetrieebene, die Bissectrix fällt (mit geringer Differenz) mit der Normale auf die Basisfläche $c(001)$ zusammen. Schwache Doppelbrechung negativ. Ausgezeichnete Dispersion inclinée in Verbindung mit $\rho < v$. Im Tageslicht beobachtet, zeigt die vordere (im Intervall $(001)(201) = cd$) Axe eine schmale schwarze Hyperbel; die abgewendete Axe hingegen, die im Intervall $(001)(\bar{1}00)$ liegt, ist hingegen farbenprächtiger und der convexe Innenrand der Hyperbel breit blau gesäumt.

Aus den Messungen mit dem Schneider'schen Polarisationsmikroskop folgt für den scheinbaren Axenwinkel in Luft

EE_1 für roth $21° 10'$
EE_1 für blau $22\ \ 40$

Die Bissectrix für blau ist circa 1° geneigt gegen die Bissectrix für roth, und zwar liegt erstere näher an der blaugesäumten rückwärtigen Axe.

Ausser diesen zweiaxigen Blättchen kommen auch sehr häufig einaxige Krystalle vor. Man findet solche theils unter den papierdünnen Lamellen, theils unter den dicktafelförmigen; ihr Querschnitt ist ebenfalls quadratisch. Sie unterscheiden sich durch

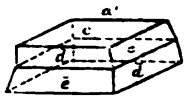
kein besonderes, etwa leicht erkennbares äusseres Merkmal von den zweiaxigen, gleichen denselben vollkommen und ein und derselbe Krystallanschuss aus der Mutterlauge lieferte beide Varietäten.

Die einaxigen Blättchen sind keine einfachen Krystalle, sondern sind entstanden durch Übereinlagerung zweier Individuen in gekreuzter Stellung, so dass die Axen *a* und *b* ihre Stellen tauschen. Das Phänomen gleicht desshalb jenem vollkommen, welches zwei kreuzweise übereinandergelagerte (schwach zweiaxige) Glimmerblättchen zeigen, wenn sich deren Axenebenen unter 90° schneiden.

Für solche kreuzweise Übereinanderlagerung genüge wohl im Allgemeinen für einen klinoquadratischen Körper, dessen Prismenwinkel ∞P nahe 90° ist, das Zwillingsgesetz: Die Prismenfläche ist die Zwillingsebene, die Basis der Juxtapositionsfläche. Drehungswinkel 180°.

Die Austheilung der beobachteten Flächen stimmt jedoch nicht genau mit diesem angedeuteten Gesetze. Unter der zahlreichen zu diesem Behufe untersuchten Blättchen fand sich ein einziges, an dem sich durch Messungen der Aufbau der superponirten Lamellen genau bestimmen liess.

Fig. 5.



Das Blättchen, dessen Form Fig. 5 darstellt, ergab:

$cd = 74\frac{1}{2}$ $c\bar{e} = 61°$
$ce = 61°$ $c\bar{d} = 75°$
$c\bar{a}' = 91°$ $\bar{e} : d =$ einspringend 14°.

Die Lage der Fläche $\bar{d}$ stimmt nicht mit dem oben angeführten Zwillingsgesetz, demzufolge $c\bar{d} = 105°$ sein würde. Das einfachste Zwillingsgesetz, welcher sowohl dem optischen Phänomen in der Bildung einaxiger Formen aus zweiaxigen Krystallindividuen, als auch diesen Messungen entspricht, lautet: Zwillingsebene die Basisfläche (001), der Drehungswinkel 90°. Die Substanz reiht sich durch dieses Gesetz jenen Fällen an, in welcher durch Beobachtung nachgewiesen ist, dass der Drehungswinkel für Krystalle $\frac{180°}{1 \ldots 2 \ldots 3}$ sein kann. Hier liegt der Fall

$\frac{180°}{2}$ vor, während z. B. den Beobachtungen von Henniges an den Krystallen von Tribrommesitylen $C_6Br_3(CH_3)_3$ der Drehungswinkel von 60° entsprach.“

Analysen.

I. 0·1543 Grm. gaben 0·432 Grm. CO_2 und 0·15 Grm. H_2O.

II. 0·2071 Grm. gaben 0·579 Grm. CO_2 und 0·2008 Grm. H_2O.

III. 0·307 Grm. gaben bei 20° und 737 Mm. 34 CCN.

In 100 Theilen:

	Gefunden				Berechnet für $C_6H_4<\begin{matrix}N(C_2H_5)_2\\N(C_2H_5)_2\end{matrix}$
	I.	II.	III.	IV.	
C	76·35	76·23	76·54	—	76·36
H	10·80	10·77	11·31	—	10·90
N	—	—	—	12·68	12·70

Chloroplatinat. Versetzt man eine salzsaure Lösung der Base mit Platinchlorid, so wird ein gut krystallinischer, hellgelber Niederschlag erhalten, der durch Lösen in heissem HClhaltigen Wasser gereinigt werden konnte. Kleine (1 Mm.) würfelförmige Krystalle von brauner Farbe. Tetragonal; beobachtete Flächen: c(001), a(100) untergeordnet m(110). Einaxig positiv mit sehr schwacher Doppelbrechung (Schrauf).

0·3233 Grm. gaben geglüht 0·0988 Grm. Platin.

0·2994 Grm. gaben 0·293 Grm. CO_2 und 0·1198 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_4<\begin{matrix}N(C_2H_5)_2\\N(C_2H_5)_2\end{matrix}+2HCl+PtCl_4$
C	46·68	46·66
H	4·2	4·13
Pt	38·86	30·88

Quecksilberdoppelsalz. Versetzt man eine salzsaure Lösung des Tetraäthylphenylendiamins mit $HgCl_2$, so erhält man

eine schöne Krystallisation. Prof. Schrauf theilte mir über das so erhaltene, aber umkrystallisirte Salz folgendes mit: „Von dieser Substanz lagen 1 Mm. kleine, vollkommen durchsichtige, theils grosse, röthlichweisse, halb durchsichtige, unvollkommen und skelettartig entwickelte Krystalle vor. Morphologische Details machen es wahrscheinlich, dass die Substanz asymmetrisch mit Axenwinkel nahe gleich 90° krystallisirt. Den am vorliegenden Materiale möglichen Messungen genügt das Parametersystem:

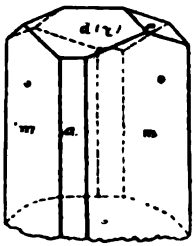
monosymmetrisch

$$\eta = 90° 20' \quad a : b : c = 0{\cdot}8754 : 1 : 0{\cdot}5655.$$

Beobachtete Flächen:

$a\,(100)$, $m\,(110)$, $d\,(101)$, $\tau\,(\bar{1}01)$, $e\,(011)$.

Fig. 6.



	Beob. Mittel	Gerechnet
ad	56°53′	—
$a\tau$	57 22	—
$'mm$	82 24	—
md	65 46	65°44′
$'m'\tau$	66 11	66 4′
me	71 4	70 51
$(010) : e$ =		60 30

Auf den Prismenflächen sind die Schwingungsrichtungen so orientirt, dass eine derselben nahe der Kante m/e zusammenfällt, die zweite bildet mit der Kante der Prismenfläche einen Winkel von 32 Grad.“

0·381 Grm. gaben, mit CaO geglüht etc., 0·1814 Grm. Hg und 0·3849 Grm. ClAg.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_4<^{N(C_2H_5)_2}_{N(C_2H_5)_2}+2HCl+2HgCl_2$
Hg.....	47·62	47·9
Cl	25·28	25·32

War nun die vorher beschriebene Base wirklich identisch mit dem tetraäthylirten Phenylendiamin?

Obgleich Hoffmann und später Wurster[1] die methylirten Abkömmlinge des Phenylendiamins untersucht hatten, mussten wir zum Vergleiche das Tetraäthylderivat desselben darstellen. Wir gingen vom Diäthylphenylendiamin aus Nitrosophenylendiamin mittelst $SnCl_2$ bereitet aus, und reinigten dasselbe, wie bereits oben angegeben wurde. 2 Molekule Jodäthyl vereinigen sich schon in der Kälte mit dem Diäthylphenylendiamin, die Reaction wurde bei 100° C. im zugeschmolzenen Rohre vollendet.

Der feste Röhreninhalt wurde, nachdem er mit Ätheralkohol gewaschen war, aus H_2O umkrystallisirt.

0·2561 Grm. gaben 0·3318 Grm. Kohlensäure und 0·1308 Grm. Wasser. 0·214 Grm. lieferten, mit CaO geglüht, 0·211 Grm. Jodsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_4<\begin{matrix}N(C_2H_5)_2\\N(C_2H_5)_2\end{matrix}+2HJ$
C	35·33	35·37
H	5·67	5·48
N	—	—
J.....	53·28	53·5

Die Ausbeute an diesem Jodid ist eine reichliche. Als wir dieses Jodhydrat mit Kalilauge versetzten, erhielten wir eine Base, die den Schmelzpunkt von 52° C., gleiche Krystallform, Siedepunkt 280° C. (uncorr.) zeigte. Ihr Platinsalz erwies sich mit dem vorhin beschriebenen, aus Azylin dargestellten, identisch. Mit Oxydationsmitteln, wie Jod, chromsaures Kalium, Eisenchlorid etc. Blau- oder Violettfärbung, genau wie mit jener aus dem Azylin bereiteten Base.

0·1878 Grm. gaben 0·5259 Grm. CO_2 und 0·1856 Grm. H_2O.

	Gefunden	Berechnet für $C_6H_4<\begin{matrix}N(C_2H_5)_2\\N(C_2H_5)_2\end{matrix}$
C	76·38	76·36
H	10.9	10·90

[1] Ber. 12.

Chlorhydrat, Pikrat sind gut charakterisirt, konnten aber noch nicht im analysenreinen Zustand erhalten werden.

Perjodid. Man erhält dasselbe durch Fällen einer alkoholischen Lösung der Base mit 3 Atome Jod, die ebenfalls in Alkohol gelöst sind.

Undurchsichtige, schwarze prismatische Formen in Alkohol schwer löslich.

0·1671 Grm. gaben, mit CaO geglüht, 0·1946 Grm. Jodsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $2C_6H_4<^{N(C_2H_5)_2}_{N(C_2H_5)_2}+6J$
J.....	62·95	63·39

Durch Alkalien wird Jodkalium und Kaliumjodat gebildet, die ursprüngliche Base regenerirt.

Durch analoge Behandlung unter denselben Umständen von Diäthylanilinazilin mit Jodmethyl wurde ein ähnliches Jodid erhalten, das sich mit Alkalien nicht, wohl aber mit Silberoxyd unter wahrscheinlicher Bildung von Ammoniumbasen umsetzt.

	Gefunden		Berechnet für $C_6H_4<^{N(CH_3J)_2}_{N(C_2H_5)_2}$
	I.	II.	
C	33·04	33·15	32·36
H	5·4	5·64	4·27
T	55·4	—	57·0

Hieraus geht hervor, dass dieses Jodid trotz wiederholter Krystallisation noch nicht rein erhalten wurde, ebenso liefern die Analysen des entsprechenden Pikrats noch kein befriedigendes Resultat.

Dimethylanilinazylin mit Jodäthyl liefert ein Jodid, welches mit Kalilauge in eine bei 275° C. siedende luftbeständige Base verwandelt wird.

Dipropylanilinazylin mit Jodäthyl gibt ein in kleinen Nadeln anschiessendes Jodid, das durch Alkalien in ein bei 295—300°C. (uncorr.) siedendes Öl zersetzt wird, welches auch bei gewöhnlicher Temperatur seine Consistenz beibehält.

Versuchen wir nun, aus den mitgetheilten Thatsachen einen Schluss auf die Constitution der Azyline zu ziehen, so drängt sich mit logischer Nothwendigkeit die Ansicht auf, dass der N in diesen Derivaten die Parastellung einnimmt, was durch die noch nicht veröffentlichten Resultate neuerer Oxydationsversuche mit MnO_2 und SO_4H_2 bestätigt wird, also

$$C_6H_4 \left\{ \begin{matrix} [1]N & = & N[1] \\ [4]N(C_2H_5)_2 & & N(C_2H_5)_2[4] \end{matrix} \right\} C_6H_4$$

Als Ausgangspunct wäre in dieser Reihe das noch unbekannte symmetrische Paradiamidoazobenzol anzusehen:

$$C_6H_4 \left\{ \begin{matrix} [1]N = N[1] \\ [4]NH_2 \quad NH_2[4] \end{matrix} \right\} C_6H_4$$

welches nach Einführung der Alkylreste in beide Amidogruppen die Azyline liefern sollte.

Ob nun dieses Paradiamidoazobenzol aus dem Diphenin, welchem nach A. W. Hoffmann bekanntlich folgende Structur formel zukömmt:

$$C_6H_3 \left[\begin{matrix} [1]NH & -HN[1] \\ [4]NH_2 & H_2N[4] \end{matrix} \right] C_6H_4$$

oder aus Dinitroazobenzol dargestellt werden kann, soll weiteren Versuchen vorbehalten bleiben.

Über das Pyrenchinon.

I. Abhandlung.

Von Dr. **Guido Goldschmiedt.**

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. v. Barth.)

Gräbe, welcher im Jahre 1871 das Pyren im höchst siedenden Theile des Steinkohlentheeres entdeckte, hat bereits das Verhalten dieses Kohlenwasserstoffes gegen Chromsäure untersucht. Er fand,[1] dass bei entsprechender Behandlung mit diesem Reagens ein Körper erhalten werde, der die Zusammensetzung $C_{16}H_8O_2$ hat, welcher also zu dem Pyren $C_{16}H_{10}$ in derselben Beziehung steht, wie Anthrachinon zum Anthracen. Diesen Angaben Gräbe's stehen die Resultate einer Untersuchung von E. Hintz,[2] in dem Strassburger Universitätslaboratorium ausgeführt und als Dissertation im Drucke erschienen, widersprechend gegenüber. Hienach bilden sich bei der Oxydation des Pyrens zwei Verbindungen, von denen keine das zu erwartende Pyrenchinon wäre. Die beiden Substanzen lassen sich dadurch von einander trennen, dass man das Oxydationsproduct anhaltend mit kohlensaurem Natrium in der Kälte extrahirt, in welchem Einer der beiden Körper löslich, der Andere unlöslich ist. Dem in kohlensaurem Natrium unlöslichen Körper, welcher nach entsprechender Reinigung rothe verfilzte Nadeln von den äusseren Eigenschaften eines Chinons darstellt, soll die Formel $C_{12}H_6O_2$[3] zukommen. Von dieser Substanz wurde ein Nitro- und ein Bromproduct dargestellt, deren Zusammensetzung nicht jener von

---

[1] Annal. d. Chem. et Pharm. 158, pag. 295.

[2] Beiträge zur Kenntniss des Pyrens und seiner Derivate, Inaugural-Dissertation. Strassburg, 1878. bei Heitz.

[3] Nach vier mit Präparaten von verschiedener Darstellung ausgeführten Analysen.

Derivaten des Oxydationsproductes $C_{12}H_6O_2$ entsprach. Der in kohlensaurem Natrium lösliche Theil hätte nach den Analysen von Hintz die Zusammensetzung $C_{15}H_6O_4$. Es ist eine gelbe krystallinische Substanz. Die Angabe Hintz', dass der rothe Körper $C_{12}H_6O_2$ bei weiterer Oxydation mit Chromsäuregemisch in die gelbe Verbindung $C_{15}H_6O_4$ übergehe, rechtfertigte wohl die Ansicht, dass mindestens Eine der von Hintz aufgestellten Formeln falsch sein müsse.

Zur Darstellung des Pyrenchinons wurde zuerst genau nach der Vorschrift Hintz' verfahren, was die relativen Mengen der dabei verwendeten Substanzen betrifft; nur habe ich jede einzelne Operation mit 10 Grm. Kohlenwasserstoff ausgeführt, während der genannte Chemiker nur 5 Grm. auf einmal verarbeitete. Nach mehrfacher Abänderung der Mischungsverhältnisse hat sich Nachstehendes als das Vortheilhafteste erwiesen: 10 Grm. feingeriebenes Pyren auf 15 Grm. Bichromat und 110 Grm. einer mit ihrem fünffachen Volum Wasser verdünnten Schwefelsäure. Das Gemische wurde am Sandbade erwärmt, und nachdem die Einwirkung sich gemässigt hatte, am aufsteigenden Kühler etwa eine Stunde gekocht, schliesslich in Wasser gegossen und das ziegelrothe Oxydationsproduct von der Chromalaunlösung abfiltrirt und gewaschen. Es wurde hierauf in einem beinahe ganz gefüllten Kölbchen mit bei gewöhnlicher Temperatur gesättigter kohlensaurer Natronlösung behandelt, welche, so lange noch etwas in Lösung ging, alle 24 Stunden erneuert wurde. Das verschlossene Kölbchen wurde häufig durchgeschüttelt; trotzdem war immer 30—40malige Extraction erforderlich, bis aus der angesäuerten Lösung keine Abscheidung von in kohlensaurem Natrium löslichem Oxydationsproducte zu bemerken war. Erst wenn dies erreicht war, wurde zur Reinigung des in Sodalösung nicht Aufgenommenen durch Umkrystallisiren aus Eisessig und Entfärben mit Thierkohle geschritten.

I. In kohlensaurem Natrium unlösliches Oxydationsproduct.

Die Lösung des Rohproductes der Oxydation in Eisessig war in der Regel sehr dunkel braun gefärbt, so dass sie selbst in dünnen Schichten undurchsichtig war; in diesem Zustande war auch beim Erkalten der Lösung die Abscheidung eine geringe

und es musste häufig ein Theil des Lösungsmittels abdestillirt werden, um eine ausgiebige Krystallisation zu erhalten, obwohl die Lösung nicht leicht und nur bei anhaltendem Kochen am aufsteigenden Kühler erfolgt war. Die Krystallisationen bestanden in der Regel aus zusammenhängenden Krusten, die braun bis schwarz gefärbt waren und oft schon mit freiem Auge, immer mit dem Mikroskope erkennen liessen, dass mehr oder weniger Pyren noch unoxydirt geblieben war. Häufig bestanden die ersten Krystallisationen auch aus kleinen kugelförmigen Aggregaten, die lose neben einander lagen und eine auffallende Härte zeigten. Brachte man einen Tropfen der heissen Eisessiglösung auf den Objectträger, so konnte man dann durch das Mikroskop die Ausscheidung solcher vollkommen runder kugliger Gebilde, neben den für Pyren charakteristischen rombischen Blättchen beobachten. Wurde nun eine solche Krystallisation aus Eisessig unter Anwendung von Thierkohle umkrystallisirt, so zeigte sich die fortschreitende Reinheit der Substanz nach den aufeinanderfolgenden Auflösungen daran, dass die Pyrenkrystalle immer in relativ geringerer Anzahl auftraten und dass die erwähnten kugeligen Aggregate eine zuerst zackige Begrenzung hatten, später als sternförmig gruppirte Nadeln erschienen und schliesslich als büschelförmig angeordnete gekrümte Nadeln auskrystallisirten und zwar in der Weise, dass immer je zwei solcher Büschel, mit ihrer schmalen Seite sich berührend, symmetrisch gegen einander gestellt waren. Da die Substanz nicht durch den Schmelzpunkt auf ihre Reinheit geprüft werden konnte, sie schmilzt nämlich nicht ohne Zersetzung, so musste man sich durch die Analyse von ihrer Reinheit überzeugen. Zur Analyse wurden nur Präparate verwendet, welche unter dem Mikroskope das beschriebene, von Pyrenkrystallen freie Bild zeigten. Trotzdem wurden sehr häufig Zahlen erhalten, welche entweder mehr oder auch weniger Kohlenstoff enthielten, als jene Präparate, welche eine Reihe von gut unter einander übereinstimmenden procentischen Werthen geliefert hatten. Wenn solche Präparate einer weiteren Reinigung durch Umkrystallisiren aus Eisessig mit Thierkohle unterzogen und dann wieder analysirt wurden, so hatten sie oft schon eine der erwähnten Reihe entsprechende Zusammensetzung, oder diese hatte sich mindestens im Sinne einer Näherung an dieselben

geändert. Da sich das mikroskopische Bild hierdurch auch nicht als verlässliches Kriterium für die Reinheit der Substanz erwiesen hatte, vielmehr, sowohl bei makro- wie mikroskopischer Betrachtung vollkommen einheitlich erscheinende Substanzen häufig als noch unrein erkannt worden waren, so ergab sich daraus die Nothwendigkeit, eine grosse Anzahl von Analysen auszuführen, und zur Darstellung von Derivaten nur analytisch rein befundene Substanz zu verwenden. Alle in dieser Arbeit angeführten Verbrennungen sind nach der Methode von Kopfer ausgeführt und habe ich, lange bevor Demel empfohlen hatte, schwer verbrennliche Körper im Schiffchen mit Platinmoor zu bedecken, mit gutem Erfolg platinirten Asbest verwendet.

Zur Analyse wurde die Substanz bei 130° getrocknet.

			Kohlensäure		Wasser
I.	0·2342 Grm.	Substanz gaben	0·7098 Grm.	und	0·0752 Grm.
II.	0·2626	„ „	0·7988	„	0·0918
III.	0·2600	„ „	0·7847	„	0·0832
IV.	0·2482	„ „	0·7500	„	0·0810
V.	0·2331	„ „	0.7092	„	0·0798
VI.	0·2260	„ „	0·6867	„	0·0740
VII.	0·2501	„ „	0·7570	„	0·0764
VIII.	0·2313	„ „	0·7035	„	0·0783
IX.	0·1310	„ „	0·3966	„	0·0486
X.	0·2312	„ „	0·6983	„	0·0808

In 100 Theilen gefunden:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.
C	82·66	82·96	82·31	82·41	82·97	82·86	82·58	82·94	82·19	82·37
H	3·56	3·38	3·53	3·62	3·80	3·63	3·60	3·75	4·12	3·88.

Im Mittel gefunden:

C.... 82·62
H.... 3·69

Dies stimmt in sehr befriedigender Weise mit der procentischen Zusammensetzung von Gräbe's Pyrenchinon, welchem nachstehende Zahlen entsprechen:

$$\underbrace{C_{16}H_8O_2}$$

C.... 82·75
H.... 3·45

Unter den zahlreichen Analysen von anscheinend reinem Chinon (ich habe deren über 30 ausgeführt) ergaben einige einen Procentgehalt an Kohlenstoff, welcher hinter demjenigen des Pyrenchinons um nahezu 2% zurückstanden; ich hebe aber ausdrücklich hervor, dass die gefundene Zahl für Kohlenstoff nie einen so niederen Werth erreichte, wie er dem angeblich von Hintz entdeckten Körper $C_{12}H_6O_2$ zukommt. Die Vermuthung, dass Hintz seine vier Analysen mit Substanzen von nahezu gleichem Grade der Unreinheit ausgeführt hat, gewinnt noch an Wahrscheinlichkeit, nachdem es mir gelungen ist, nachzuweisen, dass solche kohlenstoffärmere Fractionen nach weiteren Reinigungsversuchen einen höheren Kohlenstoffgehalt zeigten; so ist beispielsweise die Analyse IX mit einer Substanz ausgeführt, welche durch Umkrystallisiren von drei vereinigten Fractionen (von verschiedenen Darstellungen stammend), die bei der Analyse C... 80·80, 80·79 und 80·95, H... 3·82, 3·48 und 3·57 geliefert hatten, erhalten worden war. Als weiteren Beleg für die Reinheit meiner Substanzen will ich auch noch mittheilen, dass ich mehrmals Analysen von Fractionen, die nacheinander aus derselben Lösung auskrystallisirt waren, ausgeführt habe, welche unter einander übereinstimmende Resultate gegeben haben, so ist dies bei den mit III und IV und mit V und VI bezeichneten Analysen der Fall gewesen.

Ich habe es auch versucht, zur Darstellung von Pyrenchinon statt des Chromsäuregemisches freie Chromsäure anzuwenden und diese in eisessigsaurer Lösung auf den ebenfalls in Eisessig gelösten Kohlenwasserstoff einwirken zu lassen. Die Oxydation ist in dieser Weise durchgeführt, eine vollständigere, es bleibt weniger Pyren unangegriffen, hingegen ist das entstandene Oxydationsproduct viel unreiner und die Reindarstellung des Chinons noch viel schwieriger. Der Gedanke, es könnte eine vollständige Oxydation erreicht werden, ohne Bildung grösserer Mengen verunreinigender Nebenproducte, wenn es gelänge die Operation in der Weise auszuführen, dass der Kohlenwasserstoff in Lösung

gebracht und durch successive zu zersetzendes Kaliumbichromat oxydirt werde, veranlasste mich zu folgendem Versuche:

10 Grm. Pyren wurden in Eisessig gelöst und in die kochende Lösung in kleinen Portionen 15 Grm. Kaliumbichromat eingetragen. Nach vollständiger Reduction wurde ein Theil des Lösungsmittels abdestillirt, der Rückstand in Wasser gegossen, das ausgeschiedene Oxydationsproduct abfiltrirt und gewaschen und wie oben gereinigt. Da das Resultat kein auffallend günstigeres war, bin ich zu dem zuerst angegebenen Verfahren zurückgegangen, um so eher als die Abscheidung des Oxydationsproductes beim Verdünnen der essigsauren Lösung in so ausserordentlich feinem Zustande erfolgt, dass das Filtriren und Waschen nicht ohne Schwierigkeiten ist.

Das reine Pyrenchinon ist ein Haufwerk schöner Nadeln, deren Farbe je nach ihrer Dicke gelb bis roth ist. Es schmilzt nicht ohne Zersetzung und sublimirt nur zum geringeren Theile unzersetzt; selbst wenn man die Sublimation in einem evacuirten Kolben, der durch ein Oelbad vorsichtig erwärmt wird, vornimmt, geht der grössere Theil verloren; das so erhaltene Sublimat besteht aus schönen, dunkelbraunen Nadeln, mit metallisch grünem Reflex. Das Chinon ist in den gebräuchlichen Lösungsmitteln (Alkohol, Äther, Benzol, Petroläther, Chloroform, Aceton) nur spurenweise löslich, Xylol nimmt bei Kochhitze etwas mehr davon auf, nur heisser Eisessig ist ein gutes Lösungsmittel dafür. In Übereinstimmung mit Gräbe[1] habe ich gefunden, dass Pyrenchinon sich in Natriumbisulfit löst; dies geschieht übrigens erst beim Erwärmen und besonders dann leichter, wenn das fein geriebene Chinon früher mit Alkohol befeuchtet worden ist.

Die noch pyrenhaltigen Fractionen der zahlreichen Darstellungen wurden in Quantitäten von 25 Grm. mit 20 Grm. Bichromat und der entsprechenden Menge verdünnter Schwefelsäure nochmals oxydirt, und das Oxydationsproduct, wie oben beschrieben wurde, bis zur Erschöpfung mit Sodalösung extrahirt schliesslich mit Thierkohle aus Eisessig umkrystallisirt. Es wurden daraus noch beträchtliche Mengen Chinon erhalten, deren Reinigung aber noch häufigeres Umkrstallisiren erfor-

[1] Ber. d. d. chem. Gesellsch. VII, pag. 785.

derten. Die letzten Mutterlaugen wurden vereinigt, sie enthielten relativ geringe Mengen Chinon, obwohl sie sehr dunkel gefärbt waren, dagegen neben viel Pyren noch einen stark färbenden Körper. Der Eisessig wurde zum grössten Theile abdestillirt und die Flüssigkeit dann mit Wasser verdünnt. Es entsteht hierdurch eine dunkel fleischrothe Fällung, die abfiltrirt und gewaschen wurde; dieselbe vorzugsweise aus unangegriffenem Kohlenwasserstoff bestehend, wurde neuerdings nach der bekannten Vorschrift auf Chinon verarbeitet. Das Filtrat hinterliess nach dem Eindampfen auf dem Wasserbade eine schwarzbraune amorphe Masse, die vorläufig noch nicht untersucht worden ist, welche aber wahrscheinlich die Ursache des zu niederen Kohlenstoffgehaltes ist, welchen Hintz bei seinen Substanzen fand und den ich selbst bei meinen noch nicht ganz reinen Präparaten erhalten habe. Diese Lücke soll demnächst ausgefüllt werden.

Verhalten des Pyrenchinons bei der Destillation über Zinkstaub, über Natronkalk und über Ätzkalk.

3 Grm. Pyrenchinon wurden mit der 20fachen Menge Zinkstaub innig gemischt in eine Röhre gefüllt, noch etwas reiner Zinkstaub vorgelegt und die ganze Röhre, während ein langsamer Strom trockenen Wasserstoffes durchgeleitet wurde, auf einmal erwärmt; die Hitze wurde in der ganzen Ausdehnung der Röhre allmälig und gleichmässig gesteigert, bis das Auftreten dichter Dämpfe den Beginn der Reaction anzeigte. Es wurde auf diese Weise erreicht, dass die Reduction bei möglichst niederer Temperatur stattfand. Das Destillat bestand aus einem gelben, sehr schnell festwerdenden Öle, welches auf einer Thonplatte von etwas schmierigen Producten befreit, dann mit Thierkohle aus Alkohol umkrystallisirt wurde. Das Auskrystallisirte wurde in alkoholischer Lösung mit Pikrinsäure in Alkohol zusammengebracht, worauf sofort die Abscheidung rother Krystallnadeln erfolgte, welche schon nach einmaligem Umkrystallisiren den Schmelzpunkt der Pyrenpikrinsäure (222°) hatten. Nach dem Zerlegen dieser Verbindung mit Ammoniak schoss der Kohlenwasserstoff aus alkoholischer Lösung in den für Pyren charakteristischen Formen an und verflüssigte sich bei 147—48° (reines Pyren 148—49°). Es ist also Gräbe's Angabe, wonach Pyrenchinon durch glühenden Zinkstaub redu-

cirt wird, vollkommen richtig, hingegen hat Hintz wahrscheinlich die Reduction seines Oxydationsproductes, welches, wenn es wirklich nichts Anderes als unreines Pyrenchinon ist (woran kaum zu zweifeln), ebenfalls Pyren hätte liefern sollen, bei zu hoher Temperatur eingeleitet und deshalb nur ganz geringe Mengen schmieriger Zersetzungsproducte erhalten, während die Hauptmasse verkohlte. Die Ausbeute an Kohlenwasserstoff ist zwar keine glänzende zu nennen, doch habe ich aus den angewendeten 3 Grm. Chinon immerhin etwas über 0·5 Grm. Pyren erhalten.

Das von Gräbe[1] entdeckte interessante Verhalten mancher Chinone, wie jenes des Phenanthrens, des Anthracens und des Chrysens, bei der Destillation über glühenden Natronkalk, welches sich in vielen Fällen geeignet erwies, einen Einblick in die Constitution der zu Grunde liegenden Kohlenwasserstoffe zu bieten, war von dem genannten Forscher auch schon auf Pyrenchinon angewendet worden. Es konnte jedoch damals nicht mehr constatirt werden, als dass hiebei ein fester Körper gebildet werde. Ich habe diesen Versuch, der mir von besonderer Wichtigkeit zu sein schien, wiederholt, und gefunden, dass der feste Körper, welcher sich condensirt, der Hauptmenge nach jedenfalls Pyren ist. Dass nicht etwa ausserdem noch andere Substanzen in geringer Menge gebildet werden, möchte ich nicht behaupten, da ich den Versuch mit nur $1^1/_2$ Grm. Chinon ausgeführt habe. Ganz dasselbe Resultat wurde erhalten, als statt des Natronkalkes Ätzkalk genommen wurde. In beiden Fällen wurde die Bildung von Pyren durch Darstellung der Pikrinsäureverbindung constatirt.

Verhalten des Pyrenchinons in der Kalischmelze.

Trägt man Pyrenchinon in schmelzendes Ätzkali ein, so löst es sich bald auf; die Schmelze färbt sich dunkelroth und hat einen sehr starken metallisch grünen Reflex. Es wurde so lange erwärmt, bis deutlich Wasserstoff sich entwickelte. Die angesäuerte Schmelze wurde mit Äther ausgeschüttelt, welcher nach dem Verdunsten eine braunschwarze amorphe weiche Masse zurückliess, die nicht untersucht worden ist, da hiezu das Materiale

[1] Ber. d. d. chem. Gesellsch., VI, 66.

unzureichend war. Es wurde nur constatirt, dass dieselbe theilweise in kohlensaurem Natrium löslich ist und daraus in schmutzig graugelben Flocken durch Säuren wieder fällbar ist. Es scheint also hier die Bildung einer Säure stattgefunden zu haben, neben der von Pyrenhydrochinon, welch letzteres aus dem metallischen Reflex der mit rother Farbe löslichen Schmelze mit einiger Wahrscheinlichkeit geschlossen werden dürfte, wenn man den vorliegenden Beobachtungen die von Gräbe und Liebermann bei dem analogen Versuche mit Anthrachinon an die Seite stellt. Jedenfalls soll auch dieser Gegenstand weiter verfolgt werden.

Einwirkung von Brom auf Pyrenchinon.

Eine Lösung von reinem Pyrenchinon in Eisessig wurde mit Brom versetzt; die Lösung wurde am aufsteigenden Kühler gekocht, wobei unter Entweichen von Bromwasserstoff ein rothbrauner körnig krystallinischer Niederschlag ausfällt. Derselbe ist in den gewöhnlichen Lösungsmitteln sehr schwer löslich. Zur Reinigung wurde er wiederholt mit Eisessig ausgekocht. Es bleibt dann ein chocoladefarbiges krümmliches Pulver zurück, welches bei 310° noch nicht schmilzt und dem nach der Analyse die Formel eines Dibrompyrenchinons zukommt.

0·4153 Grm. Substanz gaben 0·4076 Grm. Bromsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_6Br_2O_2$
Br....	41·75	41·03

Die essigsauren Mutterlaugen wurden concentrirt, das beim Erkalten zuerst Auskrystallisirende entfernt, hierauf noch weiter eingeengt und das Auskrystallisirende nach dem Abfiltriren aus heissem Eisessig umkrystallisirt; das beim Erkalten sich abscheidende schon rothe, jedoch nur undeutlich krystallinische Pulver ist Dibrompyrenchinon.

0·3051 Grm. Substanz gaben 0·3662 Grm. Bromsilber.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_5Br_3O_2$
Pr.....	51·07	51·17.

Hintz hat bei Einwirkung von Brom auf die heisse Eisessiglösung des Körpers $C_{12}H_6O_2$ die Bildung eines Bromproductes mit 56·27% Brom ohne Bromwasserstoffentwicklung beobachtet; aus der vollständigen Analyse dieser Verbindung konnte keine Formel abgeleitet werden, welche in Beziehung zu dem Körper $C_{12}H_6O_2$ gebracht werden könnte; ebenso wenig lässt sich aber eine solche ableiten, unter der Voraussetzung Hintz', bromhältiger Körper sei ein Derivat des Pyrenchinons gewesen.

Einwirkung von Salpetersäure auf Pyrenchinon.

Die hier mitzutheilenden Beobachtungen sind durchaus nicht als abgeschlossen zu betrachten und werden nur als vorläufige mit aller Reserve gegeben, nachdem die Untersuchung fortgesetzt werden soll, eine ausführliche Publication über diesen Gegenstand wegen der grossen Schwierigkeit der Gewinnung reinen Pyrens sowohl, wie des Chinons daraus, aber noch ziemlich lange ausstehen dürfte.

Es wurde Pyrenchinon, so wie es Hintz mit der Verbindung $C_{12}H_6O_2$ gethan, mit verdünnter Salpetersäure (ein Theil concentrirte und zwei Theile Wasser) am Rückflusskühler gekocht, wobei es sich vollkommen unter Entwicklung rother Dämpfe löste. Beim Erkalten wurden hellcitronengelbe mikroskopische Kriställchen ausgeschieden, welche nach zweimaligem Umkrystallisiren aus verdünnter Salpetersäure nahezu dieselbe Zusammensetzung hatten, wie das von Hintz aus seinem chinonartigen Körper $C_{12}H_6O_2$ auf demselben Wege erhaltene Product.

I. 0·2655 Grm. Substanz gaben 0·5812 Grm. Kohlensäure und 0·0448 Grm. Wasser.

II. 0·4024 Grm. Substanz gaben bei B = 743·7 Mm. und t = 23°, 18·5 C. C. Stickstoff.

In 100 Theilen:

	Gefunden (Goldschmiedt)		(Hintz)
	I	II	
C.....	59·70	—	59·21
H.....	1·89	—	2·10
N.....	—	5·08[1]	4·31

[1] Der Stickstoffgehalt dürfte etwas zu hoch sein, da das zur Kohlensäureentwicklung verwendete Mangancarbonat, welches zu einer grösseren

Es ist mir nicht gelungen, aus diesen Zahlen eine Formel abzuleiten, die das vorliegende Nitroproduct als ein durch Substitution von Wasserstoff im Pyrenchinon Entstandenes anzusehen, gestatten würde. Es ist wahrscheinlich, dass ein an Kohlenstoff ärmeres Molekül durch Abspaltung gebildet worden ist. Am besten würde den gefundenen Zahlen die Formel $C_{14}H_5[NO]_2O_4$ entsprechen, welche C = 59·36, H = 1·77 N = 4·94 verlangt.

Die Deutung dieser Formel zu versuchen wäre verfrüht, da die Zusammensetzung der Nitroverbindung selbst noch weiterer analytischer Controlle bedarf. Indem ich mir die ausführlichere Besprechung dieser Verbindung für eine nächste Abhandlung vorbehalte, will ich nur erwähnen, dass dieselbe in kohlensauren Alkalien löslich ist, ja im Wasser suspendirt, mit kohlensaurem Barium gekocht, selbst dieses zu zersetzen vermag.

Eine andere Verbindung erhält man, wenn man Pyrenchinon mit einer mit dem zweifachen Volum Eisessig verdünnten Salpetersäure behandelt. Beim Kochen entweichen rothe Dämpfe, nach dem Erkalten krystallisirt zuerst etwas einer hellcitronengelben Substanz, wahrscheinlich die oben beschriebene Nitroverbindung, später schöne rothe, verfilzte Nadeln aus. Diese sind in heissem Eisessig ziemlich leicht löslich und scheiden sich daraus sehr schön in glänzenden rothen Nadeln ab; sie wurden wiederholt umkrystallisirt und nach dem Trocknen der auch unter dem Mikroskope vollkommen homogen aussehenden Substanz bei 140°, analysirt.

I. 0·1987 Grm. Substanz gaben 0·4367 Grm. Kohlensäure und 0·0450 Grm. H_2O.

II. 0·3309 Grm. Substanz gaben bei B = 735·4 und t = 20° 34 C. C. Stickstoff.

In 100 Theilen

	Gefunden	
	I	II
C.....	59·94	—
H.....	2·51	—
N.....	—	11·37.

Anzahl von Stickstoffbestimmungen, welche immer etwas zu hohen Stickstoffgehalt ergaben, gedient hatte sich, nachträglich geprüft, als Spuren von Stickstoff enthaltend erwies.

Auch hier soll vorläufig von der Aufstellung einer Formel abgesehen werden, nachdem ich nicht mehr genügendes Materiale besass, um obige Zahlen durch weitere Analysen zu controlliren und nur beiläufig erwähnt werden, dass eine Molekularformel mit 14 C. sich obiger Analyse am besten anpassen würde; $C_{14}H_6[NO_2]_2$ verlangt C = 59·50, H = 2·48 N = 11·57.

Einwirkung von Zinkstaub und Ammoniak auf Pyrenchinon.

5½ Grm. Pyrenchinon wurden mit 11 Grm. Zinkstaub und 40 Grm. mit dem fünffachen Gewichte Wassers verdünntem Ammoniak zusammengebracht. Schon bei gewöhnlicher Temperatur findet Einwirkung statt, daran erkennbar, dass sich das Chinon auflöst und die Flüssigkeit röthlich violett fluorescirend wird. Die Lösung ist sehr luftempfindlich und färbt sich an der Oberfläche tief dunkelroth. Unter wiederholtem Zusatz von verdünntem Ammoniak wurde etwa eine Stunde am aufsteigenden Kühler gekocht, bis die Flüssigkeit gelb geworden war, und dann unter Luftabschluss in mit dem dreifachen Volum Wasser verdünnte Salzsäure filtrirt. Es scheidet sich ein hellgelber Niederschlag ab, der schnell filtrirt und gewaschen wurde. Zur Reinigung wurde die Substanz in absolutem Alkohol gelöst und daraus durch Wasser gefällt und diese Operation, immer unter Luftabschluss, nochmals wiederholt. Die alkoholische Lösung zeigte eine sehr starke, dunkelblaue Fluorescenz. Die Filtration wurde in einer Kohlensäureatmosphäre ausgeführt und der gelbe krystallinische Körper im Vacuum über Schwefelsäure getrocknet. Die Analyse zeigte, dass ihm die Zusammensetzung $C_{16}H_{10}O_2$ zukommt.

I. 0·2680 Grm. Substanz gaben 0·8087 Grm. Kohlensäure und 0·1064 Grm. Wasser.

II. 0·2792 Grm. Substanz gaben 0·8360 Grm. Kohlensäure und 0·1120 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden		Berechnet für $C_{16}H_{10}O_2$
	I	II	
C.....	82·29	81·66	82·05
H.....	4·41	4·45	4·27

Das Pyrenhydrochinon geht sehr leicht in Pyrenchinon über, schon beim Stehen seiner Lösung scheidet sich Letzteres unter vorangehender Rothfärbung der Flüssigkeit in Gestalt rother Flocken ab, noch schneller erfolgt die Abscheidung beim Schütteln der Flüssigkeit mit Luft, augenblicklich nach Zusatz von etwas Eisenchlorid. Ein auf letzterem Wege gewonnenes Präparat wurde filtrirt, mit Wasser gewaschen und nach dem Trocknen bei 140° analysirt; es hatte die Zusammensetzung des Pyrenchinons.

0·2310 Grm. Substanz gaben 0·7009 Grm. Kohlensäure und 0·0800 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_8O_2$
C.....	82·75	82·75
H.....	3·84	3·45

Die Verbindung $C_{16}H_{10}O_2$ Pyrenhydrochinon, welche in ähnlicher Weise aus Pyrenchinon dargestellt worden ist, wie seinerzeit Gräbe und Liebermann[1] Anthrahydrochinon aus Anthrachinon erhalten hatten, konnte wie dieses die zwei Wasserstoffe in verschiedener Weise gebunden haben. Die Frage, ob dem Anthrahydrochinon $C_{14}H_{10}O_2$, die Constitutionsformel $C_{14}H_9\begin{cases}O\\OH\end{cases}$ oder $C_{14}H_8\begin{cases}OH\\OH\end{cases}$ zukomme, zu lösen, wurde erst viel später von Liebermann[2] versucht. Es gelang dies bekanntlich nicht mit Sicherheit für das Anthrahydrochinon selbst, da dieses bei der Acetyllirung manchmal Producte von der Zusammensetzung eines Monacetates, aber auch wieder solche, denen die Procentzahlen eines Diacetates zukamen, lieferte. Zu sicherem Aufschluss führte die Untersuchung des aethylirten, beziehungsweise amylirten Reductionsproductes des Anthrachinons, wonach festgestellt wurde, dass diese nach der Einführung eines Alkyls keine Hydroxylgruppe mehr enthalten, so dass ihnen die Formel $C_{14}H_9\begin{cases}O\\OR\end{cases}$ zugesprochen werden musste.

[1] Ber. d. deutsch. Chem. Ges. III, pag. 636.

[2] Ebendaselbst XIII, pag. 1596.

Das Pyrenhydrochinon nimmt, wie aus Nachstehendem ersichtlich, zwei Acetyle auf, es musste also wenigstens in dem von mir beobachteten Falle, zwei Hydroxylgruppen enthalten haben und die Formel $C_{16}H_8\begin{cases}OH\\OH\end{cases}$ besitzen, womit natürlich nicht behauptet werden soll, dass nicht auch beim Pyrenchinon unter Umständen die Reduction in anderer Weise verlaufen könnte, so dass ein den Oxanthranolen entsprechender Körper entstehen könnte.

Diacetylpyrenhydrochinon. Pyrenhydrochinon wurde etwa zwei Stunden mit essigsaurem Natrium und Essigsäureanhydrid am aufsteigenden Kühler gekocht, die Masse dann mit Wasser verdünnt, filtrirt und gewaschen. Der Filterrückstand besteht aus schönen, stark glänzenden, aber noch violett gefärbten Blättchen. Es wurde in Benzol gelöst, wobei ein geringer schwarzer Rückstand bleibt, mit Kohle entfärbt und im Vacuum krystallisiren gelassen. Es scheidet sich ein deutlich krystallinisches glitzerndes Pulver ab, das nur schwach gelblich gefärbt ist, bei 166—67° schmilzt und in Benzol, Alkohol und Äther ziemlich schwer löslich ist. Schmilzt man eine Probe desselben mit Ätzkali, so kann man dieselben Erscheinungen beobachten, wie beim Verschmelzen des Pyrenchinons.

0·2410 Grm. Substanz gaben 0·6639 Grm. Kohlensäure und 0·0939 Grm. Wasser.

In 100 Theilen

	Gefunden	Berechnet für $C_{16}H_8O_2[C_2H_3O]_2$
C.....	75·13	75·47
H.....	4·33	4·40

Durch die in dem Vorstehenden beschriebenen Untersuchungen ist somit vor Allem mit vollkommener Sicherheit festgestellt worden, dass das Pyren bei der Oxydation unter Verlust von zwei Wasserstoffatomen zwei Sauerstoffatome bindet, dass es sich also ganz ähnlich verhält wie Napthalin, Anthracen, Phenanthren, Idryl etc., das heisst ein Chinon bildet, wie dies ja schon von Gräbe vor langer Zeit beobachtet worden ist. Das

von Hintz über diesen Gegenstand Mitgetheilte muss als durchaus irrthümlich hingestellt werden. Für die Richtigkeit der Formel $C_{16}H_8O_2$, als derjenigen des primären Oxydationsproductes des Pyrens stimmen nicht allein die zahlreichen zu derselben führenden Analysen, sondern auch die verhältnissmässig leichte Reducirbarkeit zu Pyren durch Zinkstaub, beziehungsweise Natronkalk und Ätzkalk in der Glühhitze, ausserdem die Zusammensetzung der zwei Bromsubstitutionsproducte und des Pyrenhydrochinons. Die beiden beschriebenen Nitroverbindungen sind jedenfalls nicht als Substitionsproducte des Pyrenchinons aufzufassen; deren eingehendere Untersuchung soll feststellen, ob dieselben in naher Beziehung zu dem in kohlensaurem Natrium löslichen Oxydationsproducte des Pyrens stehen und vielleicht aus diesem selbst durch Einwirkung von Salpetersäure zu erhalten sind.

II. In kohlensaurem Natrium lösliches Oxydationsproduct.

Die aus dem Rohoxydationsproducte des Pyrens durch Behandlung mit kohlensaurem Natrium in der Kälte erhaltenen Lösungen waren bei den verschiedenen Darstellungen gelb bis nahezu braun gefärbt und dem entsprechend mehr oder weniger stark grün fluorescirend. Beim Ansäuern mit Salzsäure was immer sofort nach dem Abfiltriren geschah, fällt ein rothbrauner flockiger Niederschlag heraus, derselbe wurde von einer grossen Anzahl von Operationen vereinigt, filtrirt, gewaschen nochmals in kohlensaurem Natrium gelöst, von sehr geringen Mengen Unlöslichem getrennt und der Körper wieder durch Säure ausgefällt. Es ist mir nicht gelungen, aus den geringen Mengen (2—3 Grm.), die ich auf diese Weise als Nebenproduct der Pyrenchinondarstellung gewonnen hatte, die Substanz in so reinem Zustande darzustellen, wie Hintz, da ich immer nur undeutlich krystallinische Ausscheidungen aus Eisessig und auch bei Anwendung von Thierkohle in nicht erheblich hellerer Farbe erhalten habe. Besser gelang dies, als ich reines Pyrenchinon mit dem oben angeführten Oxydationsgemisch bis zur vollständigen Reduction des Letzteren kochte. Nach dem Verdünnen mit Wasser wurde filtrirt, gewaschen und der noch sehr viel Chinon enthaltende Niederschlag mit kohlensaurem Natrium wie gewöhnlich extrahirt. In diesem Falle waren die Lösungen hellgelb

gefärbt, nur wenig fluorescirend. Die daraus durch Salzsäure fällbaren Flocken waren hellcitronengelb gefärbt und in nicht unbeträchtlicher Quantität entstanden. Auch war daraus leichter, ein allem Anscheine nach reines Präparat zu erzielen, obwohl ich auch hier nicht so glücklich war, wie Hintz, es in „gelben kurzen dicken Nadeln" zu erhalten. Zwei, mit dem zweimal aus Eisessig umkrystallisirten Körper ausgeführte Verbrennungen gaben 69·97 und 69·68 Procent Kohlenstoff, 2·42 und 2·45 Procent Wasserstoff. Nach mehrmaligem Auskochen des Präparates mit absolutem Alkohol, in welchem dasselbe sehr schwer löslich ist, stieg der Kohlenstoffgehalt auf 71·49 Procent, Wasserstoff wurden 2·43 Procent gefunden. Hintz hat bei drei Verbrennungen Kohlenstoff 71·59, 71·85 72·02, Wasserstoff 2·50, 2·41 und 2·67 gefunden, was in ziemlicher Übereinstimmung mit meiner zuletzt aufgeführten Analyse steht. Daraus berechnete er die Formel $C_{15}H_6O_4$, welche für Kohlenstoff 72·00, für Wasserstoff 2·40 verlangt. Durch weitere Reactionen hat Hintz die Formel nicht gestützt und habe ich es mir zur Aufgabe gestellt, diesen Gegenstand in der nächsten Zeit eingehend zu bearbeiten.

Astronomische Untersuchung über eine von Archilochus und eine in einer assyrischen Inschrift erwähnte Sonnenfinsterniss.

Von **Bernhard Schwarz,**
stud. phil. in Wien.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. April 1883.)

1. Die Finsterniss des Archilochus.

Prof. v. Oppolzer wurde vor einiger Zeit von Dr. Jakob Krall auf folgendes Fragment des Archilochus (Fragm. 74, Bergk. erhalten bei Stob. Flor. CX, 10) aufmerksam gemacht, das auf eine Sonnenfinsterniss hinzuweisen scheint:

Χρημάτων ἄελπτον οὐδέν ἐστιν οὐδ' ἀπώμοτον
οὐδὲ θαυμάσιον, ἐπειδὴ Ζεὺς, πατὴρ Ὀλυμπίων
ἐκ μεσημβρίης ἔθηκε νύκτ' ἀποκρύψας φάος
ἠλίου λάμποντος· λυγρὸν δ' ἦλθ' ἐπ' ἀνθρώπους δέος.

In einer kurzen Note (Sitzungsberichte der k. Akademie der Wissenschaften in Wien LXXXVI. Bd.) hat nun v. Oppolzer darauf hingewiesen, dass mit einem hohen Grade von Wahrscheinlichkeit die in diesem Fragmente angedeutete Sonnenfinsterniss die vom Jahr — 647 April 5 (6. April 648 v. Chr. der Historiker) gewesen sei, zugleich aber beigefügt, dass sich seine Behauptung nur auf eine verhältnissmässig kurze Reihe von Finsternissen stütze, und dass es, um volle Gewissheit zu erlangen, nothwendig wäre, einen grösseren Zeitraum in Bezug auf Finsternisse zu untersuchen.

Ich habe es nun auf Anregung Prof. v. Oppolzer's unternommen, mit Hilfe seiner Syzygientafeln für den Mond (Publication der astronomischen Gesellschaft XVI) alle Finsternisse vom Jahre —707 bis —632 zu untersuchen, ein genügend grosser

Zeitraum, wenn man bedenkt, dass Archilochus nach neueren Forschungen etwa zwischen 700 und 640 v. Chr. gelebt habe.

In diesen näher untersuchten Zeitraum von 75 Jahren fallen nun 189 theils centrale, theils partielle Sonnenfinsternisse. Da nun die fragliche Finsterniss eine, wenn nicht totale, so doch gewiss sehr grosse gewesen sein muss, wenn sie auf die Menschen eine solche Wirkung ausüben sollte, wie sie Archilochus in dem Schlussverse

λυγρὸν δ' ἦλθ' ἐπ' ἀνθρώπους δέος

schildert, so können wohl die partiellen Finsternisse gänzlich ausser Acht gelassen werden, da in den niederen Breiten des griechischen Archipels, welcher hier hauptsächlich in Betracht kommt, bei überhaupt partiellen Sonnenfinsternissen nie ein so grosser Theil der Sonnenscheibe verdeckt werden kann, dass eine merkliche Lichtabschwächung einträte.

Um sogleich das Sicherheitsgebiet jeder centralen Sonnenfinsterniss übersehen zu können, habe ich für jede dieser 189 Finsternisse, welche central war, die geographischen Positionen jener drei Punkte ermittelt, in denen die Finsterniss bei Sonnenaufgang, im Mittage und bei Sonnenuntergang als centrale erscheint. Diese drei Hauptpunkte wurden nun auf Karten eingetragen, ein Kreisbogen durch dieselben gelegt und aus der Lage dieses Bogens das Hauptgebiet der Sichtbarkeit der betreffenden Finsterniss beurtheilt, da dieser Bogen der genauen Curve der Centralität meist sehr nahe kommt.

Der grösste Theil der so eingetragenen Finsternisse erwies sich als unsichtbar für den griechischen Archipel; jene aber, welche nur irgendwie für den griechischen Archipel und in Kleinasien hätten bedeutend sein können, habe ich näher untersucht und gebe im Folgenden eine Übersicht der Elemente derselben, indem ich bemerke, dass für die Richtigkeit der angeführten Daten dadurch gesorgt ist, dass dieselben durch eine von der eigenen völlig unabhängigen Rechnung von den Herren F. K. Ginzel, Freih. H. v. Rühling und J. Strobl geprüft sind, für deren Mühe ich denselben hiemit den wärmsten Dank ausspreche.

Die Bedeutung der Buchstaben ist dieselbe wie in den Syzygientafeln v. Oppolzer, auf welche ich mir zu verweisen erlaube. *r* deutet auf eine ringförmige *t* auf eine totale Finsterniss.

Tafel I.

Nr.	Datum des Neumondes in Greenw. Zeit			L'	Z	ε	P	Q	$\log p$	$\log \frac{p}{\Delta L}$	$\log q$	u'_a	$\log f_a$	Art der Finsternis
	Jahr		Julianischer Tag											
1	—704 Mai 5,	$2^h 40^m 4$	1464047·1114	36°720	−1°76	23°787	178°580	178°276	0·7449	9·7020	8·7056	0·5658	7·6627	*r.*
2	—703 Oct. 18,	22 37·9	1464578·9430	198·951	−2·84	787	8·841	11·290	0·7148	9·7361	8·7351	0·5542	7·6761	*r.*
3	—701 März 4,	20 48·2	1465080·8668	336·934	+3·73	787	173·623	173·675	0·6897	9·7644	8·7605	0·5342	7·6687	*t.*
4	—699 Aug. 6,	3 5·2	1465966·1286	125·556	+0·45	788	8·945	7·071	0·6996	9·7539	8·7502	0·5391	7·6672	*t.*
5	—690 Juli 28,	2 34·2	1469244·1071	116·630	+0·24	790	173·604	172·184	0·6948	9·7591	8·7550	0·5356	7·6661	*t.*
6	—688 Jan. 10,	21 48·1	1469755·9084	284·054	+2·66	788	9·343	7·879	0·7389	9·7070	8·7112	0·5706	7·6752	*r.*
7	—678 Juni 16,	18 8·6	1473585·7560	77·036	−1·91	787	4·027	5·832	0·7353	9·7137	8·7143	0·5592	7·6627	*r.*
8	—661 Jan. 12,	0 58·3	1479639·0405	235·638	+2·83	784	173·143	171·209	0·7332	9·7144	8·7168	0·5662	7·6752	*r.*
9	—660 Juni 27,	0 49·2	1480171·0342	87·464	−1·32	784	3·162	4·888	0·7365	9·7123	8·7136	0·5604	7·6633	*r.*
10	—656 Apr. 14,	20 22·3	1481558·8488	17·719	−0·15	786	7·057	6·880	0·6898	9·7646	8·7596	0·5314	7·6641	*t.*
11	—650 Juni 1,	21 49·1	1483802·9091	67·886	−2·25	782	175·832	175·184	0·7439	9·7030	8·7064	0·5651	7·6623	*r.*
12	—649 Nov. 21,	0 18·4	1484335·0128	232·521	−2·74	781	8·761	11·179	0·7186	9·7314	8·7312	0·5579	7·6777	*r.*
13	—647 Apr. 5,	20 30·0	1484836·8542	8·905	+0·75	780	171·748	172·223	0·6907	9·7640	8·7597	0·5322	7·6649	*t.*
14	—645 Sept. 8,	3 15·6	1485722·1358	157·911	−0·33	779	7·512	5·916	0·6964	9·7568	8·7538	0·5396	7·6715	*t.*
15	—640 Nov. 10,	20 44·3	1487612·8641	222·982	−3·12	783	172·738	175·037	0·7251	9·7234	8·7243	0·5624	7·6774	*r.*
16	—636 Aug. 29,	2 34·7	1489000·1074	148·801	+0·10	783	171·938	170·878	0·6923	9·7610	8·7573	0·5366	7·6701	*t.*
17	—634 Febr. 11,	21 4·5	1489531·8781	316·986	+4·47	782	8·525	6·791	0·7364	9·7109	8·7134	0·5661	7·6715	*r.*

Um nun die Verhältnisse, unter welchen diese Finsternisse stattfanden, näher zu untersuchen, habe ich für jede derselben die nördliche und südliche Grenzcurve der Centralität berechnet. Vorerst setze ich die zu diesen Berechnungen nöthigen Constanten hier an, indem ich deren Bezeichnungsweise wieder den Syzygientafeln entlehne.

Tafel II.

Nr.	log q	log r	log s	log p'_n	log p'_s	log $(\gamma+u'_i)$	log $(\gamma-u'_i)$	G	K
1	7·6745	0_n8326	1·4602	9·9740	9·9725	9·0737	9·1917	44°675	86°634
2	7·6701	0·9996	1·4188	9·9764	9·9770	9·8956	9·9031	23·133	87·701
3	7·6610	0_n8546	1·3920	9·9752	9·9746	9·7436	9·7225	151·833	92·671
4	7·6402	0·5764	1·4156	9·9679	9·9693	9·8938	9·8846	115·150	92·895
5	7·6337	0·8437	1·3986	9·9486	9·9502	9·7488	9·7302	129·907	96·206
6	7·6369	0_n7407	1·4591	9·9522	9·9555	9·9356	9·9585	118·139	94·681
7	7·6241	0_n7159	1·4530	9·9544	9·9526	9·5658	9·5931	62·978	85·494
8	7·6375	9_n7058	1·4595	9·9620	9·9638	9·7952	9·8208	92·831	90·427
9	7·6226	0_n4964	1·4590	9·9577	9·9560	9·4564	9·4945	73·461	87·240
10	7·6586	1_n0816	1·3548	9·9393	9·9399	9·7885	9·7655	12·803	86·205
11	7·6275	0_n2444	1·4701	9·9658	9·9642	9·5834	9·6220	80·226	88·622
12	7·6520	0·6311	1·4373	9·9684	9·9698	9·8933	9·9049	62·622	86·964
13	7·6619	0_n8958	1·3885	9·9760	9·9762	9·8548	9·8361	10·924	88·844
14	7·6643	0_n8658	1·3992	9·9748	9·9754	9·8158	9·8055	153·000	92·582
15	7·6581	1·0337	1·4158	9·9430	9·9442	9·8148	9·8344	32·231	83·162
16	7·6582	1·0475	1·3680	9·9410	9·9420	9·8438	9·8302	157·041	95·883
17	7·6522	1_n0458	1·4283	9·9430	9·9442	9·8948	9·9151	147·750	96·840

Diese constanten Hilfsgrössen sind für die Grenzcurven der Centralität massgebend. Mit denselben erhielt ich für das in Betracht kommende Gebiet die folgenden Curvenpunkte:

Tafel III.

Nr.	Wahre Ortszeit	Nördliche Grenzcurve		Südliche Grenzcurve	
		λ	φ	λ	φ
1	3^h20^m	346°04	+28°32	345°93	+26°55
	4 00	353·23	+27·85	353·07	+26·01
	4 40	1·02	+26·87	0·85	+24·94
	5 20	9·44	+25·37	9·25	+23·35
	6 00	18·59	+23·40	18·42	+21·26
2	23 20	21·15	+52·79	21·11	+51·80
	0 00	28·04	+49·10	27·94	+48·18
	0 40	34·55	+45·51	34·31	+44·66
	1 20	40·59	+42·22	40·41	+41·37
	2 00	46·69	+39·36	46·47	+38·54
	2 40	53·01	+37·10	52·75	+36·25
	3 20	59·82	+35·53	59·48	+34·62
3	22 40	34·64	+20·80	35·03	+18·38
	23 20	40·34	+23·53	40·88	+21·08
	0 00	46·07	+26·77	46·34	+24·18
	0 40	52·05	+30·01	52·21	+27·54
	1 20	58·43	+33·47	58·48	+31·02
	2 00	65·86	+36·87	65·29	+34·50
4	4 40	15·14	+55·43	14·40	+53·53
	5 20	22·92	+51·31	22·16	+49·37
	6 00	31·19	+47·11	30·45	+45·12
	6 20	40·15	+43·02	39·45	+40·99
5	3 20	358·62	+39·46	357·84	+37·01
	4 00	5·22	+34·22	4·47	+31·87
	4 40	12·33	+28 87	11·65	+26·66
	5 20	20·18	+23·68	19·62	+21·65
	6 00	29·00	+18·95	28·53	+17·09
6	22 00	14·20	+39·75	15·36	+34·16
	22 40	20·52	+40·17	21·38	+34·59
	23 20	26·54	+42·03	27·14	+36·24
	0 00	32·68	+45·31	32·95	+39·08
	0 40	39·34	+50·14	39·15	+43·07

(λ Länge östl von Greenwich, φ geogr. Breite.)

Nr.	Wahre Ortszeit	Nördliche Grenzcurve		Südliche Grenzcurve	
		λ	φ	λ	φ
7	19h20m	40°35	+23°37	40°71	+20°97
	20 00	47·46	+27·17	47·82	+25·87
	20 40	53·96	+31·73	54·31	+30·51
	21 20	59·80	+35·86	60·44	+34·72
8	3 20	16·90	+29·90	16·28	+27·04
	4 00	25·37	+34·16	24·67	+31·06
	4 40	34·86	+38·63	34·01	+35·56
9	2 40	12·07	+41·31	11·89	+40·14
	3 20	18·97	+39·70	18·73	+38·47
	4 00	26·11	+37·51	25·84	+36·20
	4 40	33·63	+34·72	33·23	+33·31
	5 20	41·52	+31·36	41·32	+29·84
	6 00	50·28	+27·49	50·00	+25·86
	6 40	59·76	+23·21	59·52	+21·46
10	21 20	23·61	+29·18	24·65	+25·89
	22 00	29·15	+35·17	30·18	+31·73
	22 40	34·74	+41·19	35·57	+37·67
11	23 20	22·27	+46·00	22·24	+44·27
	0 00	28·49	+46·74	28·54	+45·02
	0 40	34·98	+46·99	34·91	+45·26
12	2 00	16·65	+32·70	16·38	+31·16
	2 40	23·39	+33·37	23·04	+31·77
	3 20	30·86	+35·09	30·39	+33·22
	4 00	39·14	+37·40	38·56	+35·45
13	21 20	18·90	+39·52	19·80	+36·36
	22 00	25·40	+42·96	26·20	+39·72
	22 40	31·87	+46·45	32·75	+43·16
	23 20	38·53	+49·83	38·95	+47·09
14	4 40	358·05	+29·66	357·91	+28·17
	5 20	6·96	+26·99	6·85	+25·63
	6 00	16·63	+24·84	16·56	+23·61

Nr.	Wahre Ortszeit	Nördliche Grenzcurve		Südliche Grenzcurve	
		λ	φ	λ	φ
15	21h20m	23°64	+55°27	24°15	+51°97
	22 00	32·24	+50·09	32·50	+46·74
	22 40	39·88	+44·37	39·89	+40·93
	23 20	46·54	+38·41	46·31	+35·20
	0 00	52·35	+32·60	51·93	+29·52
16	4 40	14·27	+26·14	13·50	+23·89
	5 20	22·25	+21·89	21·42	+19·88
	6 00	31·61	+18·69	30·70	+16·84
17	21 20	17·92	+29·77	19·22	+25·27
	22 00	23 55	+32·78	24·78	+28·03
	22 40	28·88	+37·02	30·01	+31·92
	23 20	34·28	+42·45	35·20	+36·89
	0 00	40·22	+48·82	40·80	+42·79

Die aus diesen Daten folgenden Grenzcurven der Totalität oder Ringförmigkeit sind nun für jede einzelne Finsterniss auf den zwei beigegebenen Karten eingetragen, von denen die I. die totalen, die II. die ringförmigen Finsternisse enthält.

Wie aus Tafel III folgt, fällt das Centralitätsgebiet der 5. und 16. Finsterniss nicht mehr in das Gebiet der Karte, weshalb diese Finsternisse auch nicht weiter in Frage kommen. Wenn das Sichtbarkeitsgebiet einer Finsterniss im Gebiete der Karte endet, ist dies durch eine beide Grenzcurven verbindende Gerade angedeutet, während alle andern, in der Karte nicht abgeschlossenen Räume erst ausserhalb derselben ihren Abschluss finden.

Bevor ich nun zur Discussion der vorliegenden Rechnungsresultate übergehe, will ich einiges über den Aufenthaltsort des Dichters vorausschicken.

Archilochus soll die längste Zeit seines Lebens auf Paros zugebracht haben und, wie man vermuthet, erst gegen Ende desselben nach Thasos gekommen sein, auf welcher Insel er einigen Grundbesitz hatte. Da nähere Aufschlüsse fehlen, kann man annehmen, dass der Dichter in seinem Fragmente einen Eindruck schildert, den er selbst und seine Umgebung von der Sonnenfinsterniss empfangen hatte, welche Annahme nach der Lebendig-

keit der Schilderung sehr wahrscheinlich ist. Es wurden daher die geographischen Coordinaten der beiden Inseln Paros und Thasos den weiteren Berechnungen zu Grunde gelegt.

Von diesem Gesichtspunkte aus, können nun diejenigen Finsternisse ausgeschieden werden, deren Grenzcurven gar zu weit ab von den erwähnten Inseln verlaufen, so dass also, wie ein Blick auf die Karte zeigt, nur folgende Finsternisse für Paros und Thasos irgendwie bedeutend werden können:

Von den ringförmigen:

Nr. 6 vom Jahre —688 Januar 10
8 —661 Januar 12
9 —660 Juni 27
17 —634 Februar 11.

Von den totalen:

Nr. 10 vom Jahre —656 April 14
13 —647 April 5.

Ich will nun jede der beiden Gruppen gesondert betrachten, um dann zum Schlusse die Ergebnisse zusammenfassen zu können.

Von den ringförmigen Finsternissen kann die Finsterniss Nr. 8 vom 12. Januar —661 schon von vornherein von der Untersuchung ausgeschlossen werden, da deren Centralitätszone ziemlich abseits von Paros und Thasos verläuft und auch noch desshalb, weil sie im Januar gegen Sonnenuntergang stattfindet, während das Fragment ausdrücklich besagt, dass die Finsterniss während der hellen Tagesstunden stattgefunden habe.

Für die allein übrig bleibenden drei Finsternisse ergeben sich nun folgende Daten:

Nr.	Auf Paros		Auf Thasos	
	Zeit der gr. Phase	Grösse	Zeit der gr. Phase	Grösse
6	$23^h\ 7^m$	11'32	$23^h\ 7^m$	11'18
9	3 56	11·70	3 48	10'69
17	23 30	10·11	23 56	10·08

Die Grösse der Finsterniss zur Zeit der grössten Phase ist in Zollen angegeben, von denen 12 auf den Sonnendurchmesser gehen; die Zeit ist wahre Ortszeit.

Obwohl die 6. Finsterniss, wenigstens für Paros, sehr bedeutend wird, möchte ich derselben doch nicht jene Bedeutung für den vorliegenden Fall beimessen, wie der 9. und 17., schon aus dem Grunde, weil sie in den Januar, also zur Winterszeit, fällt, wo in Griechenland häufig bewölkter Himmel ist, so dass also diese Finsterniss sehr leicht der Beobachtung entgangen sein könnte.

Würde man den Worten des Dichters

„Ζεύς ἐκ μεσημβρίης ἔθηκε νύκτα"

die Bedeutung einer näheren Zeitangabe beimessen, also übersetzen

„Gleich nach dem Mittage stellte Zeus die Nacht her"

so könnte von den ringförmigen Finsternissen nur Nr. 17 in Betracht kommen — diese desshalb, weil die Zeit ihrer grössten Phase nur 12 Minuten vom mittleren Mittag absteht — während vom Standpunkte der freieren Übersetzung, welche auch Prof. v. Oppolzer vertritt, entschieden die 6. und 9. Finsterniss wenigstens für Paros der 17. vorzuziehen wären.

Ich für meinen Theil glaube, dass, falls die beiden Merkmale, welche Archilochus dieser Finsterniss beilegt, nämlich die Zeit, zu der sie stattfand, und die Einwirkung auf die Menschen, für eine und dieselbe Finsterniss nicht zu vereinigen sind, dem zweiten Merkmale, als dem für den Dichter verhältnissmässig leichter zu beobachtenden und zu schildernden vor dem ersten, als einen vom dichterischen Schwunge mehr abhängigen, unbedingt der Vorzug eingeräumt werden muss; und dies berücksichtigend, möchte ich mich, wenn nur ringförmige Finsternisse zugelassen würden, für die Finsterniss Nr. 9, d. i. für die vom

27. Juni —660 (661 v. Chr., 27. Juni der Historiker)

entscheiden, obwohl die grösste Phase von 11'70 erst um 3 Uhr 56 Minuten Nachmittags eintrat.

Wenden wir uns nun zu den totalen Finsternissen. Schon die Karte zeigt, dass die Wahl unter den zwei einzig möglichen, nämlich der 10. und 13., nicht schwer ist, denn für dieselben ergeben sich folgende Grössen:

Nr.	Datum	Auf Paros		Auf Thasos	
		Zeit der gr. Phase	Grösse	Zeit der gr. Phase	Grösse
10	—656 Juni 14	21^h44^m	10'80	21^h48^m	10'05
13	—647 April 5	21 50	11·42	21 53	12·33

Während also beide Finsternisse beinahe um dieselbe Tageszeit — etwa um 10 Uhr Vormittags — ihre grösste Phase erreichen und auch für Paros beinahe gleich gross werden, ist die 13. Finsterniss vom 6. April 648 v. Chr. (das Jahr historisch, der Tag bürgerlich) für Thasos total und von ziemlich langer Dauer, wie schon das Übergreifen des Mondrandes um 0·33 Zoll über den Sonnenrand zeigt. Da bei keiner der beiden Sonnenfinsternisse die Zeit der grössten Phase mit der Angabe des Archilochus stimmt, falls man wörtlich übersetzen wollte, die 13. Finsterniss aber an beiden Orten, besonders auf Thasos, die 10. an Grösse bedeutend übertrifft, so kann von den totalen nur die Finsterniss vom

5. April —647 (6. April 648 v. Chr. der Historiker)

in Frage kommen.

Fasst man nun die Resultate zusammen, so hätte man sich von den beiden Finsternissen

Nr.	Datum	Auf Paros		Auf Thasos	
		Zeit der gr. Phase	Grösse	Zeit der gr. Phase	Grösse
9	—660 Juni 27	3^h56^m	11'70	3^h48^m	10'69
13	—647 April 5	21 50	11·42	21 53	12·33

für eine zu entscheiden.

Auf den ersten Blick schon sieht man, dass die Finsterniss 13 vom Jahre —647 den Vorzug vor der des Jahres —660 besitzt,

welche als nur ringförmig in ihren Wirkungen geringer sein musste, als die ersterwähnte, deren Totalitätsdauer für Thasos sich auf mehr als 5 Minuten stellt.

Würde man also dem Eintreten der Totalität und deren langen Dauer, welche beide Umstände sehr zu Gunsten der Finsterniss 13 sprechen, ja dieselbe beinahe als allein mit den Versen des Dichters in Einklang stehend hinstellen, weniger Gewicht beimessen, so würde die weitere Entscheidung das Gebiet des Astronomen verlassen. Es wäre nämlich irgendwie näher zu ergründen, wo sich der Dichter gegen Ende seines Lebens aufgehalten habe, in welchem Falle die Entscheidung leicht getroffen wäre, da die eine Finsterniss auf Paros, die andere auf Thasos besonders bedeutend war.

Es ist also durch diese umfassendere Untersuchung die Wahrscheinlichkeit, in der Finsterniss vom Jahre

—647 April 5

die von Archilochus erwähnte Sonnenfinsterniss vor sich zu haben, um Erhebliches gegenüber der Wahrscheinlichkeit, welche Prof. v. Oppolzer haben konnte, gestiegen, ohne jedoch zur vollen Gewissheit werden zu können.

II. Die Finsterniss des Asurbanipal.

In denselben Zeitraum, der zum Behufe der näheren Aufklärung über die Archilochus-Finsterniss untersucht wurde, fällt auch eine in Assyrien beobachtete Finsterniss, welche unter der Regierung des Asurbanipal stattgefunden haben soll.

Auch auf diese Sonnenfinsterniss hat Dr. Jakob Krall zuerst die Aufmerksamkeit gelenkt durch die Mittheilung einer assyrischen Inschrift, welche nach Opperts Übersetzung (Göttinger gelehrte Anzeigen 1880, p. 1488) folgendermassen lautet:

„Im Monate Tammuz fand eine Finsterniss des Herrn des Tages, des Gottes des Lichtes, statt. Die untergehende Sonne liess davon ab zu leuchten, und wie diese liess auch ich davon ab, während [Lücke im Texte] Tage den Krieg gegen Elam zu beginnen."

Dr. Krall fügt hinzu, dass Asurbanipal nach dem Canon des Ptolemäus im Jahre 668 v. Chr. zur Regierung gekommen sei.

Um nun leichter eine Entscheidung treffen zu können, welche von den möglichen Finsternissen den in der Inschrift angegebenen näheren Umständen entspricht, wird es nothwendig sein, einige Bemerkungen über die babylonisch-assyrische Zeitrechnung vorauszuschicken, welche ich ebenfalls den Mittheilungen Dr. Krall's verdanke.

Für die Assyrer, wie für die semitischen Völker überhaupt, war für die Zeitrechnung nicht die Sonne, sondern der Mond massgebend, nach welchem sich auch Jahres- und Monatsanfang richteten. Wie die Juden begannen auch die Assyrer mit dem ersten Neumonde vor der Frühlings-Tag- und Nachtgleiche ihr Jahr, welches sie in 12 oder 13 Monate eintheilten, je nachdem dasselbe ein gewöhnliches oder ein Schaltjahr war. Da sie die Monate mit dem Sichtbarwerden der Mondsichel begannen, so ist es bei der Zeitangabe einer Sonnen- oder Mondesfinsterniss nicht weiter nöthig auch noch den Monatstag anzugeben, da alle Mondesfinsternisse in die Mitte des Monats, also auf den 14. oder 15., alle Sonnenfinsternisse jedoch gegen Ende desselben, auf den 29. oder 30. fallen müssen, da zu diesen Zeiten der Mond sich in Opposition, respective Conjunction mit der Sonne befindet. Die Inschrift gibt also mit Ausnahme des Jahres mit genügender Genauigkeit das Datum der Finsterniss an.

Da aus dem weiteren Texte, der hier nicht mehr angeführt wurde, noch soviel hervorgeht, dass zur Zeit der Sonnenfinsterniss der eigentliche Feldzug noch nicht begonnen hatte, da Asurbanipal noch im Monate Ab, der auf den Thammuz folgt, der Istar von Arbela opfert, also noch in Assyrien ist, so kommt als Ort, für den die näheren Umstände der Finsternisse zu rechnen wären, vorerst Niniveh, die Hauptstadt des assyrischen Reiches in Betracht.

Die Finsterniss wurde von den Assyrern unter die schlimmen Vorzeichen für den elamitischen König aufgezählt, woraus hervorgeht, dass die Finsterniss auch in Susa, der Hauptstadt von Elam, sehr bedeutend gewesen sein muss. Es wurden also auch für Susa die näheren Umstände der Finsternisse untersucht.

Wie die Karte zeigt, können folgende Finsternisse für Niniveh oder Susa bedeutend werden:

Nr.	3* vom Jahre	—701 März	4
	4*	—699 August	6

Nr.	7 vom Jahre	—678 Juni	16
	9	—660 Juni	27
	10*	—656 April	14
	12	—649 November	21
	15	—640 November	10

Die mit * bezeichneten Finsternisse sind total, die übrigen ringförmig. Diese ziemlich grosse Anzahl der in Betracht kommenden Finsternisse reducirt sich bedeutend, wenn man die in der Inschrift angegebene Zeit berücksichtigt.

Da das Frühlingsäquinoktium in den Monat März fällt, so muss der Jahresanfang der Assyrer Ende Februar oder Anfangs März stattfinden. Nimmt man nun, nach Analogie mit den Juden, welche in der babylonischen Gefangenschaft den assyrisch-babylonischen Kalender übernahmen, den in der Inschrift erwähnten Thammuz als den 4. in der Reihenfolge der Monate an, so muss die fragliche Finsterniss im Juni oder Anfangs Juli stattgefunden haben.

Dies berücksichtigend, können die Finsternisse Nr. 3, 4, 10, 12 und 15 gänzlich übergangen werden, so dass also zur näheren Discussion nur die 7. und 9. Finsterniss übrig bleiben. Diese zeigen folgende Umstände:

Nr.	Datum	Susa		Niniveh	
		Zeit der gr. Phase	Grösse	Zeit der gr. Phase	Grösse
7	—678 Juni 16	20^h14^m	10^d58	19^h57^m	8^d82
9	—660 Juni 27	5 48	10·41	5 20	9·91

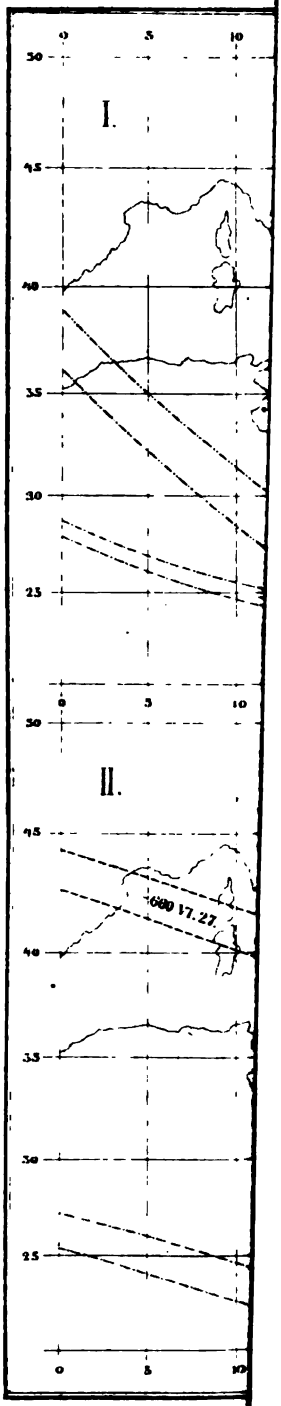
Da aber die Inschrift weiter sagt, dass die Finsterniss gegen Sonnenuntergang stattgefunden habe, so kann die siebente Finsterniss als eine vormittägige gänzlich übergangen werden. Es bleibt also nur die neunte Finsterniss übrig, welche also nothwendig die des Asurbanipal gewesen sein muss. Die Sonne geht in der That für das Datum dieser Finsterniss sowohl für Niniveh als auch für Susa einige Minuten nach 7 Uhr unter, so dass das Ende der Finsterniss sehr nahe mit dem Sonnenuntergange zu-

sammenfällt. Berechnet man, um ganz sicher zu gehen, für dieselbe auch das Datum nach der assyrisch-babylonischen Zeitrechnung, so findet man Folgendes:

Der erste Neumond vor dem Frühlingsäquinoktium des Jahres —660 fällt auf den 29. Februar 11 Uhr Greenwicher Zeit, so dass also der 1. März als der erste des ersten assyrischen Monats erscheint. Da die synodische Umlaufszeit des Mondes etwas über 29 Tage 12 Stunden dauert, so müssen die assyrischen Monate abwechselnd 29 und 30 Tage gehabt haben, soll die Zeitrechnung mit dem Mondlaufe im Einklange bleiben. Gibt man nun, da nähere Aufschlüsse fehlen, dem ersten Monat 30, dem zweiten 29 Tage u. s. f., so fiele der 27. Juni als der Tag der Finsterniss auf den 29. Thammuz, also übereinstimmend mit der Zeitangabe in der Inschrift. Es kann also — und zu diesem Resultate kommt auch Oppert in seinen Vorlesungen — gar keinem Zweifel unterliegen, dass die Finsterniss vom Jahre

—660 Juni 27 (27 Juni 661 v. Chr. der Historiker)

diejenige gewesen sei, welche den Asurbanipal abhielt, gegen Elam den Krieg zu beginnen.



Siz

Psychrometerstudie.

Von Dr. **Josef M. Pernter.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 5. April 1883.)

In neuerer Zeit hat man sich wieder vielfach mit dem Psychrometer befasst, indem man sowohl theoretisch als experimentell zu einer genauern Formel zur Berechnung der Luftfeuchtigkeit aus den Psychrometerangaben zu kommen trachtete.[1] Durch die Unterstützung der k. Akademie der Wissenschaften wurde es auch mir ermöglicht, Psychrometervergleichungen auf dem Obir (2048 Met. Seehöhe) anzustellen. Die Apparate, die ich zu diesem Zwecke verwendete, waren ein Wild'sches Ventilationspsychrometer, ein Regnault'sches Thaupunkthygrometer und ein Schwackhöfer'sches Volumhygrometer.[2] Die Messungen wurden vor dem Unterkunftshause, immer im Schatten, ausgeführt. Ich lasse hier eine Tabelle folgen, welche die Beobachtungen mit dem Thaupunkthygrometer und die gleichzeitigen Ablesungen des Ventilationspsychrometers enthält. Unter der Rubrik A ist der Psychrometerfactor enthalten, wie man denselben aus den einzelnen Beobachtungen berechnet: $A = \frac{p_1 - p_0}{P(t - t_1)}$, indem man die

[1] Blanford, Journal Asiatic society of Bengal Vol. XLV. part. VI 1876. Chistoni, Memorie e Notizie, Meteorologia Italiana anno 1878 fascicolo I. e II.; fascicolo V. Annali della Meteorologia parte I. —1880. Sworikin, Repertorium für Meteorologie B. VII. n. 8. 1881. Angot, Journal de Physique 2ème Serie 1882 t. 1. p. 119. Maxwell u. Stefan, Zeitschrift d. öst. Ges. f. Met. Bd. XVI.

[2] Bei dieser Gelegenheit erfülle ich eine Pflicht freudiger Dankbarkeit, wenn ich es öffentlich ausspreche, dass mir der Transport so vieler complicirter und gebrechlicher Apparate nur durch das anerkennenswertheste freundliche Entgegenkommen des Herrn Stationschefs der Südbahn in Wien, H. Hess und des ganzen Personals auf der Fahrt von Wien nach Kühnsdorf, möglich war.

Psychrometerformel $p_0 = p_1 - A(t-t_1)P$ als richtig voraussetzt. Die Beobachtungen erstrecken sich über einen Zeitraum von zweimal acht Tagen, da ich in der Zwischenzeit durch Unwohlsein verhindert war. Sie fallen daher zwischen 17.—25. August und 1.—8. Sept. 1881.

Tabelle I.

Nummer der Beob.	t	t'	$t-t'$	Beob. Thaupunkt	p_0	p_1	P	A	Corr. $t-t'$
1	13·8	10·3	3·5	6·8	7·39	9·35	600	0·0009276	3·6
2	14·4	12·8	1·6	11·55	10·15	11·02	„	09063	1·8
3	15·3	12·3	3·0	9·8	9·05	10·67	„	09000	3·1
4	12·8	9·6	3·2	6·4	7·19	8·93	„	09063	3·3
5	12·7	9·7	3·0	6·84	7·41	8·99	„	08768	3·1
6	12·5	9·4	3·1	6·15	7·07	8·81	„	09355	3·2
7	12·6	9·4	3·2	6·0	7·00	8·81	„	09417	3·3
8	13·0	12·5	0·5	11.9	10·39	10·80	.	13921	0·8
9	6·4	5·8	0·6	4·85	6·47	6·90	591	14946	0·9
10	6·3	5·7	0·6	4·75	6·42	6·86	591	12972	0·9
11	6·2	5·5	0·7	4·65	6·38	6·76	591	09186	1·0
12	14·15	10·55	3·6	7·35	6·67	9 50	592	13281	3·7
13	7·4	6·05	0·9	4·5	6·31	7·02	593	13303	1·1
14	7·6	6·4	1·2	5·0	6·53	7·19	„	09275	1·4
15	8·6	7·1	1·5	5·25	6·65	7·54	„	10006	1·7
16	8·7	7·2	1·5	5·35	6·69	7·60	„	10232	1·7
17	9·0	7·3	1·7	5·15	6·60	7·65	„	10416	1·9
18	9·1	7·4	1·7	5·25	6·65	7·70	„	10416	1·9
19	9·0	7·5	1·5	6·0	7·00	7·75	„	08432	1·7
20	8·8	7·7	1·1	5·8	6·90	7·86	„	14717	1·3
21	8·7	7·4	1·3	5·75	6·88	7·70	„	10752	1·5
22	8·5	7·2	1·3	5·7	6·86	7·60	„	09621	1·5
23	8·75	7·35	1·4	5·5	6·76	7·68	„	11082	1·6
24	8·9	7·5	1·4	5·8	6·90	7·75	„	10238	1·6
25	9·2	7·7	1·5	5·9	6·95	7·86	„	10231	1·7
26	9·3	7·8	1·5	6·0	7·00	7·91	„	10231	1·7
27	7·3	6·2	1·1	4·9	6·49	7·10	596	09307	1·3
28	7·4	6·4	1·0	5·1	6·58	7·19	„	10235	1·2
29	9·5	8·9	0·6	8·05	8·04	8·52	„	13732	0·9
30	9·5	8·8	0·7	7·9	7·96	8·46	„	11988	1·0
Mittel								10415	1·8

In dieser Tabelle bedeutet t die Temperatur des trockenen, t' die des feuchten Thermometers, p_0 die absolute Feuchtigkeit der Luft zur Beobachtungszeit, p_1 den der Temperatur t' entsprechenden Dampfdruck, Sättigung vorausgesetzt. Die Temperaturen sind in Celsiusgraden, die Dampfdrücke und der Luftdruck P in Millimetern gegeben.

Die Beobachtungen sind auf sieben Tage beschränkt und zwar auf zwei Tage mit dem Luftdrucke 600 Mm. und höherer Temperatur, einen Tag mit dem Luftdrucke von 591 Mm., einen weitern Tag mit 592 Mm. Luftdruck, zwei Tage mit 593 Mm. und einen Tag mit 596 Mm. Barometerstand. Der Grund für eine so beschränkte Anzahl von Tagen liegt einerseits in dem anhaltenden Regen und Nebelwetter, welches nur selten Beobachtungen im Freien gestattete, anderseits darin, dass ich an anderen Tagen die Vergleichungen mit dem Schwackhöfer'schen Hygrometer anstellte, über deren Resultate ich gleich berichten werde.

Einrichtung und Methode bei den Vergleichungen des Psychrometers mit dem Regnault'schen Thaupunkt-Hygrometer waren im Allgemeinen die bekannten. Es stand mir ein Regnault'sches Hygrometer mit zwei Eprouvetten zur Verfügung, beide versilbert und polirt. In jedem befand sich luftdicht eingefügt ein Thermometer, welches in dem Einen in den bis wenigstens zur halben Höhe der Eprouvette reichenden Äther tauchte, im Anderen aber frei von der durchstreifenden Luft umspült wurde. Zum Einsaugen der Luft diente ein Aspirator.

Bei der Beobachtung befand sich zwischen mir und dem Hygrometer eine Glastafel in $^1/_2$ Meter Entfernung vom Hygrometer und der Aspirator knapp an meiner Rechten. Als wahre Lufttemperatur wurde immer die des trockenen Thermometers am Psychrometer genommen. Die unter „Thaupunkt" gegebenen Temperaturen sind immer das Mittel aus der zur Erscheinungs- und Verschwindungszeit des Dampfanfluges beobachteten, zuweilen aus zwei bis drei solchen Beobachtungspaaren. Die Differenz zwischen diesen Beobachtungstemperaturen des Erscheinens und Verschwindens des zarten Niederschlages betrug in den wenigsten Fällen 0°2 C. und nur ausnahmsweise mehr-

Der aus diesen Vergleichungen ermittelte Psychrometer-Coëfficient A ergibt sich beträchtlich grösser als in der Niederung. Ich kann leider, ausser meinen eigenen, keine anderen Versuche anführen, die dieses Resultat bestätigen. Zwar hat Dr. Chistoni[1] aus seinen Versuchen auch den Schluss gezogen, dass mit abnehmendem Luftdruck A wächst, allein seine Daten liefern zu variirende Werthe für A, als dass ein ähnlicher Schluss als reelles Ergebniss der Versuche hingestellt werden könnte.

Ich bedaure daher um so mehr, dass die vielen Versuche auf den Puy de Dôme, welche H. Angot[2] zur Verfügung standen, bisher der wissenschaftlichen Discussion noch immer vorenthalten sind, besonders da die Versuche von Kämtz[3] auf dem Rigi und Faulhorn ohne Ventilationspsychrometer in ruhiger Luft ausgeführt sind und daher keinen Anhaltspunkt zur Vergleichung mit meinen Versuchen bieten.

Nur aus diesem Grunde, dem Mangel jedweder andern Bestätigung, sehe ich mich veranlasst, auch über meine Experimente mit dem Schwachhöfer'schen Volumhygrometer zu berichten. Ich habe nämlich ein solches mit vieler Mühe und Noth, unter Überwindung unzähliger Transporthindernisse, dank der früher erwähnten Freundlichkeit des Stationschefs Hess und der Beamten der Südbahn, sowie besonders in Folge der ganz ungewöhnlichen Liebenswürdigkeit des Herrn Prugger, Vorstandes der Section Eisenkappel des österreichischen Touristenklub, wohlbehalten auf den Obirgipfel befördert. Leider hatte ich aber mit dem Instrumente, auf das ich grosse Stücke hielt, mein unglaublichstes Elend. Bei fünfzig Versuche waren resultatlos, bis es mir gelang die Hähne zu dichten, das Quecksilber luftfrei und rein zu halten und die ganze Röhre vor aller Verunreinigung

---

[1] Die betreffenden Beobachtungen finden sich in der Abhandlung: Sulle formule psicrometriche, Annali della Meteorologia parte I. — 1880.

[2] In der oben citirten Abhandlung veröffentlicht H. Angot keine directen Versuche in Tabellenform; es ist aber zu hoffen, dass er noch nachträglich dieselben in extenso publiciren werde, da sie von ganz besonderem Werthe zu sein versprechen.

[3] Pogg. Ann. Bd. XXX. p. 43.

zu schützen. Endlich, nachdem ich drei Wochen daran mich abgemüht, schienen die Versuchsergebnisse einigermassen entsprechend und will ich die in der letzten Woche gewonnenen Resultate kurz erwähnen, nur um einen weiteren Beleg für das Anwachsen des Factors A anführen zu können.

Tabelle II.

v^0_0	Δv	Corr. $v^0/_0$	P	t	t'	A
			Mm.			
1·070	+0·15	1·115	598	9·7	7·8	0·001094
0·870	—0·08	0·841	598	9 2	5·8	0919
0 815	—0·30	0·705	600	8·2	5·3	1402
0·785	—0·08	0·756	600	8·1	5·4	1346
1·385	+0·58	1·597	606	18·2	14·8	1388
1·401	+0·38	1·540	606	18·4	15·0	1634
0 940	—0·16	0·881	608	8·8	6·4	1254
1·118	+0·43	1·275	607	16·2	12·3	1288
					Mittel =	0·001284

In dieser Tabelle sind $v^0/_0$ die direct abgelesenen Volumprocente, Δt die Temperaturänderung während des Versuches im Apparate.

Die Versuche wurden im Freien gemacht, und zwar wurde die Luft aus dem Gehäuse des Ventilationspsychrometers in das Volumhygrometer aspirirt. Erst die Luft der zehnten Aspiration wurde im Hygrometer behalten und dann sechsmal in das Schwefelsäuregefäss getrieben.

Wie gesagt, bedurfte es lange, bis der Apparat so functionirte, dass ich bei aller Vorsicht und Skepticismus nichts mehr entdecken konnte, was eine Fehlerquelle bei den Versuchen hätte werden können. Die etwa fünfzig früheren Versuche lieferten alle eine zu kleine absolute Feuchtigkeit und zwar im Mittel um 2·5 Mm. circa zu klein, was einen beträchtlich zu grossen Factor A ergeben hätte.

Ich glaube nun in Folge dessen nicht, dass die für den Factor A, selbst aus den so viel ich weiss einwurfsfreien Versuchen in obiger Tabelle 2 berechneten Werthe exact seien, obwohl ich

nur einen constanten Instrumentalfehler als Ursache der Nichtübereinstimmung mit dem Regnault'schen Hygrometer ahnen kann, glaube aber, dass dennoch eine Bestätigung des mit letzterem Instrumente erhaltenen Resultates: dass der Factor A bei abnehmendem Luftdruck zunehme, darin zu finden sei.

Ein zweites Resultat, das sich aus Tabelle I vielleicht ableiten liesse, wäre: eine Abnahme des Factors A mit wachsender Differenz $t-t'$. Mir scheint zwar nur, dass meine Versuche dieser Ansicht nicht widersprechen; da aber Chistoni[1] und Angot[2] besonders letzterer, diesen Schluss aus ihren Versuchen ziehen, so kann ich in der Tabelle I allerdings ein ähnliches Verhalten bemerken, obwohl die Differenzen $t-t'$, die ich beobachten konnte, niemals grösser als 3·6° waren, und daher aus meinen Versuchen allein ein solcher Schluss durchaus nicht gerechtfertigt scheinen könnte.

Der Zweck, den solche Vergleichungen immer haben, ist, auf empirischem Wege eine Formel herzustellen, deren Anwendung bei Psychrometerbeobachtungen möglichst genau den Dampfdruck der Atmosphäre ergibt. — Längst schon hat Regnault und nach ihm Andere gezeigt, dass die theoretische Ableitung der Psychrometerformel kein befriedigendes Resultat gibt, und so möchte es denn scheinen, dass man am besten thäte auf die Theorie zu verzichten und einfach eine empirische Formel zu suchen, welche den Beobachtungsresultaten entspricht. Ich glaube aber, dass gerade die Theorie des Psychrometers die besten Anhaltspunkte gibt, um mit Hilfe der vergleichenden Beobachtungen zu einer befriedigenden Formel zu gelangen und muss mich daher auf theoretische Erörterungen einlassen.

Theoretische Betrachtungen.

Wir besitzen zweierlei Psychrometerformeln, die eine aus der Convections-, die andere aus der Diffusions- und Leitungstheorie des Psychrometers abgeleitet.

---

[1] A. a. O.

[2] A. a. O.

August hat der erste seine bekannte Formel aus der Convectionstheorie abgeleitet. Maxwell[1] gibt dieselbe kurz in folgender Weise wieder: Ist m die Masse, t die Temperatur einer Quantität Luft, p_0 der Dampfdruck des in ihr enthaltenen Wasserdampfes, P der gesammte Luftdruck, σ das specifische Gewicht des Wasserdampfes bezogen auf Luft, so ist $\frac{p}{P}\, m\sigma$ die Masse Wasserdampf in dieser Luft. Ist p_1 der Dampfdruck bei der Temperatur t', auf welche das feuchte Thermometer sinkt, so ist die am feuchten Thermometer entwickelte Wasserdampfmenge

$$(p_1 - p_0)\frac{m\sigma}{P},$$

zu welcher Entwicklung eine Wärmemenge

$$(p_1 - p_0)\frac{m\sigma}{P}\lambda$$

nöthig ist. Im Zustande des Gleichgewichtes wird ebensoviel Wärme durch Abgabe von der ans feuchte Thermometer herbeiströmenden Luftmenge m mit der specifischen Wärme S zugeführt, also:

$$mS(t - t') = (p_1 - p_0)\frac{m\sigma}{P}\lambda$$

oder

$$p_0 = p_1 - \frac{PS}{\lambda\sigma}(t - t').$$

Bei dieser Ableitung wurde eine kleine Grösse vernachlässigt, die aber, wie sich leicht zeigen lässt,[2] jedenfalls vernach-

---

[1] Zeitschrift der öst. Ges. f. Met. Bd. XVI.

[2] Ich halte es für sehr angezeigt, in den einzelnen Fällen der Ableitung dieser Formel wie sie von August selbst und von Belli (Corso di fisica experimentale, Chistoni formule psichrometrische, Zeitschrift f. Meteorologie Bd. 16 p. 81) gegeben wird, darzuthun, dass bei all der von August und Belli verlangten Genauigkeit, obige Formel, wie sie Maxwell ableitet, gleich genau ist. August (Poggdorf. Ann. Bd. V. p. 77) berücksichtigt, dass in der dem Thermometer zuströmenden Luft auch Wasserdampf enthalten sei, und führt Luft und Wasserdampf dem Gewichte nach in die Formel ein. Man hat dann, wenn ρ das Normalgewicht der Volums-

lässigt werden darf. Auf den Einfluss der Strahlung wurde dabei nicht Rücksicht genommen. Wollte man dieselbe berücksichtigen,

---

einheit Luft bedeutet:

$$\text{Gewicht der Luft} = \frac{P-p_1}{760}\rho\cdot\frac{1}{1+\alpha t'},$$

$$\text{des Wasserdampfes} = \frac{p_0}{760}\rho\sigma\cdot\frac{1}{1+\alpha t'}$$

$$\text{Gewicht des entwickelten Wasserdampfes} = \frac{p_1-p_0}{760}\rho\sigma\frac{1}{1+\alpha t_1}.$$

Daher die Gleichgewichtsformel (wenn k die specifische Wärme des Wasserdampfes bei constantem Drucke ist):

$$(P-p_1)S(t-t')+p_0\sigma k(t-t') = (p_1-p_0)\lambda\sigma$$

oder

$$\frac{PS}{\lambda\sigma}\left(1-\frac{p_1}{P}+\frac{p_0}{P}\frac{k\sigma}{S}\right)(t-t') = p_1-p_0;$$

setzt man, was gewiss erlaubt ist, $\frac{p_1}{P} = \frac{p_0}{P}$, so hat man:

$$\frac{PS}{\lambda\sigma}\left(1-\frac{p}{P}\left(1-\frac{k\sigma}{S}\right)\right)(t-t') = p^1-p^0;$$

in ungünstigen Fällen mag $\frac{p}{P} = 0{\cdot}02$ sein; $\left(1-\frac{k\sigma}{S}\right)$ ist aber constant $= -0{\cdot}26$, daher: $-\frac{p}{P}\left(1-\frac{k\sigma}{S}\right) = +0{\cdot}0052$; der Klammerausdruck: $\left(1-\frac{p}{P}\left(1-\frac{k\sigma}{S}\right)\right)$ kann also gleich Eins gesetzt werden und es bleibt die im Texte gegebene Formel.

Die Formel von Belli ist eigentlich unter denselben Voraussetzungen abgeleitet, es ist daher a priori gewiss, dass sie zum gleichen Resultate führen wird. Da aber Chistoni ihr eine erhöhte Bedeutung beilegt, will ich zeigen, dass sie sich ebenfalls auf die im Texte gegebene Formel reducirt.

Belli geht, statt wie August vom Gewichte, von den Massen der Luft und des Wasserdampfes aus. Ist M die Gesammtmasse Beider, so verhalten sich Luftmasse zu Wasserdampfmasse wie $P-p_0 : p_0\sigma$, so dass Luftmasse ist $\frac{M(P-p_0)}{P-p_0+p_0\sigma}$ und Dampfmasse $\frac{Mp_0\sigma}{P-p_0+p_0\sigma}$ und die Summe beider $= M$.. Hat sich die Luft auf t' abgekühlt und mit Dampf gesättigt, so verhält sich die jetzige Dampfmasse p_1 zur gleichgebliebenen Luftmasse $\frac{M(P-p_0)}{P-p_0+p_0\sigma}$ wie $p_1\sigma : P-p_1$; also $p_1 = \frac{Mp_1\sigma}{P-p_0+p_0\sigma}\cdot\frac{P-p_0}{P-p_1}$ und daher die Masse des neuentwickelten Wasserdampfes $= \frac{M}{P-p_0+p_0\sigma}\left(\frac{P-p_0}{P-p_1}p_1-p_0\right)\sigma$.

Wir haben also die Gleichung des Beharrungszustandes:

so hätte man, da die Strahlung $I = OR(t-t')$ gesetzt werden kann (O = Oberfläche, R der Strahlungscoëfficient) die Gleichung:

$$OR(t-t')+mS(t-t_1) = (p_1-p_0)\frac{m\sigma}{P}\lambda$$

oder

$$p_0 = p_1 - \frac{PS}{\lambda\sigma}\left(1+\frac{OR}{mS}\right)(t-t').$$

Die Ableitung der Psychrometerformel unter der Voraussetzung völlig ruhiger Luft, hat Maxwell und Stefan[1] auf vollständige Weise gegeben und sie gelangen zu folgenden Ausdrücken:

$$p_0 = p_1 - \frac{PS}{\lambda\sigma}\left\{\frac{K'}{D}+\frac{Rr}{\rho SD}\right\}(t-t') \quad \text{(Maxwell)}$$

und

$$p_0 = p_1 - \frac{P}{D\lambda\rho\sigma}\{K+rR\}(t-t') \quad \text{(Stefan)}$$

welch letzterer, wenn man $K' = \frac{K}{\rho S}$ setzt, in den ersteren übergeht.

$$\left(\frac{P-p_0}{P-p_1}p_1-p_0\right)\lambda\sigma = \{(P-p_0)S+p_0\sigma k\}(t-t')$$

oder

$$\frac{P-p_0}{P-p_1}\cdot p_1-p_0 = \frac{PS}{\lambda\sigma}\cdot\left(1-\frac{p_0}{P}\left(1-\frac{\sigma k}{S}\right)\right)(t-t')$$

da nun $\frac{P-p_0}{P-p_1}$ nur wenig grösser als Eins, in ungünstigen Fällen 1·01 ist und der Klammerausdruck auch nur wenig grösser als Eins ist, so kann man also gewiss beide gleich Eins setzen mit Rücksicht darauf, dass man im Resultate für p_0 die Hundertel nie genau haben kann und auch nicht sucht und es bleibt wieder der im Texte gegebene Ausdruck.

Ich habe diese, wenn man will, trivialen Darstellungen nicht gescheut, weil es vielfach den Anschein hatte, als wollte man eine Psychrometerformel für um so besser halten, je complicirter sie sich darstellt, und besonders, weil Chistoni noch vor Kurzem (siehe die citirte Abhandlung) der Formel von Belli einen Vorzug vor der von August einräumt und sie für die beste Psychrometerformel erklärt, die überhaupt existirt.

Sowohl die Formel von August als die von Belli sind Convectionsformeln und geben bei Vernachlässigung der Strahlung absolut das gleiche Resultat. Aus der Theorie lässt sich also keine complicirtere Formel als genauer erweisen.

[1] Zeitschrift der öst. Ges. f. Meteorol. B. 16. p. 177.

ρ ist das Normalgewicht der Volumseinheit Luft, K ist das Leitungsvermögen der Luft, D der Diffusionscoëfficient des Wasserdampfes in Luft. Da nun $K = 0{\cdot}18$ [1] und D ebenfalls gleich 0·18 ist, nach den Angaben von Stefan, so bekommt die für ruhige Luft abgeleitete Formel die gleiche Gestalt, wie die aus der Convectionstheorie gewonnene.[2]

---

[1] Nach den Versuchen und Berechnungen von Stefan.

[2] Da der Diffusionscoëfficient D vielfach weniger bekannt sein dürfte, so will ich hier durch eine Ableitung aus der Diffusionstheorie von Stefan kurz darlegen, welche Bedeutung er in unserer Formel besitzt. Bedeutet A_{12} eine nur von der Natur des Wasserdampfes und der Luft abhängige Constante, so ist der Vorgang der Diffusion dargestellt (siehe Stefan, Sitzb. der Wien. Ak., Bd. 68, p. 385) durch:

$$\rho_1 \xi_1 = -\frac{\partial p_1}{\partial \nu} - A_{12}\rho_1\rho_2(u_1 - u_2),$$

wo ρ_1 und u_1 die Dichte und Geschwindigkeit der Wasserdampfmolecüle ρ_2 und u_2 die der Luft bedeutet. ξ ist die Beschleunigung, die beim vorausgesetzten Beharrungszustand $= 0$ ist, wie auch in unserem Falle der Verdampfung $u_2 = 0$ wird. Es ist dann

$$\frac{\partial p_1}{\partial \nu} + A_{12}\rho_1\rho_2 u_1 = 0;$$

da nun: $\rho_2 : \vartheta_2 = p_2 T_0 : p_0 T$ wo ϑ_2 die normale Dichte bei $p_0 = 760$ Mm. bedeutet, so haben wir, indem wir gleichzeitig mit ϑ_1 multipliciren und dividiren

$$\frac{\partial p_1}{\partial \nu} = -\frac{A_{12} T_0 \vartheta_2 \vartheta_1}{T p_0} \cdot \frac{p_2}{\vartheta_1} \rho_1 u_1.$$

Es ist aber $p_2 = P - p_1$; ferner ist $\rho_1 u_1$ die Verdampfungsmenge für die Flächeneinheit; für die Psychrometerkugel also wird diese Menge $Q = 4\pi r^2 \rho_1 u$. Wir haben daher, wenn

$$\frac{A_{12} T_0 \vartheta_2 \vartheta_1}{T p_0} = \frac{1}{D} \text{ gesetzt wird}$$

$$\frac{1}{P - p_1}\frac{\partial p}{\partial \nu} = -\frac{Q}{4\pi r^2 \vartheta_1 D}$$

und integrirt

$$\log \frac{P - p_1}{P - p_0} = \frac{Q}{4\pi r \vartheta_1 D}$$

oder

$$Q = 4\pi r \frac{\rho \sigma D}{P}(p_1 - p_0).$$

Daraus ist ersichtlich, dass $D = \frac{p_0 T}{A_{12}\vartheta_1\vartheta_2 T_0}$. Da $p_0 = 760$ und $\frac{T}{T_0}$ für die beim Psychrometer vorkommende Temperatur $= 1$ gesetzt werden kann, so ist D schlechthin eine Constante.

Es muss dies einige Bedenken erregen gegen die Ableitung aus der Convectionstheorie, denn die Ableitung für ruhige Luft ist jedenfalls einwurfsfrei. Und in der That wird in der Voraussetzung der Convection eine Annahme gemacht, die gewiss nicht zutreffend ist, dass nämlich die zufliessende Luft im Augenblicke des Vorbeiströmens die ganze Wärmemenge $mS(t—t')$ abgebe, dass heisst, sich um das volle Intervall $t—t'$ abkühle; damit fällt auch die weitere Voraussetzung, dass sich so viel Wasserdampf entwickle, als zur Sättigung der Luft bei $t'°$ nöthig ist. Beide Bedingungen sind nur annähernd erfüllt. — Es ist daher zweifellos, dass die Convectionstheorie nur eine angenäherte Formel liefere.

Halten wir uns daher an die Voraussetzung völlig ruhiger Luft; für diese gilt die Maxwell-Stefan'sche Formel mit voller Exactheit. Berechnet man für diese Voraussetzung den Factor

$$A = \frac{1}{D\lambda\sigma\rho}\{K+rR\}(t—t')$$

(kugelförmige Thermometergefässe angenommen), so erhält man für $\frac{K}{D\lambda\sigma\rho}$ den Werth 0·000630; und wenn man für R nach Stefan 0·000097 setzt und $r = 0·57$ cm annimmt, also $rR = 0·000055$, so gibt der zweite Theil: $\frac{rR}{D\lambda\rho\sigma}$ ebenfalls 0·000630; daher $A = 0·001260$. Regnault fand in der That für ganz ruhige Luft im kleinen geschlossenen Zimmer 0·001280 (Poggd. Ann. 88 p. 428) und Sworikin (a. a. O. p. 17) findet für ruhige Luft 0·001100 bis 0·001500, also im Mittel etwa wieder 0·001300.

In der That verfügt man aber kaum je über völlig ruhige Luft und auch da ist eine Convection durch die Abkühlung der am feuchten Thermometer befindlichen Luft immer vorhanden. Will man irgendwie übereinstimmende Resultate erhalten, so muss man für eine Convection, die schon einmal unvermeidlich ist, sorgen, welche eine immer gleiche Bewegung der Luft verbürgt. Man erreicht dies durch das Ventilationspsychrometer.

Setzt man also ein ventilirtes Psychrometer, also starke Convection voraus, so haben wir keine theoretische Formel dafür.

Wir können aber versuchen, die Formel für ruhige Luft umzugestalten für den Fall der Ventilation.

Stefan bemerkt (Zeitschrift f. Meteorol. Bd. XVI p. 181), dass bei eintretender Convection in der Formel für ruhige Luft:

$$p_0 = p_1 - \frac{P}{D\lambda\sigma\varrho}(K+rR)(t-t') = p_1 - \frac{P}{\lambda\sigma\varrho}\left\{\frac{K}{D}+\frac{rR}{D}\right\}(t-t')$$

angenommen werden kann, dass einfach K und D gleichmässig wachse, $\frac{K}{D}$ also wohl sehr nahe gleich bleiben werde.

Dies vorausgesetzt, ist leicht ersichtlich, dass dafür bei wachsendem D der zweite Theil des Factors: $\frac{rR}{D\lambda\varrho\sigma}$ kleiner werden müsse. Wir finden darin einen Grund, warum der theoretische Werth des ganzen Factors A, bei Vergleichungen des Ventilationspsychrometers nicht erreicht wird. In der That ist der empirisch bestimmte Werth für einen Luftdruck von 760 Mm. ziemlich genau 0·000800 im Mittel der verschiedenen Versuche.[1] Da nun der Factor A aus dem unveränderlichen Theile $\frac{K}{D\lambda\varrho\sigma}$ und dem veränderlichen $\frac{rR}{D\lambda\varrho\sigma}$ besteht, so könnte man die Formel, indem man $\frac{K}{D}=1$ setzt, schreiben:

$$p_0 = p_1 - \frac{PS}{\lambda\sigma}\left(1+\frac{rR}{aDS\varrho}\right)(t-t'),$$

wo a eine neue Constante bedeutet, die unter der Voraussetzung einer immer gleichen Ventilation und constantem Luftdruck unveränderlich wäre.

Man sieht hieraus, dass das von der Strahlung abhängige Glied durch die Ventilation allerdings herabgedrückt wird, aber durchaus nicht so weit, dass es zu vernachlässigen wäre.

---

[1] Das der Werth, welchen Regnault schon 1845 angibt. Die Form der Psychrometerformel, wie sie seither fast allgemein angewendet wird, enthält diesen Werth. Sie lautet:

$$p_0 = p_1 - \frac{0\cdot480(t-t')P}{610-t'}$$

An dieser Stelle dürfte es nicht überflüssig sein, darauf hinzuweisen, wie sehr unrecht man bei der Ableitung der Psychrometerformel gethan, den Einfluss der Strahlung zu vernachlässigen. Für ruhige Luft zeigt er sich sogar ebensogross wie der theoretische Factor in August's Formel, wenn man ein kugelförmiges Thermometergefäss von 0.57 Ctm. Halbmesser annimmt, was wenigstens im Beobachtungsnetze der k. k. Centralanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus in Wien der Fall ist.

Wollte man für alle verschiedenen Thermometer eine gleiche Formel besitzen, so müsste man Mittel suchen, den Vorschlag von Kämtz (Repertorium für Meteorologie II. Bd. p. 56) auszuführen. Kämtz bemerkt:

„Auf ähnliche Weise wie ein Pendel bei grossen und kleinen Bögen nur nahe gleiche Zeiten zu einer Schwingung gebraucht, ebenso geben verschiedene Psychrometer nur nahe gleiche Resultate. Sowie bei jenem die Bögen auf unendlich kleine Amplitude reducirt werden, so müssen wir hier eine Reduction auf unendlich kleines Thermometer vornehmen."

Man kann jedoch diese „Reduction" theilweise als geschehen betrachten bei Anwendung von Ventilationspsychrometern, da bei denselben das Glied, welches den Strahlungseinfluss enthält, bedeutend verkleinert wird.

Ein weiterer Einfluss, dem in der Formel gar nicht Rechnung getragen wurde, liegt in der Musselinbekleidung des feuchten Thermometers. Bei der Ableitung der Formel war auf eine solche nicht Rücksicht genommen. Kämtz hat nun, aufmerksam gemacht durch den häufigen Fall, den er zu beobachten Gelegenheit hatte,[1] dass das feuchte Thermometer theils ebenso hoch, theils höher stand als das trockene, wo eine Vergleichung mit dem Hygrometer noch keine Sättigung der Luft mit Wasserdampf anzeigte, nach der Ursache dieser Erscheinung geforscht und dieselbe in der Musselinbekleidung des feuchten Thermometers gefunden. Nach seinen Versuchen stand bei niedrigen Temperaturen das feuchte Thermometer um 0·46° C. zu hoch.

---

[1] Repertorium für Meteorol. Bd. II. p. 54.

Dass dies ein Einfluss der Strahlung sei, wie bei trockenem Musselin wohl unbezweifelbar ist, müsste nun zur Folge haben, dass der Strahlungseinfluss mit wachsender Differenz $(t—t')$ wachse. Thatsache ist aber, dass dieser Einfluss bei den Psychrometervergleichungen um so mehr verschwindet, je grösser $t—t'$ ist, jedenfalls bei bewegter Luft. Dieses Verhalten wird noch einer eingehenderen Untersuchung bedürfen. Ich will aber schon jetzt erwähnen, dass ich dafür halte, dass diese Erscheinung einer „Trägheit" des feuchten Thermometers in der Nähe des Sättigungspunktes der Luft zuzuschreiben sei, so dass bei sehr feuchter Luft die Verdampfung nicht rasch genug erfolgt im Verhältniss zur zuströmenden Luft. Das bestätigen auch die Versuche.[1] Will man in der Formel dieser „Trägheit" des Psychrometers Rechnung tragen, so kann man eine Correctur der Psychrometerdifferenz $(t—t')$ so anbringen, dass dieselbe bei $t—t'=0$ im Maximum ist und umgekehrt proportional der Differenz $(t—t')$ gewählt wird. Nennt man v den Maximalwerth, so wäre diese Correctur $= \frac{v}{(t—t')+1}$; nimmt man mit Kämtz $v = 0{\cdot}5°$ C., so wird diese Correctur nur bis zu Differenzen von 9°, eigentlich nur bis zu solchen von 6° von merklichem Einfluss sein.

Ich habe diese Correctur an meine Beobachtungen angebracht und erhalte dann im Mittel $A = 0{\cdot}000943$ statt $0{\cdot}0010415$.

Es erübrigt nun nur noch eine Untersuchung der Constante a in unserer Psychrometerformel.

Der Psychrometerfactor ist:

$$A = \frac{S}{\lambda\sigma}\left(\frac{K}{D} + \frac{rR}{aD\rho S}\right).$$

Ruhe der Luft vorausgesetzt, wird $a = 1$. Bei einer bestimmten Ventilationsgeschwindigkeit und gleichem Luftdruck wächst a zu

[1] Wüllner und Grotrian fanden, dass die Flüssigkeiten in der Nähe ihres Sättigungspunktes fast gar nicht mehr verdampfen und dass selbst noch ziemlich ferne von demselben zwischen Glasstäben z. B. Wassertropfen nur sehr langsam und schwer verflüchtigen und was wohl auch betreffs der Maschen des Musselins gilt. Siehe Wied. Ann. Bd. XI. p. 553—555, siehe auch Macaluso und Grimaldi Gazetta Chimica italiana Bd. XII 1881.

einem unter diesen Verhältnissen constanten Werthe. Bleibt aber nun die Ventilationsgeschwindigkeit gleich und ändert sich der Luftdruck, so ist zu untersuchen, ob a nicht vom Luftdrucke abhängig sei. Das erreichen wir auf folgendem Wege: $\frac{K}{D}$ ist bei absoluter Ruhe bei hohem und niedrigem Luftdrucke $= 1$. Beim Übergange aus der Ruhe zur constanten Ventilationsgeschwindigkeit wächst K und D gleichmässig (jedenfalls sehr nahe), geschieht dieser Übergang bei hohem oder niedrigem Luftdrucke; es wird immer $aK = aD$ bleiben. Zweifellos wird aber aK nicht so gross werden bei niedrigem als bei hohem Luftdrucke, da ja bei letzterem die Masse der zugeführten Luft grösser ist als bei ersterem. Es wird daher auch aD grösser sein bei hohem als bei niedrigem Luftdrucke; das heisst also, a wird grösser sein bei hohem Luftdrucke als bei niedrigem.

Daraus folgt aber, dass $\frac{rR}{aD\rho S}$ kleiner ist bei hohem Luftdrucke, grösser bei niedrigem, dass also A grösser wird mit der Erhebung über den Meeresspiegel. Das ist es aber, was meine Beobachtungen am Obirgipfel ergeben.

Nach dem Vorausgehenden stünde nun zu erwarten, dass a einfach im umgekehrten Verhältnisse zum Luftdrucke stehe, so dass, wenn a_1 den Werth von a bei 760 Mm. bedeutet, für einen beliebigen Luftdruck $a = \frac{P}{760} a_1$.

Es stehen mir zur Untersuchung dieser Abhängigkeit Versuche zur Verfügung. Chistoni,[1] Angot,[2] Blanford,[3] haben ein grosses Material geliefert bei hohem Luftdruck.[4]

---

[1] A. a. O.

[2] A. a. O.

[3] A. a. O.

[4] Seit Regnault hat man allgemein an dem Factor 0·000800 festgehalten. Alle späteren haben noch grössere Factoren bei ihren Vergleichungen gefunden. Nur Sworikin findet 0·000725 und Macé de Lépinay, mit einem Schleuderpsychrometer jedoch, 0·000693. Mir scheinen diese Bestimmungen zu sehr abweichend von den anderen, besonders den langen Serien von Chistoni und Angot, als dass ich sie genügend sicher halten könnte.

Ich habe das Mittel ihrer Bestimmungen genommen und ergibt sich für A der Werth:

nach Blanford	0·000827,
„ Angot	0·000851,
„ Chistoni	0·000851,
im Mittel	0·000843.

Da diese Vergleichungen, besonders die von Blanford, bei grossen Differenzen $t—t'$ gemacht wurden, habe ich die Correction $\frac{v}{t—t'+1}$ anzubringen nicht für nöthig gehalten.

Da nun $A = 0{\cdot}000630 + \frac{0{\cdot}000630}{a}$ (indem ich für rR als Mittelwerth 0·000055 setze), so ergibt sich aus diesen Beobachtungsresultaten $a_1 = 3{\cdot}0$.

Meine Vergleichungen auf dem Obirgipfel ergeben nach Anbringung der Correction $\frac{v}{t—t'+1}$, $A = 0{\cdot}000943$ und daraus $a_2 = 2{\cdot}0$. Würde a_1 im Verhältnisse der Luftdruckabnahme kleiner werden, so wäre $a = 3{\cdot}0\frac{595}{760} = 2{\cdot}3$, und ich hätte sonach auf dem Obirgipfel finden müssen $A = 0{\cdot}000904$.

Es scheint mir nun, dass bei der Ungleichheit der angewendeten Thermometer und Ventilatoren, leicht diese Differenz zu erklären wäre, und wenn auch noch weitere Versuche in dieser Richtung zu machen bleiben, so dürften sie im Wesentlichen dieses Resultat nur bestätigen.

Ich will nun kurz die Resultate dieser Untersuchung zusammenfassen.

1. Die Ableitung der Psychrometerformel unter der Voraussetzung von Convection führt nicht zum Ziele,[1] da die gemachte

[1] Verzichtet man darauf, in der Formel der Convection

$$p_0 = p_1 - \frac{PS}{\lambda\sigma}\left(1 + \frac{OR}{mS}\right)(t—t')$$

den zweiten Theil des Klammerausdruckes als einen vollwerthigen Ausdruck zu erklären und sucht nur für m einen Zahlenwerth, der den Beobachtungen entspricht, so fände man für 760 Mm. Luftdruck $m = 78{\cdot}0$, was, da m doch die Luftmasse bedeutet, schwer mit einem verständlichen Sinne zu verbinden wäre.

Voraussetzung, dass die herbeiströmende Luft beim Contacte mit der feuchten Thermometerkugel von t auf t' abgekühlt werde, nicht zutrifft.

2. Die Ableitung der Psychrometerformel von Maxwell und Stefan für absolut ruhige Luft, ist für diesen Zustand vollkommen exact. Trachtet man in diese Formel eine Modificirung einzuführen, damit sie auch für bewegte Luft gelte, so verliert sie zweifellos ihre Exactheit, gibt aber einen sehr angenähert richtigen Ausdruck, der, wenn man die „Trägheit" des Psychrometers in der Nähe der Sättigung berücksichtigt, lautet:

$$p_0 = p_1 - P.\frac{S}{\lambda\sigma}\left\{\frac{k'}{D} + \frac{rR}{aD\rho S}\right\}\left\{(t-t') + \frac{v}{(t-t')+1}\right\}$$

oder, indem man $v = 0{\cdot}5°$ C. setzt und die Zahlenwerthe einsetzt:

$$p_0 = p_1 - P.0{\cdot}000630\left\{1 + \frac{1}{a}\right\}\left((t-t') + \frac{0{\cdot}5}{(t-t')+1}\right).$$

3. Das von der Strahlung abhängige Glied verschwindet also auch bei stark bewegter Luft nicht; bei absolut ruhiger Luft ist es (im Mittel $r = 0{\cdot}57$ Ctm. gesetzt) sogar ebenso gross wie das von der Leitung abhängige.

4. Die Constante a ist für gleiche Luftgeschwindigkeit und gleichen Luftdruck unveränderlich. Gleiche Luftgeschwindigkeit in allen Fällen vorausgesetzt, wird sie mit niedrigerem Luftdrucke kleiner und höchst wahrscheinlich im Verhältnisse $\frac{P}{760}$. Der Maximalwerth von a bei circa 760 Mm. ergibt sich aus den Beobachtungen $a_1 = 3{\cdot}0$ also nach Obigem im Allgemeinen

$$a = 3{\cdot}0\frac{P}{760},$$

Dies in die Schlussformel eingeführt, gibt:

$$p_0 = p_1 - P.0{\cdot}000630\left\{1 + \frac{760}{3{\cdot}0P}\right\}\left\{(t-t') + \frac{0{\cdot}5}{(t-t')+1}\right\}$$

oder für Stationen der Niederung:

$$p_0 = p_1 - 0{\cdot}000843\left((t-t') + \frac{0{\cdot}5}{(t-t')+1}\right)P.$$

Diese einfache Formel ist, wie oben gezeigt wurde, nicht complicirter zu machen, indem man den Factor A anders gestaltet, da auf keinen Fall eine grössere Genauigkeit dadurch erreicht wird.

5. Aus alledem ergibt sich aber, dass wir wenig oder gar keine Aussicht haben zu einer exacten Psychrometerformel zu gelangen, und man daher auch nicht erwarten darf, dass man mittelst des Psychrometers den Dampfdruck auf 0·1 Mm. genau erhalten könne.

Eine dynamische Erklärung der Gravitation.

Von S. Tolver Preston.

Die moderne Naturwissenschaft schlägt mit Sicherheit die Richtung ein, die alten unklaren „statischen“ Ideen („Kräfte“, „qualitates occultae“ oder Wundereigenschaften) durch construirbare dynamische Vorstellungen zu ersetzen. Desshalb werden vorsichtig ausgedachte Erklärungstheorien der Gravitation mit grösserer Aufmerksamkeit durch die vornehmsten Physiker der Jetztzeit aufgenommen.

Nach langjährigen Studien in dieser Richtung bin ich auf eine Erklärung der Schwerkraft gekommen, welche sich wenigstens durch grosse Einfachheit auszeichnet, da das ganze Problem sich durch eine einzige Hauptannahme (oder gewissermassen in automatischer Weise) erklären zu lassen scheint.

Man kennt wohl die alte Gravitationstheorie von Le Sage,[1] von Sir W. Thomson (im Philosophical Magazine, Mai 1873) exponirt. Diese Theorie besteht bekanntlich aus einer Reihe von Postulaten, wovon einige sicher schwerer anzunehmen oder zu begreifen sind, als im voraus die Ursache der Gravitation selbst. Es wird hier namentlich angenommen, dass Atomströme von einer unendlichen Entfernung ausgehend (wovon jeder Strom beständig in einer Richtung fliessen soll), sich concentrisch nach dem Mittelpunkt des Universums richten, und dieser Zuschuss der Materie von Aussen („corpuscules ultramondains“) soll unaufhörlich sein. Um die Gravitation zu erhalten, soll damit eine unendliche Verschwendung an Materie und Energie nöthig sein — um nicht zu fragen, wie ein solches System von sich

---

[1]) Die Originaltheorie von Le Sage findet sich in einem Werke „Deux Traités de Physique Mécanique,“ von Pierre Prévost, Paris 1818.

durchkreuzenden Strömen sich bei den erfolgenden Collisionen verhalten soll. Dass diese Theorie nicht viel Aufsehen gemacht hat, darf uns wohl nicht wundern. Die Theorie wurde in der verbesserten Form, wie sie Thomson ausarbeitete, von Maxwell in der Encyclopaedia Britannica (neueste Auflage, unter dem Worte „Atom“) kritisirt, besonders in Bezug auf die damit verbundene Verschwendung von Materie und Energie. Dabei ist nicht zu vergessen, dass dieser Theorie eine einzige sehr sinnreiche Idee zu Grunde liegt — nämlich die Vorstellung, dass die Tendenz von zwei Massen, sich gegeneinander zu bewegen, von dem gegenseitigen Schutz herrührt, welchen jede Masse der gegenüberliegenden vor dem Hagelschauer der durcheinander schwirrenden Atomströme bietet. Desshalb wird jede Masse natürlich mit grösserer Gewalt an ihrer Rückseite durch die Atomströme getroffen, als an ihrer Vorderseite (wo die gegenüberstehende Masse sie vor den Strömen theilweise schützt). Diese Grundidee von Le Sage, mit der sinnreichen von Sir W. Thomson entwickelten Erklärung des Geschwindigkeitsverlustes[1] (beim Stosse an die grobe Materie) der elastischen abprallenden Atome, sind im Wesentlichen die einzigen Bedingungen, die ich benützen werde.

Bevor ich weiter fortschreite, wird es gut sein, einige Begriffe in Betreff der Moleküle folgen zu lassen. Obgleich Niemand bis jetzt wagen würde, genaue Schlüsse über die Moleküle auszusprechen, stehen wir doch in einigen Hinsichten auf sicherem Boden. Erstens, wie Sir W. Thomson gezeigt hat, beweist uns der Satz von der Erhaltung der Kraft, dass die Moleküle durch irgend eine Ursache elastische Körper sind (in dem Sinne, dass beim Stosse keine Bewegung absolut verloren geht). Man kann auch durch spectroskopische Beobachtungen ersehen, dass die Moleküle Elasticität besitzen. Die Erklärung dieser Elasticität mag wohl ein sehr interessantes Problem für die Zukunft sein. Für uns einstweilen ist aber nur die (durch die Erhaltung der Kraft etc.) hinlänglich bewiesene Thatsache selbst zu gebrauchen.

Zweitens. Es ist nichts gegen die Annahme einzuwenden, dass die Moleküle hohle Körper (d. h. von offener Struktur) sind, wie auch Le Sage es vorgeschlagen hat. Diese Annahme wird durch

[1] Philosophical Magazine, Mai 1873, S. 329 etc.

vieleThatsachen(unabhängig von der Gravitationsfrage)unterstützt. Zum Beispiel, wie sollte sonst der Magnetismus (wenn wir seine Fortpflanzung durch ein materielles Agens anerkennen) alle Körper mit Leichtigkeit durchdringen? Wie sollte man anders die Durchsichtigkeit vieler Körper für das Licht erklären etc.? Dass die Materie sehr porös ist, wurde auch im Alterthum schon geglaubt, und Niemand würde wohl diese Annahme bestreiten wollen. Ich will noch einen Grund vorbringen, wesshalb diese Ansicht als eine sehr natürliche und passende erscheint. Wesshalb sollte man denken, dass Material verschwendet werden sollte? Wenn ein Molekül durch seine ganze Masse solid zum Beispiel eine dichte Kugel wäre (wie man öfters anzunehmen scheint), so wäre dies sicher eine grosse Verschwendung von Material, woran man in der gewöhnlichen Architektur, oder bei vergrössertem Massstabe nie denken würde. Was würde man zum Beispiel von einem Gerüste halten, das ganz massiv, oder vollständig mit Material ausgefüllt wäre? Jedoch macht man sich im verkleinerten Massstabe vom Atombau Vorstellungen, an die man im Grossen nie denken würde.

Wenn man sich daher ein Molekül vorstellt, das von offener Structur ist (ich postulire nichts von der Gestalt), oder das nicht mehr Material einschliesst als nöthig ist, um ihm eine gewisse Ausdehnung und Form zu verleihen — so dass nichts Überflüssiges dabei existirt — so wäre diese Ansicht doch (unabhängig von dem Gravitationsproblem) weit vernünftiger und praktischer. Dadurch können auch begreiflicherweise die Moleküle die verschiedenartigen durch das Spectroskop bewiesenen Schwingungen leicht ausführen, da eine offene Structur gegenseitig bewegliche Theile zulässt.

Jetzt wollen wir zur Behandlung des Gravitationsproblems schreiten. Ich setze voraus dass Atome im Weltraum existiren, und dass diese Atome eine gewisse Gesammtenergie besitzen. Das ist die einzige Grundannahme, die ich zu machen habe, und das ist auch kein Postulat, da es ja schon eine bekannte Thatsache ist, dass der Weltraum nicht leer ist; und ein Zustand der Bewegung für die darin enthaltene Materie ist sicher ebenso natürlich als ein Zustand der Ruhe. Ich wende keine Kräfte an, da diese nur die ganze Sache in grenzenlose Verwirrung bringen und

keinen Fortschritt zulassen, auch von Naturerkenntniss ist dabei nicht die Rede. Diese Atome werden nur ihren eigenen Bewegungen überlassen, und da jede Grösse a priori gleich wahrscheinlich ist, wollen wir voraussetzen, dass bei einer kleinen mittleren Entfernung der Atome ihr mittlerer Durchmesser noch im Verhältniss sehr klein ist. Dann wird die mittlere Weglänge der Atome sehr gross. Wir werden annehmen, dass diese mittlere Weglänge jedenfalls grösser ist, als die Planetenentfernungen, da jede Weglänge a priori gleich wahrscheinlich ist: und wie bedeutend auch die Weglänge wäre, kann man sich immer durch eine genügende Verkleinerung des Durchmessers der Atome noch eine grössere vorstellen.

Dann folgen (wie man sehen wird) die sämmtlichen Gravitationsgesetze — resp. die Bewegungen der Planeten und Doppelsterne etc. — ohne Weiteres aus diesen einfachen oder (könnte man sagen) schon im voraus wahrscheinlichen Prämissen. Wir wollen auf diese Bedingungen etwas näher eingehen.

In einer früheren Abhandlung von mir (im Philosophical Magazine, Juni 1877) über den „Mechanismus der Fortpflanzung des Schalles auf der Basis der modernen Gastheorie", wo Professor Maxwell einen mathematischen Ausdruck für die betreffende Geschwindigkeit eingesetzt hat, hatte ich Gelegenheit mir die Natur der Molekularbewegung (in Gasen) möglichst klar vorzustellen, und es ist mir vorgekommen, dass diese normale Bewegung der Gasmoleküle gerade im Princip die gewünschte wäre, um die Gravitation unter Beibehaltung des Le Sage'schen Grundbegriffs (des gegenseitigen Schutzes zweier Massen) zu erklären — ohne des Postulates von besonders gerichteten Strömen zu bedürfen. Es ist nämlich klar, dass das in jedem Punkte des Raums (in einem Gase) herrschende Gleichgewicht der Momenta uns beweist, dass die Gasmoleküle sich gleichmässig nach allen Richtungen bewegen. Denn wenn die Moleküle im Gase sich irgendwo überwiegend in einer Richtung bewegten, so wäre der Gasdruck um diesen Punkt herum nicht überall gleich; ein Fall, der in der Praxis nie vorkommt. Es muss daraus folgen, dass die Gasmoleküle ihre eigene Bewegung (durch die stattfindenden Collisionen) in der Weise ausgleichen, dass, wenn durch etwaige, künstlich störende Einflüsse diese

symmetrische Molekularbewegung beeinträchtigt wurde, die Symmetrie sich von selbst herstellt, sobald die störenden Einflüsse aufhören. Die Schnelligkeit dieser automatischen Correctur der symmetrischen Molekularbewegung ist sogar bekanntlich von Maxwell[1] mathematisch berechnet (für gewöhnliche Gase).

Weil also die Gasmoleküle an jedem Punkte symmetrisch nach allen Richtungen sich bewegen, so kann man mit Wahrheit sagen (und dies wird ganz besonders klar, wenn durch Verdünnung oder durch die Verkleinerung der Moleküle die Weglänge bedeutend anwächst), dass die Moleküle eines Gases in wirklichem Sinne von (und zu) jedem Punkte des Raums strahlen, auf radiale Entfernungen, die von der Weglänge abhängen; diese Weglänge kann durch Verkleinerung der Moleküle (wie in unserem Falle) Millionen von Meilen betragen. Jeder Punkt des Raums wird dadurch ein Strahlungspunkt, in dem Sinne, dass die Materie sich gerade wie Lichtstrahlen (im Falle dass der Punkt wirklich leuchtend würde) von (und zu) diesem Punkte bewegt.

Aber diese symmetrisch-radiale, in jedem Punkte des Weltraums gleichmässig nach allen Richtungen dirigirte Atombewegung ist gerade das Ziel, welches Le Sage durch seine unmotivirt postulirten Ströme erreichen wollte (um die Gravitation zu erklären). Und man gibt überall zu, dass wenn nur eine solche Atombewegung sich natürlich erhalten könnte, die Gravitation erklärt wäre. Le Sage hat kein anderes Mittel gefunden, um dieses Resultat zu erreichen, als einen continuirlichen Zuschuss von Material, das beständig in vielen (von ihm angewiesenen) Richtungen von jenseit der Weltgrenzen herbeiströmen sollte. Jetzt sehen wir schon, dass dasselbe Resultat auch ohne irgend einen Zuschuss von Material erzielt werden kann und dass die symmetrisch-radiale Bewegung von Atomströmen in allen Richtungen eine automatische Folge der kinetischen Gastheorie ist. Diese schöne Einrichtung, um die gegenseitigen Annäherungsbewegungen der Massen und groben Moleküle hervorzurufen, ist als ein ganz automatischer Mechanismus anzusehen. Könnte man wohl einen einfacheren Mechanismus für diesen Zweck wünschen? Hier haben wir einen continuirlichen nach jedem Punkte des Weltraums

[1] Philosophical Transactions, 1866.

sich richtenden Hagelschauer der Materie, dessen Bewegung so symmetrisch ist, als ob die Atome von der inneren Fläche einer Hohlkugel[1] (längs der Radien) reflectirt würden und sich im Verhältniss des Quadrats der Entfernung (dem Gravitationsgesetz entsprechend) radial ausbreiteten. Die Atome bewegen sich aber automatisch in dieser Weise, ohne Hohlkugel, ohne irgend eines diese Symmetrie bewirkenden Mittels zu bedürfen.

Was die Gravitation speciell betrifft, könnte man vielleicht durch eine einfache Illustration die Begriffe erläutern. Wir wollen uns zwei einander gegenüber gestellte Siebe (da die Körpermoleküle von offener Structur sind) vorstellen; durch starkes Blasen sollen zwei entgegengesetzte Ströme von sehr feinem Sandstaub durch die Maschen der Siebe getrieben werden. Dann werden offenbar die kleinen durchschwirrenden Sandkörner (wegen Reibung an den Maschen des einen Siebs) das andere Sieb mit weniger Energie treffen, als sonst der Fall sein würde. Die vorderen Flächen der Siebe schützen sich also gegenseitig Dagegen werden beide Siebe mit voller Gewalt an ihren Rückflächen (wo kein Schutz existirt) getroffen. Desshalb werden beide Siebe mit einer gewissen Kraft gegen einander getrieben — und wenn der Sand (anstatt nur in zwei Richtungen) radial oder symmetrisch nach allen Richtungen getrieben würde (wie es in der Natur mit den Atomen automatisch vorkommt); dann würde die Antriebskraft im quadratischen Verhältniss der Entfernungen der Siebe variiren: da ja dies bekanntlich die Eigenschaft von allen radialen Bewegungen ist.

Vielleicht könnte man hier fragen, wie soll ein derartiges Durchschwirren der Atome durch die offene Structur der groben Moleküle stattfinden, ohne die grobe Materie stark zu erwärmen? Dieser Einwand ist schon von Maxwell bei seiner Kritik der von Thomson exponirten Le Sage'schen Theorie angeführt. Maxwell hat aber seinen Einwand ganz auf die Voraussetzung gestützt, dass

[1] Eine solche die ganze Welt umgebende Hohlkugel hat auch schon Dr. Blair, ungefähr im Jahre 1818 ersonnen. Sein Werk „Scientific Aphorisms" (mir durch Professor Tait angewiesen), wurde 1827 publicirt. Die die Gravitation bedingenden Atome sollten von der inneren Fläche der Hohlkugel abprallen, und dadurch sollten die Bewegungsrichtungen der Atome gehörig symmetrisch erhalten werden. Dieses Buch von Dr. Blair enthält übrigens einige scharfsinnige Ideen.

es „ziemlich gewiss“ („tolerably certain“)[1] wäre, dass die Zahl der in einer Volumeinheit des Raums (zu irgend einer gegebenen Zeit) enthaltenen Gravitationsatome klein wäre im Vergleich mit der Zahl der daselbst enthaltenen Molekule eines festen Körpers. Es ist aber klar, dass diese Voraussetzung nicht nöthig ist (und Maxwell scheint sie ja nicht mit Gewissheit behauptet zu haben). Man könnte wohl zuerst meinen, dass wenn die Zahl der Gravitationsatome in der Raumeinheit nicht verhältnissmässig klein wäre, eine grosse Weglänge nicht möglich wäre. Aber nach Erwägung der Sache sieht man sogleich, dass eine ausreichend grosse Weglänge, bei jeder beliebigen Vermehrung der (in der Raumeinheit enthaltenen) Atome möglich ist, wenn nur dabei die Atome selbst als hinlänglich klein gedacht sind. Und diese Kleinheit ist allein für die grosse normale Geschwindigkeit der Gravitationsatome passend. Maxwell hat nun gemeint, weil (unter seiner Voraussetzung) die Zahl der Gravitationsatome in der Raumeinheit klein ist, so wäre nothwendigerweise die Energie jedes Atoms sehr gross (um eine hinlängliche Gesammt-Energie in der Raumeinheit zu erlauben) — und desshalb wäre die Wärmeerzeugung durch das Anprallen des Atoms sehr gross, weil ja (nach dem bekannten Maxwellschen Princip) die kinetische Energie von jedem sich bewegenden Atom oder Körper im Mittel überall gleich zu sein strebt. Aber wenn wir sehen, dass (in so fern es die Weglänge betrifft) wir so viele Gravitationsatome in der Raumeinheit denken können, wie wir nur wollen; dann wird (bei einer gegebenen Gesammt-Energie) die Energie von jedem einzelnen Atom durch Vermehrung ihrer Zahl bis zum Verschwinden verkleinert — und die betreffende Wärmeerzeugung auch mit. Und natürlich ist schon hinlänglich Zeit verflossen, um das Wärmegleichgewicht zwischen den Gravitationsatomen und den groben Körpermolekülen zu bewerkstelligen.[2]

[1] Encyclopädia Britannica, neueste Auflage, unter dem Worte „Atom“, S. 46.

[2] Früher hat man den für die Erklärung der Gravitation nöthigen Geschwindigkeitsverlust der anprallenden Atome durch die Annahme einer unvollkommenen Elasticität der Atome zu erklären gesucht — was aber selbstverständlich dem Satz der Erhaltung der Kraft widerspricht. Thomson hat zuerst (Philosophical Magazine, Mai 1873, Seite 329) die Erklärung von diesem Geschwindigkeitsverlust in Einklang mit der vollkommenen Elasti-

Jetzt bleibt noch übrig, etwas näher zu erläutern, wie durch diese Theorie sich die Thatsache, dass die Gravitation sehr annähernd der Masse proportional ist, erklären lässt. Dies hängt (wie Le Sage und Thomson schon gezeigt haben) von der fast vollkommenen Durchdringlichkeit der Moleküle der groben Materie ab, wobei die Moleküle im Innern der Körper mit fast derselben Leichtigkeit durch die durchschwirrenden Atome getroffen werden können wie die äusseren Moleküle. Um dem Satz der Proportionalität des Antriebs (Impulsion) mit der Masse zu genügen, hat man nur anzunehmen, dass das bei der Bildung der groben Moleküle aufgewendete Material sehr beschränkt — oder dass die Quantität von Material im Molekül im Vergleich mit dem enthaltenen leeren Raume sehr klein ist. Diese Annahme

---

cität der Atome (resp. mit der Erhaltung der Kraft) gebracht. Seine Erläuterung könnte principiell folgendermassen in etwas veränderter Form gegeben werden.

Wegen der verhältnissmässig sehr grossen Dimensionen des groben Moleküls kann das kleine Gravitationsatom bei seinem Anprall nur gewissermassen einen einzigen Punkt der Oberfläche des groben Moleküls berühren. Desshalb wird natürlich die innere Bewegung des groben Moleküls durch den Stoss kaum afficirt (oder das Molekül wird kaum erschüttert). Dagegen kann das Gravitationsatom (seiner Kleinheit wegen) voll mit seiner ganzen Fläche auf das grobe Molekül anschlagen, und das Atom wird dadurch heftig erschüttert — resp. in starke innere Bewegung (Vibrationen und Rotationen) versetzt. Diese innere Bewegung des Atoms kann aber selbstverständlich nicht aus Nichts erzeugt werden. Deshalb verliert das Atom beim Stosse einen Theil seiner translatorischen Bewegung durch Umwandlung derselben in innere Bewegung (Vibrationen und Rotationen). Man könnte diese Thatsache leicht experimentell illustriren beim Werfen irgend eines kleinen elastischen Körpers (z. B. eines Stahlringes) gegen die Oberfläche eines harten Ambosses. Die innere Bewegung des Ambosses wird (seiner Grösse wegen) nicht afficirt, während dagegen der Stahlring — beim Stosse — in heftige Vibrationen und Rotationen versetzt werden kann. Der Stahlring springt mit einer Verminderung seiner translatorischen Bewegung zurück — wegen Umwandlung derselben in Vibrationsbewegungen etc. Wenn man also nur die ungeheure Verschiedenheit der Dimensionen (und deshalb die Verschiedenheit der Biegsamkeit oder Starrheit) zwischen Atom und Molekül in Rechnung zieht, so wird man ersehen, dass der Verlust an translatorischer Bewegung schon im voraus als eine nothwendige Deduction sich ergibt — auch wenn die Erklärung der Gravitation nicht zu dieser Annahme führen würde.

ist, wie früher bemerkt, an sich wahrscheinlich, da man an eine nutzlose Verschwendung des Materials zu glauben nicht gezwungen ist. Wenn ein Molekül nur Form und Ausdehnung hat, wozu sollte inwendiges Material nützen? Man braucht bekanntlich nur das Verhältniss zwischen dem Volumen des Materials und dem des leeren Raums im Molekül genügend klein zu machen, um den Satz der Proportionalität der Masse in vollkommener Übereinstimmung mit den Beobachtungen zu erhalten.

Ich glaube deshalb, dass, im Ganzen betrachtet, diese Gravitationstheorie keiner besonderen Empfehlung bedarf, sondern dass sie sich durch ihre (fast automatische) Einfachheit und Klarheit eine Stelle zu erringen in Stande ist. Wenn dagegen die Theorie sich als irgendwo fehlerhaft zeigen sollte, dann ist es desto besser, je eher dies durch die Prüfung nachgewiesen wird[1].

---

[1] Die Erklärung von anderen Molekularkräften, namentlich von der „Cohäsionskraft", scheint obigen Bedingungen (principiell) nahe zu liegen, da ja bei dem wirklichen Contact der Körpermoleküle (wobei der vor den Atomströmen gewährte Schutz vollständig wäre), die Moleküle natürlich sehr stark an einander haften würden. Eine initiale Abstossung durch die heftigen Wärmevibrationen der Körpermoleküle, dürfte auch einen modificirenden Einfluss dabei haben.

Was die eigenthümlich transversale Fortpflanzung der Lichtwellen betrifft (die bekanntlich noch nie mechanisch erklärt worden ist), werde ich hier nur eine betreffende Idee von Maxwell, in Bezug auf die hier entwickelte Constitution der Materie im Weltraum, folgen lassen. In der Encyclopaedia Britannica, neueste Auflage, „Ether", unter der Voraussetzung, dass die Atome des Lichtäthers auf grosse Entfernungen gleichmässig in allen Richtungen mit der Geschwindigkeit des Lichtes sich bewegen (obiger Theorie entsprechend), sagt Maxwell wie folgt:

„If we further suppose that vibrating bodies have the power of impressing on these atoms of ether some vector property (such as rotation about an axis) which does not interfere with their motion of translation, and which is then carried along by the atoms of ether, and if the alternation of the average value of this vector for all the atoms of ether within an element of volume be the process which we call light, then the equations which expresses this average will be of the same form as that which express the displacement in the ordinary theory" (Encyc. Brit. S. 572 etc.). Näheres über diesen Gegenstand findet sich in meiner Abhandlung „On a Mode of Explaining the Transverse Vibrations of Light", im Journal „Nature", Jan. 15, 1880.

Es mag beiläufig erwähnt werden, dass die Erklärung der Schwerkraft den grossen Vortheil bietet, die Idee von zwei (inhärent verschiedenen) Arten der Materie überflüssig zu machen. Die Atome der Materie im Weltraum gravitiren nicht — nicht etwa weil diese verbreitete Materie die hypothetische „Qualitas occulta" der Schwerkraft ausnahmsweise nicht besitzt — sondern eben nur, weil die „Qualitas occulta" selbst ein Mythus ist, und der Mechanismus der Schwerkraft doch nicht selbst den die Schwerkraft erzeugenden Bedingungen unterworfen werden kann. Wir haben deshalb keinen Grund zu glauben, dass diese Atome sich von den groben Molekülen anders als durch ihre Dimensionen unterscheiden sollten.

Bei der Abschaffung von „Kräften" („Qualitates occulta") aus der Physik, verschwindet auch die merkwürdige Annahme von zwei Arten der Energie (Energie mit und Energie ohne Bewegung, kinetisch und nicht kinetisch) — eine Idee, die sich fast selbst zu widersprechen scheint und deren Verbannung aus der Naturwissenschaft wohl kein Verlust sein wird. Dann bleiben die einfachen und einleuchtenden Grundbegriffe der Materie und der Bewegung in der Naturphilosophie allein übrig.

Obige Begriffe dürften vielleicht auch nicht ohne Bedeutung sein in Hinsicht auf den noch dunklen Mechanismus der Polarisation des Lichtes. Man könnte z. B. auf oberer Basis leicht annehmen, dass die durch schwirrenden Ätheratome irgend eine unregelmässige — z. B. abgeplattete — Form besitzen, und deshalb (durch eine besondere Anordnung der Körpermoleküle in Krystallen) in eine und dieselbe Ebene gedreht werden könnten (und so ein Lichtstrahl ungleiche Seiten bekommen würde). Dass übrigens diese Theorie des Lichtes auch keine Emissionstheorie, sondern principiell eine wahre Undulationstheorie (von besonderer Form) ist, liegt auf der Hand.

Einige Gedanken über die Erklärung des Krystallbaus unter der Voraussetzung von elastischen Körpermolekülen (von offener Structur), welche in symmetrisch gestaltete Formen natürlicherweise durch Druck (der durchschwirrenden Atome) gebogen werden könnten, was eine rohe Analogie mit der Bildung der Bienenzellen durch Druck haben mag — finden sich in meiner Abhandlung „A Suggestion in regard to Crystallisation on the Hypothesis that Molecules are not infinitely hard", im Philosophical Magazine, April 1880.

Durch die Anwendung der modernen kinetischen Theorie auf die Materie im Weltraum ist ihre Anwendung auf die Welt selbst (oder auf die in diese überall verbreitete Materie eingesenkten Weltkörper), gewissermassen eine natürliche oder fast nothwendige Folge. Dabei wird das Universum, im Grundprincip wenigstens, als eine Sammlung von Massentheilen von verschiedenen Dimensionen (z. B. Sternmassen, groben Molekülen, kleinen Atomen etc.) betrachtet, die sich automatisch nach den Principien der kinetischen Gastheorie bewegen — wobei auch die groben Moleküle sich stellenweise in Massen (Weltkörper etc.) durch den Druck der durchschwirrenden kleineren Atome sammeln. Eine Ausdehnung dieser Ansicht (welche mir viel Denken und Arbeit gekostet hat) in der angegebenen Richtung gibt die nachfolgende Abhandlung.

Über die Möglichkeit, vergangene Wechsel im Universum durch die Wirkung der jetzt thätigen Naturgesetze — auch in Übereinstimmung mit der Existenz eines Wärmegleichgewichtes in vergrössertem Massstabe — zu erklären.

Von **S. Tolver Preston.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 16. Februar 1883.)

Die Hypothese von der endlichen Temperaturausgleichung im Weltall ist bekanntlich mit mindestens zwei bedenklichen Folgen nothwendigerweise verknüpft. Man müsste nämlich daraus schliessen:

1. Entweder — dass vor einer unendlichen Zeit von jetzt an unendlich grosse Temperaturdifferenzen im Universum existirten.

2. Oder — dass vor einer unendlichen Zeit die jetzt anerkannten Naturgesetze nicht giltig gewesen wären.

Niemand wird wohl leugnen, dass diese Schlüsse höchst merkwürdig erscheinen, und es wird sogar einige Physiker geben, die geneigt sein würden, eine Hypothese, welche eine vorhergegangene Durchbrechung der Naturgesetze voraussetzt, schon aus dem Grunde zu verwerfen. Jedenfalls wird man zugeben, dass eine Untersuchung der physischen Prämissen passend wäre, da ja der mathematische Schluss immer von diesen Prämissen abhängen muss.

Da ich mich lange Jahre mit auf diese Frage beziehenden Studien beschäftigte und schon 1875 eine kinetische Theorie des Äthers[1] aufstellte, die ich später ausdehnte, und 1877 auf die

[1] „Physics of the Aether", E. & F. N. Spon, London, 1875.

Erklärung der Gravitation[1] anwendete, so ist wohl keine Entschuldigung mehr nöthig, dass ich einige sorgfältig ausgedachte Schlüsse hier folgen lasse.

Wir wollen uns einen grossen cubischen Raum vorstellen, der von festen, für Wärme undurchdringlichen Wänden umschlossen ist. Der Durchmesser dieses Raumes soll 10^{10} Mal grösser als die Siriusweite sein. Erstens die ganze Materie innerhalb dieses Raumes soll bis nahe zum absoluten Zero der Temperatur erkaltet sein. Da wird die ganze Materie sich zu einer einzigen Masse sammeln, unter Einfluss der Schwere. Zweitens die ganze eingeschlossene Materie soll bis zu jener Temperatur erwärmt sein, bei der eine vollständige Dissociation aller Moleküle eintritt.[2] Zwischen diesen zwei extremen Fällen können beliebige mittlere Fälle eingebildet werden, wo die Materie mehr oder weniger aggregirt oder getrennt vorkommt. Könnte der jetzige Zustand des Universums nicht einer von diesen Zwischenzuständen sein — i. e. bestehend aus Theilen der Materie in verschiedenen Graden der Aggregation, welche sich nach den Principien der kinetischen Gastheorie bewegen, aber nicht schnell genug, um zu verhindern, dass die Schwere (auch die „Cohäsionskraft" etc.) einen gewissen Grad der Aggregation hervorbringen könnte. Es erschiene doch von vornherein sehr merkwürdig, wenn ein Zustand zwischen diesen zwei extremen Zuständen (i. e. der vollständigen Aggregation in einer Masse und der vollständigen Trennung aller Mole-

---

[1] Philosophical Magazine, Sept. & Nov. 1877 & Feb. 1878. Diese Gravitationstheorie ist jetzt mit meinen späteren Gedanken in der vorhergehenden Abhandlung neu ausgeführt. Ich darf vielleicht gelegentlich hier erwähnen, dass Herr Dr. Ludwig Boltzmann, der ein freundliches Interesse meinen Arbeiten gezeigt, mir Folgendes über diesen Gegenstand geschrieben hat, u. zw.: — „Dass aus Ihren Annahmen das Gravitationsgesetz unbedingt folgt, scheint mir ausser Zweifel zu sein, und wären hierzu weitere Rechnungen gar nicht mehr nothwendig."

[2] Die Moleküle würden natürlich in Bewegung sein und von einander abprallen, wie die Moleküle eines Gases nach der modernen Gastheorie, und würden den cubischen Raum gleichmässig ausfüllen. Wenn man andere ähnliche cubische Räume ausserhalb denkt, so würde natürlich die Wirkung der Schwerkraft von einem Raume zum anderen sich gegenseitig neutralisiren.

küle) nicht existiren könnte. Aber wenn man dies zugibt, so wäre das gewünschte Ziel schon im Principe erreicht.

Es sollte kaum nöthig sein zu bemerken, dass wir den Raum als beschränkt gedacht haben, nur um die Ideen zu fixiren. Alles was wir brauchen, wird gegeben, wenn anstatt den fest geschlossenen Raum zu benützen, wir diesen cubischen Raum von dem unendlichen Weltraum umgeben denken, welcher Materie in demselben Zustande (als in dem genannten cubischen Raum) enthält. Man könnte vielleicht (beim ersten Anblicke wenigstens) eine Schwierigkeit darin finden, sich vorzustellen, wie zwei Massen in Bewegung direct gegen einander stossen sollten, ohne sich durch die Schwerkraft in eine Masse zu vereinigen — und so würden durch solche Stösse die Massen immer grösser und grösser. Es ist aber hier zu bemerken, dass die Schwerkraft, wenn auch von einer unendlichen Entfernung aus wirkend, doch bekanntlich nur eine endliche (auch nicht übermässige) Geschwindigkeit hervorbringen könnte, auch noch, wenn die Massen so gross wie die Sterne (oder unsere Sonne) sein sollten. Wenn also die Massen eine solche Anfangsgeschwindigkeit besässen, dass die mittlere Geschwindigkeit des Abprallens der Massentheile (nach dem Stosse) grösser wäre als die oben genannte endliche Geschwindigkeit (der Schwere), so wäre die Aggregation nach dem Stosse kleiner als vorher — i. e. die Massen hätten sich in viele (vom Centrum) immer fortfliegende Stücke verwandelt.

Wenn wir uns den oben erwähnten, viele grosse Massen enthaltenden cubischen Raum vorstellen (und nehmen für den Augenblick an, dass diese Massen in Ruhe sind); dann ist es leicht einzusehen — der Erläuterung wegen — dass eine solche Geschwindigkeit diesen Massen ertheilt werden könnte, dass bei dem Zusammenstossen die ganze Materie durch die erzeugte Hitze in Gas verwandelt würde (welches den cubischen Raum gleichmässig erfüllen würde) und die Schwerkraft unfähig wäre, irgend einen Grad von Aggregation — Massen, mehratomige Moleküle etc. — hervorzubringen. Dieses Resultat ist doch bei einer hinreichenden den Massen ertheilten Anfangsgeschwindigkeit (einer gewissen Energie entsprechend) augenfällig möglich. Muss dann nicht eine kleinere Anfangsgeschwindigkeit als die

obere denkbar sein, welche den Massen ertheilt denselben einen gewissen Grad der Aggregation noch überlassen würde (also i. e. nicht verhindern würde, dass die Schwerkraft einen partiellen Aggregationszustand bedingte). Dieser Aggregationszustand würde natürlich von der mittleren Geschwindigkeit der Bewegung abhängen. Diese Geschwindigkeit, obgleich sehr verschieden von einer Masse zur anderen, würde doch von einem cubischen Raume zum anderen[1] im Mittel gleich sein, wie die kinetische Gastheorie bekanntlich fordert. Dieser Unterschied in den Geschwindigkeiten von Masse zu Masse würde entsprechende Variationen des Aggregationszustandes verursachen, wenn auch im Mittel der Aggregationszustand von einem cubischen Raume zum anderen gleich wäre.

Der Fall wäre in verkleinertem Massstabe einem gewöhnlichen Gase vergleichbar, dessen Molekule zusammengesetzt sind (aus vielen Atomen bestehend) und desshalb in gewissem Sinne als kleine bewegte Massen zu betrachten sind. Vergleichbar mit der Dissociation der grossen Massen in unserem cubischen Raume ist die bekannte Thatsache, dass eine translatorische Bewegung (durch starke Erhitzung) auch die kleinen Massen — zusammengesetze Molekule — der Gase in einzelne Atome auflösen kann. Bei einer niedrigeren Geschwindigkeit der kleinen Massen (woraus das Gas besteht) — einer niedrigeren Temperatur entsprechend — tritt ein gewisser Grad von Aggregation der Atome ein, und bei einer weiteren Abnahme der Geschwindigkeit tritt eine bedeutendere Aggregation ein (oder die kleinen bewegenden Massen des Gases wachsen an Dimensionen). In der That ist es wohl bekannt, dass, wenn das Gas sehr complicirt ist, die Grenzen innerhalb welcher der Aggregationszustand bei verschiedenen translatorischen Geschwindigkeiten (verschiedenen Temperaturen entsprechend) variiren kann, sehr ausgedehnt sind. Es ist auch hier eine bekannte Thatsache, dass der Grad der Aggregation bei einer gegebenen Geschwindigkeit der translatorischen Bewegung sich nur auf den mittleren Aggregations-

[1] Der Weltraum ist in solche cubische Räume getheilt vorzustellen; und dann sind die Wände (der cubischen Räume) als plötzlich verschwunden zu denken.

zustand und nicht auf jede kleine Masse (im Gase) bezieht, da wir wissen, dass häufig eine solche kleine Masse durch Zufall durch die Stösse eine solche Geschwindigkeit erhalten kann, dass die kleine Masse sich in Atome auflöst. Diese Atome können sich irgend anderswo im Gase wieder vereinigen. Der mittlere Aggregationszustand von einem (entsprechend) cubischen Raume zum anderen im Gase bleibt desshalb gleich — während im Gegentheil der Aggregationszustand von einer bewegten Masse zur anderen im Gase sehr ungleich bleibt.

Es ist einleuchtend, dass Verschiedenheiten im Detail vorkommen, wenn wir die verhältnissmässig grossen bewegenden Massen des Universums betrachten. In einem gewöhnlichen zusammengesetzten Gase zum Beispiel, wo die die Aggregation bedingende Centralkraft die sogenannte „chemische Affinität" ist, sind die Variationen in der Grösse der einzelnen kleinen Massen beschränkt, während bei den bewegten Massen des Universums — wo die (die Aggregation bedingende) Centralkraft hauptsächlich die sogenannte „Schwerkraft" ist — die Variationen in der Grösse der Massen nicht in dieser Weise scharf begrenzt sind. Es handelt sich hier aber um ein Princip, nicht um untergeordnete Details, und ein solches muss ebenso auf einen grösseren wie auf einen kleineren Massstab Anwendung finden. Ebensogut wie auf die Moleküle der Gase, muss sich die Theorie auch anwenden lassen,[1] wenn die Zahl der (um ein Centrum gesammelten) Atome gross genug ist, um eine sichtbare Masse zu bilden. Der Unterschied zwischen einem gewöhnlichen complicirten Gase und dem Universum (als Gas betrachtet) liegt also hauptsächlich darin, dass die die Bildung der bewegten Massen bedingende Centralkraft von der Art ist, dass die Zahl der um Centra angehäuften Moleküle nicht begrenzt ist, sondern dass die Massen bisweilen (auch nicht immer) sichtbare Dimensionen besitzen können. Es handelt sich hier um die Anwendung eines anerkannten Princips in vergrössertem Massstabe.

Man könnte vielleicht einwenden, dass diese beiden Fälle reell verschieden seien, dass nämlich die zusammengesetzten

[1] Die kinetische Theorie liesse sich auch wohl auf einen Dampf (im Zustande der partiellen Condensation) anwenden.

Moleküle eines gewöhnlichen Gases als elastische Massen von einander abprallen, während im Gegentheil die bewegten Massen des Universums gewöhnlich durch die Stösse zerstreut oder in Stücke zersetzt würden. Dieser Einwand könnte aber nur von einer oberflächlichen Betrachtung der Sache herrühren, da es ja eine bekannte Thatsache ist, dass die zusammengesetzten Moleküle eines Gases häufig unter den Zufällen der Bewegung sehr grosse Geschwindigkeiten bekommen und durch die erfolgenden heftigen Stösse in Stücke (Atome) zersetzt werden. Es ist aber bei dieser Zerstückelung der kleinen bewegten Massen des Gases keine Arbeit — im grossen Ganzen — geleistet (Verlust an Energie), weil eben die Atome sich wieder zu kleinen Massen irgend anderswo im Gase vereinigen, und wenn der mittlere Aggregationszustand gleich bleibt, ist mit diesen Wechselwirkungen keine Arbeitsleistung verbunden. So auch im Universum, wenn der mittlere Aggregationszustand (von einem von unseren grossen cubischen Räumen zum anderen) gleich bliebe, so würde im Ganzen keine Arbeit geleistet werden bei der zufällig erfolgenden Zerstückelung der Materie. Man könnte aber vielleicht noch einwenden, dass bei jedem Zusammentreffen zweier Massen des Universums sich doch die durch die Collision erzeugte Wärme in den Äther zerstreuen würde und dass diese Wärme unvermeidlich verloren wäre. Wenn wir aber die Materie des Universums als durchschnittlich gleichmässig vertheilt (wenn entsprechend grosse Räume mit einander verglichen werden) ansehen, was nöthig wäre nach den Principien der kinetischen Theorie, so wäre kein derartiger Verlust von Energie (Wärme) möglich — nur eine Strahlung hin und her von einer Region des Äthers bis zur andern. In verkleinertem Massstabe, bei einem gewöhnlichen Gase, findet unzweifelhaft bei jedem Zusammentreffen der kleinen bewegten Massen (vielatomiger Moleküle) des Gases eine Zerstreuung der Energie in den Äther statt; aber diese Energie ist, wie bekannt, nicht verloren, sondern nur bis in eine andere Region des Gases gestrahlt, indem die mittlere Temperatur (von einer cubischen Volumeinheit des Gases zur anderen) constant bleibt. Diese cubische Volumeinheit muss bekanntlich so gross genommen werden — bei einem gewöhnlichen Gase — um sehr

viele Moleküle (deren Temperaturen unendlich verschieden sind) einzuschliessen und die Grösse solcher cubischen Räume (um in Hinsicht auf die Temperatur vergleichbar zu sein) ist bei einem gewöhnlichen Gase natürlich klein. Die Seite des cubischen Raumes könnte, zum Beispiel etwa millionmal die mittlere Entfernung der Moleküle des Gases betragen. So würde in entsprechender Weise bei vergrössertem Massstabe (in Beziehung auf das Universum) die Seite des cubischen Raumes — wovon die Temperaturen in ähnlicher Weise von Raum zu Raum gleich sein sollten — als ein vielfaches Multiplum der mittleren Entfernung der Sternmassen anzunehmen sein. Da (wie vorher erwähnt) die Temperaturen der einzelnen Moleküle — oder Molekularaggregate — eines gewöhnlichen Gases im normalen Zustande unendlich ungleich sein können, so wende ich dieses Princip ohne Rücksicht auf den Massstab an, oder ich behaupte (wenn auch die Sterne noch so ungleiche Temperaturen besässen), dass nach den Principien der kinetischen Gastheorie die Temperatur des Universums doch schon jetzt überall gleichmässig ist, wenn nur hinreichend grosse, dem Massstabe entsprechende Räume zur Vergleichung genommen werden. Um eine genaue Idee von der Temperatur des Universums zu bekommen, müssten wir Volumeinheiten, wovon jede Tausende von Millionen Sternmassen (glühend oder kalt) enthielte, durchprüfen — wie wir dies ja wirklich thun, in verkleinertem Massstabe, wenn wir den Temperaturzustand eines Gases untersuchen. Jede merkliche Portion des Gases enthält, wie bekannt, viele Millionen von bewegten Massentheilen, von unendlich verschiedenen Temperaturen.

Wenn es möglich wäre, die einzelnen Moleküle eines gewöhnlichen (complicirten) Gases bei der normalen Temperatur zu beobachten, so würde man in verschiedenen Lagen im Gase Moleküle erblicken, die weissglühend oder rothglühend leuchteten, auch stellenweise Moleküle im Zustande der Dissociation (in Atome aufgelöst), und wenn man über den Zustand des ganzen Gases nach diesen seltenen leuchtenden Molekülen urtheilen wollte, so würde man daraus schliessen, dass das ganze Gas in glühendem Zustande wäre — ein Schluss, welcher selbstverständlich falsch wäre. In gleicher Weise würde man sich täuschen

wenn man über den Temperaturzustand des Universums nach den (vielleicht sehr seltenen) leuchtenden Massen, die gewiss allein uns wahrnehmbar sind, urtheilen würde.

Natürlich würden solche Räume, wo ungleiche Temperaturen herrschen (obgleich sehr gross im Verhältnisse zu einem Planetensysteme), doch im Verhältnisse zu dem Universum selbst verschwindend klein sein. So wäre in diesem beschränkten Sinne der Satz der allgemeinen Ausgleichung der Temperatur berechtigt, eben weil die Räume, wo ungleiche Temperaturen existiren, verhältnissmässig verschwänden, obgleich diese Räume reichlich gross genug wären, um Leben, vielfältige Thätigkeit und nützliche Veränderungen zu gestatten.

Um die Beständigkeit des Wechsels und des Lebens im Universum zu erklären, muss es von vornherein einleuchtend sein, dass die Existenz irgend eines Processes der Recurrenz eine absolut unumgängliche Bedingung ist. Die todte Materie von ausgelöschten Sonnen muss auf irgend eine Weise zur Herstellung neuer Sonnen oder neuer Wärme-Centra verwendet werden; da ja, wenn dies nicht der Fall wäre, die Materie von nutzlosen oder erloschenen Sonnen im Universum nothwendigerweise continuirlich zuwachsen müsste, und erneuende Processe der Thätigkeit und des Lebens sich aus Mangel an Materie auf immer ganz erschöpfen würden. Dies ist doch augenfällig klar. Um desshalb die todte Materie wieder zu gebrauchen und zu erhitzen, erscheint keine andere Methode (in Übereinstimmung mit den anerkannten Principien der Mechanik) denkbar zu sein, als ein stattfindender Bewegungsaustausch zwischen den materiellen Massen des Universums, welcher alternirend von Erzeugung und Verlust von Wärme begleitet, die nöthige Bedingung der Recurrenz erfüllen würde. Dies wäre im Princip das einzig begreifliche Mittel, dass eine Recurrenz unter der Voraussetzung, dass dieselbe Materie wieder gebraucht würde, stattfinden könnte.

Jene Physiker, welche die Folgenreihen der Naturursachen in der gegenwärtigen Zeit wie in der Vergangenheit gerade in demselben Lichte zu betrachten geneigt sind, oder welche das grosse Naturprincip der Conservation der Energie als vom Zeitalter unabhängig betrachten — sind zum Schlusse

gezwungen, dass irgend ein Process der Recurrenz (Erneuerung), wodurch die nützliche Thätigkeit fortdauern und dem zwecklosen Ende eines todten Chaos vorgebeugt werden könnte — existiren müsste.

Der Catastrophen-Glaube in Beziehung auf die Phänomene des Universums dürfte sicher bei den gegenwärtigen Fortschritten der Physik als ebenso unpassend erscheinen wie die älteren Catastrophen-Vorstellungen in der Geologie (bekanntlich durch Lyell weggefegt). Es ist nichts als eine Ausdehnung des Massstabes, wenn man ähnliche Begriffe wie die Lyell'schen auf das Weltganze anwendet, oder es handelt sich nur um die Erweiterung des Darwin'schen Princips der Evolution auf Wechsel im Weltganzen.

Sir W. Grove war fest überzeugt, dass eine recurrirende Wechselwirkung in der Natur stattfinde. Er sagt: „Eine weitere Beobachtung dürfte uns beweisen, dass die (dem Anscheine nach) in einer Richtung sich fortbewegenden Naturvorgänge sich später als recurrirende bestätigen werden, obgleich die Recurrenz niemals absolut identisch wäre; dass im Weltall ein beständiger Wechsel (aber kein Ende) stattfindet, dass kein Stern oder Planet zu irgend einer Zeitperiode entweder geschaffen oder vernichtet würde, oder absolut im stationären Zustande verbliebe, sondern dass einige sich vergrössern, andere sich verkleinern dürften, in der Gegenwart wie in der Zukunft." (Grove „Correlation of Physical Forces" S. 67.)

Sir W. Grove drückt weiter sein Bedenken aus über die Ansicht, dass die Ursachen der Natur dazu bestimmt sein sollten, um sich selbst zu vernichten und der Entwicklung des Weltganzen Einhalt zu thun. Er sagt:

„Diese Idee (von dem drohenden Tode des Universums) erscheint mir der früheren Ansicht der Instabilität des Sonnensystems, welche Laplace aus dem Felde geschlagen hat, ähnlich zu sein. Man müsste jedenfalls hier einen viel stärkeren Nachweis führen, als bis jetzt gethan worden ist." (S. 69, 6. Auflage.)

Diesen Gegenstand betreffend, spricht auch Humboldt, wie folgt:

„Ein Versuch, die Natur lebendig und in ihrer erhabenen Grösse zu schildern, in dem wellenartig wiederkehrenden Wechsel physischer Veränderlichkeit das Beharrliche aufzuspüren, wird daher auch in späteren Zeiten nicht ganz unbeachtet bleiben." („Kosmos", Vorrede.)

Es ist durch den bekannten Physiker Dr. James Croll (im „Quarterly Journal of Science", Juli 1877) klar bewiesen worden, dass die Gravitationstheorie der Sonnenwärme (vorgeschlagen von Helmholtz) nicht für sich allein ausreichen könnte, um der Sonnenwärme eine (in Übereinstimmung mit den Beweisen der Geologie über das Alter der Erde) entsprechende Fortdauer zu gestatten. Es ist so weit selbstverständlich, dass die ganze geologische Geschichte der Erde innerhalb der Grenzen des Sonnenalters liegen müsse. In Betreff auf das geologische Alter der Erde macht man natürlich keinen Anspruch auf Genauigkeit; dies verhindert aber durchaus nicht, dass eine grosse Anzahl von unbestreitbaren Thatsachen uns wenigstens eine Zeit-Grenze mit grosser Sicherheit zu fixiren erlauben sollte. In der oben erwähnten Abhandlung steht eine grosse Reihe von geologischen Thatsachen gesammelt, um zu beweisen, dass das Alter der Erde (als Ganzes) die Dauer der Sonnenwärme wenigstens dreimal übertreffen müsste, wenn die Ursache dieser Sonnenwärme nur die Gravitation (der Sonnentheile) wäre. Es ist nämlich wohlbekannt (wie Helmholtz gezeigt hat), dass directe Versuche über die Wärmestrahlung der Sonne unwiderlegbar beweisen, dass die Gravitation einen Wärmevorrath nur auf etwa 20 Millionen Jahre hätte vorbereiten können.[1]

Dr. Croll spricht darüber, wie folgt:

„Wir haben nicht genügende Data, um die Anfangsperiode des Lebens auf der Erde festzustellen, da ja wir die ganze Quantität der durch Denudation abgetragenen Felsen nicht wissen; jedoch haben wir hinlänglich ausreichende Data, um zu beweisen, dass das Leben viel mehr als zweimal 20 Millionen Jahre her schon angefangen hat. Nun, indem gezeigt worden ist, dass das

[1] Prof. Haekel hat bekanntlich auch gezeigt, dass eine so verhältnissmässig kurze Dauer, wie die oben genannte, mit den Thatsachen der Evolution nicht in Übereinstimmung sein könnte.

Alter der bewohnbaren Erde viel bedeutender als 20 bis 30 Millionen Jahre sein müsste, ist damit bewiesen, dass eine andere Ursache — um die Wärmemenge zu vergrössern — neben der Gravitation (bei der Bildung der Sonnenwärme) auch betheiligt sein musste." (S. 317 etc.)

Als Nebenursache dieser Wärme hat Dr. Croll schon (im „Philosophical Magazine", Mai 1868) Collisionen der Sonnentheile durch eine früher stattfindende translatorische Bewegung vorgeschlagen. Er sagt nämlich:

„Die mechanische Theorie der Wärme bietet uns eine leichte Erklärung dar, wie eine solche Wärmemenge erzeugt werden könnte. Zwei Körper (jeder die Hälfte der Sonnenmasse), die sich mit einer Geschwindigkeit von 476 Meilen (englischen) per Secunde entgegenbewegten, würden durch den Stoss einen Wärmevorrath auf 50 Millionen Jahre bekommen" (i. e. eine Wärmequantität, die bei dem jetzigen Verluste der Sonnenwärme — durch Strahlung — 50 Millionen Jahre dauern würde). S. 373.

Über die Möglichkeit der schnellen Bewegung im Weltall mit allem Anscheine der Ruhe. — Es wäre vielleicht kaum realisirt, was für ein Feld für die schnelle Bewegung in Verbindung mit der Stabilität und Dauer der Ruhe im Universum dargeboten wird. Es ist wichtig, diese Idee recht scharf vor Augen zu haben. Es kommt nur auf den Massstab an, dass Körper beliebig grosse Geschwindigkeiten besitzen können, ohne doch ihre gegenseitigen Lagen während einer gegebenen Zeit merklich zu ändern. Eine Sternmasse, zum Beispiel, welche (transversal dem Beobachter vorbei sich bewegend) eine Strecke gleich ihrem eigenen Durchmesser — wir wollen eine Million Meilen sagen — per Secunde zurücklegte, würde in vollständiger Ruhe dem Auge erscheinen, da ja der Stern (auch der nächste) keinen messbaren Durchmesser hat, auch in einem guten Fernrohre. Es folgt daraus, dass wenn auch die Sterne translatorische Geschwindigkeiten von einer Million Meilen in der Secunde besässen, so wäre die Bewegung dem Auge gar nicht sichtbar.[1]

[1] Da das Licht um den Durchmesser der Erdbahn (um die Sonne) durchzulaufen, bekanntlich eine Viertelstunde erfordert, und da bekanntlich dieser grosse Kreis von der Entfernung des nächsten Sternes aus

Dr. Croll hat (im „Philosophical Magazine“, Juli 1878) angedeutet, dass wenn ein Stern, tausendmal entfernter als α Centauri, sich auch mit einer Geschwindigkeit von 100 Meilen in der Secunde transversal bewegte, 30 Jahre erforderlich wären, damit seine Lage um eine Secunde (Winkel) sich verändern würde, dass man den Stern eine Lebenslänge beobachten müsste, bevor man gewiss sagen könnte, ob er seine Lage veränderte. Es ist klar, dass, um ein richtiges Urtheil über die Bewegung der Sternmassen zu haben, ein Versuch, sich die ungeheueren Dimensionen des Raums (worin die Bewegungen stattfinden) vorzustellen, gemacht werden müsste, und vorzugsweise wäre eine klare Vorstellung der Grösse der Sterne selbst unbedingt nöthig. Eine Sternmasse, zum Beispiel, welche durch $^1/_{1000}$ ihres Durchmessers per Secunde sich fortbewegte, hätte doch

---

betrachtet, bloss als Punkt erscheinen würde: so kann man daraus schliessen, dass, wenn der nächste Stern sich (transversal dem Beobachter vorbei) mit der Geschwindigkeit des Lichtes fortbewegte, so könnte man den Stern während einer Viertelstunde beobachten, ohne dass die Veränderung seiner Lage merklich wäre. Der wirkliche Winkel, durch welchen der Stern (nachdem seine Geschwindigkeit — gleich der des Lichtes — eine Viertelstunde gedauert hätte) sich bewegt hätte, wäre dem Winkel gleich, der durch die Dicke eines Haares, 25 Fuss vom Auge entfernt, vorgestellt wird. Dies ist ja die bekannte Illustration von einem Winkel von zwei Secunden (dem Winkel, den der Erdkreis in der Entfernung des nächsten Sterns wirklich vorstellen würde). Dieser Stern könnte sich mit der Geschwindigkeit des Lichtes während $7^1/_2$ Stunden fortbewegen, ohne dass der Winkelmesser der Bewegung die Dicke eines Haares, 10 Zoll vom Auge gehalten, überträfe.

Die Tendenz der modernen Wissenschaft ist unzweifelhaft, die alten unklaren statischen Ideen der Naturereignisse, durch eine construirbare dynamische Vorstellung zu ersetzen. Die alte Tendenz war vielmehr, die Bewegungen der Sternmassen zu übersehen (daher der Name „Fixsterne“). In dem Bestreben, irgend einen Begriff von Stabilität und Dauer im Universum zu bekommen, wurde jede Idee von einer directen Wirkung der bewegenden Theile des Universums auf einander (oder von einem directen Zusammentreffen) aus dem Gedanken streng verbannt. Durch sorgfältige Erwägung der Sache bin ich aber gerade auf die entgegengesetzte Schlussfolgerung geleitet, und würde die directe dynamische Wirkung der bewegenden Theile des Universums auf einander als die einzige Bedingung, wodurch Dauer und Stabilität versichert werden könnten, ansehen.

eine majestätisch langsame Bewegung. Eine Kugel (in verkleinertem Massstabe) ein Zoll im Durchmesser, die verhältnissmässig dieselbe Bewegung hätte — i. e. durch $^1/_{1000}$ ihres Durchmessers per Secunde sich bewegte — würde dem Auge in vollkommener Ruhe erscheinen. Bei einer Sternmasse, deren Durchmesser eine Million Meilen — ungefähr der der Sonne — beträgt, hätte die entsprechende absolute Geschwindigkeit den ungeheuren Werth von 1000 Meilen in der Secunde. Es dürfte wohl nicht ohne Bedeutung sein, sich ein möglichst klares Bild dieser Thatsachen vorzustellen.

Diese Betrachtungen mögen dienen, um zu zeigen, wie bedeutende Modificationen die für gewöhnliche Gase geltenden Sätze bei der Anwendung der kinetischen Theorie auf das Weltganze erfahren. Die Moleküle eines Gases, weit entfernt davon, eine Strecke, die nur ein Bruchtheil des Molekulardurchmessers repräsentirt, per Secunde zurückzulegen, bewegen sich sogar per Secunde durch eine Strecke, die (bekanntlich) um viele Millionen Mal die mittlere Entfernung der Moleküle übertrifft. (Die Moleküle machen ja etwa 10.000 Millionen Collisionen per Secunde.) Jedoch dieses ungeheuren schnellen Ganges der Wechselwirkungen ungeachtet, sind die Moleküle (in Beziehung auf die absolute Geschwindigkeit) fast in Ruhe, wenn deren Bewegung mit der der Sternmassen verglichen wird. Der Massstab in den beiden Fällen ist so ausserordentlich verschieden.[1] Weil aber die Wärmeerzeugung bei den Collisionen von der absoluten Geschwindigkeit und nicht von der relativen Veränderung der Lage der bewegten Körper (oder nicht von der Schnelligkeit des Ganges der Wechselwirkungen) abhängt, so wird es desshalb bei einem genügend grossen Massstabe möglich, dass eine absolute Geschwindigkeit der Bewegung von beliebig grossem Werth herrschen könnte, um eine enorme Wärmeerzeugung

[1] Indem bei einem gewöhnlichen Gase der Massstab zu klein ist, um den Gang der innerhalb einer Volumeinheit stattfindenden Wechselwirkungen zu überblicken — ist im Gegentheil bei dem Universum der Massstab zu gross. (Die Volumeinheit ist begreiflicherweise das kleinste Volumen des Gases, welches irgendwo im Gase genommen, ein genaues Muster der Eigenschaften des Gases bildet.)

und explosives[1] Zurückprallen der sich treffenden Massen zu verursachen. Jedoch könnte (bei obiger absoluter Geschwindigkeit) die relative Veränderung der mittleren Entfernung der Massen durch die Bewegung so unbedeutend sein, dass die Massen dem Auge in vollkommener Ruhe erscheinen. Wenn es schon so lange dauert, bis die Sternmassen nur ihre relativen Lagen merklich ändern, wie gross muss die Zeitperiode sein, bis sie ihre mittlere Weglänge (von einem Zusammentreffen zum nächsten) zurücklegen, und so wäre in jedem Falle eine fast unbegrenzte Zeit für die Bedingungen des Lebens im gesammten Universum, und auch jene Dauer und Stabilität gesichert, welche nur auf recurrirenden Wechselwirkungen beruht.

In Betreff eines möglichen Einwandes, dass bei den Bewegungen der Sterne (soweit man sie bis jetzt hat beobachten können), die Geschwindigkeiten nicht über 30 bis 50 Meilen per Secunde zu betragen scheinen — mag geantwortet werden, dass die Sterne, deren Bewegung nur einigermassen beurtheilt werden kann mit der totalen Zahl der sichtbaren Sterne verglichen, eine fast verschwindende Minorität bilden. Auch ist die Entfernung von fast allen sichtbaren Sternen bekanntlich unmessbar gross. Es ist von Dr. Croll angedeutet, dass es kaum zu erwarten ist, dass leuchtende Sterne einen hohen Grad von Bewegung besitzen sollten, eben weil gerade jene Sterne ihre Bewegung (bei den Collisionen, wodurch sie leuchtend würden) grösstentheils verloren hätten, indem die Massenbewegung in Wärme umgewandelt wurde. Mr. Johnstone Stoney (in einer Abhandlung in den Proceedings of the Royal Society 1868—69) hat auch die Meinung ausgesprochen, dass Collisionen unter den in verschiedenen Richtungen sich bewegenden Sternmassen stattfinden, und macht dabei folgende Bemerkung:

---

[1] Das Zurückprallen wäre in der That vielmehr als ein „explosives“ (im gewöhnlichen Sinne des Wortes) anzusehen; da die expansive Wirkung der (auch bei der mässigen Geschwindigkeit der Planetenbewegungen) bei den Collisionen erzeugten Wärme, die explodirende Energie des Schiesspulvers bekanntlich weit übertrifft. Wenn sogar die zusammentreffenden Massen von Schiesspulver gebildet würden, so würde seine erfolgende Entzündung bei dem Stosse die explodirende Energie des Zurückprallens sicher nur um (verhältnissmässig) wenig vermehren.

„Wenn die Vermuthung, die ich hier über die unmittelbare Ursache der Wärme der Sternmassen und den Ursprung der Doppelsterne auszusprechen gewagt habe, wirklich richtig ist, so müssten wir daraus schliessen, dass der Himmel mit einer fast zahllosen Menge von schwarzen Körpern (erloschenen Sternen) bevölkert wäre, und dass die Zahl derer, die Collisionen (um sie jetzt leuchtend zu machen) erfahren haben, verhältnissmässig äusserst klein sein muss.“ [1]

Die Erscheinung eines plötzlichen Aufbrennens ganz „neuer Sterne“ (weltberühmt in der Astronomie) — gerade als ob es von irgend einer Convulsion entstände — wäre mit Collisionen in Übereinstimmung. Dass die Sternmassen wirklich in translatorischer Bewegung (nach verschiedenen Richtungen) sind, und in der Regel in solchen gegenseitigen Entfernungen, dass die Schwerkraft (wenn sie bei solchen Entfernungen überhaupt schätzbar würde) unfähig wäre zu verhindern, dass die Bewegungsrichtungen — sehr annähernd — gerade Linien wären, ist eine

[1] Die oben erwähnten Ansichten von Dr. James Croll und von Mr. Johnstone Stoney dürften als Stütze der Theorie des Verfassers betrachtet werden. Da der Verfasser seine späteste Schlussfolgerung schon erreicht hatte, bevor er die obigen Ansichten von Dr. Croll und Mr. Stoney gelesen hatte, so wurde dabei sein Vertrauen auf die Wahrheit seiner Schlüsse vermehrt — und wurde er dadurch zu deren Veröffentlichung ermuthigt.

Die erste (unvollkommene) Abhandlung des Verfassers über diesen Gegenstand steht im „Quarterly Journal of Science“, Juli 1878; die zweite im Journal „Nature“, 20. März 1879. Was die Ansichten über den drohenden Tod im Universum (und die Gegenansichten) betrifft, dürfte es vielleicht passend sein, folgende Abhandlungen zu erwähnen. Thomson „On the Universal Tendency in Nature to the Dissipation of Mechanical Energy“, Philosophical Magazine, Oct. 1852. (Die Resultate der kinetischen Gastheorie wurden bekanntlich noch nicht veröffentlicht zu der Zeit, wo obige Abhandlung von Thomson publicirt wurde.) Rankine, „On the Reconcentration of the Mechanical Energy of the Universe“, „Philosophical Magazine“, Nov. 1852. (Dieser Versuch von Rankine wurde alsbald durch Clausius als unbegründet erwiesen.) Grove, „Correlation of Physical Forces“, 6. Auflage, S. 67 etc. Clausius, Pogg. Ann. Juli 1865 etc. Tait „Recent Advances in Physical Science“, 2. Auflage 1876, S. 22. Balfour Stewart, „The Conservation of Energy“, 3. Auflage, 1874, S. 153, unter dem Capitel „Probable Fate of the Universe“ etc. etc.

wohlbekannte Thatsache. Die Anwendung der Principien der kinetischen Gastheorie auf den Fall würde desshalb eher eine natürliche oder nothwendige Folgerung, als eine Speculation sein. Und im Voraus erscheint es doch sicher weit vernünftiger, eine dynamische Erklärung der Bewegungen der Sternmassen zu suchen, als zu glauben, dass sie zwecklos untereinander herumtreiben.

Addendum. — Die schlagendste Eigenheit der kinetischen Gastheorie dürfte vielleicht ihre fast unendliche Mannigfaltigkeit darbieten. Es wäre zum Beispiel offenbar unsinnig, wenn man auf die mittlere Masse der Molekule der groben Materie des Weltganzen vom Standpunkte der Masse der Moleküle der Erdoberfläche ausgehend, schliessen wollte (da ja die Erde selbst, dem Weltganzen gegenüber, einen verschwindenden Punkt bildet). Das wäre, als ob man versuchen sollte, über die mittlere Dichtigkeit der Erde zu entscheiden, etwa durch die Messung des specifischen Gewichtes eines Sandkorns auf dem Seeufer. Freilich ist es wahr, dass die Sterne etwas der Erde ähnliche Materie besitzen, und dies wäre auch nur eine natürliche Folge des gegenseitigen Bewegungsaustausches, der nach der hier vorgeschlagenen Theorie stattfindet. Aber dies beweist durchaus nicht, dass Moleküle der groben Materie nicht existiren könnten, deren Masse viel kleiner ist als die der uns ausnahmsweise bekannten Molekule. In der That wäre es albern zu behaupten, dass die Masse aller Molekule auch nur von den sichtbaren Sternen uns bekannt wäre. Wenn man die kinetische Theorie auf das Universum anwendet, so müssen natürlich die Folgen dieser Theorie in Betracht gezogen werden. Nun ist, wie es scheint, eine von den mathematischen Folgen der kinetischen Theorie, betreffs der Diffusion der verschiedenartigen Moleküle (Moleküle von verschiedenen Massen), dass, obgleich im Mittel eine gleichmässige Mischung der Materie sich zu erhalten sucht, doch innerhalb ausgedehnter Räume grosse Unregelmässigkeiten der Mischung bei einer unendlichen Zeit zufällig stattfinden müssen. Es würde desshalb auch noch à priori als unwahrscheinlich erscheinen, wenn die Molekularmasse des verhältnissmässig verschwindend kleinen Flecks der uns bekannten Materie, wirklich die mittlere Molekularmasse des Weltganzen darstellen sollte: und es wäre also Nichts gegen den Schluss einzuwenden, dass die mittlere

Masse der groben Molekûle des Weltganzen bedeutend geringer sein sollte als die der uns ausnahmsweise bekannten Molekûle. Wenn dies der Fall wäre (und keiner dürfte im Stande sein, der Folgerung zu widersprechen), dann wäre die mittlere, vom Äther an die groben Molekûle abgegebene Geschwindigkeit in demselben Verhältnisse grösser, wie die Masse der groben Molekûle kleiner würde. Die Aufführung der groben Molekûle des Universums durch den Äther wäre also dadurch im Mittel grösser, als man von unserem kleinen Standpunkte aus denken sollte, und die Tendenz dieser groben Molekûle sich (durch die Schwerkraft) in Massen zu sammeln, wäre damit kleiner. Auch würde die Stärke der Schwerkraft selbst im directen Verhältniss mit der Abnahme der Masse der groben Molekûle abnehmen. Es ist auch hierbei in Betracht zu ziehen, dass eben, weil der Äther (als Mechanismus der Schwere) nicht selbst durch die Schwere beeinflusst wird, dieses Agens dadurch einen grossen Vorzug gewinnt, indem es in die grobe Materie überall eindringen und dieselbe beliebig aufrühren kann, ohne selbst durch die Schwerkraft gehemmt zu werden.

Noch eine andere bekannte Folgerung der kinetischen Theorie ist die, dass die Geschwindigkeit der bewegten Massen (und desshalb der Aggregationszustand) unendlich variiren kann; dass man also kein Urtheil weder über die mittlere Geschwindigkeit noch über den mittleren Aggregationszustand der Materie aussprechen könnte, da ja der Umfang unserer Kenntniss ein so eng beschränkter ist. Dass ein Erdbewohner versuchen sollte, ein derartiges Urtheil von seinem beschränkten Standpunkte aus auszuprechen, wäre fast als ob (in etwas analoger Weise) ein kleines, auf einem einzelnen Molekûle eines gewöhnlichen Gases stehendes (nur eingebildetes) Geschöpf versuchen wollte, sich einen Schluss über den mittleren Zustand des ganzen Gases zu bilden. Es kann also sehr wenig daran gelegen sein, was der Zustand des fast verschwindend kleinen, von uns übersehenen Theiles des Weltganzen ist, insofern es die Erlaubtheit der Anwendung der kinetischen Theorie auf diesen Fall betrifft, da die Wahrscheinlichkeitsrechnung zeigt, dass irgend welche nur mögliche Permutationen der Materie — es kommt nicht darauf an, wie unwahrscheinlich — doch einmal stattfinden müssen, wenn die Zeit nicht

beschränkt ist. Auch wäre nichts gegen den Schluss einzuwenden, wenn er durch andere Gründe unterstützt würde, dass der von uns bewohnte Theil des Universums ganz ausnahmsweise (in Beziehung auf den Aggregationszustand der Materie etc.) geordnet wäre, und wir dürften diesen seltenen Theil bewohnen, eben weil wir leben; denn um eben leben zu können, müssen wir einen Theil des Weltganzen (es kommt nicht darauf an, wie ausnahmsweise constituirt) bewohnen, wo die für das Leben passenden Bedingungen herrschen.

Als ein anderes Beispiel der Mittel, welche der kinetischen Gastheorie zur Erklärung wellenartig wiederkehrender Wechsel zu Gebote stehen, dürfte erwähnt werden, dass die mittlere kinetische Energie des Äthers selbst (der kinetischen Theorie unterworfen) als theilweise veränderlich gedacht werden könnte — eine Annahme, die langsam vor sich gehenden Temperaturveränderungen des Weltraumes entsprechen würde. Auch bei einer hinreichend grossen Weglänge der Ätheratome würden solche Unregelmässigkeiten sich nur langsam ausgleichen.

Auch habe ich, in einer Abhandlung im Journal „Nature", Nov. 8, 1877, S. 31 etc., auf die anscheinend wichtige Thatsache aufmerksam gemacht, dass zufällige Unregelmässigkeiten in der Diffusion (Mischung) der verschiedenartigen Moleküle für sich allein eine Ursache für Temperaturabwechslungen der Materie darbieten würden. Es können diese Unregelmässigkeiten der Mischung (nachdem sie sich ausgelichen haben) wieder von selbst entstehen,[1] durch die Zufälle der Bewegung, welche die kinetische Gastheorie besonders charakterisiren, und dadurch können neue Störungen des Temperaturgleichgewichtes wieder zu Stande kommen. Dies wäre also, wenn nöthig, ein additioneller Grund, um einer universalen Temperaturausgleichung resp. Selbstvernichtung der Wechselwirkungen der Natur vorzubeugen.

[1] Zwei Gase, zum Beispiel, die sich einmal in einander gleichmässig diffundirt hätten, könnten ja (durch zufällige Bewegungen der verschiedenartigen Moleküle) von einander theilweise oder ganz sich absondern — wenn die Zeit unendlich wäre. Die zwei Gase könnten also nochmals in einander diffundiren — ad infinitum (was mit Störungen des Temperaturgleichgewichtes immer begleitet würde).

X. SITZUNG VOM 19. APRIL 1883

In Verhinderung des Vicepräsidenten führt Herr Dr. L. J. Fitzinger als Alterspräsident den Vorsitz.

Der Secretär legt eine an der landwirthschaftlich-chemischen Versuchsstation in Wien von den Herren Dr. E. Meissl und F. Böcker ausgeführte Arbeit: „Über die Bestandtheile der Bohnen von *Soja hispida*“ vor.

Das w. M. Herr Prof. E. Weyr überreicht eine für die Sitzungsberichte bestimmte Abhandlung, unter dem Titel: „Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung.“

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn L. Haitinger ausgeführte Arbeit: „Über Chelidonsäure,“ zweite vorläufige Mittheilung.

Ferner überreicht Herr Prof. Lieben zwei von Herrn Regierungsrath Prof. A. Bauer an der Wiener technischen Hochschule durchgeführte Untersuchungen:

1. „Über eine neue Säure der Reihe $C_nH_{2n-4}O_6$“.
2. „Zur Kenntniss der Pimelinsäure“.

Herr S. Oppenheim, Elève der Wiener Sternwarte, überreicht eine Abhandlung: „Über eine neue Integration der Differentialgleichungen der Planetenbewegung“.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie de Médecine: Bulletin, 47e année 2e série. Tome XII, Nos 13 & 14. Paris, 1883; 8°.

— impériale des sciences de St. Pétersbourgh: Mémoires. Tome XXX, Nos 3, 4, 6—10. St. Pétersbourgh, 1882; 4°.

— — Zapiski. Tom. XL, Nos 1 & 2, Tom. XLI, Nos 1 & 2, Tome XLII, St. Petersbourgh, 1882; 8°.

Accademia, R. delle scienze di Torino: Atti. Vol. XVIII, Disp. 2ª (Gennaio 1883) Torino; 8°.

— R. delle scienze fisiche e matematiche. Atti. Vol. IX. Napoli, 1882; gr. 4°.

— — Rendiconto. Anni XIX, XX & XXI. Napoli, 1880, 1881 & 1882; gr. 4°.

Akademie der Wissenschaften, königl. schwedische: Bihang till Handlingar. 7. Bandet Häfte 1. Stockholm, 1882; 8°.

— — Öfversigt af Förhandlingar. 39: de Ärg. Nr. 7 o. 8. Stockholm 1883; 8°.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 3ᵉ année, 6ᵉ série, 2ᵉ cahier. 1883, Février. Paris; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt, XXI. Jahrgang Nr. 11. Wien, 1883; 8°.

Bonn, Universität: Akademische Schriften pr. 1882, 59 Stücke. 8° & 4°.

Central-Commission, k. k., zur Erforschung und Erhaltung der Kunst- und historischen Denkmale. IX. Band, 1. Heft. Wien, 1883; gr. 4°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VII. Nr. 24 & 25. Cöthen, 1883; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVI. Nr. 14. Paris, 1883; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XVI. Jahrgang, Nr. 5. Berlin, 1883; 8°.

— k. k. der Ärzte: Medizinische Jahrbücher. Jahrgang 1883. 1. Heft. Wien, 1883; 8°.

— der Wissenschaften, königl. böhmische: Abhandlungen vom Jahre 1881 und 1882. 6. Folge XI. Band. Prag, 1882; 4°.

— —: Sitzungsberichte. Jahrgang 1881. Prag, 1882; 8°. Jahresbericht. Prag, 1881; 8°.

Gewerbe-Verein, niederösterr.: Wochenschrift. XLIV. Jahrgang. Nr. 10—15. Wien, 1883; 4°.

Handels-Ministerium, k. k. in Wien, statistisches Departement: Statistische Nachrichten über die Eisenbahnen der österr. ungarischen Monarchie für das Betriebsjahr 1879. Wien, 1882, Folio.

Ingenieur- und Architekten-Verein: Wochenschrift. VIII. Jahrgang. Nr. 10—15. Wien, 1883; 4°.

— —: Zeitschrift. XXXV. Jahrgang. 1883. 1. Heft. Wien; gr. 4°.

Istituto veneto di scienze, lettere ed arti: Memorie. Vol. XXI. Parte III. 1882. Venezia; 4°.

— —: Atti. Tomo VII, serie quinta, dispensa decima. Venezia, 1880—81; 8°. — Tomo VIII, serie quinta, dispensa 1ª—10ª. Venezia, 1881—82; 8°. — Tomo I, serie sesta, dispensa 1ª—3ª. Venezia, 1882—83; 8°.

Journal, American Chemical. Vol. IV. Nr. 6. March, 1883. Baltimore; 8°.

Nature. Vol. XXVII. Nr. 702. London, 1883; 8°.

Observatorium, Tifliser physikalisches: Meteorologische Beobachtungen im Jahre 1881. Tiflis, 1882; 8°.

Peabody Academy of science: Primitive Industry by Charles C. Abbot. Salem, 1881; 8°.

Rowland, Enrico A.: Relazione critica sulle varie determinazioni dell' Equivalente meccanico della Caloria. Venezia, 1882; 8°.

Société mathématique de France: Bulletin. Tome XI, Nr. 4. Paris, 1883; 8°.

— philomatique de Paris: Bulletin. 7ᵉ série — tome VII. Nr. 1. 1882—1883. Paris, 1883; 8°.

United States coast and geodetic Survey Report 1880. Text, Progress Sketches and Illustrations. Washington, 1882; 4°.

Wiener Medizinische Wochenschrift. XXXIII. Jahrgang. Nr. 14 u. 15. Wien, 1883; 4°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. III. Jahrgang. 1883. 3. Heft, März. Berlin; 4°.

Untersuchungen über Chelidonsäure.

2. vorläufige Mittheilung.

Von **Ad. Lieben** und **L. Haitinger.**

Wir haben in unserer ersten vorl. Mittheilung bereits erwähnt, dass die Ammonchelidonsäure $C_7H_7NO_6$ beim Erhitzen mit Wasser auf 195° unter Abgabe von Kohlensäure sich in einen neutralen, sehr leicht löslichen Körper verwandelt. Derselbe Körper, der aus Wasser in schönen wasserhältigen, leicht verwitternden Krystallen anschiesst, kann auch durch Erhitzen der trockenen Ammonchelidonsäure erhalten werden, die dabei quantitativ im Sinne der Gleichung zerfällt:

$$C_7H_7NO_6 = 2CO_2 + H_2O + C_5H_5NO.$$

Die so auf zweierlei Wegen erhaltene Verbindung C_5H_5NO ist, obwohl neutral, gleichwohl fähig, sich mit HCl zu verbinden und auch ein Chloroplatinat zu liefern. Wir betrachten sie als Oxypyridin und haben experimentell ihre Beziehung zum Pyridin in der Weise festgestellt, dass wir sie gemengt mit Zinkstaub der trockenen Destillation unterwarfen. Dadurch wird in der That Pyridin erhalten.

Wie vorauszusehen war, liefert auch die Ammonchelidonsäure selbst direct Pyridin, wenn sie mit Zinkstaub gemengt der trockenen Destillation unterworfen wird. Darauf gestützt, kann diese Säure als eine Oxypyridindicarbonsäure (vielleicht noch chemisch gebundenes Wasser enthaltend) aufgefasst werden.

Die Reihe von Reactionen, durch die wir hier zum Pyridin gelangt sind, ist vielleicht geeignet, einen Beitrag zur Kenntniss der Constitution dieses Körpers zu liefern und eine von der bisher festgehaltenen Vorstellung etwas verschiedene Auffassung zu begründen. Die Beziehungen der Ammonchelidonsäure zur Chelidonsäure machen es uns nämlich sehr wahrscheinlich, dass in ihr der Stickstoff an drei verschiedene Kohlenstoffatome zugleich

gebunden ist. Wenn nun bei den oben angeführten Reactionen keine Umlagerung der Atome eintritt, so würde daraus folgen, dass auch im Oxypyridin und im Pyridin dieselbe Bindungsweise des Stickstoffatomes statthat, im Gegensatz zu der jetzt allgemein geltenden Annahme, wonach der Stickstoff im Pyridin nur an 2C direct gebunden ist.

Wenn man in eine wässerige Lösung von Oxypyridin Brom oder Bromwasser einträgt, so verschwindet die Bromfarbe sofort; man erhält jedoch nicht ein Additionsproduct, sondern unter gleichzeitiger Bildung von HBr, vielmehr ein Substitutionsproduct, das der Formel $C_5H_3Br_2NO$ entspricht. Derselbe Körper kann auch, in ganz analoger Weise wie das Oxypyridin aus der Ammonchelidonsäure hervorgeht, durch Erhitzen unter Abspaltung von Kohlensäure und Wasser aus jener gebromten Ammonchelidonsäure erhalten werden, die wir in unserer ersten vorl. Mittheilung erwähnt haben.

Die Verbindung $C_5H_3Br_2NO$ ist als Dibromoxypyridin zu betrachten. Es ist ein krystallinischer, in Wasser sehr schwer löslicher, auch in verdünnten Säuren unlöslicher Körper, der in Alkalien sich leicht auflöst und durch Säuren aus der alkalischen Lösung wieder unverändert ausgefällt wird. In concentrirter Salzsäure löst er sich auf und liefert auf Zusatz von Platinchlorid ein schön krystallisirendes Chloroplatinat $(C_5H_3Br_2NO \cdot HCl)_2 + PtCl_4$. In verdünntem Ammoniak gelöst und mit salpetersaurem Silber versetzt liefert das Dibromoxypyridin eine sehr schwer lösliche krystallinische Silberverbindung.

Wir halten es für höchst wahrscheinlich, dass dies Dibromoxypyridin identisch ist mit dem gleich zusammengesetzten Körper, den Hofmann auf einem ganz anderen Wege, nämlich durch Einwirkung von Brom auf Piperidin erhalten und den er scharfsinnigerweise als Dibromoxypyridin angesehen hat, obgleich es ihm nicht gelungen war, zwischen ihm und dem Pyridin eine experimentelle Beziehung aufzufinden.

Der Gedanke liegt nahe, dass ähnliche Beziehungen, wie wir sie zwischen Chelidonsäure und Pyridin nachgewiesen haben, auch vielleicht zwischen Meconsäure und Pyridin bestehen mögen, und glauben wir das Recht erworben zu haben, uns Versuche in dieser Richtung vorzubehalten.

Über eine neue Säure der Reihe $C_nH_{2n-4}O_6$.

Von **A. Bauer.**

Vor einigen Jahren[1] habe ich, im Vereine mit Max Gröger der kais. Akademie der Wissenschaften, eine vorläufige Mittheilung über eine neue Säure der Reihe $C_nH_{2n-4}O_6$ vorgelegt und der Hoffnung Raum gegeben, aus dieser Säure, zu welcher die Citronensäure sich in der Stellung einer Oxysäure befindet, eine Reihe von Derivaten darstellen zu können.

Nach längerer Unterbrechung konnte ich diese Arbeit nunmehr wieder aufnehmen und versuchte zunächst, bei der Darstellung der Monochlorkorksäure, des Ausgangspunktes für die Bereitung der neuen Substanz, die Methode in Anwendung zu bringen, welche von C. Hell[2] vorgeschlagen wurde und in der Bildung des Bromides und Überführung desselben in das Substitutionsproduct, durch die Reaction des Broms und Phosphors und Erwärmen im Wasserbade besteht.

Diese Methode, durch welche die Monobromkorksäure an Stelle der Monochlorverbindung zum Ausgangspunkt für meine weiteren Versuche dienen sollte, ist allerdings bequemer in der Ausführung, allein es gelang bei Anwendung derselben nicht die Bildung von relativ nicht unerheblichen Mengen von Bibromsubstitutionsproducten zu hindern, so dass ich in Anbetracht der hiedurch nothwendig werdenden weiteren Reinigung, in der Benützung der neuen Methode nicht die erhoffte Erleichterung fand und wieder zur Chlorirung zurückkehrte, die von Max Gröger und mir seinerzeit beschrieben wurde und die quantitativ kaum ungünstigere Resultate lieferte, als das neue Verfahren.

---

[1] Sitzungsberichte der k. Akad. d. Wissensch., II. Abth., Bd. LXXXII.

[2] Berichte der deutschen chem. Gesellschaft in Berlin, 1881. pag. 891.

Die neue Säure, welche somit abermals aus Monochlorkorksäure durch Cyankalium und Kaliumhydroxyd, als deutlich kristallisirte Substanz erhalten wurde, löst sich ziemlich leicht in Wasser, und zwar lösen bei 14° C., nach dem durchschnittlichen Resultat mehrerer Beobachtungen, 100 Theile des Lösungsmittels 25·48 Theile der Säure.

Beim Erhitzen erleidet die Säure eine Zersetzung, die schon bei der Siedhitze des Wassers deutlich bemerkbar ist und aller Wahrscheinlichkeit nach geradezu in einer Rückbildung der Korksäure unter Abscheidung von Kohlendioxyd besteht.

Das Ausschütteln mit Äther bietet, bezüglich der neuen Säure, ganz besondere Schwierigkeiten und man war gezwungen, dasselbe unter Anwendung von der Flüssigkeitsmenge gleichen Volumtheilen des Äthers sechzehn bis zwanzigmal zu wiederholen, bis die Menge der erhaltenen Säure so gering wurde, dass die Operation als beendigt gelten konnte.

Die Reactionen der neuen Säure, welche an dem Verhalten einer wässerigen Lösung des neutralen Ammoniaksalzes studirt wurden, sind die folgenden:

Mit Baryumsalzen entsteht ein weisser, sich rasch abscheidender Niederschlag, mit Kupfersulfatlösung erfolgt die Fällung von voluminöser berggrün gefärbter Kupferverbindung, Silbernitrat erzeugt das weiss gefärbte und am Lichte, sowie beim Erhitzen ziemlich beständige Silbersalz. Cadmiumsalz verursacht eine weisse Fällung. Das Sulfat des Magnesium, sowie eine Lösung von Mercurochlorid veranlassen anfangs keine Änderung, nach einiger Zeit jedoch die Entstehung eines weissen Niederschlages. Mit Manganosulfat entsteht nach kurzer Zeit ein schwach blassrother und mit Ferrichlorid sofort ein äusserst voluminöser lichtbrauner Niederschlag.

Die Analyse der reinen Säure, sowie des Silbersalzes derselben, wurde schon in der oben citirten Mittheilung bekannt gegeben und es hat eine neuerliche Analyse, die zur Controle mit der Substanz von einer anderen Bereitung vorgenommen wurde, keinerlei neue und bemerkenswerthe Momente ergeben, dagegen wurden das Bleisalz und das Eisensalz, ersteres durch Fällung des neutralen Ammoniaksalzes der Säure mit Bleiacetatlösung, letzteres durch Fällung der Amonverbindung mit Ferrichlorid-

solution dargestellt und der Analyse unterworfen, um die Zusammensetzung der Säure durch die Kenntniss der Salze mehrwerthiger Metalle zu erhärten.

Das Bleisalz, welches ein kreideweisses Pulver bildet und bei 150° C. getrocknet wurde, ergab bei der Analyse, dass 100 Theile desselben bestehen aus

	Gefunden	Berechnet
Kohlenstoff	21·0	20.6
Wasserstoff ...	2·4	2·1
Blei.....	59·5	59·0
Sauerstoff	—	18·3

welche Zahlen nahe mit der für die Formel:

$$C_6H_{11}\begin{cases}COO\\COO\\COO\end{cases}>Pb$$

$$C_6H_{11}\begin{cases}COO\\COO\\COO\end{cases}>Pb$$

berechneten übereinstimmen.

Die Analyse des Ferrisalzes bot einige Schwierigkeiten dadurch dar, dass dasselbe ein specifisch leichtes und hygroscopisches Pulver bildet, welches beim Erhitzen sehr leicht zersetzt wird.

Zum Behufe der Analyse wurde daher die Substanz zunächst blos über Schwefelsäure unter der Glocke der Luftpumpe getrocknet und die Eisenbestimmung dadurch vorgenommen, dass man die Verbindung mit Salzsäure und Kaliumchlorat behandelte, das Eisen mittelst Amoniak fällte und als Ferrioxyd wog.

Man erhielt so 20·17 Procent Eisen, während sich für die Formel

$$C_6H_{11}(COO)_3Fe$$

eine Menge von 20·63 Procent berechnet.

Die Bestimmung des Eisens, durch Wägung des beim Verbrennen im Schiffchen bleibenden Rückstandes, war undurchführbar, weil das Eisensalz so voluminös ist, dass dieser Rückstand ein überaus leichtes Pulver bildet, welches durch den Luft- oder Sauerstoffstrom stets in erheblicher Mengen fortgeführt wurde, was störende Verluste veranlasste.

Die Bestimmung des Kohlenstoffes ergab 40·16 Percent, während die für obige Formel berechnete theoretische Menge 39·85 Procent aufweist. Die Wasserstoffmenge wurde in diesem Falle stets zu hoch befunden und betrug nahe 5 Procent, während die Rechnung 4·05 Procent verlangt.

Versuche, die Substanz schärfer zu trocknen gaben ganz unbefriedigende Resultate, denn schon bei der Siedhitze des Wassers tritt eine schwache Zersetzung ein und mehrere Wasserstoffbestimmungen ergaben zunächst 3·79, dann aber 3·35 und 3·24 Procent mit gleichzeitiger merklicher Abnahme des Kohlenstoffgehaltes.

Zur Kenntniss der Pimelinsäure.

Von A. Bauer.

Im LXXVI. und LXXVII. Bande dieser Sitzungsberichte habe ich in Gemeinschaft mit J. Schuler Mittheilungen über Pimelinsäure gemacht, welche durch Synthese aus Isoamylen dargestellt worden war.

Diese Säure war krystallisirt und wurde beim Ausschütteln mit Äther neben einer zweiten Säure erhalten, welche eine amorphe Masse bildete und von der schon damals vermuthet wurde, dass sie eine mit der krystallisirten Säure isomere Substanz sei.

Wenn man das neutrale Ammonsalz des Gemisches der beiden Säuren mit Chlorcalciumlösung versetzt und aufkocht, so fällt das Calciumsalz der krystallisirten Säure als schwerlöslicher Niederschlag heraus, welcher zur Reindarstellung[1] der krystallisirten Pimelinsäure benützt wurde.

Das Filtrat, welches neben diesem Salz erhalten wird, bis auf ein kleines Volum eingeengt, liefert neuerdings eine Ausscheidung von pimelinsaurem Calcium, und die hiebei resultirende Mutterlauge gibt zersetzt und mit Äther ausgeschüttelt eine amorphe Säure, welche dieselbe Zusammensetzung zeigt wie die Pimelinsäure und mit dieser isomer ist.

Die Analyse dieser Säure ergab, dass 100 Theile derselben enthalten:

---

[1] Sitzungsber. der k. Akademie der Wissensch. Band LXXVII. II. Abth., März-Heft 1878.

	Gefunden		Berechnet
Kohlenstoff...	52·46	52·21	52·50
Wasserstoff...	7·29	—	7·50
Sauerstoff....	—	—	40·00

was mit der Formel

$$C_7H_{12}O_4$$

nahezu übereinstimmend.

Zum Behufe der Analyse des Kalksalzes dieser amorphen Säure wurde dieses dargestellt, indem man die wässerige Lösung derselben mit aufgeschlemmtem Calciumcarbonat kochte und nach erfolgtem Filtriren die Flüssigkeit zur Trockenheit abdampfte, wobei das Salz in Form eines schwach gelb gefärbten lockeren Pulvers erhalten wurde.

Dieses Salz besitzt die Eigenschaft, seinen Wassergehalt erst bei 200° C. vollkommen zu verlieren und zeigt darin eine Übereinstimmung mit einem analogen durch v. Fehling zuerst dargestellten bernsteinsauren Salz.

Die Analyse des bei 200° C. getrockneten Kalksalzes ergab, dass 100 Theile enthalten:

	Berechnet	Gefunden
Kohlenstoff	42·42	42·70
Wasserstoff	5·05	5·22
Calcium.....	20·20	20·64
Sauerstoff	32·32	—

diese Zahlen stimmen genügend mit der für die Formel:

$$C_7H_{10}CaO_4$$

berechneten überein.

Dieses Calciumsalz ist leichter in Wasser löslich, als das Calciumsalz der krystallisirbaren Pimelinsäure, wie aus folgenden Daten erhellt:

33·5045 Grm. einer bei 20° C. gesättigten Lösung des Salzes enthielt, bei einem durchgeführten Versuch, 1·5045 Grm. des Salzes gelöst, 100 Theile der Lösung enthalten daher 4·5 Theile des Salzes.

Die von Schuler und mir synthetisch dargestellte krystallisirte Pimelinsäure[1] liefert ein Calciumsalz, in welchem bei 20° C.

[1] Sitzungsb. der k. Akademie der Wissensch. II. Abth., 77., p. 299.

in 100 Theilen Lösung 0·401 Theile enthalten und die Pimelinsäure, welche von Hlasiwetz und Grabowski[1] aus Camphersäure erhalten wurde, gibt ein Calciumsalz, von welchem 0·465 Theile in 100 Theilen der Lösung gefunden wurden.

Die in Rede stehende Säure erwies sich als glasartig amorph, und zeigte dieses Ansehen selbst nach 6 und 8 Monaten und nachdem sie behufs Reinigung zweimal in Bleisalz und schliesslich einmal in Silbersalz verwandelt und hieraus durch Schwefelwasserstoff wieder abgeschieden wurde.

Die Reactionen dieser Säure unterscheiden sich nur wenig von denen der krystallisirten Säure; Barium-, Strontium-, Magnesium-, Zink-, Cadmium-, Eisenoxydul-, Cobaltoxydul-, Nickeloxydul-, Manganoxydulsalze geben weder in der Kälte noch beim Aufkochen Fällungen.

Quecksilberchlorid und Zinnchlorid verhielten sich wie bei der anderen Säure.

Eisenoxydsalze geben einen dunkel fleischfarbenen Niederschlag. Schwefelsaure Thonerde gibt in der Kälte keinen Niederschlag, wohl aber beim Aufkochen; auch diese Fällung ist im Überschuss der schwefelsauren Thonerde löslich.

Schwefelsaures Chromoxyd verhält sich wie gegen die andere Säure.

Salpetersaures Quecksilberoxydul gibt einen weissen Niederschlag, der sich im Überschuss des zugesetzten Reagens löst.

Salpetersaures Wismuthoxydul gibt ebenfalls einen schweren weissen Niederschlag, der auch im Überschuss löslich ist.

Charakterisch ist das Verhalten dieses Ammonsalzes gegen schwefelsaures Kupferoxyd. Es entsteht selbst in concentrirten Lösungen weder in der Kälte noch beim Kochen, auch nicht nach längerem Stehen eine Fällung.

Die Versuche, welche unternommen wurden, um aus Pimelinsäure die in die Reihe der Äpfelsäure oder Weinsäure gehörige Oxysäure darzustellen, haben quantitativ so ungünstige Resultate gegeben, dass man darauf verzichten musste, die Arbeit nach dieser Richtung fortzusetzen, und zwar umsomehr, als auch die Ausbeute an Pimelinsäure, sowohl nach der Methode von

[1] Jahresbericht 1867, p. 476.

Hlasiwetz als auch nach der von mir und Schuler angegebenen synthetischen Methode ganz unbefriedigend ist und im letzteren Falle etwa $^1/_2$ Percent der angewendeten Menge von Amylen beträgt.

Was übrigens in der oben erwähnten Richtung gefunden wurde, mag im Folgenden gesagt werden.

Reine und fein gepulverte Pimelinsäure wurde behufs Darstellung des Monosubstitutionsproductes mit der, zwei Atomen Brom entsprechenden Menge von Brom übergossen.

Dieses Magma wurde nunmehr in einer zugeschmolzenen Glasröhre erhitzt, wobei die Einwirkung bei 120° C. begann und bei 120—130° C. zu Ende geführt wurde.

Die dicke, klare und rubinroth gefärbte Flüssigkeit, welche hiebei unter beträchtlicher Bromwasserstoffentwicklung erhalten wurde, versetzte man neuerdings mit zwei Atomen Brom und erhitzte abermals im zugeschmolzenen Glasrohr, um das Bibromsubstitutionsproduct zu erhalten, wobei sich leider stets empfindliche Verluste an der kostbaren Substanz durch Zerspringen der meisten Röhren ergaben.

Nach erfolgtem Aufbrechen der Röhren wurde der Inhalt derselben mit Wasser aufgenommen, filtrirt, mit feuchtem Silberoxyd gemengt und gekocht.

Die auf diese Weise erhaltene Säure erschien nach dem erfolgten Reinigen durch Überführung in Bleisalz und Wiederabscheiden mittelst Schwefelwasserstoff als eine weisse krystallisirbare Masse, welche bei der Elementaranalyse eine äusserst schwierig verbrennende Kohle abschied und hiebei Resultate ergab, welche zeigten, dass 100 Theile dieser Säure enthalten:

	Berechnet	Gefunden
Kohlenstoff	48·28	48·6
Wasserstoff....	5·75	5·2
Sauerstoff	45·97	—

Diese Zahlen stimmen recht nahe mit den für eine Säure von der Formel $C_7H_{10}O_5$ berechneten überein.

Über eindeutige Beziehungen auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung.

Von **Emil Weyr.**

1. Auf einer ebenen allgemeinen Curve dritter Ordnung C_3 sei irgend eine eindeutige Beziehung von Punkten gegeben, so dass also jedem Punkte x von C_3 ein durch x eindeutig bestimmter Punkt x' zugeordnet erscheint. Jeden Punkt der Curve hat man sowohl als dem Systeme x angehörig zu betrachten, und dann entspricht ihm x', als auch zu dem anderen Systeme zu zählen, und dann möge derselbe Punkt x mit y' bezeichnet werden; es wird ihm ein im Allgemeinen von x' verschiedenen Punkt y entsprechen. Wenn y mit x' identisch ist, so entsprechen sich die beiden Punkte xx' vertauschungsfähig.

2. Wir wählen nun auf C_3 einen beliebigen festen Punkt o und verbinden denselben mit x, x' respective durch die Strahlen X, X' die wir als einander entsprechende Strahlen betrachten. Hiedurch entstehen zwei concentrische 2—2-deutige Büschel. Denn jeder durch o gezogene Strahl X schneidet (der Definition von C_3 gemäss) die Curve in zwei Punkten x, x_1, welchen nach der auf C_3 als bestehend angenommenen eindeutigen Beziehung zwei Punkte x', x'_1 entsprechen, welche mit o verbunden, die beiden dem X' entsprechenden Strahlen X', X'_1 liefern. Betrachtet man denselben Strahl X als einen accentuirten Strahl, etwa Y', so wären seine Schnittpunkte mit C_3 mit y', y'_1 zu bezeichnen; die ihnen entsprechenden Punkte y, y_1 mit o verbunden, liefern die dem Y' entsprechenden zwei Strahlen Y, Y_1.

Wird der Strahl des Büschels o eine Tangente T der Curve, welche in einem von o verschiedenen Punkte t berührt, und betrachtet man T als X (respective Y'), so fallen die Punkte x, x_1 (respective y', y'_1) in t zusammen und da jedem Punkte ein ein-

ziger zugeordnet erscheint, so wird auch x' mit x'_1 und y mit y_1 zusammenfallen, d. h. es wird X' mit X'_1 und Y mit Y_1 zusammenfallen. Der Tangente T entsprechen somit, ob man dieselbe als nicht accentuirten oder als accentuirten Strahl betrachtet, zwei zusammenfallende Strahlen; T ist also ein den beiden Büscheln gemeinsamer Verzweigungsstrahl; dasselbe gilt von den übrigen drei durch o gehenden Tangenten von C_3. Wenn jedoch zwei conlocale gleichartige Grundgebilde erster Stufe in einer solchen zweideutigen Beziehung sind, dass die vier Verzweigungselemente des einen Gebildes zugleich die Verzweigungselemente des andern sind, so bilden die beiden Gebilde ein symmetrisches System zweiten Grades,[1] d. h. es entsprechen jedem Elemente, ob man es als zu dem einen oder zu dem andern Systeme gehörig betrachtet, immer dieselben zwei Elemente. In unserem Falle werden also die Strahlen Y, Y_1 identisch mit den Strahlen X', X'_1.

Wir haben somit den Satz:

„Jede auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung befindliche eindeutige Punktbeziehung erscheint aus jedem Curvenpunkte durch ein symmetrisches Strahlensystem zweiten Grades projicirt, für welches die vier durch das Projectionscentrum hindurchgehenden, die Curve anderenorts berührenden Tangenten die vier Verzweigungsstrahlen darstellen."

3. Um die sämmtlichen auf C_3 vorkommbaren eindeutigen Punktbeziehungen übersichtlich untersuchen zu können, wird es somit nothwendig sein, sich Klarheit zu verschaffen über alle symmetrischen Elementensysteme zweiten Grades, welche gegebene Verzweigungselemente besitzen.

Zu dem Behufe denken wir uns diese Systeme als Punktsysteme auf einem festen Kegelschnitte K. Ist nun Σ_2 ein solches System auf K und x, x' zwei einander entsprechenden Punkte, so umhüllt die Gerade $\overline{xx'}$ einen Kegelschnitt D_2 — den Directionskegelschnitt, welcher K in den vier Verzweigungspunkten v_1, v_2, v_3, v_4 schneidet. Die in $v_1, v_2, v_3 v_4$ an D_2 gelegten Tangenten schneiden K in den Doppelpunkten (zweiter Art) d_1, d_2 d_3, d_4, welche den v-Punkten doppelt entsprechen, während die

[1] Siehe: „Über einen Correspondenzsatz". Sitzb. v. 8. März 1883.

gemeinschaftlichen Tangenten von K und D_2 den Träger K in den vier sich selbst entsprechenden Punkten (Doppelpunkten erster Art) $\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4$ berühren (l. c.).

Irgend vier Punkte v_i von K treten als die Verzweigungspunkte von einfach unendlich vielen symmetrischen Punktsystemen auf, so zwar, dass jeder durch die vier Punkte v hindurchgehende Kegelschnitt D_2 als Directionskegelschnitt für ein Σ_2 auftritt. Die einem Punkte x von K entsprechenden zwei Punkte x', x'' erhält man als die Schnittpunkte von K mit den beiden durch x gehenden Tangenten von D_2.

Unter den sämmtlichen symmetrischen Elementensystemen zweiten Grades, welche v_1, v_2, v_3, v_4 zu gemeinsamen Verzweigungspunkten besitzen, sind hervorzuheben und als „uneigentliche" zu bezeichnen die folgenden:

a) Jenes, für welches D_2 identisch wird mit K. Jeder Punkt x fällt mit seinen beiden entsprechenden zusammen. Das System besteht aus lauter sich selbst entsprechenden Verzweigungselementen.

b) Jene drei Systeme, deren Directionscurven die drei Gegenseitenpaare des vollständigen Viereckes r_1, r_2, r_3, r_4 sind. Es seien $s_1\ s_2\ s_3$ die Schnittpunkte der drei Gegenseitenpaare r_1r_2, r_3r_4; v_1v_3, v_2v_4; v_1r_4, v_2v_3. Geht nun D_2 in eines dieser Geradenpaare über, etwa in v_1v_2, v_3v_4, so sind die durch s_1 hindurchgehenden Strahlen als Tangenten von D_2 zu betrachten. Jedem Punkte x von K entsprechen zwei Punkte x', x'', welche vereinigt sind in dem zweiten Schnittpunkte von K mit der Geraden s_1x. Es ist somit jeder Punkt von K ein Verzweigungspunkt, welcher mit dem ihm entsprechenden Doppelpunkte ein Punktepaar jener quadratischen Involution bildet, welche durch die beiden Punktepaare v_1v_2, v_3v_4 bestimmt erscheint.

Unter den sämmtlichen symmetrischen Elementensystemen zweiten Grades, welche vier gegebene Verzweigungselemente r_1, r_2, r_3, r_4, besitzen, haben wir also vier uneigentliche zu verzeichnen. Das eine besteht aus lauter sich selbst entsprechenden Verzweigungselementen (a); die drei übrigen sind gegeben durch die drei quadratischen Involutionen, welche das Quadrupel v_1, v_2, v_3, v_4 liefert, wenn man es dreimal in je zwei Paare zerlegt $(v_1v_2, v_3v_4; v_1v_3, v_2v_4; v_1v_4, v_2v_3)$ und diese

als die Involution bestimmend betrachtet. In jedem Paare einer solchen Involution ist jedes Element als Verzweigungselement und das andere als ihm entsprechendes Doppelelement zu betrachten. Es besteht also auch in diesem Falle jedes der drei symmetrischen Systeme aus lauter Verzweigungselementen mit ihnen involutorisch entsprechenden Doppelelementen (*b*).

Das Dreieck $s_1 s_2 s_3$ ist sich selbst conjugirt bezüglich K und bezüglich aller D_2; die Schnittpunktepaare $\sigma_1\sigma_1'$, $\sigma_2\sigma_2'$, $\sigma_3\sigma_3'$ seiner Seiten mit K sind die Doppelpunktepaare der sub (*b*) erwähnten drei quadratischen Involutionen und zugleich stellt jedes dieser Paare die vier Doppelelemente δ_1, δ_2, δ_3, δ_4 erster Art des entsprechenden uneigentlichen symmetrischen Elementensystemes zweiten Grades dar, so zwar, dass in jedem σ-Punkte zwei δ-Punkte vereinigt sind.[1]

4. Das den Kegelschnitten K und D_2 gemeinsame Tangentenvierseit, welches K in den vier Punkten δ berührt, hat bekanntlich das Dreieck $s_1 s_2 s_3$ als Diagonaldreiseit; dasselbe Dreieck ist somit auch Diagonaldreieck für das vollständige Viereck der vier δ-Punkte. Alle Quadrupel der δ-Punkte auf K, welche demselben festen Dreieck $s_1 s_2 s_3$ entsprechen, bilden die früher erwähnten drei quadratischen Involutionen auf K, welche zusammen eine degenerirte biquadratische Involution darstellen, für welche die drei Paare der σ-Punkte die sechs Doppelpunkte darstellen.

Wie man leicht erkennt, gehören derselben biquadratischen Involution oder also jenen drei quadratischen Involutionen auch alle die d-Quadrupel an, da das Dreieck $s_1 s_2 s_3$ auch Diagonaldreieck für jedes der Vierecke d_1, d_2, d_3, d_4 sein muss.

„Durch vier Verzweigungselemente und ein Paar entsprechender Elemente sind zwei eigentliche symmetrische Elementensysteme zweiten Grades bestimmt.“

---

[1] Es möge bemerkt werden, dass es unter den sämmtlichen symmetrischen Elementensystemen zweiten Grades, welche vier gegebene Verzweigungselemente besitzen, vier cubische Involutionen gibt, und dass die Frage nach jenen Systemen, welche zu (speciellen) Involutionen höheren Grades Anlass geben, identisch ist mit den Fragen über die Steiner'schen Polygone und die Theilung elliptischer Funktionen.

Denn es gibt zwei Kegelschnitte D_2, welche durch die vier Punkte v hindurchgehen und die Verbindungsgerade zweier Punkte x, x' des Trägers K berühren.

„Durch vier Verzweigungselemente und ein sich selbst entsprechendes Element (Doppelelement erster Art) ist ein einziges eigentliches symmetrisches Elementensystem zweiten Grades bestimmt."

Denn es gibt nur einen von K verschiedenen Kegelschnitt D_2, welcher durch die vier Punkte v geht und die in einem Punkte d von K an K gelegte Tangente berührt.

Eigentlich erhält man hier durch die vier Verzweigungselemente v und das sich selbst entsprechende Element d auch zwei Systeme, wovon jedoch das eine den Kegelschnitt K zur Directionscurve hat und somit aus lauter sich selbst entsprechenden Verzweigungselementen besteht. Man erkennt auch sofort die Richtigkeit des folgenden, für uns fundamentalen Satzes:

„Wenn zu den vier Verzweigungselementen v_1, v_2, v_3, v_4 noch ein fünftes sich selbst entsprechendes Verzweigungselement v' hinzutritt, so besteht das symmetrische Elementensystem zweiten Grades im Allgemeinen aus lauter sich selbst entsprechenden Verzweigungselementen." (3, *a*).

Denn wenn sich der Punkt v' von K als Verzweigungspunkt selbst entspricht, d. h. wenn d' mit v' zusammenfällt, so muss der Directionskegelschnitt, welcher durch v_1, v_2, v_3, v_4 hindurchgeht, auch noch durch v' hindurchgehen und daselbst die Gerade $v'd'$, d. h. die Tangente von K in v' berühren. Es muss also D_2 mit K identisch sein, w. z. b. w.

Ist ausnahmsweise v' ein Doppelelement σ einer der drei durch das Quadrupel $v_1v_2v_3v_4$ bestimmten quadratischen Involutionen, d. h. Berührungspunkt einer aus einem der s- Punkte an K gehenden Tangenten, so genügt den gestellten Bedingungen auch noch der degenerirte Kegelschnitt D_2', welcher durch das sich in jenem s-Punkte schneidende Gegenseitenpaar des Viereckes $v_1v_2v_3v_4$ dargestellt ist. Das entsprechende symmetrische System zweiten Grades geht in die entsprechende quadratische Involution über und besteht aus lauter Verzweigungselementen, welche ihren Doppelelementen involutorisch entsprechen. (3, *b*).

Dasselbe uneigentliche System tritt übrigens auch als zweites auf, wenn zu den vier Verzweigungselementen v ein Elementenpaar xx' hinzutritt, welches einer der drei erwähnten quadratischen Involutionen angehört.

5. „Wenn in einer eindeutigen Punktbeziehung auf einer allgemeinen ebenen Curve dritter Ordnung ein Paar vertauschungsfähig sich entsprechender Punkte vorkommt, so gehen die Verbindungsgeraden einander entsprechender Punkte im Allgemeinen durch einen festen Punkt der Curve und es herrscht somit in allen Paaren Vertauschungsfähigkeit".

Es sei auf C_3 eine eindeutige Beziehung von Punkten und xx' sei ein Paar vertauschungsfähig einander entsprechender Punkte, so dass man x' mit y und x mit y' bezeichnen kann.

Wir ziehen die Gerade xx' $(\equiv y'y)$; sie möge C_3 zum dritten Male in o schneiden. Aus dem Punkte o projiciren wir nun alle Paare einander entsprechender Punkte; dies gibt nach (2) ein symmetrisches Strahlenbüschel zweiten Grades am Scheitel o, für welches die durch o gehenden vier Curventangenten die Verzweigungsstrahlen sind. Zu diesen kommt offenbar der Strahl $\overline{oxx'}$ als fünfter und zwar sich selbst entsprechender Verzweigungsstrahl; denn man wird die irgend einem durch o gehenden Strahle entsprechenden Strahlen erhalten, wenn man zu den Schnitten der Curve C_3 mit dem ersteren die nach der eindeutigen Beziehung entsprechenden Punkte aufsucht und sie mit o verbindet.

Das symmetrische Strahlensystem besteht nach 5. aus lauter sich selbst entsprechenden Strahlen, da im Allgemeinen der Strahl $\overline{oxx'}$ keiner der sechs Doppelstrahlen der drei durch das Quadrupel der durch o gehenden Tangenten bestimmten quadratischen Involutionen sein wird. Sind aber zz' irgend zwei andere entsprechende Punkte, so muss oz identisch sein mit oz' d. h. $\overline{zz'}$ geht durch o hindurch; betrachtet man z' als u, so wird u' mit z zusammenfallen, da auch uu' durch o gehen muss. Der Satz ist somit bewiesen.

Eine solche eindeutige vertauschungsfähige Beziehung auf C_3, bei welcher die Verbindungslinien entsprechenden Punkte durch einen festen Punkt der Curve C_3 hindurchgehen, bezeichnen

wir als eine „centrale Paarinvolution“ (J_2) auf C_3 und jener feste Punkt soll das Centrum der Involution genannt werden.[1] Man sieht sofort:

„Durch ein Paar entsprechender Punkte xx' ist eine centrale Paarinvolution auf C_3 vollkommen und unzweideutig bestimmt“; denn zieht man die Gerade $\overline{xx'}$, so ist ihr dritter Schnittpunkt mit der Curve das Centrum jener einzigen Centralinvolution, welcher auch xx' als Paar angehört.

Der Berührungspunkt einer durch o gehenden Tangente von C_3 ist ein sich selbst entsprechender Punkt:

„Jede centrale Paarinvolution auf C_3 besitzt vier sich selbst entsprechende Punkte, vier Doppelpunkte, in denen die vier durch das Centrum der Involution gehenden Tangenten die Curve berühren“.

Es ist klar, dass die centrale Paarinvolution auch durch einen ihrer vier Doppelpunkte, oder dann vollkommen bestimmt ist, wenn man ihr Centrum o kennt.

Dem Centrum entspricht dessen Tangentialpunkt; das Centrum ist gemeinschaftlicher Tangentialpunkt der vier Doppelpunkte.

Zwei centrale Paarinvolutionen können kein gemeinschaftliches Punktepaar besitzen.

6. „Tritt auf C_3 eine allgemeine eindeutige Punktbeziehung auf, und sind xx', yy' irgend zwei Paare einander entsprechender Punkte, so schneiden sich die wechselweisen Verbindungslinien xy', $x'y$ in einem auf C_3 gelegenen Punkte“.

Jeden Punkt von C_3 hat man sowohl zu dem einen als zu dem anderen der beiden in eindeutiger Beziehung stehenden Systeme zu rechnen, und demzufolge einmal etwas mit x und das andere Mal mit x' zu bezeichnen; dem x ist ein ganz bestimmter Punkt x' und dem z' ein ganz bestimmter Punkt z zugeordnet. Die Gerade $x'z$ möge C_3 im Punkte m schneiden; in dieser Art ist jedem Punkte (xz') ein ganz bestimmter Punkt m zugeordnet. Wir projiciren nun die beiden eindeutigen Punkt-

[1] Küpper. Über Involutionen I_n auf einer Curve dritter Ordnung C^3; Abh. der k. böhm. Ges. d. W. Prag 1883, VI. Folge 12 Band.

systeme aus einem ganz beliebigen Punkte o der Curve C_3 und erhalten nach Früherem (2) ein symmetrisches Strahlenbüschel zweiten Grades, in welchem dem Strahle ox oder X der Strahl ox' oder X' vertauschungsfähig entspricht, so dass man X' auch als Y und X als Y' betrachten kann. Es muss somit auf ox' oder Y ein Punkt y und auf ox oder Y' der ihm entsprechende Punkt y' liegen. Nun kann y nicht mit x' und y' mit x zusammenfallen, weil wir ein vertauschungsfähiges Paar xx' und somit im Allgemeinen den Fall (5) vor uns hätten; es kann ferner auch nicht y' mit x und y mit dem dritten Schnittpunkte von C_3 und $\overline{ox'}$ zusammenfallen, weil dann o der dem Punkte (xy') entsprechende Punkt m wäre, was nicht der Fall ist, da ja o beliebig auf C_3 gewählt worden ist; ebenso wenig kann y mit x' und y' mit dem dritten Schnittpunkte von C_3 und $\overline{ox}$ zusammenfallen, denn dann wäre o der dem Punkte (yx') entsprechende Punkt m. Es ist folglich die einzige Möglichkeit übrig bleibend, dass y der dritte Schnittpunkt von C_3 mit $\overline{o.x'}$ und y' der dritte Schnittpnnkt von C_3 mit $\overline{ox}$ ist.

„Wenn man also die beiden entsprechenden Punkte x, x' aus einem beliebigen Curvenpunkte o auf die Curve projicirt, so erhält man wieder zwei einander (invers) entsprechende Punkte y', y." Damit ist der fundamentale Satz dieses Artikels bewiesen.[1]

Hieraus folgt unmittelbar der Satz:

„Durch ein Paar entsprechender Punkte xx', ist auf C_3 eine eindeutige nicht vertauschungsfähige Beziehung vollkommen und unzweideutig gegeben".

Um zu einem beliebigen Punkte y den entsprechenden y' zu erhalten, hat man C_3 mit $\overline{x'y}$ in o zu schneiden, und $\overline{ox}$ zu ziehen, welche Gerade C_3 in y' schneiden wird; ebenso ergibt sich y aus y'.

Betrachtet man einen Punkt x, dem der Punkt x' entspricht, als z' zum zweiten Systeme gehörig, so wird $\overline{xz'}$ die Tangente

---

[1] Küpper. Über die Steiner'schen Polygone auf einer Curve dritter Ordnung C^3, und damit zusammenhängende Sätze u. s. w. Prager Abhandl, 1873. Art 4. — Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie. pag. 619 u. s. f.

von C_3 in x, und o der Tangentialpunkt von x, welcher, mit x' verbunden, eine Gerade $\overline{ox'}$ liefert, die C_3 in z schneidet. Der Punkt o ist folglich als Schnitt von C_3 mit $\overline{x'z}$ der dem Punkte (xz') entsprechende Punkt m, so dass jedem Punkte m vier Punkte (xz') entsprechen, die Berührungspunkte der von m an C_3 gelegten vier Tangenten.

Sind xyz irgend drei Punkte von C_3 und x', y', z', die Schnittpunkte von C_3 mit den Seiten yz, zx, xy des Dreieckes xyz, so sind xx', yy', zz' drei Punktepaare einer eindeutigen (nicht centralen) Beziehung."

Es ist nämlich nach Vorhergehendem durch das Punktepaar xx' eine solche Beziehung auf C_3 vollkommen gegeben; dieser müssen aber auch yy' als entsprechende Punkte angehören, da sich die Geraden xy', $x'y$ in dem Curvenpunkte z durchschneiden, und ebenso bilden zz' ein Punktepaar derselben Beziehung, da sich die Geraden xz', $x'z$ im Curvenpunkte y schneiden.

„Wenn in einer eindeutigen nicht centralen Beziehung ein Punkt sich selbst entspricht, so ist jeder Punkt sich selbst entsprechend."

Denn wenn x' mit x zusammenfällt, so fällt der obigen Construction gemäss jeder Punkt y mit seinem entsprechenden y' zusammen. Daher der Satz:

„Eine eindeutige (nicht centrale) Beziehung auf C_3 besitzt keinen sich selbst entsprechenden Punkt, wenn sie nicht aus lauter sich selbst entsprechenden Punkten besteht."

7. Jeder Punkt x von C_3 hat einen Tangentialpunkt ξ, welcher noch drei anderen Punkten von C_3 ebenfalls als Tangentialpunkt zukommt; es sei x' einer von diesen drei Punkten. Das Punktepaar xx' bestimmt als Paar entsprechender Punkte eine eindeutige Beziehung auf C_3, welcher, wie man sofort sehen kann, die Eigenschaft der Vertauschungsfähigkeit zukommt. Zunächst ergibt sich die Vertauschungsfähigkeit für das bestimmende Paar xx'; denn wird x' als y betrachtet, so hat man, um y' zu zu finden, die Gerade $\overline{yx'}$, d. h. die Tangente an C_3 in x' zu ziehen, sie mit C_3 zum Durchschnitt bringen, welcher in den Tangentialpunkt ξ fällt, diesen hat man mit x zu verbinden, was die Tangente in x liefert, deren dritter Schnittpunkt y' ist, und

folglich mit x zusammenfällt. Die Punkte x, x' (respective y', y) entsprechen sich somit involutorisch.

Irgend ein anderes Paar z, z' derselben Beziehung erhält man als Schnittpunkte von C_3 mit den Geraden, welche einen beliebigen Punkt o von C_3 mit x' respective x verbinden; da jedoch x' zugleich y und x zugleich Y' ist, so wird auch z' mit u und z dann mit u' bezeichnet werden können, so dass sich also jedes andere Punktepaar z, z' dieser Beziehung auch vertauschungsfähig entspricht. Weil $\overline{zu'}$ und $\overline{z'u}$ in einem Punkte von C_3 sich treffen müssen, so haben z und z' auch einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt.

Wenn wir, wie üblich, zwei Punkte, welche denselben Tangentialpunkt besitzen, als ein „Paar correspondirender Punkte“ bezeichnen, so haben wir den bekannten Satz:

„Die eindeutige Beziehung auf C_3, welche durch ein Paar correspondirender Punkte als Paar entsprechender Punkte bestimmt erscheint, liefert lauter Paare correspondirender Punkte, und je zwei Punkte eines Paares entsprechen sich vertauschungsfähig.“

Von den drei Punkten, welche mit einem Punkte x einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt besitzen, kann man dem x den einen, den anderen, oder den dritten als entsprechenden zuweisen und erhält so auf der Curve drei von einander verschiedene vertauschungsfähige, nicht centrale eindeutige Beziehungen, den drei Systemen correspondirender Punktepaare entsprechend. Wir bezeichnen diese drei Systeme correspondirender Punkte als die drei (fundamentalen) nicht centralen Paarinvolutionen auf C_3. Dieselben sind sofort gegeben, wenn die Curve C_3 gegeben ist.

Die bekannten Sätze über correspondirende Punkte sind eine unmittelbare Folge, der über eindeutige nicht centrale Beziehungen entwickelten Theoreme; z. B. „wenn x, x' einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt besitzen, und man projicirt diese beiden Punkte aus einem beliebigen Curvenpunkte wieder auf die Curve, so erhält man wieder zwei Punkte mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkte;“ oder: „Legt man aus einem beliebigem Punkte von C_3 an die Curve die vier Tangenten und projicirt das Quadrupel ihrer Berührungspunkte aus den einzelnen Punkten von

C_3 auf die Curve, so erhält man die sämmtlichen übrigen Punktquadrupel, von denen jedes einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt besitzt;" u. s. w.

„Jede der drei (fundamentalen) nicht centralen Paarinvolutionen (d. h. jedes der drei Systeme correspondirender Punkte) wird aus jedem Punkte der Curve C_3 in einer quadratischen Strahleninvolution projicirt, welcher auch die vier durch das Projectionscentrum gehenden Curventangenten, zwei Paare bildend, angehören."

Dieser (bekannte) Satz ergibt sich unmittelbar aus der Vertauschungsfähigkeit der Beziehung. Ist o ein beliebiger Punkt von C_3, so werden aus demselben entsprechende Punkte durch entsprechende Strahlen eines symmetrischen Systems zweiten Grades projicirt; ist nun $x \equiv y'$, $x' \equiv y$ irgend ein Punktepaar unserer Beziehung, also $ox \equiv X$, $ox' \equiv X'$ ein Strahlenpaar des symmetrischen Systems, so schneiden nach Früherem die Strahlen XX' die Curve in einem neuen Punktepaare $z' \equiv u$, $z \equiv u'$ resp und somit entsprechen dem Strahle X zwei in X' und dem Strahle X' zwei in X zusammenfallende Strahlen des symmetrischen Systemes. (Vergl. Art. 2.)

Das symmetrische System besteht somit aus lauter Verzweigungselementen, denen die Doppelelemente involutorisch entsprechen (Art. 3, *b*), d. h. das System wird durch eine (gewöhnliche) quadratische Involution dargestellt, in welcher auch die vier Verzweigungsstrahlen (Tangenten durch o) zu zwei Strahlenpaaren verbunden sind. Jeder der beiden Doppelstrahlen dieser Involution schneidet, weil sich selbst entsprechend, die Curve in zwei Punkten, welche ein Paar der nicht centralen fundamentalen Paarinvolution bilden. Hiemit erscheint auch der in Art. 5 erwähnte Ausnahmsfall erledigt, nämlich der Fall, welcher eintritt, wenn die Verbindungsgerade $\overline{xx'}$ eines vertauschungsfähigen Paares einer der sechs Doppelstrahlen jener drei quadratischen Involutionen ist, welche am dritten Schnittpunkt o von $\overline{xx'}$ mit C_3 von dem durch o gehenden Tangentenquadrupel bestimmt erscheinen.

8. Fassen wir die Resultate der letzten Betrachtungen zusammen, so stellen sich dieselben folgendermassen dar:

„Es gibt auf einer ebenen Curve dritter Ordnung und sechster Classe C_3 im Allgemeinen nur zwei Arten von eindeutigen Punktbeziehungen: die centralen und die nicht centralen. Durch ein Paar entsprechender Punkte x, x' ist eine centrale und eine nicht centrale eindeutige Punktbeziehung vollkommen bestimmt. Die Punktepaare der ersten liegen auf Strahlen, welche C_3 in demselben Punkte o wie die Gerade $\overline{xx'}$ treffen; die Punktepaare $yy', zz', \ldots$ der nicht centralen Beziehung erhält man durch Projection von x', x aus den einzelnen Curvenpunkten auf die Curve. Den centralen eindeutigen Beziehungen haftet das Merkmal der Vertauschungsfähigkeit an. Unter den nicht centralen eindeutigen Beziehungen gibt es nur drei, bei welchen Vertauschungsfähigkeit auftritt, es sind dies die drei Systeme correspondirender Punkte auf C_3. Jede centrale Beziehung besitzt vier sich selbst entsprechende Punkte (Doppelpunkte), die Berührungspunkte der durch das Centrum o gehenden vier Curventangenten. Eine nicht centrale Beziehung besitzt keinen Doppelpunkt, oder es ist jeder Punkt von C_3 ein solcher. Diese eindeutige Beziehung, welche man erhält, wenn man jeden Punkt von C_3 sich selbst entsprechen lässt, muss auch als eine nicht centrale vertauschungsfähige Beziehung betrachtet werden, so dass wir im Ganzen vier solche fundamentale, durch die Curve C_3 von vornhinein gegebene nicht centrale vertauschungsfähige Beziehungen zu bemerken haben“.[1]

Der Kürze wegen sollen folgende Bezeichnungen eingeführt werden. Mit J_1^2 soll eine vertauschungsfähige centrale eindeutige Beziehung (Involution von Paaren) bezeichnet werden; jede Gruppe enthält zwei Elemente und ist durch ein Element bestimmt. Die durch das Paar x, x' oder durch das Centrum o

[1] Vergl. A. Harnack. Über die Verwerthung der elliptischen Functionen für die Geometrie der Curven dritter Ordnung. Mathem. Ann. Band IX, p. 65.

bestimmte centrale Paarinvolution soll mit $J_1^2(xx')$ oder $J_1^2(o)$ bezeichnet werden; o ist der dritte Schnittpunkt von C_3 mit $\overline{xx'}$.

Mit E soll eine nicht vertauschungsfähige eindeutige Beziehung bezeichnet werden; die durch ein Punktepaar x, x' bestimmte E soll mit $E(x, x')$ bezeichnet werden. Die fundamentalen Beziehungen bezeichnen wir mit FE und haben also die nur lauter Doppelelemente bestehende fundamentale Beziehung $FE(xx)$ und dann die drei fundamentalen nicht centralen, aber vertauschungsfähigen Beziehungen $F_iE(xx')$, $i = 1, 2, 3$, worin x, x' zwei correspondirende Punkte (Punkte mit gemeinschaftlichem Tangentialpunkt) sind. Wenn $x_1x_2x_3x_4$ die Berührungspunkte der vier durch irgend einen Curvenpunkt gehenden Tangenten sind, so ist:

$$F_1E \equiv E(x_1x_2),\quad F_2E \equiv E(x_1x_3),\quad F_3E \equiv E(x_1x_4).$$

9. Wir erinnern, dass die Theorie des Gegenpunktes von vier Punkten $abcd$ der C_3 in bekannter Art aus dem Früheren gefolgert wird. Die durch $abcd$ hindurchgehenden Kegelschnitte schneiden C_3 in Punktepaaren xx', deren Punkte einander eindeutig vertauschungsfähig entsprechen, so dass sie einer $J_1^2(xx')$ angehören. Mit anderen Worten, die Geraden $\overline{xx'}$ gehen durch einen festen Punkt von C_3, den Gegenpunkt des Quadrupels $abcd$. Hieraus ergeben sich die anderen bekannten Sätze über Tangentialpunkte in bekannter Art.

Ist der C_3 ein vollständiges Vierseit eingeschrieben und sind etwa x_1x_1', x_2x_2', x_3x_3' die drei Gegeneckenpaare, so kann man die $E(x_1x_1')$ betrachten; aus dem Paare x_1x_1' ergibt durch Projection aus x_2' das Paar x_3x_3' (wir denken uns $x_1x_2x_3$ in gerader Linie) und durch Projection aus x_3' ergibt sich das Paar x_2x_2'. Die drei Gegeneckenpaare gehören also derselben E an, von welcher man sofort sieht, dass es eine FE sein muss; denn projicirt man das Paar x_1x_1' aus x_3, so ergibt sich x_2' als y etwa und x_2 als y', so dass die Punkte des Paares x_2x_2' (und ebenso eines jeden der beiden anderen Paare) sich vertauschungsfähig entsprechen. Da nun die drei Geraden $\overline{x_1x_1'}$, $\overline{x_2x_2'}$, $\overline{x_3x_3'}$ nicht durch einen Punkt von C_3 gehen, so müssen die drei Paare einer FE angehören; (der bekannte Satz, dass die drei Gegeneckenpaare eines der C_3 eingeschriebenen vollständigen Vier-

seits correspondirende Punktepaare desselben Systemes sind.) Die hier entwickelten bekannten Resultate mögen als Andeutungen dafür dienen, wie man den unserer Untersuchung zu Grunde liegenden Correspondenzsatz als Instrument zur Entwicklung der Theorie der C_3 auf ihr selbst benützen könne, etwa so wie die elliptische Parametervertheilung auf der C_3. Die folgenden Betrachtungen werden noch weitere Belege bringen und zwar nicht nur in Hinsicht der allgemeinen C_3, sondern bezüglich der ebenen und räumlichen Curven vom Geschlechte Eins im Allgemeinen.

10. Da ein Paar entsprechender Punkte eine J_1^2 und eine E vollständig bestimmt, so können zwei J_1^2 oder zwei E kein Paar entsprechender Punkte gemein haben.

Ist auf C_3 eine E und eine $J_1^2(o)$ gegeben, so wird die E aus dem Punkte o durch ein symmetrisches Strahlensystem zweiten Grades projicirt, welches vier sich selbst entsprechende Strahlen besitzt, von denen also jeder C_3 in zwei entsprechenden Punkten der E schneidet; diese beiden Punkte bilden aber auch ein Paar der J_1^2, weil ihre Verbindungsgerade durch o hindurchgeht. Wir haben somit den Satz:

„Eine E und eine J_1^2 auf einer C_3 haben vier Paare entsprechender Punkte gemeinschaftlich."

Hieraus folgt weiter:

„Die Enveloppe der Verbindungsgeraden einander entsprechender Punkte einer E, die Ordnungscurve der E auf C_3 ist eine Curve sechster Classe K_6^2."[1]

Denn, ist o irgend ein Punkt von C_3, den wir zugleich mit m' bezeichnen wollen, und sind o' und m die ihm der E gemäss entsprechenden Punkte, so sind oo', mm' zwei durch o gehende Tangenten der Enveloppe, zu denen noch die vier Doppelstrahlen (erster Art) des symmetrischen Strahlenbüschels hinzukommen, durch welches die E aus o projicirt erscheint.

Es seien $WXYZ$ diese vier Tangenten und ww', xx', yy', zz' ihre vier der E angehörigen Schnittpunktepaare mit C_3; da sich wx' und $w'x$ in einem Punkte o_1 von C_3 schneiden müssen, so

[1] Vergl. Küpper. Über die Steiner'schen Polygone u. s. w. l. c. Art. 18.

ıd oo_1, wx, $w'x'$ drei Gegeneckenpaare eines der C_3 ein-
schriebenen, vollständigen Vierseits und somit drei Paare cor-
spondirender Punkte desselben Systemes, drei Punktepaare
r F_1E. Ebenso sind oo_2, wy, $w'y'$, und oo_3, wz, $w'z'$ drei Paare
r F_2E, respective der F_3E, wenn die Punkte o_2, o_3 aus den auf
Y, respective WZ gelegenen Punktepaaren ebenso abgeleitet
ıd, wie o_1 aus den Paaren ww', xx'. Es sind somit $wxyz$,
$x'y'z$, $oo_1o_2o_3$ vier Punktquadrupel, von denen jedes einen
meinschaftlichen Tangentialpunkt besitzt und zwar erkennt
ın auf Grund der Fundamentaleigenschaft einer E (dass näm-
h die wechselsweisen Verbindungsgeraden der Punkte irgend
eier Punktepaare sich auf C_3 schneiden müssen) sofort, dass
der Tangentialpunkt des Quadrupels $w'x'y'z'$, o' jener des
ıadrupels $wxyz$ ist, während das Quadrupel $oo_1o_2o_3$ den dritten
hnittpunkt von C_3 mit $\overline{o'm}$ als Tangentialpunkt besitzt. Ferner
ɛennt man sofort, dass die drei Punkte o_1, o_2, o_3 der Reihe nach
ch die Schnittpunkte der drei Geradenpaare $(yz', y'z)$, $(xz', x'z$,
$', x'y)$, sein müssen.

Um also die vier durch einen beliebigen Punkt $(o \equiv m')$ der
hindurchgehenden Tangenten von K_6 zu erhalten, welche ihn
ɔht mit den entsprechenden Punkten verbinden, hat man nur
s einem der beiden diesem Punkte nach der E entsprechenden
ınkten, also entweder aus m oder aus o' an C_3 die vier Tan-
nten zu ziehen und ihre Berührungspunkte $x'y'z'w'$ (oder
yzw) mit o zu verbinden. (Axel Harnack, l. c. §. 3, pag. 32).
ie Gerade der Ebene wird von drei Curven K_6 berührt, ent-
rechend den drei E, welche von den drei Punktepaaren be-
mmt sind, die in dem Tripel der Schnittpunkte der Geraden
t C_3 auftreten.

Die aus irgend einem Punkte o der C_3 an die sämmtlichen
gehenden Tangentenquadrupel $WXYZ$ bilden eine degene-
te biquadratische Involution, welche drei aus je zwei Doppel-
ahlen bestehende Gruppen besitzt; dies folgt aus Art. 4, da
ɔse Quadrupel die sich selbst entsprechenden Elemente aller
r symmetrischen Strahlensysteme zweiten Grades darstellen
ılche die durch o gehenden vier Tangenten von C_3 zu Ver-
eigungselementen besitzen. Die drei Strahlenpaare, welche
ɔ sechs Doppelelemente dieser biquadratischen Involution dar-

stellen, sind (demselben Artikel gemäss) die Doppelelemente der drei quadratischen Involutionen, in denen sich die drei FE aus o projiciren (somit sind es die durch o gehenden drei Tangentenpaare an die drei Cayley'schen Curven; Vergl. das Folgende).

Die an den einzelnen Punkten von C_3 in der angeführten Weise entstehenden biquadratischen Involutionen der Tangentenquadrupel sind offenbar projectivisch, weil eine durch einen Punkt o gehende Tangente z. B. X die $E(xx')$ und damit auch K_6 eindeutig bestimmt. Hieraus und aus der singulären Natur dieser Involutionen folgt auch die Constanz des Doppelverhältnisses des Quadrupels $(WXYZ)$ für eine K_6 und für alle Punkte der C_3. (Vergl. A. Harnack l. c. p. 36.)

„Die Ordnungscurve einer FE ist eine Curve dritter Classe, die der FE entsprechende Cayley'sche Curve". In der That herrscht in jeder der drei FE Vertauschungsfähigkeit, so dass jede Tangente der Ordnungscurve sowohl als $\overline{xx'}$ als auch als $\overline{y'y}$, also zweimal auftritt; die K_6 geht somit in eine K_2 über. Auch direct erkennt man dasselbe; einem beliebigen Punkte o entspricht nur ein Punkt o', was eine durch o gehende Tangente der Ordnungscurve liefert, wozu noch die zwei Doppelstrahlen der quadratischen Strahleninvolution hinzukommen, in welcher die FE aus dem Punkte o projicirt erscheint.

11. Es sei xx' ein Punktepaar einer auf C_3 auftretenden E, y sei der dem x unendlich nahe Curvenpunkt, so dass der ihm entsprechende y' dem x' unendlich nahe zu liegen kommen wird; xx', yy' sind zwei unendlich nahe Tangenten der Ordnungscurve K_6 und ihr Schnittpunkt ξ somit ein Punkt von K_6, nämlich der Berührungspunkt von K_6 mit $\overline{xx'}$. Weil die Geraden xy', $x'y$ sich in einem Punkte o von C_3 schneiden müssen, welcher offenbar der dritte Schnittpunkt von C_3 mit xx' ist, so ergibt sich aus dem vollständigen Vierecke $xyx'y'$ sofort, dass ξ harmonisch conjugirt ist zu o bezüglich des Punktepaares xx'.

„Die Ordnungscurve K_6 einer $E(xx')$ berührt die Tangenten xx' in jenen Punkten ξ, welche bezüglich der Punktepaare xx' harmonisch conjugirt sind zu den dritten Schnittpunkten der Tangenten mit der Curve C_3". (Küpper, l. c. Axel, Harnack, l. c. pag. 33.)

Die Tangente der Ordnungscurve K_6 in irgend einem ihrer Punkte schneidet somit C_3 in drei Punkten, welche mit jenem ein harmonisches System auf der Tangente bilden; hieraus folgt, dass ein Punkt von K_6 nur dann zugleich auf C_3 wird liegen können, wenn beide Curven in ihm dieselbe Tangente besitzen, so dass jeder Begegnungspunkt von C_3 mit K_6 zugleich ein Berührungspunkt beider Curven ist.

Die beiden Curven haben $6 \times 6 = 36$ gemeinschaftliche Tangenten; es sei G eine von ihnen, g ihr Berührungspunkt, und γ ihr Schnittpunkt mit C_3. Die Gerade G muss, als Tangente von K_6 zwei entsprechende Punkte $x\,x'$ der $E(xx')$, verbinden. Diese können nicht in g vereinigt sein, weil die E daselbst einen Doppelpunkt und somit lauter Doppelpunkte hätte, was der Annahme einer beliebigen E widerspricht. Es sind also offenbar nur die zwei Fälle und zwar beide gleich gut möglich: 1. entweder fällt x in g und x' in γ, oder 2. es fällt x in γ und x' in g. In beiden Fällen ist g zugleich der dritte Schnittpunkt o von C_3 mit $\overline{xx'}$, und der zu o bezüglich xx' harmonisch conjugirte Punkt ξ fällt mit g zusammen, so dass C_3 und K_6 in g dieselbe Tangente $\overline{\gamma}$ besitzen, welche zwei von den 36 gemeinschaftlichen Tangenten absorbirte.

Hieraus folgt:

„Die Ordnungscurve K_6 berührt die Curve C_3 in 18 Punkten und beide Curven haben ausser diesen Punkten und deren Tangenten keine weiteren Punkte und Tangenten gemeinschaftlich. Die K_6 ist somit von der $\frac{36}{3}$ d. i. von der zwölften Ordnung". (Küpper, l. c.)

Die achtzehn Berührungen sind, wie schon erwähnt, zweifacher Art; dem Berührungspunkte entspricht nach der gegebenen E sein Tangentialpunkt, aber entweder als accentuirter oder als nicht accentuirter Punkt. Betrachten wir eine Berührung der ersten Art im Punkte x und eine Berührung der zweiten Art im Punkte y', so dass x' der Tangentialpunkt von x und y, jener von y' sein soll; die Geraden $\overline{xy'}$ $\overline{x'y}$ müssen sich in einem Punkte i von C_3 durchschneiden, von dem man sofort erkennt, dass er ein Inflexionspunkt sein muss; da nämlich $xy'i$ in einer Geraden liegen, so werden auch deren Tangentialpunkte in einer Geraden

liegen, d. h. der Tangentialpunkt von i ist der dritte Schnittpunkt von C_3 mit $x'y$, d. h. der Punkt i selbst. Nun erkennt man aber sofort, dass durch den Punkt i die übrigen sechzehn Berührungen von C_3 und K_6 in derselben Art gepaart erscheinen, wie die zwei betrachteten; denn, ist $x_1\, x_1'$ das einer weiteren Berührung erster Art entsprechende Punktepaar, also x_1' Tangentialpunkt von x_1 so werden die Strahlen ix_1, ix_1' die C_3 in zwei entsprechenden Punkten y_1', y_1 respective schneiden, und da x_1' der Tangentialpunkt von x_1 und i sein eigener Tangentialpunkt ist, so muss y_1 der Tangentialpunkt von y_1' sein, so dass in y_1' eine Berührung der zweiten Art auftritt:

„Die achtzehn Berührungspunkte von C_3 und K_6 zerfallen in zwei Gruppen von je neun; die Punkte x_k der einen Gruppe sind als nicht accentuirte Punkte ihren Tangentialpunkten x_k' nach der $E(xx')$ zugeordnet; die neun Punkte y_l' der anderen Gruppe sind als accentuirte Punkte ihren Tangentialpunkten y_l nach der $E(xx')$ entsprechend zugeordnet. Jede Gerade, welche einen Berührungspunkt der einen Gruppe mit einem Berührungspunkt der anderen Gruppe verbindet, schneidet die C_3 in einem Inflexionspunkte. Hieraus ergeben sich die neun Inflexionspunkte i_m der C_3, indem man eine der beiden Gruppen aus einem Punkte der anderen Gruppe auf C_3 projicirt; und ebenso erhält man jede der beiden Gruppen, wenn man die neun Inflexionspunkte $i_m (m = 1, \ldots 9)$ aus einem Punkte der anderen Gruppe auf C_3 projicirt. Die beiden Gruppen sind somit zwei connexe Inflexionsgruppen.[1] Dasselbe gilt von den zwei Gruppen der Tangentialpunkte x_k', y_l''.

Wir bemerken, dass die K_6 mit 36 Doppelpunkten ausgestattet ist, welche zu je vieren auf den harmonischen Polaren der neun Inflexionspunkte von C_3 liegen, was in einfacher Art aus der Fundamentaleigenschaft der $E(xx')$ folgt; ferner hat K_6 achtzehn Rückkehrtangenten (Vergl. Küpper, Arel Harnack l. c.)

---

[1] Vergl. Durége, die ebenen Curven dritter Ordnung. 1871. p. 295.

12. „Ist auf der C_3 eine $E(xx')$ gegeben, so liegen die beiden einem Inflexionspunkte $(i \equiv j')$ entsprechenden Punkte $i'j$ mit demselben in gerader Linie". (Küpper, l. c.)

Dies ist eine unmittelbare Folge des Umstandes, dass die Gerade $i'j$ C_3 in demselben Punkte wie die Gerade ij', d. h., wie die Tangente des Inflexionspunktes i schneidet; dieser Schnittpunkt, der Tangentialpunkt von i ist aber i selbst. Die Gerade $i'j$ ist folglich eine Doppeltangente von K_6, weil $\overline{xx'}$ in zwei verschiedenen Momenten in die Lage dieser Geraden gelangt, einmal als ii' und das andere Mal als jj'. Die K_6 hat somit neun Doppeltangenten ii', welche die neun Inflexionspunkte mit ihren entsprechenden Punkten verbinden. Der Classenzahl 6 und der Ordnungszahl 12 gemäss kann K_6 keine weitere Doppeltangente besitzen und ist somit vom Geschlechte Eins. Die Doppeltangenten aller Curven K_6 bilden die neun Strahlenbüschel, welche die Inflexionspunkte zu Scheiteln besitzen (Arel Harnack, Küpper, l. c.)

„Die durch irgend zwei Inflexionspunkte der C_3 gehenden zwei Doppeltangenten der K_6 schneiden sich auf der harmonischen Polare des mit jenen Inflexionspunkten in gerader Linie liegenden dritten Inflexionspunktes, so dass die neun Doppeltangentenbüschel perspectivisch sind für die harmonischen Polaren der Inflexionspunkte als Perspectivitätsaxen".

Es sei m ein Inflexionspunkt von C_3 und m' der nach E ihm entsprechende Punkt, so ist $\overline{mm'}$ die durch m gehende Doppeltangente der zugehörigen K_6. Irgend einen anderen Inflexionspunkt bezeichnen wir mit n', und mit n dessen entsprechender Punkt, so ist $n'n$ die durch n' gehende Doppeltangente der K_6 und der dritte Schnittpunkt i von C_3 mit $\overline{mn'}$ ist wieder ein Inflexionspunkt von C_3. Nun müssen sich $\overline{mn'}$, $\overline{m'n}$ auf C_3 schneiden, d. h., $m'n$ geht durch i hindurch; aus dem Vierecke $mm'nn'$ folgt nun sofort, dass der Schnittpunkt der Doppeltangenten $\overline{mm'}$, $\overline{n'n}$ auf der harmonischen Polare von i gelegen sein muss. Es schneiden sich somit die neun Doppeltangenten der K_6 wechselweise in 36 Punkten, welche zu je vieren auf den

harmonischen Polaren der Inflexionspunkte von C_3 gelegen sind. Jede der harmonischen Polaren enthält somit vier Doppelpunkte und vier Schnittpunkte von vier Doppeltangentenpaaren der K_6.

13. „Projicirt man die Punktepaare einer $J_1^2(o)$ aus einem festen Curvenpunkte p auf die Curve, so erhält man Punktepaare einer anderen $J_1^2(o')$; die Gerade $\overline{oo'}$ geht durch den Tangentialpunkt von p.“

(Vergleiche: Küpper; Über Involutionen auf einer Curve dritter Ordnung. Prager Abhandlg. 1883.)

Sind xx' zwei entsprechende Punkte der $J_1^2(o)$, so schneidet $\overline{xx'}$ C_3 in o; wird nun C_3 von $\overline{px}$ in y und von $\overline{px'}$ in y' geschnitten und lässt man dem y den Punkt y' entsprechen, so erkennt man sofort die Eindeutigkeit dieser Beziehung und da aus der Vertauschungsfähigkeit von x mit x' auch jene von y mit y' folgt, so muss die Gerade $\overline{yy'}$ die Curve C_3 in einem festen Punkte o' schneiden. (Die Paare yy' können nicht eine FE bilden, weil derselben auch die Paare xx' angehören müssten, da die FE durch Projection aus p in sich selbst übergeht.) Betrachtet man die $E(xy')$, so entspricht in ihr dem o' der Punkt p (erhalten durch Projection von y' respective x aus y' auf die C_3) und dem p der Punkt o (durch Projection aus x' erhalten.) Es müssen also, dem Fundamentalsatze über die E zufolge die Geraden $\overline{oo'}$, $\overline{pp}$, d. h., $\overline{oo'}$ und die Tangente von p in einem Punkte von C_3 zusammentreffen, d. h. $\overline{oo'}$ geht durch den Tangentialpunkt von p.

Wenn p denselben Tangentialpunkt wie o besitzt, so fällt o' mit o zusammen und die $J_1^2(o)$ erscheint in sich selbst projicirt; man kann also jede $J_1^2(o)$ auf drei verschiedene Arten central in sich selbst überführen, wenn man nämlich die drei mit o denselben Tangentialpunkt besitzenden Punkte als Projectionscentra wählt.

„Projicirt man die Punktepaare eines $E(xx')$ aus irgend einem Curvenpunkte auf die Curve, so erhält man die Punktepaare derselben $E(xx')$ in umgekehrter Ordnung.“ Dies ist der Fundamentalsatz in wenig veränderter Form; denn die Strahlen px, px' schneiden C_3 in y' respective y.

14. Es seien auf der C_3 beliebig viele eindeutige Beziehungen theils centrale, theils nichtcentrale gegeben. Wenn wir von einem beliebigen Punkte x auf C_3 ausgehen und zu ihm den nach

einer der Beziehungen gehörigen, entsprechenden x_1 aufsuchen, zu diesem wieder den nach einer zweiten der gegebenen Beziehungen entsprechenden Punkt x_2 bestimmen, dann mit x_2 in die dritte Beziehung eintreten und x_3 als entsprechend zu x_2 finden, und wenn dieses Verfahren fortgesetzt wird, so wird, wenn etwa n solche Beziehungen vorliegen, aus dem Punkte x ein Punkt x_n abgeleitet erscheinen, aus dem man durch die umgekehrten Ableitungen wieder zum Punkte x zurückgelangt. Hält man nun die Ordnung, in welcher die einzelnen Beziehungen in die Construction entsprechender Punkte eintreten, fest, so wird offenbar zwischen x und x_n ebenfalls eine eindeutige Beziehung stattfinden, da jedem x nur ein x_n und jedem x_n nur ein x entspricht. Symbolisch können wir dies so ausdrücken:

„Wenn auf C_3 eine Reihe von gegebenen eindeutigen centralen oder nicht centralen Beziehungen $E_1 E_2 \ldots E_n$ besteht und wenn xx_1 ein Punktepaar von E_1, $x_2 x_3$ ein solches von E_2, $x_3 x_4$ ein solches von E_3, u. s. w. $\ldots x_{n-1} x_n$ ein Punktepaar von E_n ist, so gehören auch x und x_n als einander entsprechende Punkte einer eindeutigen Beziehung E an."

15. „Jede eindeutige nicht centrale Beziehung kann man und zwar auf unendlich viele Arten durch zwei centrale eindeutige Beziehungen ersetzen".

Es sei xx' irgend ein beliebiges, und oo' ein festes Punktepaar der gegebenen E; dann müssen sich $o'x$ und ox' in einem Punkte ξ von C_3 schneiden und man wird somit von x zu x' auch gelangen, wenn man zu x den nach der $J_1^2(o')$ entsprechenden Punkt ξ und zu diesem den nach der $J_1^2(o)$ entsprechenden Punkt x' aufsucht. Wenn wir die Symbole $J_1^2(o)$ und $E(oo')$ als Operationssymbole einführen, so soll $J_1^2(o)$ anzeigen, dass auf die einzelnen Punkte der C_3 die Operation des Projicirens derselben aus dem Punkte o auf C_3 angewendet wird und ebenso möge durch $E(oo')$ ausgedrückt werden, dass zu den einzelnen Punkten der C_3 diejenigen aufgesucht werden, welche ihnen eindeutig, aber nicht central ebenso entsprechen, wie dem Punkte o der Punkt o'.

Die Aufeinanderfolge dieser Operationen möge einfach durch das Nebeneinanderstellen der einzelnen Operationssymbole dar-

gestellt werden. So wird nun also das Symbol[1] $J(o')\,J(o)$ andeuten, dass die variablen Punkte x der C_3 von o' auf C_3 und die sich so ergebenden Punkte (ξ) von o wieder auf C_3 projicirt werden, was die Punkte x' liefert. Das Resultat obiger Betrachtung lässt sich dann durch die symbolische Gleichung:

$$E(o, o') \equiv J(o')J(o) \qquad 1)$$

ausdrücken, welche aussagt, dass aus einem Punkte x von C_3 derselbe Punkt x' hervorgeht, ob man auf x die Operation $E(o,o')$ oder die Operation $J(o')$ und auf deren Resultat die Operation $J(o)$ anwendet.

„Sowie man also jede E durch zwei aufeinander folgende J ersetzen kann, so kann man je zwei aufeinander folgende J durch eine E ersetzen."

Da sich die Geraden $\overline{ox}$, $\overline{o'x}$ in einem Curvenpunkte ξ schneiden, so ist es also gleichgiltig, ob man auf einen Punkt ξ zunächst den Process $J(o')$ anwende, wodurch x entsteht und auf x den Process $E(oo')$, wodurch x' entsteht oder ob man auf ξ direct den Process $J(o)$ anwendet, was auch x' liefert; wir haben somit:

$$J(o')\,E(oo') \equiv J(o) \qquad 2)$$

Und ebenso ist:

$$E(o, o')\,J(o) \equiv J(o'); \qquad 3)$$

denn, wendet man auf x die Operation $E(o, o')$ an, so ergibt sich x', auf welchen Punkt man die Operation $J(o)$ anzuwenden hat, um ξ zu erhalten; dasselbe ξ ergibt sich aber, wenn man auf x direct die Operation $J(o')$ anwendet.

„Wir haben somit den Satz:

„Zwei aufeinander folgende ungleichartige eindeutige Operationen (eine E mit einer J oder eine J mit einer E) kann man immer durch eine centrale eindeutige Beziehung J ersetzen."

Wenn es sich nur um die Art der aus zwei Beziehungen zusammengesetzten Beziehung handelt, nämlich darum, ob es

---

[1] Es möge bis auf weiteres der Einfachheit wegen J_3^3 durch J ersetzt werden.

eine centrale (J) oder eine nicht centrale Beziehung (E) ist, so kann man die Gleichungen 1), 2), 3) auch schreiben

$$JJ \equiv E,\ JE \equiv J,\ EJ \equiv J.$$

„Drei aufeinander folgende centrale Beziehungen (J-Operationen) können durch eine centrale Beziehung ersetzt werden."

Den in dem Symbol JJJ können die beiden ersten (oder die beiden letzten) J durch eine E ersetzt werden und wir erhalten das Symbol EJ (respective JE), welches mit J identisch ist; es ist also

$$JJJ \equiv J \qquad 4)$$

„Zwei aufeinander folgende nicht centrale Beziehungen (E-Operationen) können durch eine nicht centrale Beziehung ersetzt werden."

Denn, ersetzt man in EE jedes E durch zwei J, so ergibt sich $EE \equiv JJJ$; nun können die drei ersten (oder die drei letzten) J durch ein J ersetzt werden, wodurch wir erhalten

$$EE \equiv JJJ \equiv JJ,$$

was nach Früherem eine E liefert; es ist somit

$$EE \equiv E. \qquad 5)$$

Es ist dies übrigens unmittelbar klar; denn wenn das System der Punkte x in eindeutiger nicht centraler Beziehung steht zum System der Punkte x', und dieses in eben solcher Beziehung zum Systeme x'', so werden offenbar auch x und x'' in eindeutiger Beziehung stehen, welche keine centrale sein kann, weil aus einer centralen Beziehung zwischen x'' und x und aus der nicht centralen zwischen x und x', nach dem zweiten Satze dieses Artikels die Beziehung zwischen x' und x'' sich als eine centrale ergeben würde, was gegen die Voraussetzung ist.

Eine unmittelbare Folge des letzten Satzes ist:

„Beliebig viele aufeinander folgende nicht centrale eindeutige Beziehungen können durch eine nicht centrale eindeutige Beziehung ersetzt werden."

Symbolisch:

$$\underbrace{EEEE\ldots E}_{n\text{-mal}} \equiv E, \text{ oder } E^n \equiv E \qquad 6)$$

Man kann je zwei aufeinander folgende E-Operationen in eine zusammenziehen, so dass man schliesslich zu $EE \equiv E$ gelangt.

„Beliebig viele aufeinander folgende centrale eindeutige Beziehungen können durch eine centrale oder nicht centrale eindeutige Beziehung ersetzt werden, je nachdem ihre Anzahl ungerade oder gerade ist."

Man kann je zwei aufeinander folgende J-Operationen durch eine E-Operation ersetzen, und wird, wenn $2n$ J-Operationen vorkommen, hieraus n E-Operationen erhalten, welche nach Früherem wieder eine E-Operation als Resultat liefern; d. h. symbolisch:

$$\underbrace{JJJ\ldots J}_{2n\text{-mal}} \equiv J^{2n} \equiv E \qquad 7)$$

Ist dagegen die Zahl der auftretenden J-Beziehungen eine ungerade, etwa $2n+1$, so wird man aus den $2n$ ersten J-Operationen n E-Operation erhalten, welche durch eine E-Operation ersetzbar sind, die mit der letzten $(2n+1)^{\text{ten}}$ J-Operation verbunden, nach Gleichung (3) wieder eine J-Operation liefert; symbolisch:

$$\underbrace{JJJ\ldots J}_{(2n+1)\text{-mal}} \equiv J^{2n+1} \equiv \underbrace{EEE\ldots E}_{n\text{-mal}} . J \equiv E . J \equiv J$$

also

$$J^{2n+1} \equiv J \qquad 8)$$

„Beliebig viele, beliebig aufeinander folgende eindeutige Beziehungen kann man durch eine einzige centrale oder nicht centrale Beziehung ersetzen, je nachdem die Zahl der auftretenden sämmtlichen centralen Beziehungen eine ungerade oder eine gerade Zahl ist."

Da man nach 6) alle ungetrennt aufeinander folgenden E-Operationen durch eine E-Operation ersetzen kann, so geht die beliebige Reihe von Beziehungen, welche allgemein das Symbol:

$$\underbrace{EE\ldots E}_{k\text{-mal}}\ \underbrace{JJ\ldots J}_{i\text{-mal}}\ \underbrace{EE\ldots E}_{k'\text{-mal}}\ \underbrace{JJ\ldots J}_{i'\text{-mal}}\ldots.$$

haben wird, über in:

$$\underbrace{EJJ\ldots.J}_{i\text{-mal}}\quad\underbrace{EJJ\ldots.J}_{i'\text{-mal}}\quad\underbrace{EJJ\ldots.J}_{i''\text{-mal}}\ldots$$

Nun vereinigt sich [nach (3)] jede der auftretenden E-Operationen mit der ihr folgenden J-Operation wieder zu einer J-Operation, so dass symbolisch die letzte Reihe übergeht in:

$$\underbrace{JJ\ldots J}_{i\text{-mal}}\quad\underbrace{JJ\ldots J}_{i'\text{-mal}}\quad\underbrace{JJ\ldots J}_{i''\text{-mal}}$$

oder also in

$$\underbrace{JJ\ldots.J}_{\Sigma i\text{-mal}}\equiv J^{\Sigma i},$$

was entweder eine J oder eine E liefert, je nachdem [nach 7) und 8)] Σi eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

16. Auf der Curve C_3 seien p beliebige feste Punkte $o_1 o_2 \ldots o_p$ gegeben. Wir verbinden einen variablen Punkt x_1 von C_3 mit o_1 und bestimmen den dritten Schnittpunkt von C_3 mit $\overline{o_1 x_1}$, es sei x_2; dann ziehen wir $\overline{o_2 x_2}$, welche Gerade C_3 noch in x_3 schneiden möge; ebenso sei x_4 der weitere Schnitt von C_3 mit $o_3 x_3$ u. s. w., allgemein x_r der dritte Schnittpunkt von C_3 mit $\overline{o_{r-1} x_{r-1}}$ und endlich schneide $\overline{o_p x_p}$ die Curve im Punkte x_{n+1}. Dem Punkte x_1 wird in dieser Art der Punkt x_{p+1} zugeordnet sein, und da die Punkte $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_p x_{p+1}$, der Reihe nach durch die centralen Beziehungen $J(o_1)$, $J(o_2)$, $J(o_3) \ldots J(o_p)$ zusammenhängen, so wird zwischen x_1 und x_{p+1} eine eindeutige, centrale oder nicht centrale Beziehung bestehen, je nachdem die Zahl der Punkte o, d. h. also die Zahl p eine ungerade oder gerade Zahl ist.

a) Es sei $p = 2n-1$, somit $p+1 = 2n$; die Gerade $x_1 x_{p+1}$ wird also durch einen festen Punkt o_{p+1} der C_3 hindurchgehen, das heisst:

„Wird der Curve C_3 ein einfaches $2n$-Eck $x_1 x_2 \ldots x_{2n}$ eingeschrieben und schreiten dessen Ecken so auf C_3 fort, dass alle Seiten bis auf die letzte um ihre respectiven dritten Schnittpunkte $o_1 o_2 \ldots . o_{2n-1}$ mit C_3 sich herumdrehen, so dreht sich auch die letzte Seite um ihren dritten Schnittpunkt o_{2n} mit C_3 herum.“[1]

[1] Vergl. Küpper, Steiner'sche Polygonae u. s. w. pag. 1.

Durch den Punkt o_{p+1} (oder o_{2n}) lassen sich vier Tangenten an C_3 legen; im Berührungspunkte einer solchen Tangente fällt x_1 mit x_{p+1} zusammen und wir haben das p-Eck $x_1 x_2 \ldots x_p$ (p ungerade), dessen Seiten der Reihe nach durch die Punkte $o_1 o_2 \ldots o_p$ hindurchgehen. D. h.:

„Sind auf C_3 beliebige $(2n-1)$ Punkte $o_1 o_2 \ldots o_{2n-1}$ gegeben, so gibt es vier einfache $(2n-1)$-Ecke, welche der Curve eingeschrieben sind und deren Seiten der Reihe nach durch die gegebenen Punkte hindurchgehen.“ [1]

Da durch Projection conjugirter Punkte aus einem Curvenpunkte auf die Curve wieder conjugirte Punkte entstehen, so erhält man, wie bekannt, aus den Ecken des einen Polygons die der drei anderen als die zu den ersteren in den drei Systemen conjugirte Punkte.

Für $p = 3$, und wenn die drei Punkte o_1, o_2, o_3 in gerader Linie liegen, stellt diese offenbar eines der vier Dreiecke $x_1 x_2 x_3$ dar, so dass nur drei eigentliche Dreiecke existiren, welche der C_3 eingeschrieben sind und deren Seiten durch drei in gerader Linie liegende Curvenpunkte hindurchgehen.

b) Wenn p eine gerade Zahl ist, etwa $p = 2n$, so wird x_1 mit x_{p+1} durch eine nicht centrale eindeutige Beziehung zusammenhängen und die Gerade $\overline{x_1 x_{p+1}}$ wird somit eine Curve K_6 sechster Classe, zwölfter Ordnung umhüllen, welche C_3 in den achtzehn Punkten zweier connexer Inflexionsgruppen berührt. Es wird im Allgemeinen nicht geschehen, dass x_1 mit x_{p+1} zusammenfällt; geschieht es jedoch einmal, so geschieht es immer. (Vergl. Art. 6.)

„Wenn also auf C_3 beliebige $2n$ feste Punkte gegeben sind, so gibt es im Allgemeinen kein einfaches $2n$-Eck, welches der Curve eingeschrieben ist und dessen Seiten der Reihe nach durch jene festen Punkte gehen; wenn jedoch ein solches $2n$-Eck existirt, so gibt es deren unendlich viele.“

---

[1] Vergl.: Clebsch, Vorlesungen über Geometrie pag. 540 und pag. 614.

Hiedurch sind wir wieder zu den Betrachtungen dieses Artikels *a)* zurückgekommen.

Ist der C_3 irgend ein einfaches $2n$-Eck $x_1x_2 \ldots x_{2n}$ eingeschrieben, so kann man dasselbe sich so verändern lassen, dass alle seine Ecken auf der Curve fortrücken und alle seine Seiten sich um feste Curvenpunkte (die jeweiligen dritten Schnittpunkte mit C_3) drehen. Verfolgt man hierbei irgend zwei Ecken, z. B. x_k und x_l, so wird, wie man nach Früherem sofort erkennt, die Gerade $\overline{x_kx_l}$ sich um einen festen Punkt von C_3 drehen, wenn die Differenz $(k-l)$ eine gerade Zahl ist, und sie wird eine Curve K_6 umhüllen, wenn $(k-l)$ eine ungerade Zahl ist. Solcher Curven K_6 erhält man somit $n(n-1)$ und die Zahl der festen Punkte ist $n(n-2)$, wobei die festen Punkte, um die sich die Seiten des $2n$-Ecks drehen, nicht mitgerechnet sind; im Ganzen erhalten wir somit n^2 feste Punkte auf C_3, um welche sich die $2n$-Seiten und $n(n-2)$ der Diagonalen des $2n$-Eckes herumdrehen, während die übrigen $n(n-1)$ Diagonalen ebenso viele Ordnungscurven sechster Classe und zwölfter Ordnung umhüllen.

17. Es sei $x_1x_2 \ldots x_p$ abermals ein der C_3 eingeschriebenes einfaches p-Eck. Lassen wir dem x_1 den Punkt x_2, diesem x_3 u. s. w. und schliesslich dem x_{p-1} den Punkt x_p eindeutig, nicht central entsprechen, so haben wir die Reihe von nicht centralen Beziehungen $E(x_1x_2)\,E(x_2x_3) \ldots E(x_{p-1}x_p)$ und es wird nach Früherem auch x_p dem x_1 gemäss einer solchen nicht centralen Beziehung $E(x_px_1)$ zugeordnet sein.

Die Ordnungscurven sechster Classe, welche diesen Beziehungen entsprechen, seien der Reihe nach $K_{12}, K_{23}, K_{34} \ldots K_{p1}$; sie erscheinen durch die n Punktepaare $x_1x_2, x_2x_3 \ldots x_px_1$ vollkommen bestimmt, und wenn wir das Polygon $x_1x_2 \ldots x_p$ auf C_3 so in Bewegung setzen, dass $\overline{x_1x_2}$ Tangente von K_{12}; $\overline{x_2x_3}$ Tangente von $K_{23} \ldots \overline{x_{p-1}x_p}$ Tangente von $K_{p-1,p}$ bleibt, so wird auch $\overline{x_px_1}$ Tangente von K_{p1} bleiben.

„Wenn $(p-1)$ Seiten eines der C_3 eingeschriebenen p-Eckes, als Tangenten beliebiger $(p-1)$ fester Ordnungscurven sechster Classe hingleiten, so gleitet auch die letzte Seite auf einer solchen Ordnungscurve als Tangente hin."

Oder mit anderen Worten:

„Wird der C_3 irgend ein einfaches p-Eck $x_1x_2 \ldots x_p$ eingeschrieben, und werden die p Curven sechster Classe $K_{12}, K_{23} \ldots K_{p1}$ bestimmt, welche als Ordnungscurven in den $E(x_1x_2)\,E(x_2x_3) \ldots E(x_px_1)$ auftreten, so gibt es unendlich viele p-Ecke, welche der C_3 eingeschrieben sind und deren Seiten der Reihe nach diese Curven sechster Classe berühren."

Oder:

„Hat man auf C_3 eine Reihe von eindeutigen nicht centralen Beziehungen $E_1E_2 \ldots E_p$ und bestimmt man zu irgend einem Punkte x_1 von C_3 den ihm nach der E_1 entsprechenden x_2, zu diesem den auch der E_2 entsprechenden x_3 u. s. w., schliesslich zu x_p den ihm nach der E_p entsprechenden Punkt x_{p+1}, so wird im Allgemeinen x_{p+1} mit x_1 nicht zusammenfallen und die Verbindungslinie der beiden Punkte $\overline{x_{p+1}x_1}$ umhüllt eine K_6, wenn sich x_1 auf C_3 bewegt. Wenn es dagegen einmal vorkommt, dass x_{p+1} mit x_1 zusammenfällt, so fällt x_{p+1} mit x_1 **immer** zusammen."

Es ist selbstverständlich, dass alle Diagonalen des variablen p-Ecks ebensolche Ordnungscurven sechster Classe umhüllen müssen. Durch p beliebige Punkte auf C_3 sind $\frac{p(p-1)}{2}$ Punktepaare und daher ebensoviele Ordnungscurven sechster Classe bestimmt. Es gibt dann unendlich viele der C_3 eingeschriebene (vollständige) p-Ecke, deren sämmtliche $\frac{p(p-1)}{2}$ Seiten Tangenten jener festen Curven sind.

18. Aus dem letzten Satze des 15. Artikels ergibt sich unmittelbar:

„Wenn $(p-1)$ Seiten eines variablen der C_3 eingeschriebenen einfachen p-Ecks, theils um feste Punkte der C_3 rotiren, theils als Tangenten fester Ordnungscurven sechster Classe hingleiten, so rotirt die letzte Seite auch um einen festen Punkt von C_3 oder sie umhüllt eben eine solche Ordnungscurve sechster Classe, je nachdem die Zahl der um feste

Punkte rotirenden Seiten eine ungerade oder eine gerade Zahl ist."

19. Wir wenden uns nun zur Betrachtung der cyclischen eindeutigen Beziehungen auf der Curve C_3, deren Theorie wie wir sehen werden, identisch ist mit der Theorie der Steiner'schen Polygone.

Betrachten wir irgend eine nicht centrale eindeutige Beziehung $E(xx')$ auf C_3; irgend einem Punkte x von C_3 wird ein Punkt x' entsprechen. Wenn wir nun von einem beliebigen Punkte x_1 ausgehen, ihn als x betrachten und den entsprechenden Punkt x' mit x_2 bezeichnen, diesen wieder als x betrachten und den entsprechenden Punkt x' mit x_3 bezeichnen, zu diesem als x betrachtet den entsprechenden x' auffinden und ihn mit x_4 bezeichnen u. s. w., so erhalten wir nach n-maliger E-Operation eine Aufeinanderfolge von Punkten $x_1x_2x_3 \ldots x_nx_{n+1}$, in denen je zwei aufeinanderfolgende Punkte x_kx_{k+1} ein Paar der $E(xx')$ bilden, so zwar, dass man x_k als x und dann x_{k+1} als x' betrachten kann. Nach einem unserer Hauptsätze wird dem Punkte x_1 der Punkt x_{n+1} eindeutig, nicht central entsprechen, so dass die Gerade $\overline{x_1x_{n+1}}$ eine Ordnungscurve sechster Classe einhüllt, (während die Geraden $x_1x_2, x_2x_3, \ldots x_nx_{n+1}$ alle eine und dieselbe andere Ordnungscurve K_6, jene welche der $E(xx')$ zugehört, umhüllen.)

Wenn es jedoch einmal geschieht, dass sich die Punktreihe $x_1x_2 \ldots$ schliesst, d. h. dass x_{n+1} mit x_1 identisch wird, so geschieht es immer, da in diesem Falle die zwischen x_1 und x_{n+1} bestehende Beziehung einen, und somit (Art. 6) lauter sich selbst entsprechenden Punkte aufweist. Wir haben nun auf C_3 eine cyclische Beziehung mit n-punktigen Gruppen.

„Jeder Punkt von C_3 kommt in einer einzigen durch ihn vollkommenen bestimmten Gruppe vor."

Denn wird er als x betrachtet, zu ihm x' aufgesucht u. s. w., so erhält man die geschlossene Gruppe in der Aufeinanderfolge $x_kx_{k+1}x_{k+2} \ldots x_nx_1x_2 \ldots x_{k-1}x_k$; und wird er als x' betrachtet, zu ihm x aufgesucht u. s. w., so erhält man dieselbe Gruppe in der entgegengesetzten Aufeinanderfolge

$$x_kx_{k-1}x_{k-2} \ldots x_3x_2x_1x_nx_{n-1} \ldots x_{k+1}x_k.$$

„Wenn man die Punkte einer Gruppe aus einem beliebigen Punkte von C_3 auf C_3 projicirt, so erhält man Punkte einer anderen Gruppe, so dass sich die sämmtlichen Gruppen einer cyclischen Beziehung aus einer von ihnen durch Projection derselben aus Curvenpunkten auf die Curve ergeben.“

Es sei $x_1x_2x_3 \ldots x_k \ldots x_n$ eine Gruppe, deren Punkte mit dem beliebigen Punkte o_1 von C_3 verbunden Strahlen $X_1X_2X_kX_n$ liefern, welche C_3 der Reihe nach in den Punkten $x_1^1x_2^1x_3^1 \ldots x_k^1 \ldots x_n^1$ schneiden mögen. Da die Strahlen $\overline{x_kx_k^1}$, $\overline{x_{k+1}x_{k+1}^1}$ sich im Punkte o_1 von C_3 schneiden, so entspricht dem Punkte x_{k+1}^1 der Punkt x_k^1 ebenso wie dem x_k der Punkt x_{k+1} entspricht; man kann somit in der Gruppe $x_1^1x_2^1 \ldots x_k^1 \ldots x_n^1$ jeden Punkt als x und den vorangehenden als x' unserer $E(xx')$ betrachten. Die Punkte $x_1^1 \ldots x_k^1 \ldots x_n^1$ bilden somit in der That wieder eine Gruppe, welche jedoch im entgegengesetzten Sinne durchzulaufen ist, so dass man zu den Punkten $x_1^1x_2^1 \ldots x_n^1$ die Buchstaben $y_ny_{n-1}y_{n-2} \ldots y_3y_2y_1$ setzen kann und hat dann aus der Gruppe $x_1x_2 \ldots x_n$ die Gruppe $y_1y_2 \ldots y_n$ durch Projection aus o_1 abgeleitet. Lässt man o_1 auf C_3 fortschreiten, so geht die Gruppe $y_1 \ldots y_n$ in alle Gruppen unserer cyclischen Beziehung der Reihe nach über.

„Wählt man unter den sämmtlichen Gruppen zwei beliebige $x_1x_2 \ldots x_n, y_1y_2 \ldots y_n$, so kann jede von ihnen auf n-Arten aus der anderen durch Projection abgeleitet werden; die n-Projectionscentren bilden eine dritte Gruppe $z_1z_2 \ldots z_n$. Jede der drei Gruppen stellt die Projectionscentra zur Überführung der beiden anderen Gruppen ineinander dar. Die n^2-Verbindungsgeraden der Punkte einer der drei Gruppen mit den Punkten einer zweiten Gruppe ordnen sich somit in n Strahlenbüschel von je n Strahlen, deren Scheitel die Punkte der dritten Gruppe sind.“

Drei solche Gruppen sind als drei connexe Gruppen bezeichnet worden (Vergl. Küpper, Steiner'sche Polygone u. s. w. l. c.)

Wir verbinden irgend einen Punkt der Gruppe (x) etwa x_r mit irgend einem Punkte der Gruppe (y) etwa mit y_s; die Gerade $\overline{x_r y_s}$ schneide C_3 im Punkte z_{rs}, den wir als Projectionscentrum benützen. Da durch einen Punkt die Gruppe vollkommen bestimmt ist, und da durch Projection aus z_{rs} der Punkt x_r in y_s übergeht, so wird die Gruppe $x_1 x_2 \ldots x_n$ in die Gruppe $y_1 y_2 \ldots y_n$ übergehen.

Es ist leicht anzugeben, wie die Punkte der Gruppe (y) aus den Punkten der Gruppe (x) als deren Projectionen entstehen. Dem x_r entspricht x_{r+1} nach der $E(xx')$ und ebenso entspricht dem Punkte y_{s-1} der Punkt y_s, so dass sich $\overline{x_r y_s}$ und $\overline{x_{r+1} y_{s-1}}$ in z_{rs} schneiden; ebenso geht $\overline{x_{r+2} y_{s-2}}$ durch z_{rs}, u. s. w. allgemein werden $\overline{x_r y_s}$ und $\overline{x_{r+k} y_{s-k}}$ durch denselben Punkt z_{rs} von C_3 hindurchgehen. Hiebei sei nur bemerkt, dass der Punkt x_{n+1} identisch mit x_1, x_{n+2} identisch mit x_2 und allgemein x_{n+i} identisch mit x_i ist: Die Zahl der durch z_{rs} gehenden Geraden $\overline{x_{r+k} y_{s-k}}$ ist den Werthen $k = 0, 1, 2, \ldots n$ entsprechend gleich n. Jede Gerade, welche einen Punkt x_r mit einem Punkte y_s verbindet, schneidet C_3 in einem Punkte z_{rs}, durch den im Ganzen n solche Gerade gehen. Da es dieser Linien $\overline{x_r y_s}$ im Ganzen $nn = n^2$ gibt und je n sich in einem Punkte z_{rs} schneiden, so gibt es solcher Punkte $\frac{n^2}{n} = n$. Man erhält sie, wenn man einen Punkt der einen der beiden Gruppen mit allen n-Punkten der anderen Gruppe verbindet und C_3 mit diesen Verbindungslinien zum Schnitte bringt. Diese Punkte z_{rs} bilden somit wieder eine Gruppe $z_1 z_2 \ldots z_n$ unserer cyclischen Beziehung. — Da nun die drei Gruppen $(x)(y)(z)$ in einer solchen Beziehung stehen, dass jede Gerade, welche aus zwei der Gruppen je einen Punkt enthält, auch einen Punkt der dritten Gruppe enthalten muss, so erkennt man sofort, dass die Beziehung zwischen den drei Gruppen eine vertauschungsfähige ist.

Je zwei Gruppen einer cyclischen Beziehung sind somit auf n verschiedene Arten in perspectivischer Lage; die Perspectivitätscentra bilden eine dritte Gruppe u. s. w.

20. „Jede Gruppe kann auf n verschiedene Arten durch Centralprojection in sich überführt werden.“

Ist nämlich ξ_r der Tangentialpunkt von x_r und wird ξ_r als Projectionscentrum gewählt, so geht x_r wieder in x_r über; also wird die ganze Gruppe $x_1x_2 \ldots x_k \ldots x_n$ in sich selbst übergeführt. Lässt man die Gruppe $y_1y_2 \ldots y_n$ der letzten Betrachtung identisch werden mit der Gruppe $x_1x_2x_3 \ldots x_n$, so schneiden sich die folgenden Geraden in einem und demselben Punkte:

$$\overline{x_rx_r}, \overline{x_{r+1}x_{r-1}}, \overline{x_{r+2}x_{r-2}} \ldots \overline{x_{r+k}x_{r-k}} \ldots$$

Die erste ist die Tangente von x_r; es sei ξ_r ihr Schnittpunkt mit C_3, d. h. der Tangentialpunkt von x_r, so gehen somit durch den Punkt ξ_r alle Geraden $\overline{x_{r+k}x_{r-k}}$ $(k = \pm 1, 2, \ldots)$. Wenn n eine gerade Zahl ist, so ist $x_{r+\frac{n}{2}}$ derselbe Punkt wie $x_{r-\frac{n}{2}}$, es ist dies offenbar der dem Punkte x_r in dem einfachen n-Ecke $x_1x_2 \ldots x_n$ gegenüberliegende Eckpunkt. Die Gerade $\overline{x_{r+\frac{n}{2}}x_{r-\frac{n}{2}}}$, d. h. die Tangente im Punkte $x_{r+\frac{n}{2}}$ wird somit durch ξ_r hindurchgehen, so dass je zwei Gegenecken des n-Ecks $x_1x_2 \ldots x_n$ (n gerade) denselben Tangentialpunkt besitzen; aus diesen $\frac{n}{2}$ Punkten wird die Gruppe in sich selbst übergeführt. Ferner schneiden sich die Geraden $\overline{x_rx_{r+1}}, \overline{x_{r-1}x_{r+2}}, \ldots \overline{x_{r-k}x_{r+1+k}} \ldots$ in einem und demselben Punkte; die letzte in der Reihe dieser Geraden (deren Zahl $\frac{n}{2}$ sein muss) ist offenbar die Gegenseite zur Seite $\overline{x_rx_{r+1}}$. Wir haben $\frac{n}{2}$ Gegenseitenpaare, welche C_3 in $\frac{n}{2}$ Punkten durchschneiden, aus denen die Gruppe $x_1x_2 \ldots x_n$ offenbar ebenfalls in sich selbst überführt wird.

Ist n ungerade, so gehen durch jeden der n-Tangentialpunkte ξ_r im Ganzen $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ Strahlen; nämlich die Tangente von x_r und die $\frac{n-1}{2}$ Geraden

$$\overline{x_{r-1}x_{r+1}}, \overline{x_{r-2}x_{r+2}}, \ldots \overline{x_{r-\frac{n-1}{2}}x_{r+\frac{n-1}{2}}}.$$

„Wenn n ungerade ist, so besitzen die n-Punkte einer jeden Gruppe $x_1x_2 \ldots x_n$ n von einander verschiedene Tangentialpunkte $\xi_1\xi_2 \ldots \xi_n$, welche die mit der doppelt gezählten Gruppe $x_1x_2 \ldots x_n$ connexe

Gruppe derselben cyclischen Beziehung darstellt. Durch jeden der Tangentialpunkte laufen die $\frac{n-1}{2}$ Verbindungslinien der vom Berührungspunkte gleich weit abstehenden Ecken des n-Eckes $x_1 x_2 \ldots x_n$."

„Ist n eine gerade Zahl, so haben je zwei Gegenecken des n-Eckes $x_1 x_2 \ldots x_n$ gemeinschaftlichen Tangentialpunkt, durch welchen auch die $\frac{n-2}{2}$ Verbindungslinien der von jeder der Gegenecken gleich weit abstehenden Ecken hindurchgehen. Je zwei Gegenseiten des n-Eckes schneiden sich in einem Punkte von C_3, durch welchen noch $\frac{n-4}{2}$ Verbindungslinien von Eckenpaaren hindurchgehen. Die $\frac{n}{2}$ Tangentialpunkte und die $\frac{n}{2}$ Schnittpunkte der Gegenseitenpaare bilden zusammen die n-Punkte der mit der doppelt gezählten Gruppe $x_1 x_2 \ldots x_n$ connexen Gruppe derselben cyclischen Beziehung."

„Je nachdem n ungerade oder gerade ist, gruppiren sich die n-Punkte einer jeden Gruppe in n-Arten zu $\frac{n-1}{2}$ Paaren, welche einer centralen Beziehung angehören, in welcher ein Punkt der Gruppe als ein sich selbst entsprechender auftritt; sein Tangentialpunkt ist das Centrum der Beziehung; oder aber (für n gerade) die n-Punkte gruppirten sich in $\frac{n}{2}$ Arten zu $\frac{n}{2}$ Paaren einer Centralbeziehung, deren Centra die $\frac{n}{2}$ dritten Schnittpunkte von C_3 mit den Seiten des Polygons $x_1 x_2 \ldots x_n$ sind, und ferner in $\frac{n}{2}$ Arten zu $\frac{n-2}{2}$ Paaren einer Centralbeziehung, für welche die $\frac{n}{2}$ Tangentialpunkte der Gegenseitenpaare des Polygons $x_1 x_2 \ldots x_n$ die Centra sind."

21. Wenn auf C_3 eine cyclische Beziehung mit n-elementigen Gruppen vorkommt, so sind dadurch noch andere cyclische Beziehungen mit ebensoviel elementigen oder weniger elementigen Gruppen gegeben, je nachdem n eine Primzahl ist oder nicht. Da nämlich in den Gruppen $x_1x_2 \ldots x_k \ldots x_{k-\lambda} \ldots x_n$ jeder Punkt mit dem vorhergehenden und dem nachfolgenden in eindeutiger Beziehung ist, so ist allgemein auch x_k mit $x_{k+\lambda}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots$) in eindeutiger und offenbar auch cyclischer Beziehung. Für $\lambda = 1$ erhält man die gegebene Beziehung; ist λ von 1 verschieden und entwickelt man die Reihe $x_k x_{k+\lambda} x_{k+2\lambda} x_{k+3\lambda} \ldots x_{k+s\lambda}$, so muss man immer wieder zu dem Punkte x_k zurückkehren. Für n prim wird es bei $\sigma = n$ eintreten, weil $x_{k+n\lambda}$ identisch ist mit x_k. Enthält n einen Factor γ, so wird man für $\lambda = \frac{n}{\gamma}$, $\sigma = \gamma$ die γ-elementige geschlossene Gruppe $x_k, x_{k+\frac{n}{\gamma}}, \ldots x_{k+\frac{(\gamma-1)n}{\gamma}}$ erhalten, da $x_{k+\frac{\gamma n}{\gamma}}$ mit x_k identisch ist.

Jedem in n enthaltenen Factor γ entspricht in dieser Art eine in der gegebenen n-elementigen cyclischen Beziehung enthaltene γ-elementige cyclische Beziehung.

Wenn n eine gerade Zahl ist, so ist $\gamma = 2$ und $x_k x_{k+\frac{n}{2}}$ sind zwei Gegenecken des einfachen n-Eckes $x_1x_2 \ldots x_n$; dieselben bilden Gruppen (Paare) einer zweielementigen cyclischen Beziehung. Die zweielementigen cyclischen Beziehungen sind aber offenbar die vertauschungsfähigen nicht centralen (fundamentalen) Beziehungen auf C_3, welche aus den Paaren correspondirender Punkte der drei Systeme F_1E, F_2E, F_3E bestehen.

Wir haben also den Satz:

„Wenn die Gruppen einer cyclischen Beziehung auf C_3 eine gerade Anzahl von Punkten enthalten, so bilden sie einfache Polygone, deren Gegeneckenpaare Paare correspondirender Punkte desselben Systems sind.“

22. „Ist auf C_3 eine cyclische Beziehung mit n-punktigen Gruppen, so kann man die n-Punkte einer beliebigen Gruppe $x_1x_2x_3 \ldots x_n$ als die paaren und die n-Punkte einer beliebigen Gruppe $y_1y_2y_3 \ldots y_n$ als die unpaaren Ecken eines Steiner'schen $2n$-Eckes

betrachten, für welches die Hauptpunkte zwei Punkte der zu den zwei Gruppen connexen Gruppe derselben cyclischen Beziehung sind."

Wir bezeichnen irgend einen der Punkte y mit 1, verbinden ihn mit irgend einem der Punkte x, der 2 heissen soll; $\bar{1}\bar{2}$ schneidet C_3 in o, und wenn wir irgend einen andern der Punkte y mit 3 bezeichnen, so möge $\bar{2}\bar{3}$ die Curve in o' schneiden. Die Punkte o, o' sind nach Art. 19 zwei Punkte der Gruppe, welche mit den Gruppen $(x), (y)$ connex ist. Die Gerade $o3$ muss C_3 in einem der Punkte x schneiden, welcher offenbar von 2 verschieden ist, er heisse 4, die Gerade $o'4$ muss nun wieder durch einen von dem früheren verschiedenen Punkt y gehen, er heisse 5, $o5$ schneidet C_3 in einem x-Punkte, er heisse 6 u. s. w. Man sieht, dass die Punkte y, x abwechselnd als die Ecken $1234\ldots.2n$ eines $2n$-Eckes auftreten, dessen Seiten durch die zwei Punkte o, o' abwechselnd hindurchgehen. (Vergl. Küpper l. c.)

23. Wie schon erwähnt, sind die drei Systeme conjugirter Punkte der C_3 die einzigen drei cyclischen Beziehungen mit zweielementigen Gruppen.

Es sei nun E eine cyclische Beziehung mit dreielementigen Gruppen; da lässt sich in bekannter Weise zeigen, dass ihre Tripel die Inflexionstripel von C_3 sind, d. h. die Punktetripel, die man erhält, wenn man die in gerader Linie liegenden Inflexionspunkte der C_3 aus Punkten der Curve auf dieselbe projicirt. Wir geben den folgenden Beweis. In Art. 12 haben wir gesehen, dass die beiden einem Inflexionspunkte entsprechenden Punkte mit ihm in gerader Linie liegen müssen. Man erkennt nun leicht, dass auch umgekehrt jeder Punkt (xy'), der mit seinen entsprechenden x', y in gerader Linie liegt, ein Inflexionspunkt sein muss; denn es müssen sich $\overline{xy'}$ und $\overline{x'y}$ auf C_3 schneiden; nun ist xy' die Tangente in x und $x'y$ geht nach Voraussetzung durch x hindurch, so dass also x sein eigener Tangentialpunkt, also ein Inflexionspunkt ist. Ist nun auf C_3 eine dreielementige cyclische Projectivität und ist in dem Tripel $x_1x_2x_3$ der Punkt x_1 ein Inflexionspunkt, so muss, weil dem x_1 die Punkte x_2, x_3 respective entsprechen $x_1x_2x_3$ in gerader Linie liegen. Weil jedoch dem x_2 die Punkte x_3 respective x_1 und dem Punkte x_3 die Punkte x_1 respective x_2 entsprechen und da also $x_1x_2x_3$ in gerader Linie

liegen, so ist auch x_2 und x_3 ein Inflexionspunkt. Wenn nun y_1 einer der übrigen sechs Inflexionspunkte ist und ihm y_2, diesem dann y_3 entspricht, so müssen auch $y_1y_2y_3$ in einer Geraden liegende Inflexionspunkte sein. Ist endlich z_1 einer der drei letzten Inflexionspunkte und z_2, z_3 die ihm entsprechenden Punkte, so sind auch $z_1z_2z_3$ in gerader Linie liegende Inflexionspunkte.

Da die Punkte y und z von einander und von x verschieden sind, so sind die Geraden $\overline{x_1x_2x_3}$, $\overline{y_1y_2y_3}$, $\overline{z_1z_2z_3}$ drei von einander verschiedene Gerade; offenbar die Seiten eines Wendedreiseits der C_3. Die sämmtlichen Tripel unserer cyclischen Beziehung erhalten wir, wenn wir jedes der Tripel (x), (y), (z) aus den Punkten von C_3 auf die Curve projiciren.

„Den vier Geraden, welche durch einen der Inflexionspunkte hindurchgehen und die anderen paarweise enthalten, oder also den vier Wendedreiseiten entsprechen die vier auf C_3 auftretenden cyclischen Beziehungen mit dreipunktigen Gruppen; die vier Systeme von Inflexions-Tripeln“.

Zur Theorie des Lamont'schen Variations-Apparates für Horizontal-Intensität.

Von J. Liznar.

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. April 1883.)

Lamont hat bekanntlich zur Messung der Variationen der Horizontal-Intensität die Änderung in der Lage eines durch zwei Magnete um einen gewissen Winkel v vom magnetischen Meridian abgelenkten Magnetstabes verwendet. In der von ihm für diesen Apparat gegebenen Theorie nimmt er auf die Änderung des magnetischen Momentes der beiden Ablenkungsmagnete, sowie auf die Distanzänderungen derselben durch die Temperatur-Variationen keine Rücksicht,[1] indem er den ersteren Einfluss durch Anwendung der sogenannten „compensirten Magnete," den letzteren aber dadurch unschädlich zu machen glaubte, dass er die Schiene, auf welcher die Ablenkungsmagnete angebracht werden, aus gut getrocknetem und gefirnisstem Holze wählte.

Ich will im Folgenden darlegen, dass diese Mittel, besonders was die compensirten Magnete anbelangt, durchaus nicht hinreichend sind, um die in Folge der Temperaturänderungen eintretenden Variationen im magnetischen Moment der Ablenkungsstäbe und die hiedurch veränderte Skalenlesung zu beseitigen. Der Temperatureinfluss wird um so grösser sein, wenn man statt einer Holzschiene eine Messingschiene wählen würde und trotzdem die Lamont'sche Formel zur Reduction der Angaben dieses Instrumentes verwenden wollte.[2]

---

[1] Lamont gibt übrigens eine Gleichung an, in welcher diese berücksichtigt wird. Annalen für Meteorologie Bd. I, pag. 168, doch sind die dabei gemachten Voraussetzungen unzulässig.

[2] Dr. Edelmann in München hat an den Apparaten der Polarstationen zur Ablenkungschiene Glasrohre genommen.

Die beiden Ablenkungsmagnete sind beiderseits des abgelenkten Magnets auf der Schiene so befestigt, dass sie mit ihrer Verlängerung auf der magnetischen Axe desselben senkrecht stehen; für die Gleichgewichtslage gilt also die Gleichung:

$$H \sin v = M'_o f(e'_o)[1-(\alpha'+3\nu)t] + M''_o f(e''_o)[1-(\alpha''+3\nu)t] \quad 1)$$

wenn

$$f(e'_o) = 2[1 + \frac{p'}{e'^2_o} + \frac{q'}{e'^4_o} + \ldots] \frac{1}{e'^3_o}$$

$$f(e''_o) = 2[1 + \frac{p''}{e''^2_o} + \frac{q''}{e''^4_o} + \ldots] \frac{1}{e''^3_o}$$

gesetzt wird.

Die in Folge der Temperatur-Variationen eintretenden Änderungen lassen sich am leichtesten in Rechnung bringen, wenn man die Wirkung der beiden Ablenkungsmagnete gleich macht, so dass

$$M'_0 f(e'_0)[1-(\alpha'+3\nu)t] = M''_0 f(e''_0)[1-(\alpha''+3\nu)t] \quad 2)$$

Lamont fordert übrigens diese Bedingung auch aus dem Grunde, damit die Änderung in der Lage der Nadel ohne Einfluss auf die Ablenkung bleibt. (Handbuch des Erdmagnetismus pag. 210.)

Differentiirt man Gleichung 1) nach r und e, so wird

$$H \cos v \, dv = M'_0 f'(e'_0)[1-(\alpha'+3\nu)t]de' + M''_0 f'(e''_0)[1-(\alpha''+3\nu)t]de''.$$

Ändert man die Distanz e' und e'' um den gleichen Betrag de aber in entgegengesetztem Sinne, indem man die Schiene sammt den daran befindlichen Magneten in ihrer Längsrichtung verschiebt, so ist

$$de' = de, \quad de'' = -de$$

zu setzen, und man hat

$$H \cos v \frac{dv}{de} = M'_0 f'(e'_0)[1-(\alpha'+3\nu)t] - M''_0 f'(e''_0)[1-(\alpha''+3\nu)t].$$

Setzt man

$$M'_0 f'(e'_0)[1-(\alpha'+3\nu)t - M''_0 f(e''_0)[1-\alpha''+3\nu)t] = 0,$$

so folgt durch Multiplication mit de und nachherige Integration

$$M'_0 f(e'_0)[1-(\alpha'+3\nu)t] - M''_0 f(e''_0)[1-(\alpha''+3\nu)t]$$

die oben unter 2) aufgestellte Bedingung; es muss also für diesen Fall

$$\frac{dv}{de} = 0 \text{ oder}$$

r ein Minimum sein. Dieses wird erreicht sein, wenn die an der Scala bei fortwährender Verschiebung der Schiene abgelesene Zahl am kleinsten, respective am grössten ausfällt (am kleinsten, wenn mit wachsendem v die Lesungen grösser werden und am grössten, wenn der umgekehrte Fall eintritt).

Aus Gleichung 2) folgt nun

$$\frac{f(e'_0)}{f(e''_0)} = \frac{M''_0}{M'_0}[1-(\alpha''-\alpha')t] \qquad 3)$$

und da

$$\frac{f(e'_0)}{f(e''_0)} = C$$

eine Constante ist, so müsste auch der rechte Theil der Gleichung für alle Temperaturen gleich sein; da aber der Factor

$$[1-(\alpha''-\alpha')t]$$

für verschiedene Temperaturen verschiedene Werthe annimmt, so kann dies nur eintreten, wenn

$$\alpha'' = \alpha' \text{ oder aber}$$
$$\alpha'' = \alpha' = 0 \text{ ist,}$$

d. h. es müssen die Ablenkungsmagnete so gewählt werden, dass ihre Temperatur-Coëfficienten gleich sind, oder die Magnete müssen „compensirt" sein. Den letzteren Fall glaubte Lamont bei der Ableitung der Reductionsformeln annehmen zu dürfen, da er „compensirte Magnete" als Ablenkungsstäbe angewendet hat. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass seine sogenannten „compensirten Magnete" nicht compensirt bleiben.

In seinem Handbuch des Erdmagnetismus pag. 132 sagt Lamont über diese Compensation Folgendes:

„An dem zu compensirenden Magnet *NS* schraube man einen kürzeren Magnet *ns* an, so dass die Pole die entgegengesetzte Richtung haben; zwischen beide legt man ein Stückchen Messing, um die unmittelbare Berührung zu verhindern. Es sei das magnetische Moment $NS = M$, und der Temperatur-Coëfficient $= \alpha$; für *ns* nehmen wir die analogen Bezeichnugen M' und α'.

Das Moment des zusammengesetzten Magnetes wird demnach:

$$= M(1-\alpha t) - M'(1-\alpha' t)$$

oder

$$= M - M' - (\alpha M - \alpha' M')t$$

sein. Wählt man nun die Magnete so, dass $\alpha M - \alpha' M' = 0$ ist, so wird das Moment des zusammengesetzten Magnetes $= M - M$ und mithin von Temperaturänderungen unabhängig sein.“

Aus der Gleichung

$$\alpha' M' = \alpha M$$

folgt aber

$$\frac{M}{M'} = \frac{\alpha'}{\alpha}$$

und da $\frac{\alpha'}{\alpha}$ eine nur von der molecularen Beschaffenheit des Stahls, aus dem die beiden Magnete verfertigt sind, abhängige Constante vorstellt, so müsste, wenn die Compensation auf diesem Wege möglich sein sollte, auch

$$\frac{M}{M'}$$

constant bleiben; es müsste also dieses Verhältniss, das bei der Compensirung einen gewissen Werth besass, diesen immer beibehalten. Es ist gewiss kein Grund zu der Voraussetzung vorhanden, dass die magnetischen Momente der beiden Magnete sich im selben Verhältnisse ändern sollten; ja es ist viel wahrscheinlicher, dass sich die Momente verschieden ändern werden, da die beiden Magnete ungleich stark sind und sehr nahe aneinander liegen.

Hiemit glaube ich gezeigt zu haben, dass die Compensation eines Magnetes wegen der Temperatur in der von Lamont angegebenen Weise wohl nicht zu erreichen ist.

Es bleibt noch der zweite Fall zu betrachten, wo die Ablenkungsmagnete so gewählt worden sind, dass

$$\alpha' = \alpha''$$

ist, dann folgt aus 2)

$$M'_0 f(e'_0) = M''_0 f(e''_0)$$

und Gleichung 2) kann mit Berücksichtigung der letzten Relation geschrieben werden:

$$H \sin v = 2M'_0 f(e'_0)[1-(\alpha'+3\nu)t]. \qquad 4$$

Diese nach den Variablen H, v, u, t differentirt, gibt:

$$\sin v\, dH + H \cos v\, dv = -K(\alpha'+3\nu)\, dt,$$

wenn man der Kürze halber $2M'_0 f(e'_0) = K$ setzt. Wird die letzte Gleichung durch 4) dividirt, so folgt:

$$\frac{dH}{H} = -\cot v\, dv - \frac{\alpha'+3\nu}{1-(\alpha'+3\nu)t}\, dt$$

oder

$$\frac{dH}{H} = -\cot v\, dv - (\alpha'+3\nu)\, dt, \qquad 5)$$

wenn man in dem von der Temperatur abhängigen Gliede die Grösse $(\alpha'+3\nu)^2 t$ als klein gegen $\alpha'+3\nu$ vernachlässigt.

Die Bedingung, dass die Magnete gleiche Temperatur-Coëfficienten besitzen, lässt sich practisch schwer erfüllen; man müsste aus einer grossen Anzahl von Magneten, deren Temperatur-Coëfficienten bestimmt worden sind, diejenigen auswählen, die nahezu denselben Temperatur-Coëfficienten besitzen. Abgesehen von der Mühe, welche die Bestimmung von einer grösseren Anzahl von Temperatur-Coëfficienten verursacht, wäre es auch für den Verfertiger solcher Apparate höchst unangenehm, eine grosse Anzahl von Magneten herstellen zu müssen, von denen doch nur zwei derselben gebraucht werden können.

Die Temperatur-Variationen lassen sich aber ohne diese Voraussetzung berücksichtigen, wenn man die Gleichung 2) für

die Temperatur von 0° erfüllt, so dass

$$M_0' f(e_0') = M_0'' f(e_0''). \qquad 6)$$

Dann wird Gleichung 1) lauten:

$$H \sin v = M_0' f(e_0') \{1 - (\alpha' + 3\nu) t + 1 - (\alpha' + 3\nu) t\},$$

$$H \sin v = 2 M_0' f(e_0') \left[1 - \left(\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha''}{2} + 3\nu\right) t\right]. \qquad 7)$$

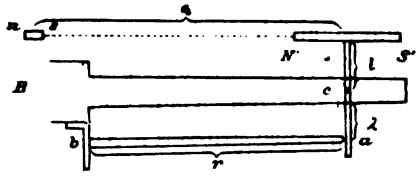
woraus wieder, wie im Vorhergehenden, die Schlussgleichung

$$\frac{dH}{H} = -\cot v \, dv - \left(\frac{\alpha'}{2} + \frac{\alpha''}{2} + 3\nu\right) dt \qquad 8)$$

abgeleitet werden kann.

Die in Gleichung 6) enthaltene Bedingung kann leicht dadurch erfüllt werden, dass man die beiden Ablenkungsmagnete in schmelzenden Schnee gibt und das Minimum des Ablenkungswinkels v sucht.

Die Anbringung dieser Temperatur-Correction bleibt aber immer eine missliche Sache, daher es immer besser ist, den Einfluss derselben ganz zu eliminiren, was wohl möglich ist, wenn man die sogenannte „Metallcompensation", die Lamont in seinem Handbuch des Magnetismus pag. 403 anführt, benützt. Diese ist, so viel mir bekannt, nur bei den in München aufgestellten selbstregistrirenden Variations-Apparaten von Lamont angewendet worden. Besteht die Ablenkungsschiene aus Holz, das gut getrocknet und gefirnisst worden ist, so kann die Ausdehnung desselben durch die Temperatur vernachlässigt werden.



Bringt man unter die Schiene AB einen Zinkstab ab an, und ist der Ablenkungsmagnet $N'S'$ um einen Punkt c drehbar, und zwar an einem Glasstäbchen (dasselbe gilt vom zweiten $N''S''$), so wird bei der Temperatur t die Distanz e_0' vermindert werden und zwar, da

$$r_t = r_0 + r_0 \gamma t$$

wird

$$e_t = e_0 - r_0 \gamma e_{t_0} \frac{l}{\lambda} = e_0 \left(1 - \gamma \frac{r_0}{e_0} \frac{l}{\lambda} t\right),$$

wenn γ den Ausdehnungs-Coëfficienten des Zinks, r, l und λ aber die in der Figur angedeutete Bedeutung haben.

Folglich:

$$e_0^3 \left(1 - 3\gamma \frac{r_0}{e_0} \frac{l}{\lambda} t\right).$$

Setzt man diese Werthe in Gleichung 1) ein, so wird

$$H \sin v = 2M_0' f(e_0') \left[1 - \left(\alpha' - 3\gamma \frac{r_0'}{e_0'} \frac{l'}{\lambda'}\right) t\right] + \qquad 9)$$

$$+ 2M_0'' f(e_0'') \left[1 - \left(\alpha'' - 3\gamma \frac{r_0''}{e_0''} \frac{l''}{\lambda''}\right) t\right]$$

und der Einfluss der Temperatur verschwindet, wenn

$$\alpha' = 3\gamma \frac{r_0'}{e_0'} \frac{l'}{\lambda'} \text{ und } \alpha'' = 3\gamma \frac{r_0''}{e_0''} \frac{l''}{\lambda''}$$

gemacht wird. Die Wahl des Holzes zur Ablenkungsschiene hat aber den Nachtheil, dass dieses, als stark hygroscopische Substanz, veränderlich ist und zwar, wie die Erfahrung lehrt, trotz des Firnissüberzuges. Es ist aber kein Grund vorhanden, warum man die Schiene nicht ebenso gut aus Messing wählen könnte. In diesem Falle ist die Distanz e bei $t°$:

$$e_0 - r_0 \gamma \frac{l}{\lambda} t + R_0 \beta t$$

wenn β der Ausdehnungs-Coëfficient des Messings und R_0 die Länge der Schiene bis zum Drehungspunkte c bedeutet. Daraus folgt:

$$e_0 \left(1 - \gamma \frac{r_0}{e_0} \frac{l}{\lambda} t + \beta \frac{R^0}{e_0} t\right)$$

oder

$$e_0^3 \left(1 - 3\gamma \frac{r_0}{e_0} \frac{l}{\lambda} t + 3\beta \frac{R_0}{e_0} t\right)$$

und die Temperatur hat keinen Einfluss, wenn

$$\alpha' = 3\gamma \frac{r_0'}{e_0'} \frac{l'}{\lambda'} - 3\beta \frac{r_0'}{R_0'}$$

$$\alpha'' = 3\gamma \frac{r_0''}{e_0''} \frac{l''}{\lambda''} - 3\beta \frac{r_0''}{R_0''}.$$

Diese Bedingungen lassen sich ziemlich leicht erfüllen, wenn man λ veränderlich macht. Man hat dann blos den Raum, in welchem sich der Apparat befindet, auf verschiedene Temperaturen zu bringen und nachzusehen, ob die Angaben desselben, unter Berücksichtigung der inzwischen eingetretenen Declinations- und Intensitäts-Änderungen, durch die Temperatur-Änderung beeinflusst werden. (Es muss selbstverständlich jeder Magnet für sich untersucht werden.) Sollte dies der Fall sein, so wird der Zinkstab gehoben oder gesenkt, wodurch eben λ geändert werden kann, bis sich keine Stand-Änderung zeigt.

Hiebei muss ferner dafür Sorge getragen werden, dass die Ablenkungsmagnete stets die horizontale Lage beibehalten.

Ist die Compensation in der angegebenen Weise gelungen, dann gibt Gleichung 9):

$$\frac{dH}{H} = -\cot v \, dv,$$

die nach Lamont's Vorschrift zu benutzen ist. Wird auf den Einfluss der Temperatur, wie hier erörtert wurde, keine Rücksicht genommen, so werden die reducirten Daten eines solchen Variations-Apparates mit jenem des Bifilars nie übereinstimmen, wie es sich z. B. bei dem Lamont'schen Apparate der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus gezeigt hat.[1]

Ich glaubte dies hervorheben zu sollen, weil einige der Polarstationen, die jetzt im hohen Norden ein werthvolles Beobachtungsmaterial sammeln, mit diesen Instrumenten ausgerüstet sind und die beste Gelegenheit haben werden, das Gesagte zu erproben.

---

[1] Jahrbücher der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Jahrgang 1880.

Um den raschen Fortschritten der medicinischen Wissenschaften und dem grossen ärztlichen Lese-Publicum Rechnung zu tragen, hat die mathem.-naturwissenschaftliche Classe der kais. Akademie der Wissenschaften beschlossen, vom Jahrgange 1872 an die in ihren Sitzungsberichten veröffentlichten Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin in eine besondere Abtheilung zu vereinigen und in den Buchhandel zu bringen.

Die Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe erscheinen daher vom Jahre 1872 (Band LXV) an in folgenden **drei** gesonderten **Abtheilungen**, welche auch einzeln bezogen werden können:

I. Abtheilung: Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mineralogie, Botanik, Zoologie, Geologie und Paläontologie.

II. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

III. Abtheilung: Die Abhandlungen aus dem Gebiete der Physiologie, Anatomie und theoretischen Medicin.

Dem Berichte über jede Sitzung geht eine Übersicht aller in derselben vorgelegten Abhandlungen und das Verzeichniss der eingelangten Druckschriften voran.

Von jenen in den Sitzungsberichten enthaltenen Abhandlungen, zu deren Titel im Inhaltsverzeichniss ein Preis beigesetzt ist, kommen Separatabdrücke in den Buchhandel und können durch die akademische Buchhandlung Karl Gerold's Sohn (Wien, Postgasse 6) zu dem angegebenen Preise bezogen werden.

Die dem Gebiete der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften angehörigen Abhandlungen werden vom Jahre 1880 an noch in besonderen Heften unter dem Titel: „Monatshefte für Chemie und verwandte Theile anderer Wissenschaften" herausgegeben. Der Pränumerationspreis für einen Jahrgang dieser Monatshefte beträgt 5 fl. oder 10 Mark.

Der akademische Anzeiger, welcher nur Original-Auszüge oder, wo diese fehlen, die Titel der vorgelegten Abhandlungen enthält, wird, wie bisher, 8 Tage nach jeder Sitzung ausgegeben. Der Preis des Jahrganges ist 1 fl. 50 kr.

SITZUNGSBERICHTE

DER KAISERLICHEN

AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVII. BAND. V. HEFT.

Jahrgang 1883. — Mai.

(Mit 1 Tafel und 2 Holzschnitten.)

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

WIEN.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI KARL GEROLD'S SOHN

BUCHHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

1883.

INHALT

des 5. Heftes Mai 1883 des LXXXVII. Bandes II. Abtheilung der Sitzungsberichte der mathem.-naturw. Classe.

Seite

XI. Sitzung vom 4. Mai 1883: Übersicht 883

Maly u. *Andreasch*, Studien über Caffeïn und Theobromin. V. Abhandlung. [Preis: 20 kr. = 40 Pfg.] 888

Reibenschuh, Über das Methylbiguanid und seine Verbindungen 907

Emich, Über Äthylbiguanid und dessen Verbindungen. (Mit 1 Holzschnitt) 914

— Beiträge zur Kenntniss des Biguanid 928

Biermann, Zur Theorie der zu einer binomischen Irrationalität gehörigen Abel'schen Integrale. [Preis: 45 kr. = 90 Pfg.] 934

Gerst, Methode zur Bahnbestimmung aus drei vollständigen Beobachtungen. [Preis 30 kr. = 60 Pfg.] 993

XII. Sitzung vom 10. Mai 1883: Übersicht 1028

Oppenheim, Über eine neue Integration der Differentialgleichungen der Planetenbewegung. (Mit 1 Holzschnitt.) [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] 1031

XIII. Sitzung vom 25. Mai 1883: Übersicht 1085

Skraup u. *Cobenzl*, Über α- und β-Naphtochinolin 1089

Kachler u. *Spitzer*, Bildungsweise der isomeren Bibromcampher 1133

Niederist, Über Reichenbach's Picamar 1140

Koláček, Über Schwingungen fester Körper in Flüssigkeiten. [Preis: 25 kr. = 50 Pfg.] 1147

Ameseder, Über Configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung, erster Species. [Preis: 40 kr. = 80 Pfg.] . . . 1179

Drasch, Axenbestimmung der Contouren von Flächen zweiter Ordnung. (Mit 1 Tafel.) [Preis: 30 kr. = 60 Pfg.] . . . 1226

Preis des ganzen Heftes: 2 fl. 50 kr. = 5 RMk.

SITZUNGSBERICHTE

DER

KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE CLASSE.

LXXXVII. Band. V. Heft.

ZWEITE ABTHEILUNG.

Enthält die Abhandlungen aus dem Gebiete der Mathematik, Physik, Chemie, Mechanik, Meteorologie und Astronomie.

XI. SITZUNG VOM 4. MAI 1883.

Herr Dr. A. B. Meyer, k. sächs. Hofrath und Director des zoologischen und anthropologisch-ethnographischen Museums in Dresden, übersendet ein Exemplar seines mit Unterstützung Sr. Majestät des Königs von Sachsen herausgegebenen illustrirten Werkes: „Die Hirschgeweih-Sammlung im königl. Schlosse zu Moritzburg bei Dresden“ und den zweiten Theil seines mit Unterstützung der Generaldirection der königl. sächs. Sammlungen für Kunst und Wissenschaft herausgegebenen illustrirten Werkes: „Jadeit- und Nephrit-Objecte. *B.* Asien, Oceanien und Afrika“

Herr P. F. Kupka, Ingenieur in Wien, übersendet das von ihm bearbeitete Druckwerk: „Die Verkehrsmittel in den Vereinigten Staaten von Nord-Amerika“.

Das w. M. Herr Prof. E. Hering übersendet eine Abhandlung des Herrn Dr. Wilh. Biedermann, Privatdocent und erster Assistent am physiologischen Institut der Universität in Prag: „Über die Erregbarkeit des Rückenmarkes.“

Das c. M. Herr Prof. Dr. Richard Maly in Graz übersendet die fünfte Abhandlung seiner in Gemeinschaft mit Herrn Rudolph Andreasch ausgeführten: „Untersuchungen über Caffeïn und Theobromin.“

Herr Prof. Maly übersendet ferner drei in seinem Laboratorium ausgeführte Untersuchungen:

1. „Über Methylbiguanid und dessen Verbindungen“, von Herrn Dr. Anton Reibenschuh;
2. „Über Äthylbiguanid und dessen Verbindungen“ und
3. „Beiträge zur Kenntniss des Biguanid's“, letztere beiden Arbeiten von Herrn Friedrich Emich.

Herr Prof. Dr. Eduard Tangl an der Universität in Czernowitz übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Zur Morphologie der Cyanophyceen".

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Zur Theorie der zu einer binomischen Irrationalität gehörigen Abel'schen Integrale", von Herrn Otto Biermann, Privatdocent an der Universität in Prag.
2. „Über Schwingungen fester Körper in Flüssigkeiten", von Herrn Dr. Franz Koláček, Privatdocent an der technischen Hochschule in Brünn.

Das w. M. Herr Regierungsrath Prof. Th. v. Oppolzer überreicht eine Abhandlung des Herrn J. Gerst, Assistent an der Sternwarte in Graz, betitelt: „Methode zur Bahnbestimmung aus drei vollständigen Beobachtungen".

Herr Regierungsrath v. Oppolzer überreicht ferner eine Abhandlung des Herrn Stefan Wolyncewicz: „Die Bahnbestimmung des Planeten (210) „Isabella".

Der Secretär überreicht eine Mittheilung: „Über die Verflüssigung des Stickstoffs und des Kohlenoxyds", von den Herren Professoren Dr. Sigm. v. Wroblewski und Dr. K. Olszewski an der Universität zu Krakau.

Das c. M. Herr Prof. M. Neumayr in Wien überreicht einen Aufsatz: „Über climatische Zonen während der Jura- und Kreidezeit."

Herr Prof. Dr. Ernst v. Fleischl in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Die Vertheilung der Sehnervenfasern über die Zapfen der menschlichen Netzhaut".

Herr J. F. Wolfbauer, Adjunct an der landwirthschaftlich-chemischen Versuchsstation in Wien, überreicht eine „Untersuchung des Wassers der Donau vor Wien", worin die chemische Zusammensetzung dieses Flusswassers im Jahre 1878 verfolgt wird.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique: Bulletin. 52e année, 3e série, tome 5. Nr. 2. Bruxelles, 1883; 8°.

Académie de Médecine: Bulletin. 47e année, 2e série, tome XII. Nos. 15—17. Paris, 1883; 8°.

Academy of Natural Sciences of Philadelphia: Proceedings. Parts I—III. Philadelphia, 1882; 8°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft. XIX, Nr. 5—6. Halle a. S., 1883; 4°.

Annales des Ponts et Chaussées: Mémoires et Documents. 3e année, 6e série, 3e cahier. Mars 1883. Paris; 8°.

Apotheker-Verein, allgem. österr.: Zeitschrift nebst Anzeigen-Blatt. XXI. Jahrgang. Nr. 12 u. 13. Wien, 1883; 8°.

Archiv für Mathematik und Physik. LXIX. Theil. 2. Heft. Leipzig, 1883; 8°.

Cantor, Georg D.: Grundlage einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen. Leipzig, 1883; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VI. Nr. 26—31. Cöthen, 1883; 4°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVI. Nos. 15 & 16. Paris, 1883; 4°.

Elektrotechnischer Verein: Elektrotechnische Zeitschrift. IV. Jahrgang, 1883. Heft IV. April. Berlin, 1883; 4°.

Genootschap, Bataviasch van Kunsten en Wetenschappen: Tijdschrift voor indische Taal-, Land-, en Volkenkunde. Deel XXVII, Aflevering 6. Batavia, s'Hage, 1882; 8°. Deel XXVIII, Aflevering 1. Batavia, s'Hage, 1882; 8_0.

— — Notulen van de Algemeene en Bestuurs vergaderingen. Deel XX Nrs. 1 & 2. Batavia, 1882; 8°.

Gesellschaft deutsche, chemische: Berichte. XVI. Jahrgang, Nr. 6. Berlin, 1883; 8°.

— k. k. geographische in Wien: Mittheilungen. Band XXVI. Nr. 3. Wien, 1883; 8°.

— der Wissenschaften, königliche zu Göttingen: Abhandlungen, XXIX. Band vom Jahre 1882. Göttingen, 1882; 4°.

— — Göttingische gelehrte Anzeigen. 1882. I. & II. Band. Göttingen, 1882; 8°.

— — Nachrichten aus dem Jahre 1882. Nr. 1—23, Göttingen, 1882; 8°.

Gesellschaft königl. bayer. botan. in Regensburg: Flora. N. R. XL. Jahrgang oder der ganzen ReiheLXV. Jahrgang. 1882. Regensburg, 8°.

— Oberlausitzische der Wissenschaften: Neues Lausitzisches Magazin. LVIII. Band. Görlitz, 1882; 8°.

Jahresbericht über die Fortschritte der Chemie und verwandter Theile anderer Wissenschaften. Für 1881. II. Heft. Giessen, 1882; 8°.

Journal, the American of Science. Vol. XXV, Nr. 148. April 1883. New Haven; 8°.

Königsberg, Universität: Akademische Schriften pro 1882. — 37 Stücke 4° & 8°.

Museum of comparative Zoology at Harvard College. Memoirs. Vol. VII. Nr. 2. Part. III. Cambridge, 1882; 4°. — Vol. IX. Nr. 1. Cambridge, 1882; 4°.

Nature. Vol. XXVII. Nrs. 703 & 704. London, 1883; 8°.

Repertorium der Physik. XIX. Band, 1.—4. Heft. München und Leipzig, 1883; 8°.

Société des Ingenieurs civils: Mémoires et compte rendu des travaux. 36ᵉ année, 4ᵉ série, 1ᵉʳ cahier. Janvier, 1883; 8°. — Annuaire de 1883. Paris, 1883; 8°.

— Impériale des Naturalistes de Moscou; Bulletin. Année 1882. Nr. 2. 1ʳᵉ & 2ᵉ livraisons. Moscou, 1882; 8°.

Society, the American philosophical: Proceedings. Vol. XIX. Nr. 109. June to December, 1881. Philadelphia, 1881; 8°.

— the royal astronomical: Monthly notices. Vol. XLIII. Nr. 5. March, 1883. London; 8°.

— the royal microscopical: Journal. Ser. II. Vol. III. Part. 2. April, 1883. London and Edinburgh; 8°.

Verein für Landeskunde von Niederösterreich: Topographie von Niederösterreich, II. Band, 10. & 11. Heft. Wien, 1882 & 1883; 4°.

— —: Blätter. N. F. XVI. Band. Nr. 1—12. Wien, 1882; 8°. — Register zu den Jahrgängen 1865—1880. Wien. 1882; 8°, — Festschrift zur 600jährigen Gedenkfeier der Belehnung des Hauses Habsburg mit Oesterreich. Wien. 1882; 8°.

Verein, naturhistorischer der preussischen Rheinlande und Westphalens: Verhandlungen. XXXIX. Jahrgang. IV. Folge. IX. Jahrgang. I. Hälfte. Bonn, 1882; 8°. — Die Käfer Westphalens, zusammengestellt von Fr. Westhoff. II. Abtheilung. Bonn. 1882; 8°.

Wissenschaftlicher Club in Wien: Monatsblätter. IV. Jahrg., Nr. 7. Ausserordentliche Beilage Nr. V. Wien, 1883; 8°.

Woldřich, Joh. Nep.: Beiträge zur Fauna der Breccien und anderer Diluvialgebilde Österreichs. mit besonderer Berücksichtigung des Pferdes. Wien, 1883; 4°.

Zoologische Station zu Neapel, zugleich ein Repertorium für Mittelmeerkunde. IV. Band. 1. & 2. Heft. Leipzig, 1883; 8°.

Studien über Caffeïn und Theobromin.

Von **Rich. Maly** und **Rud. Andreasch** in Graz.

(V. Abhandlung.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1883.)

Einwirkung verdünnter Alkalien auf das Caffeïn; Caffeïdincarbonsäure.

Die Einwirkung von Alkalien auf Caffeïn ist noch nicht systematisch untersucht worden; das was man bisher dabei erhalten hat, sind Zersetzungsproducte, die secundären Reactionen angehören. So hat Wurtz[1] 1850 gezeigt, dass sich aus Caffeïn beim Destilliren mit Kali direct Methylamin bildet, welches ein Jahr früher Rochleder gelegentlich der Chloreinwirkung aus Caffeïn erhalten hatte.

Mulder[2] behandelte mit Barytwasser und gab an, dass sich das Caffeïn beim Erwärmen damit in Alkohol, Cyansäure und ameisensaures Ammon spalten sollte, wobei die Cyansäure weiter in Kohlensäure und Ammoniak zerfalle. Diese Angaben wurden von A. Strecker[3] als irrig erkannt, welcher die Baryteinwirkung besser untersuchte und dabei eine neue Base, das Caffeïdin, entdeckte, für dass er die Bildungsgleichung:

$$\underset{\text{Caffeïn}}{C_8H_{10}N_4O_2} + H_2O = \underset{\text{Caffeïdin}}{C_7H_{12}N_4O} + CO_2$$

---

[1] Compt. rend. **30**, 9. Durch Canstatt's Jahresbericht über die Fortschritte in der Pharm. Band **10**, 106.

[2] Annal. Chem. Pharm. **28**, 321.

[3] Annal. Chem. Pharm. **123**, 360.

aufstellte. Dabei entstanden jedoch beträchtliche Mengen von Nebenproducten, es entwichen Ammoniak und Methylamin und in der Mutterlauge des als Sulfat abgeschiedenen Caffeïdins blieben noch andere nicht näher untersuchte Substanzen zurück. Unter diesen fand O. Schultzen[1], wenn das Kochen mit Barytwasser sehr lange Zeit (60 Stunden) fortgesetzt worden war, Ameisensäure und einen Körper $C_3H_7NO_2$.

Letztere Substanz erkannten dann Rosengarten und Strecker[2] als Sarkosin und sie bestätigten die schon von Schultzen für die vollständige Zersetzung des Caffeïns unter der andauernden Barytwirkung gegebene Gleichung:

$$C_8H_{10}N_4O_2 + 6H_2O = 2CO_2 + 2CH_5N + NH_3 + CH_2O_2 + C_3H_7NO_2,$$

welche allerdings nicht durch quantitative Bestimmungen erhärtet ist.

So viel ist bisher über die Einwirkung starker Basen auf Caffeïn bekannt, aber wer einmal die Darstellung von Caffeïdin nach Strecker oder Schultzen versucht, wird über die höchst geringe Ausbeute daran sehr unbefriedigt sein und erkennen, dass schon von Anfang an bei der Einwirkung des kochenden Barytwassers alle die zuletzt genannten Zerfallproducte auftreten.

Es ist uns bei Neuaufnahme der Untersuchung durch besonderes Masshalten in der Einwirkung der Alkalien und vornehmlich der Temperatur gelungen, die störende Bildung von Zersetzungsproducten zu vermeiden. Dabei hat sich ferner ergeben, dass auch das Caffeïdin ein secundäres Product ist, dass vielmehr das Caffeïn bei gelinder Einwirkung der Alkalien zunächst fast vollständig unter Aufnahme von einem Molekül Wasser in eine neue Säure:

$$\underset{\text{Caffeïn}}{C_8H_{10}N_4O_2} + H_2O = \underset{\text{Neue Säure}}{C_8H_{12}N_4O_3}$$

übergeht, welche dann erst für sich beim Kochen mit Wasser glatt in Caffeïdin und Kohlensäure nach der Gleichung:

$$C_8H_{12}N_4O_3 = C_7H_{12}N_4O + CO_2$$

---

[1] Zeitschr. f. Chemie N. f. **3**, 614, 1867.

[2] Annal. Chem. Pharm. **157**, 1.

zerfällt, und die wir daher Caffeïdincarbonsäure nennen wollen.

Man kann auf sehr einfache Art die Bildung einer Säure aus dem Caffeïn constatiren, denn die Säure ist so stark, dass ihre Alkalisalze neutral reagiren. Übergiesst man Caffeïn mit verdünnter Kali- oder Natronlauge und lässt in verschlossener Flasche bei gewöhnlicher Temperatur stehen, wobei man sich auch überzeugen kann, dass kein Sauerstoff absorbirt wird, so sieht man das für sich sehr schwer lösliche Caffeïn völlig oder bis auf ein paar stärkere Nadeln binnen mehreren Tagen verschwinden, und nun reicht ein geringer Säurezusatz aus, die neutrale Reaction herzustellen, während der grösste Theil des Alkali gebunden erscheint.

Beispielsweise sei folgender Titrirversuch angeführt:

15 Grm. krystallisirtes Caffeïn (Mol. = 212) wurden mit einer kalten Lösung von einem Äquivalent Kalihydrat (3·96 Grm.) 14 Tage bei Zimmertemperatur stehen gelassen, wonach fast alles Caffeïn verschwunden war. Die Flüssigkeit reagirt noch alkalisch, wird aber auf Zusatz von 0·559 Grm. Schwefelsäure, welche 0·67 Grm. KOH äquivalent sind, neutral. Daher ist so viel Säure entstanden, als zum Neutralisiren von 3·96 minus 0·67 Grm. = 3·29 Grm. KOH nothwendig sind, oder 82·8% des Caffeïns sind in eine einbasische Säure verwandelt worden. Ein kleiner Theil Caffeïn war unangegriffen geblieben und konnte aus der Lösung nach der Titrirung mittelst Chloroform ausgeschüttelt werden.

Die Darstellung der Caffeïdincarbonsäure ist demnach ein sehr einfacher Process und besteht darin, das Caffeïn mit verdünnter Lauge stehen zu lassen, wobei man am besten thut, es als feinen Nadelbrei anzuwenden, indem man in heissem Wasser löst und rasch erkalten lässt.

Zum Brei setzt man dann die Alkalilösung, wobei Natron oder Kali die gleiche Wirkung ausüben und ein mässiger Überschuss ohne Belang ist. Bei Mengen von etwa 15 Grm. ist binnen circa 14 Tagen alles oder nahezu alles Caffeïn verschwunden und die Flüssigkeit hat keine Spur von Methylamin- oder Ammoniakgeruch. Bei besonders sorgfältiger Arbeit ist die Temperatur nicht zu erhöhen; handelt es sich um Zeitgewinn, so kann die Säurebildung sehr beschleunigt werden, wenn man das in einem

verstopften Kolben befindliche Gemisch in Wasser von 30° C. stellt, stärkeres Erwärmen aber vermeidet. Man kommt dann leicht in ebensoviel Stunden zum Ziele, als man bei gewöhnlicher Zimmertemperatur Tage braucht, aber geringer Methylamingeruch ist dann wohl immer schon bemerkbar.

Aus der erhaltenen Flüssigkeit kann man die Caffeïdincarbonsäure zunächst entweder als Kali- oder als Kupfersalz abscheiden.

1. Abscheidung als Kalisalz. Nach dem Neutralisiren mit verdünnter Schwefelsäure bringt man in einen Scheidetrichter und schüttelt mehrere Male die unangegriffenen Caffeïnreste mittelst Chloroform aus, filtrirt von etwelchen Flocken und verdunstet über Schwefelsäure im luftverdünnten Raume. Nachdem die Flüssigkeit nach wochenlangem Verdunsten dickflüssig geworden ist und sich Kaliumsulfat ausgeschieden hat, corrigirt man die wieder schwach alkalisch gewordene Reaction mit ein paar Tropfen verdünnter Schwefelsäure und behandelt zur Abscheidung des Kaliumsulfates mit starkem Alkohol, worin sich das organische Kalisalz leicht löst. Nach neuerlichem Verdunsten der alkoholischen Flüssigkeit im Vacuum hinterbleibt das caffeïdincarbonsaure Kalium als im Wasser und Alkohol leicht löslicher gelblicher, klarer Syrup, der auch nach dreimonatlichem Stehen unter der Luftpumpe nicht erstarrt war. Bei diesen Eigenschaften ist das Kalisalz (das Natronsalz wurde in gleicher Weise nicht abgeschieden) zur Analyse nicht geeignet, sondern muss erst in ein Salz eines schweren Metalles umgewandelt werden, wesshalb sich zur Gewinnung und Verarbeitung der Caffeïdincarbonsäure zweckmässiger von vorneherein

2. die Abscheidung als Kupfersalz empfiehlt, das als das am meisten charakteristische Salz bezeichnet werden muss. Dabei kommt man ohne monatlanges Abdunsten und sehr rasch zum Ziele. Man neutralisirt die ursprüngliche alkalische Lösung mit Essigsäure und versetzt nun, sich nicht um die Reste unveränderten Caffeïns kümmernd, mit einer Lösung von essigsaurem Kupfer, wobei sich die Flüssigkeit, ohne dass sofort ein Niederschlag entstünde, dunkelgrün färbt. Erst nach etwa einer Viertelstunde, allenfalls beschleunigt durch Umrühren, beginnt die Ausscheidung des caffeïdincarbonsauren Kupfers als

fein krystallinischer, lebhaft himmelblauer Niederschlag, der sich noch eine zeitlang stark vermehrt. Wenn nach dem Absetzen die überstehende farblose Flüssigkeit sich mit essigsaurem Kupfer neuerdings grün färbt, fügt man noch davon hinzu und wiederholt dies, so lange noch Grünfärbung eintritt, vermeidet aber einen Überschuss von Kupferacetat, da das frisch gefällte caffeïdincarbonsaure Kupfer darin nicht unlöslich ist und man Verlust erleiden würde.

Durch Abfiltriren und Auswaschen wird das Kupfersalz sofort rein erhalten; man kann es übrigens auch in verdünntem Ammoniak lösen und mit Essigsäure wieder ausfällen. Aus dem Filtrat vom Kupfersalz erhält man beim Abdampfen immer noch etwas Caffeïn zurück, das weiter zu benützen ist, und nach dessen Auskrystallisiren bleibt eine dicke Mutterlauge, die das essigsaure Kalium, etwas essigsaures Kupfer und, wie es scheint, meist auch etwas Caffeïdincarbonsäure enthält; denn während deren Kupfersalz in Wasser kaum löslich ist, so wird die Löslichkeit doch durch die Gegenwart der Acetate so alterirt, dass sich ein Theil der Fällung entzieht, der dann nicht mehr zu gewinnen ist.

Bezüglich der Ausbeuten an Kupfersalz geben die folgenden Zahlen Aufschluss.

1. Aus 30 Grm. krystallisirtem Caffeïn wurden 22 Grm. trockenes caffeïdincarbonsaures Kupfer und 4 Grm. Caffeïn zurück erhalten, so dass also nur 26 Grm. Caffeïn in Rechnung zu setzen sind. Dies gibt eine Ausbeute auf angewandtes Caffeïn berechnet von 84·5%, während die Theorie 114% verlangt.

2. Aus 40 Grm. krystallisirtem Caffeïn wurden über 23 Grm. Kupfersalz und 13 Grm. Caffeïn zurück erhalten, so dass also nur 27 Grm. Caffeïn in Reaction getreten erscheinen. Dies gibt eine Ausbeute von 85·2% gegen die berechneten 114%.

Da das Kupfersalz den Ausgangspunkt für die Abscheidung der freien Säure und die Darstellung der anderen Salze bildet, so folgen zunächst die

Analysen des Kupfersalzes.

Das Kupfersalz ist ein himmelblaues, mässig schweres Pulver, unter dem Mikroskop krystallinische Warzen oder Körnchen zeigend; es ist in Wasser fast, im Alkohol ganz

unlöslich. Über Schwefelsäure oder im Vacuum getrocknet verliert es bei 100° nichts mehr an Gewicht. Es ist stark hygroskopisch. Die Analysen sind mit Substanzen von vielen verschiedenen Darstellungen ausgeführt.

I. 0·815 Grm. in Schwefelsäure gelöst, gaben nach den Fällen mit Schwefelwasserstoff und Glühen des Niederschlages im offenen Tiegel 0·1307 Grm. Cu_2S. Cu O = 0·1043 Grm. Cu = 12·80% Kupfer.

II. 0·6585 Grm. bei 105° getrockneter Substanz, in Schwefelsäure gelöst, gaben nach Abrauchen des getrockneten Niederschlags mit Salpetersäure 0·1075 Grm. Cu O = 0·08584 Grm. Cu = 13·03% Kupfer.

III. 0·2242 Grm. gaben 0·323 Grm. CO_2 und 0·098 Grm. H_2O.

IV. 0·2305 Grm. gaben 44·75 C. C. Stickstoff bei 14° und 731·2 Mm. Druck.

V. 0·5145 Grm. bei 105° getrockneter Substanz gaben nach Auflösen in Schwefelsäure, Fällen mit Schwefelwasserstoff und Abrauchen des Niederschlages mit concentrirter Salpetersäure im Tiegel 0·0832 Grm. Cu O = 0·06645 Grm. Kupfer.

Caffeïdincarbonsaures Kupfer $C_8H_{11}\frac{Cu}{2}N_4O_8$ verlangt		Gefunden				
		I.	II.	III.	IV.	V.
C	39·55%	—	—	39·29	—	—
H	4·53 „	—	—	4·85	—	—
Cu	13·02 „	12·80	13·03	—	—	12·92
N	23·07 „	—	—	—	22·32	—
O	19·83 „	—	—	—	—	—

Die freie Caffeïdincarbonsäure.

Die freie Säure kann man aus dem Kupfersalz durch Zerlegung mit Schwefelwasserstoff erhalten; man suspendirt es in kaltem Wasser und leitet Schwefelwasserstoff ein. Das Schwefelkupfer setzt sich sehr gut ab und das wasserklare stark sauer reagirende Filtrat dunstet man ohne jede Anwendung von Wärme in flachen Schalen unter der Luftpumpe ein. Die Flüssigkeit wird dick und syrupartig und erst ganz zuletzt erstarrt sie zu einer weichen, aus wawellitartigen Nadelgruppen bestehenden Masse.

Zur Reinigung haben wir es am besten gefunden, in Chloroform zu lösen und mit wasserfreiem Benzol zu fällen. Die Fällung ist anfänglich ein dickes, zähes Öl, es erstarrt aber nach dem Abgiessen der Chloroform-Benzolmischung an der Luft nach

einiger Zeit zu einer weissgelblichen, wenig krystallinischen, in Wasser sehr leicht löslichen Masse. Die wässerige Lösung ist stark sauer, und gibt nach dem Neutralisiren mit Ammoniak auf Zusatz von Kupferacetat sofort das beschriebene Kupfersalz. In Alkohol ist die Caffeïdincarbonsäure ebenfalls leicht löslich, nicht in Benzol. Sie schmilzt nicht unzersetzt, sondern unter Gasentwicklung und Braunfärbung, stärker erhitzt entweichen Dämpfe, die durchdringend riechen wie jene von verbranntem Caffeïdin, aber nicht auch purpurn gefärbt sind.

Analysen:

I. 0·232 Grm. im Vacuum über Schwefelsäure getrockneter Substanz gaben 0·382 Grm. CO_2 und 0·1235 Grm. H_2O.

II. 0·217 Grm. gaben 51·0 C. C. Stickstoff bei 14° une 729 Mm. Druck.

Caffeïdincarbonsäure $C_8H_{12}N_4O_3$ verlangt			Gefunden	
			I.	II.
C_8	96	45·28%	44·90	—
H_{12}	12	5·66	5·91	—
N_4	56	26·42	—	26·93
O_3	48	22·64	—	—
Mol. = 212		100·00%		

Zersetzung der Caffeïdincarbonsäure beim Kochen.

Kocht man eine wässerige Lösung, so entweicht andauernd Kohlensäure, die saure Reaction nimmt ab und es hinterbleibt ein röthlich gefärbtes Öl, das mit etwas Schwefelsäure zusammengerührt und mit Alkohol übergossen zu einer weissen Nadelmasse von Caffeïdinsulfat erstarrt.

Von einem so erhaltenen Präparate gaben 0·3305 Grm. mit Chlorbaryum gefällt 0·294 Grm. $BaSO_4$=0·12365 Grm. H_2SO_4 = 37·40% Schwefelsäure, während das Caffeïdinsulfat $C_7H_{12}N_4O$. H_2SO_4 36·84% Schwefelsäure enthält. Die Spaltung verläuft daher völlig glatt.

Daraus ergibt sich eine viel vortheilhaftere Methode zur Darstellung von Caffeïdin, als es die ältere Methode von Strecker ist. Es ist schon oben bemerkt worden, dass dabei der grösste Theil von Caffeïn weitgehend zersetzt wird und die

Ausbeute eine geringe ist, wenigstens nach unseren Erfahrungen, und von anderer Seite sind keine näheren Angaben darüber gemacht. Auch die Methode von Schultzen, statt Barythydrat alkoholische Kalilauge zu nehmen, gab uns keine gute Ausbeute.

Man wird aber nunmehr das Caffeïdin zweckmässig aus dem caffeïdincarbonsauren Kupfer darstellen, denn es ist klar, dass die langwierige Abscheidung der freien Caffeïdincarbonsäure dazu ganz unnöthig ist; man braucht bloss das Kupfersalz mit Schwefelwasserstoff zu zerlegen, das Filtrat rasch einzudampfen und darauf mit concentrirter Schwefelsäure zu versetzen.

Aus 22 Grm. caffeïdincarbonsaurem Kupfer erhielten wir so beispielsweise 15·3 Grm. rein weisses Caffeïdinsulfat, während sich 24 Grm. berechnen würden. Auf Caffeïn selbst bezogen, beträgt dies nach Abzug des wieder gewonnenen Caffeïns etwa die Hälfte der theoretischen Ausbeute[1].

Weitere Salze der Caffeïdincarbonsäure.

Kalksalz, $C_8H_{11}\frac{Ca}{2}N_4O_3$, wurde aus dem Kupfersalz dargestellt, indem man dieses mit verdünnter Kalkmilch digerirte, filtrirte, den überschüssigen Kalk mit Kohlensäure entfernte und die Lösung an einem lauen Orte verdunsten liess. Dieselbe trocknete zu einem dicken, klaren farblosen Syrup ein, der zuletzt unmittelbar vor dem Trockenwerden zu weissen krystallinischen Krusten und Wucherungen erstarrt.

Analyse. 0·301 Grm. Substanz gaben mit Schwefelsäure abgeraucht, 0·0825 Grm. $CaSO_4 = 8·1\%$ Calcium; berechnet 8·6%.

Barytsalz wurde aus der Kupferverbindung mittelst Barytwasser in analoger Weise wie das Kalksalz dargestellt. Es hinterbleibt als glasheller, spröder, gummiartiger, in Wasser leicht löslicher Körper.

---

[1] Entgegen der Angabe von E. Schmidt (Berichte d. d. chem. Gesellsch. 14, 816) haben wir gefunden, dass das freie Caffeïdin neutral reagirt, mindestens lässt sich das Caffeïdinsulfat unter Anwendung von Lakmus oder Corallin wie freie Schwefelsäure mit Lauge titriren. (Z. B. gefunden 36·61% H_2SO_4, berechnet 36·84%.)

Zinksalz, $C_8H_{11}\frac{Zn}{2}N_4O_3$ ist in Wasser kaum löslich, das Filtrat einer mit Zinkoxyd digerirten wässerigen Lösung der freien Säure enthält nur Spuren von Zink. Neutralisirt man die Caffeïdincarbonsäure mit Ammoniak, so erhält man mit Chlorzink einen weissen dicken, gelatinösen Niederschlag, der sich in einem Überschusse von Chlorzink leicht und klar auflöst. Zur Analyse wurde das Ammonsalz mit Zinkvitriol ausgefällt, da dieser im Überschusse nicht merklich lösend wirkt. Der mit Wasser gewaschene Niederschlag stellt getrocknet eine fast weisse, schuppige mattglänzende Masse dar. Bei 100° unveränderlich.

Analyse. 0·529 Grm. im Platintiegel mit Salpetersäure wiederholt abgeraucht und geglüht gaben 0·086 Grm. Zinkoxyd = 0·069 Grm. Zink = 13·04% Zn; berechnet 13·35% Zn.

Cadmiumsalz, $C_8H_{11}\frac{Cd}{2}N_4O_3$. Die wässerige, durch Schwefelwasserstoff aus dem Kupfersalze erhaltene Lösung der freien Säure mit Cadmiumhydroxyd digerirt, löst einen Theil davon auf, während ein anderer Theil des gebildeten Salzes als sandiges Pulver dem unangegriffenen Cadmiumoxyd beigemengt bleibt. Das wasserklare Filtrat, am lauen Orte verdunstet, gibt nach einigen Tagen meist lose, farblose, lebhaft glänzende Krystalle, welche im Vacuum verwittern, aber schon im Exsiccator wieder etwas Wasser aufnehmen. In Wasser ist es schwierig löslich.

Analyse. 0·414 Grm. bei 105° getrockneter Substanz, in verdünnter Schwefelsäure gelöst und mit Schwefelwasserstoff gefällt, gaben 0·108 Grm. Schwefelcadmium = 0·084 Grm. Cadmium = 20·29%; berechnet 20·97% Cd.

Mangansalz, $C_8H_{11}\frac{Mn}{2}N_4O_3$. Die freie Säure mit Mangancarbonat bei gewöhnlicher Temperatur digerirt, gibt ein klares Filtrat, das, bei gelinder Wärme verdunstet, weisse, ziemlich grosse, harte Krystalle absetzt, die einmal gebildet, in Wasser nur sehr langsam löslich sind. Es ist bei 100° unveränderlich.

Analyse. 0·2517 Grm. gaben 0·0392 Grm. Mn_3O_4 = 10·93% Mangan: berechnet 11·30% Mn.

Das Silbersalz ist ganz unbeständig; frisch gefälltes Silberoxyd löst sich zwar leicht in wässeriger Caffeïdincarbon-

säure, aber schon nach einigen Stunden tritt Reduction des Silberoxydes ein.

Das Bleisalz ist in Wasser löslich.

Quecksilberchloridverbindung. Sublimatlösung ist ein empfindliches Reagens auf die Caffeïdincarbonsäure, deren lösliche Salze noch in verdünnter Lösung damit einen mächtigen weissen Niederschlag geben, der aber kein einfaches Quecksilbersalz ist, da er noch Chlor enthält. Mit Schwefelwasserstoff zerlegt, gibt die Verbindung ein salzsäurehältiges Filtrat, das eingedampft salzsaures Caffeïdin hinterlässt.

Zur Darstellung eines analysirbaren Productes wurde ein Theil der ursprünglichen Flüssigkeit, wie sie sonst auf Kupfersalz verarbeitet wurde, statt mit Essigsäure mit verdünnter Salzsäure so neutralisirt, dass sie eher noch spurenweise sauer war, und dann mit Sublimatlösung versetzt, bis eine bleibende Trübung entstand, die sich bald in einen voluminösen Niederschlag verwandelte. Das Filtrat davon gab nochmals auf Sublimatzusatz eine starke weisse Fällung. Beide Niederschläge verhielten sich gleich.

Analyse. Von der zweiten Fällung gaben 0·890 Grm. über Schwefelsäure getrockneter Substanz beim Glühen mit Kalk 0·4665 Grm. metallisches Quecksilber oder 52·3% Hg.

Wahrscheinlich ist der Körper daher eine Verbindung von caffeïdincarbonsaurem Quecksilber mit Quecksilberchlorid von der Formel: $C_8 H_{11} \frac{Hg}{2} N_4 O_3 + Hg Cl_2$, denn diese verlangt einen Quecksilbergehalt von 51·6%, was einigermassen zur gefundenen Zahl stimmt.

Einwirkung von Alkalien auf Theobromin.

Nach dem Vorhergehenden war es sehr wahrscheinlich, dass das Theobromin sich zu Basen ebenso verhalten würde, wie das Caffeïn, dass es also zunächst eine Säure bilde und dass aus dieser durch Kochen unter Kohlensäureabspaltung die dem Caffeïdin nächst niedrigere homologe Basis entstehen würde, die man dann Theobromidin nennen müsste.

Wider Erwarten trat dies Alles nicht ein; das Theobromin ist gegen Laugen widerstandsfähig, gibt keine Säure und kein

Theobromidin. Es verhält sich vielmehr selbst wie eine Säure, bindet Alkalien und Erden und gibt damit einfache Salze.

Folgender Versuch zeigt dies haarscharf. 10 Grm. Theobromin wurden mit 250 CC. einer titrirten Lauge (10 CC. = 108·8 Mg. NaOH) übergossen und das Ganze auf 300 CC. gebracht. Die darin enthaltene Basis betrug etwas mehr als 1 Äquiv. auf 1 Mol. Theobromin. Schon nach ein paar Stunden war alles Theobromin aufgelöst und als 10 CC. davon (8·3 CC. Lauge enthaltend) mit Corallin titrirt wurden, wurde genau die berechnete Menge, d. h. 8·3 CC. Säure bis zum Neutralpunkte verbraucht, während das Theobromin sich dabei als weisses Krystallmehl abschied. Es war also keine Spur einer Säurebildung eingetreten und das Theobromin war einfach als solches durch die Basis gelöst gewesen. Selbst nach 14tägigem Stehen der ursprünglichen Lösung gab ein zweiter Titrirversuch genau das gleiche Resultat, ebenso ein dritter, nachdem die alkalische Lösung vorher gekocht worden war.

Um zu sehen, ob nicht bei Anwendung stark überschüssigen Natrons doch eine Einwirkung stattfände, wurden 20 CC. der obigen Lösung nach Zusatz von viel stärkerer Natronlauge im Silbertiegel zur Trockne gedampft, befeuchtet und wieder eingedampft, aber auch da konnte fast alles Natron beim Rücktitriren gefunden werden, während sich das Theobromin dabei wieder abschied.

Dass auch bei der Natroneinwirkung weder Ammoniak noch Methylamin entwichen, geht schon aus dem Vorstehenden hervor. Diese starke Widerstandsfähigkeit gegen Alkalien unterscheidet das Theobromin sehr vom Caffeïn.

Theobrominnatrium. Wird in Natronlauge so viel Theobromin gebracht, dass nach längerem Stehen noch ein Theil ungelöst bleibt, davon filtrirt und das Filtrat unter der Pumpe langsam verdunstet, so bleiben milchweisse Krusten und Ringe ohne deutlich krystallinisches Gefüge von Theobrominnatrium. Es ist in Wasser ausserordentlich leicht löslich, reagirt stark alkalisch, wird durch Kohlensäure zerlegt und zieht auch an der Luft Kohlensäure an, so dass von einer Natriumbestimmung abgesehen wurde.

Die wässerige Lösung gibt mit Metallsalzen folgende Niederschläge:

Mit Silbernitrat weisse gelatinöse Fällung, die sich beim Kochen nicht löst und am Lichte nur langsam schwärzt;

mit Bleiacetat weissen, beim Kochen leicht, in Essigsäure nicht löslichen Niederschlag;

mit Sublimat anfangs nichts, nach einiger Zeit weissen krystallinischen, aus mikroskopischen Kugelgestalten mit nadelförmiger Oberfläche bestehenden Niederschlag;

mit Chlorzink weisse Fällung.

Theobrominbaryum $C_7H_7\frac{Ba}{2}N_4O_2$. Bringt man Theobromin in Barytwasser, so erstarrt bald die ganze Masse, so dass man das Gefäss umkehren kann, ohne dass etwas ausfliesst; unter dem Mikroskope entwirrt sich der Brei als ein Haufwerk feiner dünner, gleichmässiger Nadeln. Durch Auflösen in heissem Wasser, Filtriren nnd langsames Abkühlen des Filtrates erhält man das Theobrominbaryum in etwas grösseren Nadeln, die in Masse eine schneeweisse, lockere, etwas seidenglänzende Substanz darstellen. In kaltem Wasser ist es schwer löslich, aber doch so viel, dass es von Silbernitrat gefällt wird. Es reagirt alkalisch und wird von Kohlensäure zerlegt. Kühlt man die heisse wässerige Lösung rasch etwa durch Eintauchen des Gefässes in kaltes Wasser ab, so erhält man eine steife klare Gallerte, gerade wie Kieselsäuregallerte aussehend. Auch wenn man eine nicht zu verdünnte Lösung des Natriumsalzes mit Chlorbaryum versetzt, entsteht ein ebensolcher durchscheinender amorpher Klumpen. Beim Erwärmen schmilzt die Verbindung förmlich zur Flüssigkeit und nun kann man nach Belieben durch langsames oder rasches Abkühlen wieder den Nadelbrei oder die Gallerte erhalten, welche letztere aber nach längerem Stehen allmälig in erstere Form übergeht. Giesst man ein wenig der heissen Lösung auf einen kalten Gegenstand, so erstarrt sie und kann wie eine Membran abgezogen werden.

Analyse. 0·424 Grm. der bei 105° getrockneten Verbindung gaben im Tiegel verbrannt und dann mit Schwefelsäure abgeraucht 0·1955 Grm. $BaSO_4$, entsprechend 27·11% Ba; berechnet 27·68%.

Oxydation des Caffeïdins mit Chromsäure.

Nachdem früher in der ersten und zweiten Abhandlung gezeigt worden ist, dass durch Chromsäuremischung das Caffeïn sich nach der Gleichung:

$$\underset{\text{Caffeïn}}{C_8H_{10}N_4O_2} + 2H_2O + 3O = \underset{\text{Cholestrophan}}{C_5H_6N_2O_3} + 2CO_2 + CNH_5 + NH_3$$

zerlegt und der Process auch durch quantitative Bestimmungen erhärtet worden ist, erschien es für die Erkennung der Constitution des Caffeïdins von besonderem Interesse, auch hier die Zerlegung unter dem Einflusse des gleichen Reagens zu studiren, da hiebei Aussicht war zu erkennen, welches Kohlenstoffatom dasjenige ist, das schon bei der Caffeïdinbildung austritt, und welches daher in den Zersetzungsproducten des Caffeïdins nicht mehr erscheinen kann.

Es wurden 5 Grm. schwefelsaures Caffeïdin mit 5·6 Grm. Kaliumdichromat und 6 Grm. mit Wasser verdünnter Schwefelsäure versetzt und stehen gelassen. Die Ergrünung beginnt hier sehr rasch, schon bei gewöhnlicher Temperatur; durch Erwärmen am Wasserbade während einiger Stunden wurde die Oxydation vollendet. Das angewandte Oxydationsgemisch entsprach 3 Atomen Sauerstoff auf ein Molekül Caffeïdin. Durch sehr häufiges Ausschütteln mit Äther und Abdestilliren erhielt man einen Rückstand, der, aus Wasser und Alkohol umkrystallisirt, weisse, lockere, seidenglänzende Krystalle gab, die sich in folgender Weise verhielten:

1. Mit etwas Chlorcalcium und Ammoniak erwärmt, gab ihre Lösung keine Trübung; es war der Körper daher nicht Cholestrophan und überhaupt keine Parabansäure.

2. Beim Kochen mit Lauge durch eine Minute entwich Methylamin, und beim Versetzen mit Chlorcalcium und Essigsäure erhielt man Calciumoxalat.

3. Beim Erhitzen im trockenen Proberöhrchen gaben die Krystalle ein weisses leichtes, wolliges Sublimat.

Der Körper ist also Dimethyloxamid, das wir schon früher häufig in den Händen hatten und daher leicht als solches

erkannten. Von Cholestrophan, dem Chromsäureoxydationsproducte des Caffeïns, entsteht keine Spur.

Damit ist das Kohlenstoffatom schon erkannt, welches im Caffeïn, nicht mehr aber im Caffeïdin enthalten ist:

Caffeïn gibt:	Caffeïdin gibt:
$CO\begin{matrix}/NCH_3—CO\\ \\ \backslash NCH_3—CO\end{matrix}$	$\begin{matrix}NHCH_3—CO\\ \\ NHCH_3—CO\end{matrix}$
Cholestrophan	Dimethyloxamid.

Wenn dies richtig ist, so mussten die übrigen directen Oxydationsproducte die gleichen sein wie beim Caffeïn, und es mussten 2 Mol. Kohlensäure auftreten.

Es wurde desshalb ein neuer Oxydationsversuch gemacht und dabei die entwickelte Kohlensäure quantitativ bestimmt. Das gewogene Caffeïdinsulfat und die berechnete Menge von Chromsäuremischung kamen zu diesem Zwecke in eine kleine Retorte, deren aufwärts gerichteter Hals mit einem Rückflusskühler, dann mit zwei Chlorcalciumröhren, dem gewogenen Kaliapparate sammt Kalirohr und einem Schutzrohre in Verbindung stand. Während des Erhitzens der Retorte wurde durch den ganzen Apparat ein langsamer Luftstrom hindurch gesaugt.

1·091 Grm. Caffeïdinsulfat gaben nach $1^1/_2$stündigem Kochen 0·352 Grm. Kohlensäure; nachdem neuerdings $^1/_2$ Stunde gekocht und noch $^1/_2$ Stunde Luft hindurch gesaugt worden war, hatten sich noch 0·004 Grm. im Ganzen also 0·456 Grm. Kohlensäure entwickelt, was gut dazu stimmt, dass auf 1 Mol. Caffeïdin 2 Mol. Kohlensäure entweichen.

Gefunden:	Berechnet:
$32·63\%\ CO_2$	$33·08\%\ CO_2$.

Das Caffeïdin oxydirt sich daher nach folgender Gleichung:

$$C_7H_{12}N_4O+2H_2O+3O=C_4H_8N_2O_2+2CO_2+CNH_5+NH_3$$

Caffeïdin. Dimethyloxamid.

Der Versuch, das Caffeïdin mittelst chlorsaurem Kalium und Salzsäure zu oxydiren, hat bisher zu keinen fassbaren Producten geführt.

Physiologisch-chemische Bemerkungen über das Caffeïn.

Das Caffeïn widersteht der Fäulniss sehr, was von vorne herein nicht zu erwarten war, denn die im Ganzen so sehr beständige verwandte Harnsäure zerlegt sich, wenn ihre Lösung in Natriumphosphat bei 20—30° stehen bleibt, in Folge der durch die natürliche Einsaat sich entwickelnden Bacteriencultur; nach 8—14 Tagen erfolgt keine Ausscheidung mehr nach dem Ansäuern, die Harnsäure ist verschwunden, und von ihren Zersetzungsproducten ist Harnstoff nachweisbar (Lex R.[1]).

Das Caffeïn bringt man durch Stehenlassen seiner Lösung bei Brutwärme hingegen nicht zur Veränderung; es wurden desshalb 5 Grm. Caffeïn in einem Liter Wasser gelöst und ein paar Cubikcentimeter eines in stinkender Fäulniss begriffenen, an Bacterien sehr reichen Pankreasinfuses zugesetzt, und die Flüssigkeit erst 8 Tage im Brütkasten, dann von Juli bis October bei Zimmertemperatur stehen gelassen. Nach dieser Zeit konnte man durch Abdampfen so gut wie alles Caffeïn wieder erhalten. Es bleibt also unzersetzt auch gegenüber einer üppigen Bacteriencultur.

Über das Verhalten des Caffeïns im Thierkörper und seine Ausscheidung durch den Harn sind die vorliegenden Angaben spärlich; nach Lehmann[2] ist weder Caffeïn noch Theobromin im Harn wieder zu entdecken, eine Angabe, die auch in vielen anderen Werken z. B. Neubauer's Harnanalyse (7. Aufl. 160, 1876) sich findet. Hammarsten[3] konnte ganz kleine zu Harn hinzugesetzte Caffeïnmengen durch Ausziehen mit Alkohol und Benzol wieder finden. Nur A. Strauch[4] hat sich mit dem Auffinden des Caffeïns, nachdem Katzen, Hunde oder Meerschweinchen mit Gaben von 0·37 bis 0·5 Grm. vergiftet worden waren, beschäftiget; er konnte im Blute der Thiere durch Behandlung des Rückstandes mit Chloroform und des darin

---

[1] Jahresb. f. Thierchem. 2, 37.

[2] Lehrb. d. physiol. Chem. 2. 367, 1853.

[3] Neubauer-Huppert. 8. Aufl., 1881.

[4] Jahresb. f Chemie pro 1867, red. v. Will.

löslichen Theiles mit Chlorwasser (nach Schwarzenbach) das Caffeïn wieder erkennen.

Wir haben einige Versuche gemacht, die zur Ergänzung der spärlichen Kenntnisse über den Übergang dieses wichtigen, täglich genossenen Körpers in den Harn und über die eventuellen Veränderungen desselben in der Blutbahn beitragen sollten[1].

Das Caffeïn wurde an einem kleineren Hunde in Form von trockenen Stärkekleisterpillen verfüttert, von denen jede 10 Mgr. Caffeïn enthielt und die in ein Stückchen Fleisch eingewickelt, verschluckt wurden. Dosen von 6 Pillen (0·060 Grm.) oder mehr pro die verursachten häufig Erbrechen, mitunter aber nicht. Es konnten später auch bis 12 Pillen, 120 Mgr. Caffeïn enthaltend, per Tag ohne erkennbaren Nachtheil verfüttert werden.

Der Nachweis, dass überhaupt Caffeïn in den Harn übergeht, ist leicht zu führen, da das Chloroform eine sehr gute Ausschüttlungsflüssigkeit dafür und die bekannte Schwarzenbach'sche Probe mit Chlorwasser eine sehr empfindliche Reaction ist, die dann mit ein wenig des Chloroformrückstandes sofort eintritt. Der Rückstand der directen Chloroformausschüttlung ist aber schmierig und zeigt keine Caffeïnkrystalle; um solche zu erhalten, muss man ihn neuerdings in wenig Wasser lösen, mit einem Tropfen Lauge versetzen und wieder ausschütteln. Dabei bekommt man leicht, obwohl unter etwas Verlust, weisse Caffeïnnadeln.

Einmal wurde auch versucht, soweit als dies möglich, das im Harn des Hundes wieder erscheinende Caffeïn quantitativ zu bestimmen. Nachdem der Hund 14 Tage kein Caffeïn erhalten hatte, bekam er am 21. Juni Vormittag und Nachmittag je

---

[1] Nachdem wir längst das Beabsichtigte beendet hatten, wurden wir auf die Königsberger Inaug. Dissert. von Nachum Schutzkwer aufmerksam gemacht: Das Caffeïn und sein Verhalten im Thierkörper, 1882. Ausser der Wiedergabe einer lehrbücherartigen Caffeïnbeschreibung kommt darin auch der Nachweis vor, dass das Caffeïn im Harn wieder erscheint. In einem Falle wurden von 0·200 Grm. Caffeïn 0·012 Grm., also 6% wieder aufgefunden. Ausserdem enthält die Dissertation Harnanalysen nach Caffeïngenuss, aus denen keine bestimmten Resultate abgeleitet werden konnten. Darnach durften wir uns wohl die Mittheilung unserer eigenen Versuche noch gestatten.

5 Pillen, im Ganzen also 0·100 Grm. Caffeïn, worauf der vereinigte Harn vom 21. und 22. Juni eingeengt, mit Chlorbaryum und Barytwasser gefällt, filtrirt und das Filtrat 6—7 mal mit dem gleichen Volum Chloroform ausgeschüttelt wurde. Der Rückstand des abdestillirten Chloroforms wurde in heissem Wasser gelöst, von etwas öligen Flocken filtrirt, die wässerige Lösung wieder verdampft, mit Benzol, welches Caffeïn kaum löst, gewaschen, der Rückstand in wenig Chloroform gelöst, in ein gewogenes Schälchen filtrirt und abgedampft. Es blieb ein schwach gelbgefärbter Filz von Caffeïnnadeln im Gewichte von 66 Mgr. Daher sind 66% des eingegebenen Caffeïns wieder gefunden. Natürlich wird in Wirklichkeit noch mehr übergeben, als man wieder finden kann.

Ob neben intactem Caffeïn auch noch kleine Mengen von Zersetzungsproducten erscheinen, wurde insoferne untersucht, als es Zersetzungsproducte gibt, die überhaupt einen Nachweis gestatten. Solche sind das bei der Alkalieneinwirkung in der Wärme entstehende Methylamin und die bei der Oxydation auftretenden Körper: Dimethylparabansäure und Dimethylalloxan.

Bezüglich des Auffindens von Methylamin war darauf Rücksicht zu nehmen, dass nach einigen Autoren, namentlich nach Schiffer[1] das Vorkommen von kleinen Mengen einer primären Aminbase (Methylamin) im Harn von mit Fleisch gefütterten Hunden durch die Isonitrilreaction nachweisbar ist. Es musste also der Harn unseres Hundes vor der Caffeïnfütterung darauf geprüft worden; wir bekamen, wenn die Ammoniake im Schlösing'schen Apparate ausgetrieben worden waren, gar keinen, wenn der Harn mit Kali destillirt worden war, einen undeutlichen, zweifelhaften Isonitrilgeruch. Ebenso verhielt sich aber auch der Harn an einem Tage, an dem 6 Pillen mit 60 Mgr. Caffeïn verfüttert worden waren; im Schlösing'schen Apparate keine, mit Kali destillirt eine unsichere Isonitrilreaction. Methylamin tritt also nicht auf[2].

---

[1] Jahresb. f. Thierchem. **10**, 243.

[2] Ganz dasselbe fand auch Nachum Schutzkwer, sowohl für normalen Harn als für solchen nach Caffeïneinnahme; in diesem Punkte sind unsere Erfahrungen also nur eine Bestätigung jener von Schutzkwer.

Auf Cholestrophan und Dimethylalloxan wurde gleichzeitig gesucht in dem vereinigten Harn vom 6. und 7. Juni, nachdem am 6. Juni 12 Pillen (120 Mgr. Caffeïn) verfüttert worden waren. Der ohne zu erwärmen oder einzuengen mit ein paar Tropfen verdünnter Schwefelsäure versetzte Harn wurde mit viel Äther geschüttelt und der Äther abdestillirt. Der Rückstand wurde in etwas Wasser gelöst.

Ein Theil davon mit Eisenchlorid auf Alloxan geprüft, gab negative Reaction.

Ein anderer Theil auf Cholestrophan mittelst der empfindlichen Parabansäurereaction durch Zusatz von Chlorcalcium und Ammoniak und Erhitzen zum Sieden geprüft, gab ebenfalls ein negatives Resultat. Aus dem ausgeätherten Harne konnte reichlich Caffeïn gewonnen werden.

Auf Cholestrophan wurde auch direct in 2 Tagesharnen einem ohne, einem nach Caffeïngenuss in folgender Weise geprüft: der frisch gelassene Harn wurde zur Abscheidung vorhandener Oxalsäure mit Chlorcalcium und Essigsäure versetzt und über Nacht stehen gelassen. Am anderen Tage wurde filtrirt, mit Ammoniak zum Kochen erhitzt und wieder mit Essigsäure stark sauer gemacht. Nirgends war nun deutlich erkennbares Calciumoxalat zu sehen, es entstand nur eine Spur Niederschlag, und der normale Harn unterschied sich nicht von dem nach Caffeïnfütterung.

Nach alledem erscheint es sehr unwahrscheinlich, dass Zersetzung des Caffeïns im Organismus stattfindet, es tritt sicher der allergrösste Theil, vielleicht alles Caffeïn als solches wieder durch den Harn aus.

NACHSCHRIFT.

In dem während des Druckes dieser Abhandlung erschienenen Hefte 2 und 3 der Liebig'schen Annalen, Band 217, geben E. Schmidt und H. Pressler an, bei der Oxydation von Caffeïn sowohl als von Theobromin mit concentrirter Salpetersäure kein Ammoniak gefunden zu haben, während von uns [1] bei der Oxydation mit Chromsäure Ammoniak gefunden worden ist. Es war zu vermuthen, dass die concentrirte Salpetersäure, resp. die salpetrige Säure das Ammoniak verbrennt und dies ist in der That der Fall, wie durch einen sofort von uns angestellten Versuch erhärtet worden ist. Ja selbst dann, als zu 1 Grm. Caffeïn $^1/_4$ Grm. salpetersaures Ammon hinzugesetzt und das Gemenge so mit Salpetersäure oxydirt wurde, wie Schmidt und Pressler angeben, waren nur mehr unbedeutende Spuren der Platinsalmiakoktaeder mit dem Mikroskop erkennbar.

[1] Maly und Hinteregger I. u. II. Abh.

Über das Methylbiguanid und seine Verbindungen.

Von Dr. **Anton Franz Reibenschuh.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. Maly in Graz.)

Die vorliegende Abhandlung beschäftigt sich damit, von dem von B. Rathke[1] entdeckten und von R. Herth[2] synthetisch dargestellten Biguanid das Methylderivat darzustellen und zu untersuchen. Da das Methylamin käuflich nicht vollkommen rein zu erwerben war, wurde es aus Chlorpikrin durch Reduction mit Eisenfeile und Essigsäure nach der Methode von L. Geisse,[3] welche sich sehr gut bewährt hat, dargestellt.

Die gewonnene Alkoholbase erwies sich bei der Prüfung mit Platinchlorid vollkommen frei von Ammoniak, indem dem charakteristischen blättrigen Niederschlage des Doppelsalzes keine octaedrischen Krystalle von Platinsalmiak beigemengt waren.

Den Ausgangspunkt für die Darstellung des Methylbiguanids bildete das schwefelsaure Methylbyguanidkupfer.

Darstellung des schwefelsauren Methylbiguanidkupfers.

$$(C_3H_8N_5)_2Cu.H_2SO_4 + 2^1/_2H_2O.$$

Dicyandiamid wurde mit der berechneten Menge Kupfersulfat in einer Reibschale fein gepulvert und das Pulver in einer Flasche unter allmäligem Zusatz so lange mit einer 20percentigen Lösung von Methylamin versetzt, bis völlige Lösung zu einer tiefblauen Flüssigkeit eingetreten war, die dann schon in der Kälte nach mehrtägigem Stehen an den Wänden und am Boden des Gefässes eine reichliche Menge rother Nadeln der gesuchten Verbindung absetzte.

---

[1] Berichte der deutschen chem. Gesellschaft. XII. 776.

[2] Monatshefte für Chemie. I. 88.

[3] Annal. Chem. Pharm. CIX. 282.

Eine weitere Partie der Substanz wurde in der Art gewonnen, dass die in gleicher Weise bereitete blaue Lösung in eine Röhre eingeschlossen und das Rohr durch einige Stunden einer Temperatur von 100—110° C. ausgesetzt wurde.

Die Bildung der neuen Verbindung ist in diesem Falle, das heisst bei Anwendung einer höheren Temperatur eine weitaus raschere und die Ausbeute eine bessere. Grundbedingung ist jedoch dass das Methylamin im Überschusse und von erwähntem Gehalt vorhanden ist, da in verdünnten Lösungen leicht Kupferoxyd ausgeschieden wird. Die auf die eine oder andere Art erhaltenen Krystalle, die sich als ein Haufwerk äusserst zarter Nadeln von pfirsichblüthenrother Farbe erwiesen, wurden abgesaugt und mit kaltem Wasser, worin sie fast unlöslich sind, gewaschen. Die zuerst abfliessende Mutterlauge, in der noch Methylamin zur Genüge vorhanden ist, scheidet beim Einengen über Schwefelsäure im Vacuum noch eine nicht unbedeutende Menge der Substanz ab, während das gleichzeitig abdunstende Methylamin wieder gewonnen werden kann.

Über die Ausbeute an der neuen Verbindung geben folgende Zahlen Aufschluss:

5 Grm. Dicyandiamid und 7·40 Grm. Kupfersulfat gaben nach mehrtägigem Stehen in der Kälte 8·5 Grm. Substanz.

4 Grm Dicyandiamid und 5·92 Grm. Kupfersulfat lieferten im Rohre auf 110° C. erhitzt, 8 Grm. Substanz.

Darnach beträgt die Ausbeute circa 80 Percent der theoretischen Menge, wobei die Mutterlaugen nicht berücksichtigt worden sind.

Die erhaltenen Krystalle wurden zwischen Filtrirpapier abgepresst, getrocknet und über Schwefelsäure auf constantes Gewicht gebracht. Sie sind luft- und vacuumbeständig, aber ausserordentlich hygroscopisch, so dass sämmtliche Wägungen bei den folgenden Analysen in gut verschlossenen Wägeröhrchen vorgenommen werden mussten.

Analysen.

I. 0·322 Grm. getrocknete Substanz mit chromsaurem Blei und vorgelegter metallischer Kupferrolle verbrannt, gaben 0·2173 Grm. Kohlensäure und 0·1375 Grm. Wasser.

II. 0·284 Grm. getrocknete Substanz, ebenso verbrannt, lieferten 0·1935 Grm. Kohlensäure und 0·124 Grm. Wasser.

III. 0·2065 Grm. getrocknete Substanz, verbrannt, gaben im H. Schiff'schen Apparate 65·75 C.C. Stickstoff bei 18° C. und 729·5 Mm. Quecksilberdruck.

IV. 0·7245 Grm. vollkommen getrocknete Substanz lieferten 0·146 Grm. Kupferoxyd.

V. 0·532 Grm. getrocknete Substanz gaben 0·108 Grm. Kupferoxyd.

VI. 0·5135 Grm. Substanz gaben 0·3059 Grm. Bariumsulfat.

VII. 0·8427 Grm. Substanz lieferten 0·503 Grm. Bariumsulfat

Oder in Percente umgerechnet:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	Mittel
C....	18·41	18·56	—	—	—	—	—	18·48
H....	4·74	4·85	—	—	—	—	—	4·79
N....	—	—	36·01	—	—	—	—	36·01
Cu...	—	—	—	16·09	16·21	—	—	16·15
SO_4..	—	—	—	—	—	24·54	24·59	24·56

Eine Substanz von der Formel $(C_3H_8N_5)_2CuH_2SO_4$ verlangt

	Berechnet:		Gefundenes Mittel:
C_6.....	72	18·49	18·48
H_{18}....	18	4·62	4·79
N_{10}....	140	35·95	36·01
Cu	63·4	16·28	16·15
SO_4 ...	96	24·66	24·56
		100·00	99·99

Zu den Wasserbestimmungen wurde die über Schwefelsäure getrocknete Substanz während mehrerer Tage bis zum Eintritt constanten Gewichtes auf 110—115° C. erwärmt, wobei sie lichtere Farbe annahm. Sie verträgt eine Temperatur bis 130° C.; darüber hinaus tritt Zersetzung ein.

I. 0·692 Grm. verloren im Trockenschranke 0·0715 Grm. Wasser.

II. 0·8632 Grm. gaben 0·089 Grm. Wasser ab.

III. 0·689 Grm. verloren 0·072 Grm. Wasser.

IV. 0·3015 Grm. gaben 0·0315 Grm. Wasser ab.

Es enthält die Substanz somit $2^1/_2$ Moleküle Wasser, wie aus folgender Zusammensetzung hervorgeht:

Gefunden:					Berechnet für:
I.	II.	III.	IV.	Mittel:	$(C_3H_8N_5)_2CuH_2SO_4 + 2^1/_2H_2O$.
10·33	10·31	10·45	10·41	10·37	10·36% H_2O.

Darstellung des Methylbiguanidkupfers.

$$(C_3H_8N_5)_2Cu + 3^1/_2H_2O.$$

Behufs Darstellung der schwefelsäurefreien Kupferbase wurde in einem Schüttelcylinder Kupferhydroxyd mit Methylaminflüssigkeit von bekanntem Gehalte übergossen, wiederholt geschüttelt und stehen gelassen. Nach einigen Tagen war die Flüssigkeit über dem Oxyde blau gefärbt. Sie wurde rasch abfiltrirt, mit eingetragenem zerriebenen Dicyandiamid bis zur Lösung geschüttelt, die klare Flüssigkeit in ein Rohr eingeschlossen und mehrere Stunden auf 105—110° C. erhitzt.

Es erfolgte keine Krystallbildung, doch war die Lösung hell rosenroth gefärbt; sie wurde in einer Schale über Schwefelsäure unter dem Exsicator 8—10 Tage stehen gelassen, worauf ein rosenrothes krystallinisches Pulver sich ausgeschieden hatte, untermengt mit Krystallen von Dicyandiamid. Die Substanz wurde abfiltrirt, das Dicyandiamid bis zum Verschwinden der Silberreaction weggewaschen und das so gereinigte Product abgepresst und getrocknet.

Da die Ausbeute bei diesem Bildungsprocesse eine geringe war, so wurde die Darstellung der Kupferbase auch nach der von Rathke für das Biguanidkupfer angewandten Methode vorgenommen, indem ich Methylbiguanidkupfersulfat in möglichst wenig verdünnter Schwefelsäure löste, mit heisser Natronlauge bis zum Verschwinden des Niederschlages versetzte, heiss filtrirte und aus heissem Wasser umkrystallisirte.

Beim Erkalten schieden sich aus der amaranthrothen Lösung schimmernde Nadeln von tiefrosenrother Farbe aus, die in kaltem Wasser, entgegen dem von Rathke und Herth dargestellten einfachem Biguanidkupfer ziemlich löslich sind.

Die Krystalle, welche grosse Neigung zur Aufnahme von Kohlensäure zeigten, wurden nach dem Stehen über Schwefelsäure bis zum constanten Gewichte im Trockenschranke erhitzt, wobei sie sich violett färbten.

0·7524 Grm. Substanz verloren bei 110° C. 0·133 Grm. Wasser.

Berechnet für: $(C_3H_8N_5)_2Cu + 3\frac{1}{2}H_2O$	Gefunden:
17·77%	17·67%

0·228 Grm. getrocknete Substanz gaben 0·0612 Grm. Kupferoxyd.

Berechnet für: $(C_3H_8N_5)_2Cu$	Gefunden:
21·75%	21·45%

Methylbiguanid $C_3H_9N_5$ und seine Salze.

Zur Gewinnung der freien Base wurde das Methylbiguanidsulfat, dessen Darstellung später erörtert wird, mit der nöthigen Menge Barytwasser zerlegt.

Die eingeengte, stark alkalisch reagirende Flüssigkeit gab im Vacuum über Schwefelsäure einen zähen Syrup, der nicht zum Krystallisiren gebracht werden konnte.

Die Base, welche an der Luft leicht Kohlensäure anzieht, bildet zweierlei Salze, neutrale und saure, von denen erstere auf ein Molecül der Base ein Äquivalent Säure und die letzteren auf ein Molecül Basis zwei Äquivalente Säure enthalten. Sie sind bei ungefärbten Säuren farblos, im Wasser leicht löslich und krystallisiren mit Ausnahme des zerfliesslichen kohlensauren Salzes meist in Blättchen oder feinen Prismen, die häufig zu halbkugeligen Aggregaten von radialfaseriger Textur vereinigt sind.

Man erhält sie direct durch Neutralisation der freien Base mit der entsprechenden Säure oder aus der Kupferbase durch die betreffende Säure und Schwefelwasserstoff.

Es wurden das neutrale und sauere Methylbiguanidsulfat dargestellt.

Neutrales Methylbiguanidsulfat.

$(C_3H_9N_5)_2H_2SO_4$.

Dasselbe wurde aus in Wasser suspendirtem schwefelsauren Methylbiguanidkupfer (siehe oben) durch Zerlegung mittelst Schwefelwasserstoff gewonnen. Die vom Schwefelkupfer abfiltrirte Flüssigkeit gab eingeengt kurze rhomboidische Prismen in kugeligen Gruppen vereinigt, die abgepresst und über Schwefelsäure zum constanten Gewicht gebracht wurden. Sie sind luftbeständig und erleiden auch bei 100° C. keine Gewichtsabnahme und schmelzen bei etwa 110° C.

I. 0·9381 Grm. Substanz gaben 0·671 Grm. Bariumsulfat.

II. 1·2592 Grm. Substanz lieferten 0·8921 Grm. Bariumsulfat.

Gefunden:			Berechnet SO_4
I.	II.	Mittel	
29·42	29·19	29·30%	29·27%

Saures Methylbiguanidsulfat.

$C_3H_9N_5\,H_2SO_4$.

Das saure Salz erhält man durch Versetzen der Lösung des neutralen mit verdünnter Schwefelsäure und Einengen der Flüssigkeit im Wasserbade.

Die concentrirte Lösung erstarrt über Schwefelsäure zu einer seidenglänzenden, strahligen, amiantartigen Masse. Das Salz wurde in möglichst wenig Wasser gelöst und daraus mit Alkohol als ein krystallinisches Pulver gefällt. Die über Schwefelsäure getrocknete Substanz, die im Wasser noch löslicher als das normale Salz ist, zeigte im Trockenschranke bei 100° C. keinen Gewichtsverlust.

I. 1·234 Grm. lufttrockene Substanz gaben 1·348 Grm. Bariumsulfat.

II. 0·873 Grm. lieferten 0·957 Grm. Bariumsulfat.

Gefunden			Berechnet SO_4
I.	II.	Mittel	
45·00	45·16	45·08	45·07%

Aus dem Biguanidsulfat resultiren leicht durch Wechselzersetzung mit Bariumnitrat und Bariumchlorid die salpetersauren und salzsauren Verbindungen. Von letzteren krystallisirt das neutrale Salz in Blättchen, die an der Luft verwittern und im Wasser ungemein leicht löslich sind. Mit Platinchlorid verbindet es sich zu einem krystallisirten Doppelsalze. Das chromsaure und pikrinsaure Salz, direct durch Vereinigung der Base mit der Säure erhalten, krystallisiren in feinen Prismen, das eine mit orangegelber, das andere mit dunkler gelber Farbe.

Über Äthylbiguanid und dessen Verbindungen.

Von **Friedrich Emich.**

(Mit 1 Holzschnitt.)

(Aus dem Laboratorium des Prof. R. Maly in Graz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1883.)

Rathke hat bei der Einwirkung von $CSCl_2$ oder PCl_5 auf Thioharnstoff[1], später durch die Behandlung von Guanidinsalzen mit Cyanamid[2] sein Biguanid in ausserordentlich geringer Menge erhalten. Eine glatte Syntese desselben entdeckte Herth[3] in der Einwirkung einer ammoniakalischen Kupferlösung auf Dicyandiamid. Über Aufforderung von Seite des Herrn Prof. Maly habe ich untersucht, ob diese letztere Bildungsweise eine Verallgemeinerung durch die Anwendung von Äthylamin statt Ammoniak zulässt und dabei die Beobachtung gemacht, dass die Entstehung des Äthylbiguanids noch viel leichter und glatter vor sich geht als die des einfachen Biguanids. Während nach Herth's Angaben (l. c.) die Ausbeute an Biguanidkupfer etwa 50—60% der berechneten beträgt, wird bei der Einwirkung von überschüssigem, wässerigem Äthylamin auf das Gemisch der berechneten Mengen von Kupfersulphat und Dicyandiamid beinahe die theoretische Ausbeute an schwefelsaurem Äthylbiguanidkupfer erhalten.

Die Bildung des Äthylbiguanids erfolgt nach der Gleichung

$$(CN)_2(NH_2)_2 + C_2H_5NH_2 = C_2H_6(C_2H_5)N_5.$$

Auch sonst verhält sich das Äthylbiguanid, wie zu erwarten war, in allen Stücken dem Biguanid vollkommen analog. Die im Folgenden zu beschreibenden Verbindungen wurden mit einer

---

[1] Berichte der Deutschen chem. Gesellsch., 11, 967.

[2] Daselbst, 12, 777.

[3] Monatshefte f. Chemie 1, 88.

einzigen Ausnahme aus dem Äthylbiguanidkupfersulphat dargestellt, welche Verbindung sich als Ausgangspunkt vortrefflich eignet; ihre Darstellung und Eigenschaften sollen daher zunächst beschrieben werden. An sie wird sich dann die Besprechung der übrigen Derivate in folgender Gruppirung reihen:

a) Kupferhältige Verbindungen:

1. schwefelsaures Äthylbiguanidkupfer (Ausgangsverbindung);
2. Äthylbiguanidkupfer.

b) Äthylbiguanid und dessen Salze:

3. freie Base, Äthylbiguanid;
4. neutrales Äthylbiguanidsulphat;
5. saures Äthylbiguanidsulphat;
6. neutrales Äthylbiguanidchlorhydrat;
7. saures Äthylbiguanidchlorhydrat;
8. neutrales Äthylbiguanidpikrat;
9. saures Äthylbiguanidpikrat.

c) Nickelhältige Verbindungen:

10. Äthylbiguanidnickel;
11. schwefelsaures Äthylbiguanidnickel.

Schwefelsaures Äthylbiguanidkupfer $(C_4H_{10}N_5)_2Cu.H_2SO_4$.

Zur Darstellung des schwefelsauren Äthylbiguanidkupfers löst man zuerst 7 Theile krystallisirtes Kupfersulphat und hierauf 5 Theile Dicyandiamid in etwa 40 Theilen wässerigem 20%igem Äthylamin in der Kälte oder, wenn nöthig, in ganz gelinder Wärme. Die intensiv dunkelblaue, vollkommen klare Flüssigkeit wird im geschlossenen Rohre einige Stunden auf 100° erhitzt. Schon nach wenigen Minuten beginnt in der heissen Flüssigkeit die Abscheidung prachtvoll rother, körniger Krystalle, welche nach einiger Zeit einen grossen Theil des Rohres erfüllen. Nach dem Erkalten werden dieselben durch kräftiges Schütteln von den Wänden losgelöst, abfiltrirt und mit kaltem Wasser gewaschen. Die ersten Waschwässer enthalten in Folge der

Löslichkeit der Kupferverbindung in alkalischen Flüssigkeiten immer noch eine nennenswerthe Menge derselben, die sich beim Einengen in dem Maasse abscheidet, als das Äthylamin verdampft.

Zur Bestimmung der Ausbeute wurden 2·709 Grm. Dicyandiamid mit 4·023 Grm. Kupfervitriol und 30 CC. Äthylaminlösung, wie angegeben, sorgfältig verarbeitet und 6·002 Grm. der wasserfreien Kupferverbindung erhalten. Die Rechnung verlangt gemäss der Gleichung

$$2(CN)_2(NH_2)_2 + 2C_2H_5NH_2 + CuSO_4 = (C_4H_{10}N_5)_2Cu \cdot H_2SO_4$$

eine Menge von 6·454 Grm.; es wurden also 93% der theoretischen Ausbeute erzielt.

Die Reaction geht auch bei gewöhnlicher Temperatur vor sich, nur mit dem Unterschiede, dass dann zum vollständigen Verlauf derselben etwa eine Woche erforderlich ist, und die ganze Flüssigkeit in diesem Falle zu einem Krystallbrei von rothen Nadeln erstarrt.

Eigenschaften. Das Äthylbiguanidkupfersulphat krystallisirt, wie aus dem Gesagten zu entnehmen ist, in zwei Formen: geschah die Bildung in der Hitze, so stellt es lebhaft carminrothe, körnige Krystalle bis zu Hirsekorngröse von ausserordentlich schönem Glanze dar; ging die Abscheidung dagegen in der Kälte vor sich, so bildet es rein rosenrothe, meist mikroskopische Nadeln, welche ein Molekül Wasser enthalten, während die erstere körnige, dunkler rothe Substanz wasserfrei ist.

Die Verbindung ist gleich dem Biguanidkupfersulphat, namentlich in der in Nadeln krystallisirten Form, oder in fein gepulvertem Zustande auffallend hygroskopisch (nimmt z. B. nach dem Trocknen über Schwefelsäure in einem gewöhnlichen Chlorcalciumexsiccator wieder an Gewicht zu) und kann nur durch mehrstündiges Trocknen bei 115—120° wasserfrei erhalten werden.

Das schwefelsaure Äthylbiguanidkupfer ist in reinem Wasser nahezu unlöslich, denn 100 Theile desselben nehmen nur 0·0214 Theile auf, oder 1 Theil bedarf 4670 Theile Wasser zur Lösung; die Lösung ist blassrosa gefärbt. In alkalischen Flüssigkeiten löst es sich — jedenfalls unter partieller Bildung der kupferhältigen Base — leichter. Von verdünnten Säuren wird es, in

dem die betreffenden kupferfreien Äthylbiguanid- und Kupfersalze gebildet werden, leicht aufgenommen. Auch die Kohlensäure des gewöhnlichen destillirten Wassers wirkt schon in dieser Art; daher löst nicht ausgekochtes Wasser mehr als reines.

Das schwefelsaure Äthylbiguanidkupfer entsteht auch beim Zusammenbringen von Kupferhydroxid mit schwefelsaurem Äthylbiguanid oder durch Einwirkung von Kupfersulphatlösung auf Äthylbiguanid. Im letzteren Falle scheidet es sich, wenn die kalten, wässerigen, mässig verdünnten Lösungen gemischt werden, in Form ausserordentlich feiner Nädelchen ab, die bei 600facher Vergrösserung noch kaum zu erkennen sind und sich so dicht verfilzen, dass die Probeflüssigkeit zu einer Gallerte erstarrt. Erwärmt man zum Sieden, so fällt die Verbindung als schweres Pulver zu Boden.

Zu den folgenden Analysen diente bei der oben angegebenen Temperatur getrocknete Substanz verschiedener Darstellungen.

1. 0·5885 Grm. der Verbindung in verd. HCl gelöst, gaben 0·3287 Grm. $BaSO_4$ oder 7·67% S.
2. 0·429 Grm. Substanz in verd. HNO_3 gelöst, elektrolysirt, gaben 0·0643 Grm. oder 15·0% Cu.
3. Das Filtrat vom $BaSO_4$ (Nr. 1) mit SH_2 gefällt, und das CuS im H-Strome geglüht, gab 0·0957 Grm. Cu_2S oder 15·4% Cu.
4. 0·3840 Grm. Substanz gaben in salzsaurer Lösung mit Zn im Platintiegel gefällt, 0·0590 Grm. oder 15·3% Cu.
5. 0·2730 Grm. Substanz im Schiffchen verbrannt, gaben 0·2325 Grm. CO_2 und 0·1280 Grm. H_2O.
6. 0·217 Grm. Substanz nach Dumas verbrannt, gaben 64·5 CC Stickstoff bei 17° C. und 732·6 Mm. Druck.

In Procenten:

	Wasserfreies schwefelsaures Äthylbiguanidkupfer $(C_4H_{10}N_5)_2Cu.H_2SO_4$ berechnet	gefunden
C	23·00	23·23
H	5·27	5·21
N	33·54	33.9
Cu	15·19	15·23 (Mittel)
S	7·67	7·67
O	15·33	—

Wasserbestimmung. 0·9595 Grm. exsiccatortrockene, in Nadeln kryst. Substanz, verloren bei 115—120° C. 0·0415 Grm. oder 4·32% H_2O. Die Rechnung verlangt für 1 Mol. Wasser 4·13%. Die in hoher Temperatur abgeschiedene, körnige Substanz erlitt nach dem Trocknen über Schwefelsäure beim Erhitzen auf 115° einen viel kleineren Gewichtsverlust, der offenbar von hygroskopischem Wasser herrührte.

Äthylbiguanidkupfer $(C_4H_{10}N_5)_2Cu$.

Bei der Einwirkung einer Lösung von Kupferhydroxid in Äthylamin auf Dicyandiamid findet ganz analog wie bei der Herth'schen Reaction die Bildung des Äthylbiguanidkupfers statt. Der Process geht im Laufe einiger Tage schon in der Kälte vor sich und kann jedenfalls auch als eine glatte Synthese bezeichnet werden. Dessenungeachtet eignet er sich deshalb nicht sehr vortheilhaft zur Darstellung der Substanz, weil das Kupferhydroxid in wässerigem Äthylamin nicht so leicht löslich ist wie der Kupfervitriol und man daher mit viel kupferärmeren Lösungen arbeiten muss, als bei der Darstellung des schwefelsauren Äthylbiguanidkupfers, aus welchem man es nach dem von Rathke beim Biguanidkupfer angewendeten Verfahren leicht erhalten kann. Zu diesem Behufe löst man zweckmässig das Äthylbiguanidkupfersulphat zuerst in sehr verdünnter Schwefelsäure, erwärmt bis fast zum Kochen, versetzt mit Lauge zum Überschusse, filtrirt, wenn nöthig, und lässt langsam erkalten. Dabei scheiden sich bald prachtvoll granat- bis carminrothe Nadeln der Kupferverbindung ab, die nach dem Waschen mit kaltem Wasser rein sind. Die Substanz kann aus heissem Wasser umkrystallisirt werden, setzt sich aber aus der heissen Lösung meist zum Theile in Körnern ab; durch sehr langsame Krystallisation erhält man etwa zwei Millimeter lange und einen halben Millimeter dicke Krystalle von besonderer Schönheit.

Das Äthylbiguanidkupfer ist in kaltem Wasser schwer, in heissem leichter löslich. Die blass-violettrothe Lösung reagirt stark alkalisch und fällt viele Metallsalze, wie z. B. $MgCl_2$, $ZnCl_2$, $HgCl_2$ etc. Durch schwefelsaures Kalium oder Natrium wird sie ebenfalls gefällt, indem die oben beschriebene, sehr schwer lösliche schwefelsaure Kupferverbindung als Niederschlag entsteht, und KOH oder NaOH frei werden. Die Lösung zieht an

der Luft Kohlensäure an und scheidet das Carbonat der Kupferbase in feinen blassrothen Nadeln ab.

Die Substanz ist wasserfrei, verträgt noch eine Temperatur von 125°, gibt aber bei 140° ammoniakalische Dämpfe ab; bei weiterem Erhitzen färbt sie sich dunkel.

Die folgenden Analysen sind mit Präparaten der oben angeführten Bildungsweisen ausgeführt.

1. 0·4140 Grm. bei 100° getrocknete Substanz in verd. HCl gelöst und mit Zn im Platintiegel behandelt, gaben 0·0830 Grm. oder 20·0% Cu.
2. 0.5665 Grm. auf dieselbe Art behandelt, gaben 0·1125 Grm. oder 19·8% Cu.
3. 0·2282 Grm. mit Kupferoxyd im Kohlensäurestrom verbrannt, lieferten mit Anwendung des Schiff'schen Stickstoffauffangapparates 86·5 CC. N bei 736·2 Mm. Druck und 15·5° C. oder 99·2 Mg. = 43·5% N.

In Procenten:

	Äthylbiguanidkupfer $(C_4H_{10}N_5)_2Cu$ berechnet	gefunden
Cu.....	20·0	19·9 (Mittel)
N	43·8	43·5

Äthylbiguanid $C_2N_5H_6(C_2H_5)$.

Zur Darstellung des Äthylbiguanids wird eines der unten zu besprechenden Sulphate in wässeriger Lösung mit der berechneten Menge titrirten Barytwassers zerlegt und die vom $BaSO_4$ abfiltrirte Flüssigkeit bei möglichstem Luftabschluss, am besten im Vacuum eingedampft.

Eigenschaften. Die Base bildet eine weisse, ausserordentlich zerfleischliche Krystallmasse, die auch in Weingeist leicht, in Äther aber nicht löslich ist. Beim Einengen der wässerigen Lösung erhält man einen klaren Syrup, der oft erst nach mehrwöchentlichem Stehenlassen über Schwefelsäure erstarrt. Die Base reagirt auf feuchtes Lackmuspapier stark alkalisch, treibt gleich dem Biguanid Ammoniak aus seinen Salzen aus und zieht auch wie dieses die Kohlensäure der Luft mit Begierde an.

Beim Erhitzen im Röhrchen entwickelt sich unter lebhaftem Aufschäumen Ammoniak und Äthylamin (dem Geruche nach zu schliessen), und es bleibt bei höherer Temperatur eine gelbliche, mellonartige Masse zurück, die bei beginnender Rothgluth unter Abgabe von nach Blausäure riechenden Dämpfen sublimirt, kaum eine Spur Kohle hinterlassend.

Wegen des geringen Krystallisationsvermögens musste von der Analyse der Base abgesehen werden; ihre Zusammensetzung ist nicht nur aus der Analogie mit dem Biguanid, sondern auch durch die Untersuchung der Salze festgestellt worden.

Das Äthylbiguanid bildet gleich dem einfachen Biguanid (vergl. hierüber die folgende Abhandlung) zwei Reihen von Salzen, sauer und neutral reagirende, von welchen die ersteren ein, die letzteren zwei Äquivalente Säure enthalten. Die meisten Salze krystallisiren, so ausser den zu besprechenden Sulphaten, Chlorhydraten und Pikraten auch das Carbonat und Oxalat. Die letzteren sind übrigens sehr leicht löslich; das Carbonat bildet eine alkalisch reagirende, strahlig krystallinische Masse, das neutrale Oxolat sechsseitige Täfelchen.

Gleich dem Biguanid lässt sich im Äthylbiguanid ein Wasserstoffatom durch ein Äquivalent gewisser Schwermetalle ersetzen, wobei metallhaltige Basen entstehen, welche dasselbe Sättigungsvermögen zu Säuren wie die freie Basis zeigen. Solche Metalle sind Kupfer, Nickel, Kobalt; die entsprechenden Kupferverbindungen sind bereits beschrieben worden. Die metallhältigen Verbindungen entstehen allgemein bei der Einwirkung des Äthylbiguanids auf die betreffenden Metallsalzlösungen, wobei, so lange das Äthylbiguanid noch nicht im Überschusse ist, die Metalle als Hydroxide ausfallen; sobald aber ein Überschuss der Base zur Einwirkung gelangt, ändern die Niederschläge ihre Zusammensetzung und Farbe, indem die betreffenden metallsubstituirten Äthylbiguanidsalze entstehen.

Neutrales schwefelsaures Äthylbiguanid

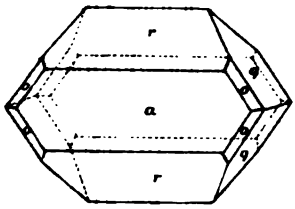
$$(C_4H_{11}N_5)_2 . H_2SO_4 + 1\,^1/_2 H_2O.$$

Zur Darstellung des neutralen Biguanidsulphats wird schwefelsaures Äthylbiguanidkupfer fein zerrieben, mit Wasser

verrührt und unter Erwärmen ein langsamer Schwefelwasserstoffstrom durch die Suspension geleitet. Das Filrat vom CuS gibt beim Eindampfen am Wasserbade leicht eine übersättigte Lösung, aus der sich indess das Salz bei längerem Stehen in schön sternförmig gruppirten Prismen abscheidet. Bei langsamer Verdunstung über Schwefelsäure erhält man wohl ausgebildete Krystalle, welche $1^1/_2$ Mol. Wasser enthalten. Sie sind in Wasser leicht, in Alkohol und Äther nicht löslich. Die wässerige Lösung wird auf Zusatz von Weingeist getrübt und scheidet das Salz in concentrisch gruppirten Nadeln ab.

Die krystallographischen und optischen Eigenschaften hat Herr Assistent Pallos im Laboratorium des Herrn Prof. Rumpf untersucht und Folgendes hierüber freundlichst mitgetheilt:

„Das schwefelsaure Äthylbiguanid krystallisirt im rhombischen Systeme. Die Krystalle sind klein, wasserhell, glasglänzend, und haben, wie aus nebenstehender Fig. 1 ersichtlich ist, einen tafelförmigen Habitus. Vorwaltend entwickelt sind das Brachypinakoid *a* und das Brachydoma *r*; beide Flächen besitzen in Folge Oscillirung horizontale Streifungen.



Die Flächen des Makrodomas *q* und der Pyramide *o* sind stets vollkommen glatt.

Nach der Fläche *a* herrscht vollkommene Spaltbarkeit.

An den Krystallen treten folgende Formen auf:

a, $\infty\breve{P}\infty$, (100); *r*, $\frac{1}{3}\breve{P}\infty$, (304); *q*, $\bar{P}\infty$, (011); *o*, *P*, (111).

Daran wurden im Normalwinkel

	gemessen	gerechnet
$a : o = 100 : 111 =$	51°52′	52°
$o : q = 111 : 011 =$	*38°	—
$a : r = 100 : 304 =$	45°30′	45°35′
$r : r = 304 : \bar{3}04 =$	89°	88°58′
$q : q = 011 : 01\bar{1} =$	*73°	—
$o : r = 111 : 304 =$	40°30′	40°26′

Die mit * versehenen Winkel wurden der Rechnung zu Grunde gelegt und es ergab sich daraus folgendes Axenverhältniss:

$$a : b : c = 1{\cdot}0420 : 1 : 1{\cdot}3564.$$

Die Ebene der optischen Axen, deren scheinbarer Winkel nahe 90° ist, liegt im brachydiagonalen Hauptschnit und die erste optische Mittellinie fällt in die verticale Axe *c*.

Der optische Charakter der Doppelbrechung ist +."

Die Krystalle sind luftbeständig und verlieren auch im Exsiccator nicht an Gewicht; dagegen wird das Krystallwasser bei 100° leicht abgegeben, wobei das Salz zu einem weissen Pulver zerfällt. Im wasserfreien Zustande auf 180° erhitzt, schmilzt es, bei noch höherer Temperatur zersetzt es sich unter Entwicklung von Cyanwasserstoffgeruch und Bildung eines weissen Sublimats.

Analysen:

1. 0·4275 Grm. bei 105° getrocknete Substanz gaben 0·2770 Grm. $BaSO_4$.
2. 0·4575 Grm. exsiccatortrockene Substanz verloren beim Trocknen bei 105° 0·0310 Grm. H_2O.
3. 0·8460 Grm. in gleicher Art behandelt, enthielten 0·0540 Grm. H_2O.

	Berechnet für $(C_4H_{11}N_5)_2.H_2SO_4$	Gefunden
SO_3.....	22·47%	22·27%
	Berechnet für $(C_4H_{11}N_5)_2H_2SO_4.1\frac{1}{2}H_2O$	
H_2O.....	6·27%	6·5% (Mittel)

Saures schwefelsaures Äthylbiguanid

$$(C_4H_{11}N_5)\cdot H_2SO_4 + 1\frac{1}{2}H_2O.$$

Versetzt man eine concentrirte wässerige Lösung von 1 Mol. des neutralen Salzes mit 1 Mol. Schwefelsäure, so fällt das saure in Form eines Krystallmehles nieder. Ebenso kann man es auch durch Zersetzung des schwefelsauren Äthylbiguanidkupfers erhalten, indem man dieses mit wenig Wasser zerreibt, verdünnte Schwefelsäure in einem kleinen Überschusse zusetzt und krystalli-

siren lässt, ein Verfahren, welches Herth bei seiner Untersuchung des Biguanids ebenfalls angewendet hat.

Das saure Äthylbiguanidsulphat bildet glasglänzende, durchsichtige, farblose, dem Anscheine nach rhombische Krystalle, die in Wasser zwar noch ziemlich leicht, aber immerhin bedeutend schwerer als das neutrale Salz löslich sind. Von Alkohol und Äther werden sie nicht aufgenommen. Sie sind luftbeständig und enthalten ebenfalls $1^1/_2$ Mol. Wasser, die bei 100° leicht abgegeben werden.

100 Theile Wasser von Zimmertemperatur lösen 4·00 Theile des krystallisirten Salzes. (10·414 Grm. Lösung hinterliessen 0·3633 Grm. wasserfreies Salz).

Analysen:

1. 0·4900 Grm. bei 105° getrocknete Substanz gaben 0·5045 Grm. $BaSO_4$.
2. 0·8770 Grm. exsiccatortrockene Substanz gaben bei 105° 0·0933 Grm. H_2O ab.

	Berechnet für $C_4H_{11}N_5.H_2SO_4$	Gefunden
SO_3.....	35·24%	35·35%

	Berechnet für $C_4H_{11}N_5.H_2SO_4.1^1/_2H_2O$	
H_2O.....	10·63%	10·64%.

Neutrales salzsaures Äthylbiguanid $C_4H_{11}N_5.HCl$.

Das durch Wechselzersetzung mit Chlorbaryum aus dem neutralen Sulphat erhaltene chlorwasserstoffsaure Äthylbiguanid stellt sechsseitige, tafelförmige, farblose, glasglänzende, in Wasser sehr leicht, in Alkohol ebenfalls lösliche Krystalle dar. Die alkoholische Lösung wird durch Äther krystallinisch gefällt. Die Krystalle sind wasserfrei.

Analyse:

0·3108 Grm. Substanz gaben durch Fällen mit $AgNO_3$, 0·2632 Grm. AgCl und 0·0025 Grm. Ag, entsprechend 0.0660 Grm. Cl.

	Berechnet für $C_4H_{11}N_5.HCl$	Gefunden
Cl.....	21·45%	21·24%

Das

saure salzsaure Äthylbiguanid $C_4H_{11}N_5.2HCl_4$

ist, abgesehen von der stark sauren Reaction seiner wässerigen Lösung in seinen Eigenschaften wesentlich mit denen des neutralen Salzes übereinstimmend.

Analyse:

0·2250 Grm. Substanz gaben 0·3153 Grm. AgCl und 0·001 Grm. Ag, entsprechend 0·0780 Grm. Cl.

	Berechnet für $C_4H_{11}N_5.2HCl$	Gefunden
Cl.....	35·0%	34·7%.

Da Rathke bei der Untersuchung des Biguanids eine schön krystallisirende Platinchloridverbindung von der Zusammensetzung $C_2H_7N_5.2HCl.PtCl_4+2aq$ erhalten hatte, wurde auch beim Äthylbiguanid versucht, eine solche darzustellen. Es zeigte sich, dass ein Platindoppelsalz zwar existirt und beim Eindampfen der gemischten Lösungen auch schliesslich auskrystallisirt, allein das Präparat ist in Wasser sehr leicht löslich. Es wurde durch Auflösen in Alkohol und Fällen mit wenig Äther gereinigt, und stellt dann ein gelbes krystallinisches Pulver dar. Dem gefundenen Platingehalte von 35·5% Pt entspricht annähernd das Salz $C_4H_{11}N_5.2HCl.PtCl_4$, welches 36·5% Pt enthält.

Beim Verdunstenlassen der gemischten Lösungen von salzsaurem Äthylbiguanid und Goldchlorid wurden zwei schön krystallisirende Präparate erhalten, ein leichter und ein schwerer lösliches, die durch fractionirte Krystallisation getrennt wurden; beide krystallisiren in Nadeln, die des letzteren sind jedoch hellgelb und lang, die des ersteren dunkler und kürzer, beide meist in schöne Büscheln gruppirt. Die Analysen des schwerer löslichen Salzes ergaben einen Gehalt von 7·8% C, 1·8% H, 50·4% Au und 27·9% Cl, welchen Zahlen eine Verbindung von der empirischen Zusammensetzung $2C_4H_{11}C_5.3AuCl_3$ am nächsten kommt, indem ihr 8·2% C, 1·9% H, 50·5% Au und 27·4% Cl entsprechen. Diese eigenthümliche Formel dürfte ihren Grund in der Bildung einer oder mehrerer Goldbasen haben, die sich neuerdings mit Goldchlorid verbinden könnten.

Neutrales pikrinsaures Äthylbiguanid

$C_4H_{11}N_5.C_6H_2(OH)(NO_2)_3$

Das neutrale Pikrat krystallisirt in grossen schellackbraunen, plattgedrückten spiessförmigen Krystallen, die häufig zu Büscheln vereinigt sind. Es ist in heissem Wasser sehr leicht, in kaltem

nicht schwer löslich, enthält kein Krystallwasser, schmilzt bei gelindem Erwärmen am Platinblech zu einer braunen Flüssigkeit und verbrennt beim stärkern Erhitzen mit ruhiger, leuchtender Flamme.

Analyse:

0·2883 Grm. bei 100° getrocknete Substanz mit Kupferoxyd und chromsaurem Blei verbrannt, gaben 76·5 CC. Stickstoff bei 16° C. und 741·2 Mm. Druck, entsprechend 88·83 Mg. N.

	Berechnet für $C_4H_{11}N_5.C_6H_3N_3O_7$	Gefunden
N.....	31·28%	30·8%.

Saures pikrinsaures Äthylbiguanid $C_4H_{11}N_5.2C_6H_2(OH)(NO_2)_3$.

Versetzt man die Lösung des vorher beschriebenen Salzes mit warmer Pikrinsäurelösung, so bringen schon die ersten Tropfen eine lebhaft gelbe Fällung hervor, die sich so lange vermehrt, bis man auf 1 Mol. des neutralen Salzes 1 Mol. Pikrinsäure hinzugefügt hat. Beim Kochen löst sich der Niederschlag auf und scheidet sich beim Erkalten in feinen, concentrisch gruppirten, seidenglänzenden Nadeln von citronengelber Farbe ab, die in kaltem Wasser nur schwer, in heissem leicht löslich sind und beim Erhitzen am Platinblech schwach verpuffen. Sie reagiren auf feuchtes Lackmus deutlich sauer.

Da über die Natur des Körpers ein Zweifel kaum möglich war, wurde keine Analyse, sondern nur ein beiläufiger Titrirversuch damit angestellt: 0·242 Grm. bei 100° getrocknete Substanz in heissem Wasser gelöst, verbrauchten zur Neutralisation 1·3 CC. Natronlauge (à 1 CC.=10·88 Mg. NaOH; Liebreich'sche Gypsplättchen als Indicator) oder 14·1 Mg. NaOH. Die Theorie verlangt für die Zusammensetzung $C_4H_{11}N_5.2C_6H_3N_3O_7$ 16·5 Mg.

Äthylbiguanidnickel $(C_4H_{10}N_5)_2Ni$.

Die Verbindungen, in welchen 1 Äq. Nickel die Stelle von 1 Atom Wasserstoff in den Biguaniden vertritt[1], zeichnen sich durch ihre auffallende, hellorange Färbung aus; in ihren übrigen Eigenschaften, namentlich, was die Löslichkeit u. s. w. anbe-

[1] Ich habe auch Biguanidnickel dargestellt, jedoch nicht analysirt.

langt, stimmen sie mit den entsprechenden Kupferverbindungen überein.

Kocht man Äthylbiguanid mit Nickelhydroxydul und filtrirt heiss, so erhält man eine schön goldgelbe Lösung, etwa von der Farbe des in Cyankalium gelösten Nickelcyanürs, aus welcher sich beim Erkalten oder Eindampfen feinkörnige Krystalle der nickelkältigen Basis $(C_4H_{10}N_5)_2Ni$ abscheiden.

Analyse:

0·2375 Grm. bei 105° getrocknete Substanz gaben durch Glühen Befeuchten mit HNO_3 etc. 0·0555 Grm. NiO oder 18·4% Ni.

	Berechnet für $(C_4H_{10}N_5)_2Ni$	Gefunden
Ni	18·7%	18·4%.

Schwefelsaures Äthylbiguanidnickel $(C_4H_{10}N_5)_2Ni.H_2SO_4$.

Versetzt man Nickelsulphatlösung mit überschüssigem Äthylbiguanid, so erhält man zuerst einen apfelgrünen Niederschlag von NiO_2H_2, der bei einem grösseren Überschuss des Fällungsmittels bald lichtockerfarben, beim Erwärmen aber hellorange und dicht wird, sich zu Boden setzt und sehr leicht abfiltrirt werden kann. Nach dem Waschen mit kaltem Wasser erwies sich das Präparat als ein Gemenge von Äthylbiguanidnickel und dessen Sulphat. Dies erscheint erklärlich, wenn man annimmt, dass das freie Äthylbiguanid auf das gebildete Nickeläthylbiguanidsulphat gleich einer andern starken Basis zum Theile zersetzend einwirkt, Äthylbiguanidsulphat und Nickeläthylbiguanid bildet. Zur Darstellung eines reinen Präparates wurde daher die den erwähnten gelben Niederschlag und überschüssiges Äthylbiguanid enthaltende Flüssigkeit so lange mit sehr verdünnter Schwefelsäure versetzt, bis nicht nur sie, sondern auch der körnige Niederschlag, auf Lackmuspapier gebracht, absolut neutral reagirten. Da die Schwefelsäure nur sehr langsam einwirkt, so dauert diese Operation des Neutralisirens ziemlich lange.

Auch durch Kochen von frisch gefälltem Nickelhydroxydul mit überschüssigem schwefelsaurem Äthylbiguanidsulphat kann die Verbindung erhalten werden, wenngleich hiebei ein kleiner

Antheil des Hydroxyduls nur schwer umgewandelt zu werden scheint.

Zu den folgenden Bestimmungen haben nach beiden Methoden dargestellte Präparate gedient:

1. 0·203 Grm. bei 115° getrocknete Substanz gaben 0·1098 Grm. $BaSO_4$ oder 7·5% S.
2. 0·4200 Grm. Substanz gaben 0·2268 Grm. $BaSO_4$ entsprechend 7·4% S.
3. 0·4018 Grm. Substanz geglüht, in Königswasser gelöst, mit Lauge gefällt, gaben 0·0745 Grm. NiO oder 14·6% Ni.

	Berechnet für $(C_4H_{10}N_5)_2Ni.H_2SO_4$	Gefunden
Ni.....	14·3%	14·6%
S	7·7%	7·45% (Mittel).

Ohne Zweifel geben auch viele andere Schwermetalle ähnliche Metallverbindungen wie Kupfer und Nickel, doch wurden weder bei Eisen noch bei Mangan, Silber, Blei oder Quecksilber schön krystallisirende oder auffallend gefärbte Präparate erhalten. Ein bemerkenswerthes Verhalten zeigt höchstens das Kobalt, insoferne als dessen Hydroxydul in überschüssigem Äthylbiguanid leicht mit intensiv weinrother Farbe löslich ist. Trotz dieser auffallenden Verschiedenheit des Kobalts gegenüber dem Nickel gelang eine Trennung der beiden Metalle mit Hilfe der schwefelsauren Äthylbiguanidverbindungen nicht, indem der Nickelniederschlag auch nach längerem Waschen noch eine bedeutende Menge Kobalt zurückhielt.

Graz, im April 1883.

Beiträge zur Kenntniss des Biguanids.

Von **Friedrich Emich.**

(Aus dem Laboratorium des Prof. R. Maly in Graz.)

Die vorliegende Arbeit hat zunächst den Zweck, einige Angaben, welche Rathke[1] über die interessante Base, das Biguanid $C_2H_7N_5$, gemacht hat, richtig zu stellen, namentlich jene, die sich auf das Sättigungsvermögen gegen Säuren und die angebliche Änderung dieses Sättigungsvermögens durch den Eintritt von Kupfer beziehen, wobei bekanntlich eine neue Base, das rothe Biguanidkupfer $C_2H_6cuN_5$ entsteht.

Der zweite Theil der Arbeit enthält einen Beitrag zur Constitution des Biguanids, das, wie ich gefunden, unter dem Einflusse von verdünnter Schwefelsäure bei höherer Temperatur unter Wasseraufnahme glatt in Kohlensäure und Ammoniak gespalten wird.

I.

Rathke l. c. gibt an, dass das Biguanid $C_2H_7N_5$ zwei Moleküle einbasischer Säuren oder ein Molekül der zweibasischen Schwefelsäure zu neutral reagirenden Salzen binde, und er beschreibt genauer das schwefelsaure Biguanid für welches er die Zusammensetzung $C_2H_7N_5 . H_2SO_4 + H_2O$ findet.

Die Zusammensetzung des Sulfats vom Biguanidkupfer hat Rathke aber $(C_2H_6cuN_5)_2 . H_2SO_4 + aq$ gefunden, die Kupferbase demnach selbst als einsäurig erkannt, und er hebt dies speciell hervor, indem er sagt: dass das Sättigungsvermögen der Base durch den Eintritt von 1 Äq. Kupfer für 1 Atom Wasserstoff auf die Hälfte herabgesetzt werde.

---

[1] Ber. d. Deutschen chem. Gesellsch. 12, p. 781 u. 782.

Bei der von mir ausgeführten Untersuchung des Äthylbiguanids hatte sich ergeben, dass diese leicht in grösserer Menge zu gewinnende Base (in ihrem kupferfreien Zustande) zwei Reihen von gut krystallisirten Salzen gibt, und zwar neutral reagirende, welche ein Äquivalent Säure enthielten und sauer reagirende, welche zwei Äquivalente Säure enthielten, die man daher passend als neutrale und saure Salze bezeichnen konnte. Wenn man z. B. dem sauren schwefelsauren Äthylbiguanid $C_2H_6(C_2H_5)N_5 . H_2SO_4$ mit Barytwasser die Hälfte, also ein Äq. Schwefelsäure entzieht, so erhält man eine neutrale Flüssigkeit, aus der dann ein Äthylbiguanid mit halb soviel Schwefelsäure krystallisirt.

Nach diesem war es von vorne herein unwahrscheinlich, dass das einfache Biguanid eine andere Acidität besitzen sollte, als die äthylirte Base, es drängte sich vielmehr die Überzeugung auf, dass auch das einfache Biguanid zwei Reihen von Salzen gibt, neutrale und saure, und dass das von Rathke beschriebene Sulfat in Folge seiner Darstellung nur das saure Sulfat sein konnte. Rathke löste nämlich die im Wasser nicht lösliche schwefelsaure Kupferbase in verdünnter Schwefelsäure, entkupferte mit Schwefelwasserstoff und engte die nun überschüssige Schwefelsäure enthaltende Flüssigkeit ein, aus der dann das saure Sulfat auskrystallisiren musste. Die Zusammensetzung ist richtig angegeben worden, aber Rathke's Angabe, dass die Base ein Molekül Schwefelsäure zu neutral reagirenden Salzen binde, ist unrichtig, denn dieses Salz reagirt stark sauer, wie ich mich an einem von mir dargestellten Präparate leicht überzeugen konnte.

Dass sich diese Unrichtigkeit in Rathke's sonst so schöne Arbeit einschleichen konnte, erklärt sich aus dem Umstande, dass er gezwungen war, seine Untersuchungen mit ausserordentlich geringen Substanzmengen auszuführen.

Es war daher noch nöthig, das bisher nicht beschriebene neutrale Biguanidsulfat darzustellen. Zu diesem Zwecke wurde nach Herth's Methode [1] gewonnenes Biguanidkupfer mit Schwefelsäure genau neutralisirt, das so erhaltene Biguanidkupfersulfat

[1] Monatshefte f. Chemie 1, p. 94.

in Wasser suspendirt und durch Einleiten von Schwefelwasserstoff zerlegt. Das durch Abfiltriren vom Schwefelkupfer erhaltene Filtrat gab, zum Krystallisiren eingedampft, ein Salz, das nach seiner Reaction auf Lackmus und nach seiner Zusammensetzung als das eigentliche, neutrale schwefelsaure Biguanid $(C_2H_7N_5)_2 . H_2SO_4 + 2H_2O$ bezeichnet werden muss.

Analysen.

1) 0·1132 Grm. krystallisirte Substanz gaben beim Verbrennen mit Kupferoxid und Bleichromat 42·5 CC. Stickstoff bei 21° C. und 724 Mm. Druck.

2) 0·1674 Grm. krystallisirtes Salz gaben 0·115 Grm. $BaSO_4$.

3) Beim Trocknen bei 105° erlitten 0·9417 Grm. einen Gewichtsverlust von 0·1013 Grm.

Oder in 100 Theilen:

	Berechnet für $(C_2H_7N_5)_2 . H_2SO_4 + 2H_2O$	Gefunden
Stickstoff	41·7	41·8
Schwefels. (SO_3)	23·8	23·6
Wasser	10·71	10·76.

Das neutrale schwefelsaure Biguanid stellt grosse, farblose Krystalle dar, die in Wasser sehr leicht löslich sind und bitterlich salzig schmecken; sie enthalten zwei Molekule Krystallwasser.

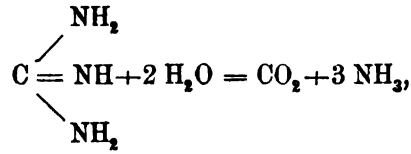
Zur weiteren Controlle wurde nach Herth's Vorschrift dargestelltes, also saures Biguanidsulfat mit Barytwasser von bekanntem Gehalt bis zum Eintreten der neutralen Reaction titrirt; die vom $BaSO_4$ abfiltrirte Flüssigkeit lieferte beim Eindampfen schöne Krystalle des neutralen Salzes (welche zur Analyse 2 gedient haben).

0·4325 Grm. saures Biguanidsulfat $C_2H_7N_5 . H_2SO_4 + H_2O$ verbrauchten 4·35 CC. Barytwasser (à 1 CC. = 18·49 Mgrm. SO_3), diesen entsprechen 80·43 Mgrm. SO_3 oder 18·6% vom Gewichte der angewandten Verbindung. Die Rechnung verlangt für ½ Äq. SO_3 18·5%.

Es ist sonach das Biguanid gleich seiner Kupferverbindung als eine einsäurige Base zu bezeichnen, da erst zwei Moleküle derselben ein Molekül der zweibasischen Schwefelsäure zur neutralen Flüssigkeit sättigen.

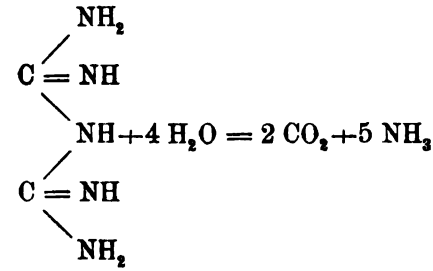
II.

Nach Ossikovszky[1] spaltet sich das Guanidin beim anhaltenden Kochen mit Laugen oder Säuren unter Wasseraufnahme in Kohlensäure und Ammoniak, gemäss der Gleichung



welche jedoch nicht quantitativ festgestellt, sondern nur aus der Beobachtung erschlossen wurde, dass die Base beim Kochen mit Barytwasser Ammoniak, beim Erhitzen mit Säuren aber Kohlensäure entwickelte.

Wenn nun das Biguanid eine dem Guanidin analoge Constitution besitzt, so war es nicht unwahrscheinlich, dass es sich durch Einwirkung starker Säuren und hoher Temperatur auch in ähnlicher Art, also nach dem Schema



zersetzen liesse.

Um die Reaction quantitativ verfolgen zu können, wurden gewogene Mengen sauren schwefelsauren Biguanids und titrirte Schwefelsäure von 1·47 spec. Gew. in ein Kaliglasrohr eingeschlossen und unter mehrmaligem Öffnen successive bis auf

[1] Ber. d. Deutschen chem. Gesellsch. 5, pag. 668.

200 bis 210° so lange erhitzt, bis eine Zunahme des innern Druckes nicht mehr beobachtet wurde. Die Menge gebildeten Ammoniaks wurde nach dem Öffnen des Rohres durch Titriren bestimmt.

1. Versuch. 0·426 Grm. krystallisirtes saures Biguanidsulfat ($C_2H_7N_5 . H_2SO_4 + H_2O$) wurden mit 6·7135 Grm. eines Gemisches von 1 Vol. concentrirter Schwefelsäure mit 1 Vol. Wasser [1 Grm. dieser verdünnten Säure entsprach 42·9 CC. Lauge (à 1 CC. = 10·88 Mgrm. Na OH)] etwa 6 Stunden auf 170° und 12 Stunden auf 200—210° erhitzt. Zur Neutralisation von 25 CC. des auf 250 CC. verdünnten, wasserklaren Röhreninhaltes waren 26·6 CC. Lauge erforderlich.[1]

2. Versuch. 0·2743 Grm. derselben Substanz wurden mit 2·7595 Grm. der obigen verdünnten Säure wie unter 1) erhitzt. Der Röhreninhalt wurde auf 100 CC. verdünnt und zur Neutralisation von 50 CC. 52·7 CC. Lauge gebraucht.

Zum Überflusse wurde das entstandene Ammoniak in beiden Fällen in einer kleinen Probe qualitativ nachgewiesen.

In der folgenden Übersicht sind die Resultate der beiden Versuche zusammengestellt:

	Versuch 1.	Versuch 2.
Der angewandten Schwefelsäure entsprachen	288·0 CC. Lauge	118·4 CC. Lauge
der Schwefelsäure des sauren Biguanidsulfats	14·5 „	9·3 „ „
in Summe	302·5 CC. Lauge	127·7 CC. Lauge
zum Rücktitriren wurden verbraucht	266·0 „ „	105·4 „ „
dem entstandenen NH_3 entsprachen demnach	36·5 CC. Lauge	22·3 CC. Lauge
d. h. gebildetes Ammoniak	169 Mgrm. NH_3	103 Mgrm. NH_3
(berechnet	167 „ „	107 „ „)

[1] Die von der Schwefelsäure dem Glase entnommene Alkalimenge konnte vernachlässigt werden, da sie, wie ich mich durch Eindampfen eines gemessenen Flüssigkeitsquantums überzeugte, nur etwa 2 Mgrm. NH_3 entsprach.

Durch diese Zahlen ist festgestellt, dass sich das Biguanid beim Erhitzen mit Schwefelsäure von 1·47 spec. Gew. unter Wasseraufnahme glatt in Kohlensäure und Ammoniak spaltet, und es gewinnt hiedurch die Annahme der Constitution, die jener des Guanidins analog ist, sicher neuerdings an Wahrscheinlichkeit.

Es kann noch beigefügt werden, dass ein paar Versuche, Biguanid durch Einwirkung heisser, concentrirter Ammoniakflüssigkeit in Guanidin überzuführen, zu keinem positiven Resultate führten.

Graz, im April 1883.

Zur Theorie der zu einer binomischen Irrationalität gehörigen Abel'schen Integrale.

Von Dr. **Otto Biermann** in Prag.

Mit Hilfe der Theorie der hyperelliptischen Integrale, die mein hochverehrter Lehrer Herr Professor Weierstrass im Wintersemester 1881/82 vortrug, ist es mir vor längerer Zeit gelungen, die Reductionsprobleme dieser Integrale in einfacher Weise zu lösen. Von der Veröffentlichung der Resultate musste ich abstehen, da ich die Theorie dieser Integrale in weitläufiger Form hätte vorausschicken müssen, indem Herr Weierstrass noch nichts darüber bekannt gemacht hat, obwohl er bereits die allgemeinsten Abel'schen Integrale in entsprechender Weise zu behandeln vermag. Da die Übertragung der Formeln im allgemeinen Fall auf den der allgemeinsten binomischen Irrationalität

$$y = R(x)^{\frac{1}{m}}$$

nicht unmittelbar wird geschehen können, will ich im Folgenden die Weierstrass'sche Theorie der hyperelliptischen Integrale auf den Fall der zur binomischen Irrationalität gehörigen Integrale ausdehnen, was sich nach Ermittlung einiger Fundamentalfunctionen der Theorie leicht bewerkstelligen lässt.

Nach der Darstellung der Umgebung einer beliebigen Stelle des algebraischen Gebildes

$$y^m = R(x)$$

construire ich die rationalen Functionen von x und y, dann die (eindeutigen) transcendenten Functionen von x und y, welche nur an einer oder gar keiner Stelle des algebraischen Gebildes von der ersten Ordnung unendlich klein werden und nur an den unendlich fernen Stellen wesentliche Singularitäten besitzen und

mit Hilfe des Zusammenhanges dieser sogenannten Primfunctionen mit den rationalen Functionen gewinne ich die Darstellung der Integrale der drei verschiedenen Gattungen durch die Logarithmen der Primfunctionen. Die hiebei nöthigen Periodenrelationen sind in etwas anderer Weise abgeleitet, als dies bei den hyperelliptischen Integralen möglich ist.

Nach dieser Theorie unserer Abel'schen Integrale gehe ich auf die Reduction der hyperelliptischen Integrale einer gewissen Ordnung auf solche niederer Ordnung und elliptische ein und endlich auf die Reduction der Abel'schen Integrale auf elliptische, wobei wir uns auf die Ermittlung der Relationen zwischen den ϑ-Moduln beschränken, welche nothwendig sind, damit das Integral auf ein solches niederer Ordnung transformirt werden kann und für die Theorie der ϑ-Functionen sind diese Relationen von einiger Bedeutung.

§. 1.

Es sei die algebraische Gleichung

$$y^m = A(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_\lambda)^{n_\lambda} = R(x)\ldots A)$$

vorgelegt, in welcher die absoluten Werthe der ganzen Zahlen $n_1, n_2 \ldots n_\lambda$ sämmtlich kleiner sein mögen als die positive ganze Zahl m und der grösste gemeinsame Theiler dieser $(\lambda+1)$ Zahlen die Einheit ist. Die erste Annahme beeinträchtigt die Allgemeinheit nicht, indem wir durch eine rationale Substitution auf diesen Fall kommen können, ja wir dürfen sogar voraussetzen, dass n_1, $n_2 \ldots n_\lambda$ sämmtlich positiv seien und die zweite Annahme ist für die Irreductibilität der Gleichung nothwendig und hinreichend. Den grössten gemeinsamen Theiler von m und

$$n = \sum_{k=1}^{\lambda} n_k$$

nennen wir m_0, den von m und n_k m_k, so dass etwa

$$m = m_0\mu_0 = m_k\mu_k,\quad n = m_0\nu_0,\quad n_k = m_k\nu_k \qquad \text{ist.}$$

Ist (a, b) ein die Gleichung (A) befriedigendes Werthepaar (x, y), so heisst (ab) eine Stelle des durch die Gleichung definirten

algebraischen Gebildes und die Umgebung derselben wird durch ein „Functionenpaar“

$$x_t = a + t, \quad y_t = b(1 + t\mathfrak{P}(t))$$

dargestellt, wo $\mathfrak{P}(t)$ eine nach ganzen positiven t Potenzen fortschreitende Reihe bedeutet, deren constantes Glied nicht Null ist. Für einen Werth von t, für den $\mathfrak{P}(t)$ convergirt, gehen hier Werthe x und y hervor, welche die Gleichung (A) identisch erfüllen.

Ist $a = a_k$ eine Wurzel des Polynoms $R(x)$, so setzen wir

$$y^m = A(x - a_k)^{n_k} \prod_{i=1}^{\lambda}{}' (a_k - a_i)^{n_i} \cdot \prod_{i=1}^{\lambda}{}' \left(1 + \frac{x - a_k}{a_k - a_i}\right)^{n_i},$$

wo der Strich bei den Productzeichen anzeigen soll, dass unter denselben i den Werth k nicht erhält. Ziehen wir beiderseits die m_k-te Wurzel und setzen

$$A \prod_i (a_k - a_i)^{n_i} = B_k^{m_k}$$

so folgt:

$$y^{\mu_k} = B_k (x - a_k)^{\nu_k} \{1 + (x - a_k)\mathfrak{P}(x - a_k)\}.$$

Es erweist sich späterhin als praktisch, für B_k

$$B_k^{\mu_k \nu'_k - \nu_k \mu'_k}$$

zu setzen, wo in

$$\mu_k \nu'_k - \nu_k \mu'_k = 1$$

μ'_k, ν'_k (positive) ganze Zahlen kleiner als μ_k, respective ν_k sein sollen und darum schreiben wir gleich hier:

$$y^{\mu_k} \cdot B_k^{-\nu'_k \mu_k} = B_k^{-\nu_k \mu'_k} \cdot (x - a_k)^{\nu_k} \{1 + (x - a_k) \cdot \mathfrak{P}(x - a_k)\}$$

und nach der Substitution

$$B_k^{-\mu'_k}(x - a_k) = t^{\mu_k}$$

gehen entsprechend den m_k Werthen von B_k m_k Functionenpaare

$$x_t = a_k + B_k^{\mu'_k} t^{\mu_k}, \quad y_t = B_k^{\nu'_k} t^{\nu_k} \left\{1 + B_k^{\mu'_k} t^{\mu_k} \mathfrak{P}(B_k^{\mu'_k} t^{\mu_k})\right\}$$

hervor, welche die Umgebung der m_k Stellen (a_k, o) darstellen.

Um die Umgebung der m_0 unendlich fernen Stellen darzustellen, bilden wir:

$$y^{\frac{m}{m_0}} = A^{\frac{1}{m_0}} \cdot x^{\frac{n}{m_0}} \cdot \prod_{i=1}^{\lambda} \left(1 - \frac{a_i}{x}\right)^{\frac{n_i}{m_0}},$$

setzen

$$A^{\frac{1}{m_0}} = B = B^{\mu_0 \nu_0' - \nu_0 \mu_0'}$$

und

$$B^{-\mu_0'} \cdot x = t^{-\mu_0},$$

dann sind die m_0 Functionenpaare:

$$\bar{x}_t = \frac{t^{-\mu_0}}{B^{-\mu_0'}}; \quad \bar{y}_t = \frac{t^{-\nu_0}}{B^{-\nu_0'}} \left\{1 + \frac{t^{\mu_0}}{B^{\mu_0'}} \mathfrak{P}\left(\frac{t^{\mu_0}}{B^{\mu_0'}}\right)\right\}.$$

Damit ist nun die Umgebung jeder beliebigen Stelle (a, b) in der Form

$$x_t = a + \varphi(t), \quad y_t = b + \psi(t)$$

dargestellt, wo — Allgemein zu reden — $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ Potenzreihen sind, die mit t verschwinden und soweit diese eine Bedeutung haben, soweit ist durch das Functionenpaar das algebraische Gebilde dargestellt. Wir sagen, das Gleichungspaar definirt ein Element des Gebildes.

Ein Element kann man offenbar auf unendlich mannigfache Weise darstellen, denn ist

$$\tau = c_1 t + c_2 t^2 + \ldots = t\mathfrak{P}(t) \quad (c_1 \gtrless 0),$$

so gilt für die t unter einer gewissen Grenze die Umkehrung:

$$t = C_1 \tau + C_2 \tau^2 + \ldots = \tau \mathfrak{P}_1(\tau)$$

und soweit $\mathfrak{P}_1(\tau)$ eine Bedeutung hat, lässt sich die Umgebung von (a, b) auch durch

$$x_\tau = a + \varphi_1(\tau), \; y_\tau = b + \psi_1(\tau)$$

darstellen.

Zwei Elemente

$$x_t - a = \varphi(t), \quad y_t - b = \psi(t)$$
$$x_\tau - \alpha = \varphi_1(\tau), \; y_\tau - \beta = \psi_1(\tau)$$

coincidiren, wenn sie nicht nur eine Stelle, sondern jede Stelle einer Umgebung jener ersten gemein haben. Der Theil des einen Gebildes, der dem andern nicht angehört, ist eine Fortsetzung des letzteren, und die Gesammtheit der untereinander coincidirenden Elemente constituirt das monogene algebraische Gebilde.

§. 2.

Das Verhalten einer Function von x und y in der Umgebung einer Stelle (a, b) werden wir ersehen, wenn wir das die Umgebung derselben darstellende Functionenpaar x_t, y_t für x und y einsetzen und entwickeln. So wollen wir zuerst eine rationale Function studiren, welche nur an einer im Endlichen gelegenen Stelle (x', y') und den m_0 unendlich fernen Stellen unendlich wird.

Wir führen zuerst statt der $(m-1)$ ersten Potenzen von y $(m-1)$ andere Functionen $s_\beta(x)$ ein, die gelegentlich schon Abel und später unabhängig von diesem Pick und Ungar[1] gebrauchten.

Versteht man unter

$$\left(\frac{\beta n_k}{m}\right)$$

die grösste in $\frac{\beta n_k}{m}$ enthaltene ganze Zahl, so dass

$$0 \leqq \frac{\beta n_k}{m} - \left(\frac{\beta n_k}{m}\right) < 1,$$

und setzt

$$R_\beta(x) = \prod_{k=1}^{k} (x - a_k)^{\left(\frac{\beta n_k}{m}\right)},$$

so sind die Functionen $s_\beta(x)$ durch die Gleichungen definirt:

$$y^\beta = R_\beta(x) s_\beta(x) \quad (\beta = 1, 2 \ldots m-1).$$

---

[1] Pick und Ungar, Grundzüge einer Theorie von einer Classe Abel'scher Integrale in den Sitzb. der Wiener Akademie, Jahrg. 1880.

Nun nehmen wir die folgende Function auf:

$$\frac{y'^{m-1} + y'^{m-2} R_1(x') \cdot \dfrac{y}{R_1(x)} + \ldots \underset{m-1}{R(x)} \cdot \dfrac{y^{m-1}}{\underset{m-1}{R(x)}}}{m(x'-x) \cdot y'^{m-1}} =$$

$$\frac{1 + \sum_{\beta=1}^{m-1} \dfrac{s_\beta(x)}{s_\beta(x')}}{m(x'-x)} = H(xy, x'y'),$$

welche analog ist der von Weierstrass im Falle des hyperelliptischen Gebildes

$$y^2 = A(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{2p})$$

zu Grunde gelegten Function

$$H(xy, x'y') = \frac{y'+y}{2(x'-x)y},$$

und wollen das Verhalten derselben genau darstellen.

Ist die Umgebung einer im Endlichen gelegenen Stelle (a, b) sowohl durch (x_t, y_t) als auch durch (x_τ, y_τ) dargestellt, so wird:

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

nur für einen der überhaupt hier zulässigen Werthe von t, nämlich für $t = \tau$ unendlich von der ersten Ordnung und somit

$$H(x_t y_t, x_\tau y_\tau) \cdot \frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{1}{\tau - t} + \mathfrak{P}(t, \tau), \qquad (1$$

wo die Potenzreihe $\mathfrak{P}(t, \tau)$ nur positive Potenzen von t und τ enthält, was allerdings noch einer näheren Begründung bedürfte, die man in einem allgemeinen Theorem von Weierstrass findet. (Siehe „Einige auf die Theorie der analytischen Functionen mehrerer Veränderlichen sich beziehende Sätze.“)

Bedeutet (x'_t, y'_t) ein Functionenpaar, welches die Umgebung einer im Endlichen liegenden von (a, b) verschiedenen Stelle darstellt, so ist:

$$H(x'_t y'_t, x_\tau y_\tau) \cdot \frac{dx_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}_1(t, \tau). \qquad (2$$

Stellt $(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$ die Umgebung der durch den Werth B_1 von B charakterisirten unendlich fernen Stelle dar, so ist nun

$$H(\bar{x}_t \bar{y}_t, x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} = \frac{1}{m} \frac{\frac{dx_\tau}{d\tau}}{x_\tau - \bar{x}_t} + \sum_{\beta=1}^{m-1} \frac{\frac{dx_\tau}{d\tau}}{m \cdot s_\beta(x_\tau)} \cdot \frac{s_\beta(\bar{x}_t)}{x_\tau - \bar{x}_t}$$

zu entwickeln. — Setzen wir

$$\pi_\beta = \sum_{k=1}^{\lambda} \left(\frac{\beta n_k}{m}\right)$$

und verstehen unter

$$(x_\tau^{(\beta)})_{\varepsilon-1}$$

die ganze Function $(\varepsilon-1)^{\text{ten}}$ Grades von x_τ, die in der Entwicklung von

$$\frac{s_\beta(\bar{x}_t)}{m(x_\tau - \bar{x}_t)}$$

als Coëfficient von:

$$\frac{t - \beta\nu_0 + \mu_0\pi_\beta + \mu_0\varepsilon}{B_1 - \beta\nu'_0 + \mu'_0\pi_\beta + \mu'_0\varepsilon}$$

auftritt, so wird:

$$H(\bar{x}_t \bar{y}_t, x_\tau y_\tau) \cdot \frac{dx_\tau}{d\tau} =$$

$$-\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x_\tau^{\mu-1}}{m} \frac{dx_\tau}{d\tau} \frac{t^{\mu_0\mu}}{B_1^{\mu'_0\mu}} + \sum_{\beta=1}^{m-1} \sum_{\varepsilon=1}^{\infty} \frac{(x_\tau^{(\beta)})_{\varepsilon-1}}{s_\beta(x_\tau)} \frac{dx_\tau}{d\tau} \cdot \frac{t - \beta\nu_0 + \mu_0\pi_\beta + \mu_0\varepsilon}{B_1 - \beta\nu'_0 + \mu'_0\pi_\beta + \mu'_0\varepsilon} \quad (3$$

In der Doppelsumme stehen so lange negative t-Potenzen, als

$$\beta\nu_0 - \mu_0\pi_\beta - \mu_0\varepsilon > 0$$

oder

$$\varepsilon \gtrless \left[\frac{\beta n}{m}\right] - \pi_\beta = p_\beta$$

ist, wo wir unter

$$\left[\frac{\beta n_k}{m}\right]$$

die grösste ganze Zahl verstehen, welche kleiner ist als $\frac{\beta n_k}{m}$, auf dass

$$\left[\frac{\beta n_k}{m}\right] = \left(\frac{\beta n_k}{m}\right), \text{ wenn } \frac{\beta n_k}{m}$$

nicht selbst eine ganze Zahl und

$$\left[\frac{\beta n_k}{m}\right] = \left(\frac{\beta n_k}{m}\right) - 1, \text{ wenn } \frac{\beta n_k}{m}$$

eine ganze Zahl ist.

Wir sondern die negativen t-Potenzen ab und schreiben:

$$H(\bar{x}_t \bar{y}_t, x_\tau y_\tau) \cdot \frac{dx_\tau}{d\tau} =$$

$$\sum_{\beta=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{p_\beta} \frac{(x_\tau^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x_\tau)} \cdot \frac{dx_\tau}{d\tau} \cdot \frac{t - \beta\nu_0 + \mu_0\pi_\beta + \mu_0 i}{B_1 - \beta\nu'_0 + \mu'_0\pi_\beta + \mu'_0 i} + \mathfrak{P}(t, \tau) \quad (3'$$

Stellt $(\bar{x}_\tau \bar{y}_\tau)$ die Umgebung derselben unendlich fernen Stelle dar, wie $(\bar{x}_t \bar{y}_t)$, $(x_t y_t)$ aber die Umgebung der durch den Werth B_2 charakterisirten Stelle, so gelten noch folgende Formeln: Erstens

$$H(\bar{x}_t \bar{y}_t, \bar{x}_\tau \bar{y}_\tau) \frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau} =$$

$$\frac{1}{\tau - t} - \frac{\mu_0}{m} \tau^{-1} + \sum_{\beta=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{p_\beta} \frac{(\bar{x}_\tau^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(\bar{x}_\tau)} \cdot \frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau} \cdot \frac{t - \beta\nu_0 + \mu_0\pi_\beta + \mu_0 i}{B_1 - \beta\nu_0 + \mu_0\pi_\beta + \mu_0 i} + \mathfrak{P}(t, \tau) \quad (4$$

wo $-\frac{\mu_0}{m}\tau^{-1}$ das einzige bei der Annahme $\tau < t$ aus der Entwicklung hervorgehende Glied mit negativer τ-Potenz ist, zweitens

$$H(x_t y_t, \bar{x}_\tau \bar{y}_\tau) \frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau} = -\frac{\mu_0}{m} \tau^{-1} + \mathfrak{P}(t, \tau) \quad (5$$

und drittens

$$H(\bar{\bar{x}}_t\bar{\bar{y}}_t,\ \bar{x}_\tau\bar{y}_\tau)\cdot\frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau}=$$

$$-\frac{\mu_0}{m}\tau^{-1}+\sum_{\beta=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{p\beta}\frac{(\bar{x}_\tau^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(\bar{x}_\tau)}\cdot\frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau}\cdot\frac{t-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}{B_2-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}+\mathfrak{P}(t,\tau)\quad(6$$

Damit ist das Verhalten der Function $H(xy, x'y')$ dargestellt, und da wir überall nur einer endlichen Anzahl negativer t-Potenzen begegneten, ist sie durchaus vom Charakter der rationalen Function und also selbst eine rationale Function von x und y.

Stellt $(x_\tau y_\tau)$ wiederum die Umgebung der Stelle (a, b) dar, so können wir auch setzen:

$$H(xy,\ x_\tau y_\tau)\frac{dx_\tau}{d\tau}=-\sum_{\mu=0}^{\infty}H_\mu(xy|ab)\cdot\tau^\mu$$

und analog

$$H(xy,\ \bar{x}_\tau\bar{y}_\tau)\cdot\frac{dx_\tau}{d\tau}=-\sum_{\mu=0}^{\infty}H_\mu(xy)\cdot\tau^\mu-\frac{\mu_0}{m}\tau^{-1}$$

und die hierin neu auftretenden Functionen H_μ geniessen die in folgenden Gleichungen ausgesprochenen Eigenschaften:

$$H_\mu(x_t y_t|ab)=t^{-\mu-1}+\mathfrak{P}(t)$$

$$H_\mu(x'_t y'_t|ab)=\mathfrak{P}(t)$$

$$H_\mu(\bar{x}_t\bar{y}_t|ab)=-\sum_{\beta=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{p\beta}\left[\frac{(x_\tau^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x_\tau)}\cdot\frac{dx_\tau}{d_\tau}\right]_{\tau^\mu}\cdot\frac{t-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}{B_1-\beta\nu'_0+\mu'_0\pi_\beta+\mu'_0 i}+\mathfrak{P}(t)$$

$$H_\mu(\bar{x}_t\bar{y}_t)=t^{-\mu-1}-\sum_{\beta=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{p\beta}\left[\frac{(\bar{x}_\tau^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(\bar{x}_\tau)}\cdot\frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^\mu}\cdot\frac{t-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}{B_1-\beta\nu'_0+\mu'_0\pi_\beta+\mu'_0 i}+\mathfrak{P}(t)$$

$$H_\mu(x_t y_t)=\mathfrak{P}(t)$$

$$H_\mu(\bar{\bar{x}}_t\bar{\bar{y}}_t)=-\sum_{\beta=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{p\beta}\left[\frac{(\bar{x}_\tau^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(\bar{x}_\tau)}\cdot\frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^\mu}\cdot\frac{t-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}{B_2-\beta\nu'_0+\mu'_0\pi_\beta+\mu'_0 i}+\mathfrak{P}(t),$$

die sich unmittelbar aus den obigen Formeln ergeben.[1] Darnach

[1] $\left[\frac{(x_\tau^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x_\tau)}\cdot\frac{dx_\tau}{d\tau}\right]_{\tau^\mu}$ bedeutet den Coëfficienten von τ^μ in der Entwicklung der in der Klammer enthaltenen Function.

werden die Functionen $H_\mu(xy|ab)$ nur an den m_0 unendlich fernen Stellen von endlicher Ordnung und an der einen im Endlichen gelegenen Stelle (a, b) von der $(\mu+1)^{\text{ten}}$ Ordnung unendlich. Bei endlichem μ ist also $H_\mu(xy|ab)$ eine rationale Function von x und y.

Die Functionen $H_\mu(xy)$ werden nur an den unendlich fernen Stellen unendlich. Soll aber eine rationale Function von x und y nur dort unendlich werden, so muss sie nothwendig die Form haben:

$$f_0(x)+f_1(x)y+\ldots.f_{m-1}(x)\cdot y^{m-1},$$

wo $f(x)$ ganze rationale Functionen sind. Macht man die Entwicklung, so kann man die möglichen Ordnungszahlen des Unendlichwerdens ersehen und diese werden gewiss nicht die natürliche Zahlenreihe bilden, wie es μ thut. Darum wird es Werthe für μ geben, denen keine Function $H_\mu(xy)$ entspricht und dann müssen offenbar die Entwicklungscoëfficienten

$$\left[\frac{(\bar{x}_\tau^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(\bar{x}_\tau)}\frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau}\right]_{\tau_\mu}$$

gewissen Bedingungen genügen, die wir hier nicht angeben wollen.

Mit Hilfe der gewonnenen Functionen H_μ können wir eine an den Stellen

$$(x_k, y_k) \quad k=1, 2\ldots r$$

von der Ordnung l_k unendlich werdende rationale Function von x und y $F(xy)$ construiren.

Es soll die Entwicklung von $F(xy)$ in der Umgebung von (x_k, y_k) lauten:

$$F(x_t^k, y_t^k)=\sum_{\mu=0}^{l_k-1} C_k^{(\mu)} t^{-\mu-1}+\mathfrak{P}_k(t),$$

dann ist offenbar:

$$F_1(xy)=C+\sum_{k=1}^{r}\sum_{\mu=1}^{l_k-1} C_k^{(\mu)} H_\mu(xy|x_k y_k)$$

eine rationale Function der verlangten Art, nur wird dieselbe noch im Unendlichen unendlich, wenn nicht etwa die Coëfficienten $C_k^{(\mu)}$ die Bedingungsgleichungen:

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{\mu=0}^{l_k-1} C_k^{(\mu)}\left[\frac{(x^{k(j)})_{i-1}}{s_\beta(x_\tau^k)}\cdot\frac{dx_\tau^k}{d\tau}\right]_{\tau^\mu}=0 \quad \begin{pmatrix} i=1,2\ldots p_\beta \\ \beta=1,2\ldots m-1\end{pmatrix}$$

erfüllen, und zwar sind das $\sum_{\beta=1}^{m-1} p_\beta=\rho$ an der Zahl.

Nun hat aber jede rationale Function $F(xy)$ die Eigenschaft, dass die Summe über die Entwicklungscoëfficienten der negativen ersten Potenz des jeweiligen t:

$$\sum_k\left[F(x_t^k y_t^k)\cdot\frac{dx_t^k}{dt}\right]_{t^{-1}}$$

und sogar die Summe

$$\sum_k\left[F(x_t^k y_t^k)\,\frac{(x_t^k)_{i-1}}{s_\beta(x_t^k)}\,\frac{dx_t^k}{dt}\right]_{t^{-1}},$$

wo $(x_t)_{i-1}$ eine ganze Function $(i-1)^{ten}$ Grades ist und i höchstens den Werth p_β annehmen kann, gleich Null ist.

Die obigen Bedingungsgleichungen sind eine Folge dieser Eigenschaft und desshalb haben wir in $F_1(x\ y)$ die verlangte rationale Function erhalten.

Die Bedingungsgleichungen zwischen den $P=\sum_{k=1}^{r} l_k$ Grössen $C_k^{(\mu)}$ sind ferner im Allgemeinen unabhängig von einander[1] und d. h., dass dieselben nicht zu erfüllen sind, wenn $P\leqq\rho$ ist. Damit aber haben wir den Satz:

> Eine rationale Function von x und y, die nur an ρ oder weniger Stellen unendlich wird — jede so oft gezählt, als die zugehörige Ordnungszahl anzeigt — existirt im Allgemeinen

[1] Man kann also die Gleichungen nicht mit solchen Constanten multipliciren, dass die Summe identisch Null wird.

nicht und andernfalls müssen die Unendlichkeitsstellen derart beschaffen sein, dass die ρ Bedingungsgleichungen mit einander verträglich sind.

Ist $P > \rho$ etwa gleich $\rho + \rho'$, so wird die rationale Function P^{ten} Grades an $\rho + \rho'$ Stellen unendlich und da sie an eben so viel Stellen verschwinden muss und wir über die noch übrigen ρ' willkürlichen Constanten so verfügen können, dass die Function an ρ' vorgelegten Stellen verschwindet, folgt, dass hier ρ Nullstellen mitbestimmt sind.

Die Zahl ρ heisst der Rang unseres Gebildes und die Untersuchung der Summe $\sum_{\beta=1}^{m-1} p_\beta$ (siehe l. c. P. u. U.) führt auf den bekannten Ausdruck für denselben:

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lambda}(m - m_k) - (m-1) = \frac{1}{2}(m-1).(\lambda-1) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\lambda}(m_k - 1).$$

Bei unserer Darstellung der Function $F(xy)$ ist von Bedeutung, dass dieselbe als Summe rationaler Functionen erscheint, deren jede nur an einer im Endlichen gelegenen Stelle und im Unendlichen unendlich wird. Eingedenk des mit Hilfe des Mittag-Leffler'schen Theorems von Weierstrass bewiesenen Satzes, „dass jede eindeutige analytische Function einer Veränderlichen x, für die im Endlichen keine wesentlich singuläre Stelle existirt, als Summe rationaler Functionen $f_\nu(x)$ dergestalt ausgedrückt werden kann, dass jede dieser Functionen im Endlichen nur eine Unstetigkeitsstelle besitzt", habe ich mich gefragt, ob es für die eindeutigen analytischen Functionen von x und y ein ähnliches Theorem gibt und ob diesen gegenüber nicht gerade die Functionen $H_\mu(xy|ab)$ die Stelle der Functionen $f_\nu(x)$ vertreten können.

Auf die Beantwortung dieser Fragen gedenke ich bei anderer Gelegenheit zurückzukommen.[1]

---

[1] Nachträgliche Bemerkung: Die Verallgemeinerung des Mittag-Leffler'schen Theorems habe ich bereits im März des vorigen Jahres meinem hochverehrten Lehrer Herrn Prof. Durège mitgetheilt. Mit der Veröffentlichung ist mir nun M. Apell zuvorgekommen, der dieselbe in dem zweiten Heft der Zeitschrift von Mittag-Leffler niederlegte.

§. 3.

Nachdem wir erfahren haben, dass es unter den rationalen Functionen $F(xy)$ keine gibt, welche nur an einer Stelle von der ersten Ordnung unendlich und an einer Stelle Null wird, — es müsste denn $p=0$ sein, — müssen wir uns nach derartigen Functionen in einem weiteren Functionengebiet, dem der transcendenten umsehen. Dort werden wir solchen Functionen und auch den von Weierstrass eingeführten Primfunctionen begegnen, d. s. eindeutige Functionen von x und y, welche im Endlichen eine oder gar keine Nullstelle besitzen und nur im Unendlichen (wesentliche) Singularitäten aufweisen.[1] Man sieht ein, dass dieselben von der Form

$$g_0(x)+g_1(x)y+\ldots g_{m-1}(x)y^{m-1}$$

sein müssen, wo $g(x)$ ganze transcendente Functionen sind.

Wir wollen nun diese Functionen construiren.

Es sei (x', y') eine Stelle des durch $(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$ definirten Elementes unseres algebraischen Gebildes und die Umgebung von (x', y') werde durch $(\bar{x}_t, \bar{y}_t)$ dargestellt, dann ist durch die Differentialgleichung

$$\frac{d\log \mathfrak{E}(xy, \bar{x}_\tau \bar{y}_\tau)}{d\tau} = H(xy, \bar{x}_\tau \bar{y}_\tau)\cdot\frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau}+\frac{\mu_0}{m}\tau^{-1} \qquad (a$$

und die Bedingung

$$\left(\mathfrak{E}(xy, \bar{x}_\tau \bar{y}_\tau)\right)_{\tau=0}=1$$

eine eindeutige transcendente Function $\mathfrak{E}(xy, \tau)$ von x und y definirt, deren Verhalten die folgenden Gleichungen aussprechen:

$$\mathfrak{E}(\bar{x}_t \bar{y}_t, \tau)=\left(1-\frac{\tau}{t}\right)\cdot e^{\sum_{\mu=0}^{\infty}\bar{P}_\mu(t)\cdot\frac{\tau^{\mu+1}}{\mu+1}} \qquad (1$$

---

[1] Hier ist die Definition unserem Gebilde $y^m=R(x)$ angepasst.

$$\mathfrak{E}(\bar{x}_t \bar{y}_t, \tau) = e^{\sum_{\mu=0}^{\infty} \bar{P}_\mu(t) \cdot \frac{\tau^{\mu+1}}{\mu+1}} \tag{2}$$

$$\mathfrak{E}(x_t y_t, \tau) = e^{-\sum_{\mu=0}^{\infty} H_\mu(x_t y_t) \cdot \frac{\tau^{\mu+1}}{\mu+1}}, \tag{3}$$

wie man unmittelbar erkennt, wenn man die Formeln des vorigen Paragraphes benützt und

$$\sum_{\beta=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{p_\beta} \frac{(\bar{x}_\tau^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(\bar{x}_\tau)} \frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau} \cdot \frac{t - \beta\nu_0 + \mu_0\pi_\beta + \mu_0 i}{B - \beta\nu_0' + \mu_0'\pi_\beta + \mu_0' i} + \mathfrak{P}(t,\tau) = \sum_{\mu=0}^{\infty} P_\mu(t) \cdot \tau^\mu$$

setzt, wo $P_\mu(t)$ nur eine endliche Anzahl negativer t-Potenzen enthält.

Die Function

$$\tau^{-\frac{\mu_0}{m}} \cdot \mathfrak{E}(xy, \tau) = E(xy, \tau)$$

genügt dann der Differentialgleichung

$$\frac{d \log E(xy,\tau)}{d\tau} = H(xy, \bar{x}_\tau \bar{y}_\tau) \cdot \frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau},$$

verschwindet an der Stelle $(x, y) = (x', y')$, wo $t = \tau$ ist und hat folgendes Verhalten

$$E(x_t y_t, \tau) = \tau^{-\frac{\mu_0}{m}} \cdot e^{-\sum_\mu H_\mu(x_t y_t) \cdot \frac{\tau^{\mu+1}}{\mu+1}}$$

$$E(\bar{x}_t \bar{y}_t, \tau) = \frac{t-\tau}{t \cdot \tau^{\frac{\mu_0}{m}}} e^{\sum_\mu \bar{P}_\mu(t) \cdot \frac{\tau^{\mu+1}}{\mu+1}}$$

$$E(\bar{\bar{x}}_t \bar{\bar{y}}_t, \tau) = \tau^{-\frac{\mu_0}{m}} e^{\sum_\mu \bar{\bar{P}}_\mu(t) \cdot \frac{\tau^{\mu+1}}{\mu+1}}$$

Als Function von t ist insbesondere

$$E(\bar{x}_t \bar{y}_t, \tau) = -t^{-1} \cdot e^{\sum_\beta \sum_i \int_0^\tau \frac{(\bar{x}_\tau^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(\bar{x}_\tau)} \frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau} d \cdot \frac{t - \beta\nu_0 + \mu_0\pi_\beta + \mu_0 i}{B_1 - \beta\nu_0' + \mu_0'\pi_\beta + \mu_0' i}} \cdot \{1 + t\mathfrak{P}(t)\}$$

— war ja doch die Gleichung 1) aus a) durch Integration nach τ von 0 bis τ gewonnen — und ferner ist

$$E(\bar{x}_t \bar{y}_t, \tau) = e^{\sum_\beta \sum_i \int_0^\tau \frac{(\bar{x}_\tau^{(\beta)})_{i-1}}{\varepsilon_\beta(\bar{x}_\tau)} \cdot \frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau} d\tau} \cdot \frac{t - \beta\nu_0 + \mu_0\pi_\beta + \mu_0 i}{B_2 - \beta\nu_0' + \mu_0'\pi_\beta + \mu_0' i} \cdot \{1 + t\mathfrak{P}(t)\}$$

und in den geschlungenen Klammern ist die vor $\mathfrak{P}(t)$ tretende t-Potenz mindestens die erste.

Wir nehmen die Nullstelle der Function in die Bezeichnung derselben auf und nennen die Function, die nur an einer einem unendlich fern gelegenen Element angehörigen Stelle (x', y') verschwindet,

$$E(xy, x'y').$$

Im Endlichen ist sie vom Charakter der ganzen Function und im Unendlichen hat sie m_0 wesentlich singuläre Stellen. — Ertheilen wir x einen bestimmten Werth und geben y die m zugehörigen Werthe $y, \varepsilon y \ldots . \varepsilon^{m-1} y$ (wo $\varepsilon^m = 1$ ist) und bezeichnen die entsprechenden m-Werthe von $E(xy, x'y')$ mit $E_1, E_2 \ldots E_m$, so ist

$$\frac{d \log E_1}{d\tau} + \ldots . \frac{d \log E_m}{d\tau} = \sum_{\alpha=0}^{m-1} H(x, y\varepsilon^\alpha, \bar{x}_\tau \bar{y}_\tau) \cdot \frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau} = \frac{\frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau}}{\bar{x}_\tau - x}.$$

Die Integration ergibt

$$\log E_1 . E_2 \ldots E_m = \log(x' - x) . + \log \text{Const.}$$

oder

$$E_1 E_2 \ldots E_m = C(x' - x),$$

wo wir die Constante mit Hilfe der Entwicklung um die Stelle $(x'y')$ ermitteln könnten. Genug, die Norm der Function $E(xy, x'y')$ ist $C(x' - x)$.

In gleicher Weise geht aus der Differentialgleichung

$$\frac{d \log E(xy, x_\tau y_\tau \mid a b)}{d\tau} = H(xy, x_\tau y_\tau) \cdot \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

und der Bedingung

$$\Big(E(xy, x_\tau y_\tau \mid a b)\Big)_{\tau=0} = 1$$

eine eindeutige Function von x und y

$$E(xy,\ x'y' \mid ab)$$

hervor, welche an einer Stelle (a, b), deren Umgebung (x_t, y_t) darstellen möge, von der ersten Ordnung unendlich wird und an einer Stelle (x', y'), welche der Umgebung von (a, b) angehört, einmal verschwindet. In der Umgebung irgend einer der m_0 unendlich fernen Stellen ist

$$E(\bar{x}_t \bar{y}_t,\ x_\tau y_\tau \mid ab) = e^{\sum_\beta \sum_i \int_{(ab)}^{(x'y')} \frac{(x^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x)} dx \,.\, \frac{t-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}{B_1-\beta\nu_0'+\mu_0'\pi_\beta+\mu_0' i}} \cdot \{1+t\,\mathfrak{P}(t)\},$$

wenn man

$$\int_0^\tau \frac{(x_\tau^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x_\tau)} \frac{d\tau_\tau}{d\tau}\, d\tau \quad \text{durch} \quad \int_{(ab)}^{(x'y')} \frac{(x^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x)}\, dx$$

ersetzt.

Die Norm der Function ist

$$E_1 E_2 \ldots E_m = (x'-x) \,.\, C.$$

Für $\tau = 0$ ist $x_\tau = a$, $E_1 = E_2 = \ldots . E_m = 1$, also $C = \dfrac{1}{a-x}$

$$\text{und } E_1 E_2 \ldots E_m = \frac{x'-x}{a-x}.$$

Aus den bisher gewonnenen Functionen $E(xy,\ x'y')$ und $E(xy,\ x'y' \mid ab)$ lassen sich andere zusammensetzen, deren einzige Nullstelle (x', y') willkürlich gewählt werden kann und die im Endlichen keine singuläre Stelle besitzen.

Wählt man nämlich (ξ_0, η_0) in der Umgebung der unendlich fernen Stelle, welche durch den Werth B_1 charakterisirt ist, (ξ_1, η_1) in der von (ξ_0, η_0), (ξ_ν, η_ν) in der von $(\xi_{\nu-1}, \eta_{\nu-1})$, (x', y') in der von (ξ_n, η_n), so ist

$$E(xy, \xi_0\eta_0) \,.\, E(xy, \xi_1\eta_1 \mid \xi_0\eta_0) \,.\, E(xy, \xi_2\eta_2\ \ \xi_1\eta_1) \ldots E(xy, x'y' \mid \xi_n\eta_n)$$

eine Primfunction

$$E(xy,\ x'y')$$

der verlangten Art. Im Unendlichen hat sie m_0 wesentlich singuläre Stellen und zwar verhält sie sich als Function von t wie

$$E(\overline{x_t}\,\overline{y_t},\, x'y') = -t^{-1}\, e^{\sum_\beta \sum_i \int_{(\infty\infty)_1}^{(x'y')} \frac{(x_\beta)_{i-1}}{s_\beta(x)} dx \,.\, \frac{t-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}{B_1-\beta\nu_0'+\mu_0'\pi_\beta+\mu_0' i}} \,.\, \{1+t\mathfrak{P}(t)\}$$

beziehungsweise

$$E(\overline{\overline{x_t}}\,\overline{\overline{y_t}},\, x'y') = e^{\sum_\beta \sum_i \int_{(\infty\infty)_1}^{(x'y')} \frac{(x^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x)} dx \,.\, \frac{t-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}{B_2-\beta\nu_0'+\mu_0\pi'_\beta+\mu_0' i}} \,.\, \{1+t\mathfrak{P}(t)\},$$

wenn

$$\int_{(\infty\infty)_1}^{(\xi_0\eta_0)} + \int_{(\xi_0\eta_0)}^{(\xi_1\eta_1)} + \ldots + \int_{(\xi_n\eta_n)}^{(x'y')} \frac{(x^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x)}\, dx = \int_{(\infty\infty)_1}^{(x'y')} \frac{(x^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x)}\, dx$$

gesetzt ist. Da verschiedenen Übergängen von der unendlich fernen Stelle zu der Stelle (x', y') verschiedene Integrationswerthe zugehören — worauf wir noch zu sprechen kommen — wird die eindeutige Function von x und y $E(xy, x'y')$ als Function von $x'y'$ vieldeutig sein.

Wenn zwei aufeinander folgende Stellen der Reihe

$$x_0 y_0,\, x_1 y_1, \ldots\ldots x_n y_n,\, x'y'$$

demselben Elemente um die Stellen

$$\xi_0 \eta_0,\, \xi_1 \eta_1 \ldots\ldots \xi_n \eta_n$$

angehören und $(x_0 y_0)$ in einem unendlich fernen Element liegt, so ist auch

$$E(xy, x_0y_0) \,.\, \frac{E(xy, x_1y_1|\xi_0\eta_0)}{E(xy, x_0y_0|\xi_0\eta_0)} \,.\, \frac{E(xy, x_2y_2|\xi_1\eta_1)}{E(xy, x_1y_1|\xi_1\eta_1)} \ldots\ldots \frac{E(xy, x'y'|\xi_n\eta_n)}{E(xy, x_ny_n|\xi_n\eta_n)}$$

eine Primfunction der Art $E(xy, x'y')$, deren Norm

$$C.(x_0-x) \frac{\dfrac{x_1-x}{\xi_0-x}}{\dfrac{x_0-x}{\xi_0-x}} \ldots\ldots \frac{\dfrac{x'-x}{\xi_n-x}}{\dfrac{x_n-x}{\xi_n-x}} = C.(x'-x) \text{ ist.}$$

Setzen wir voraus, dass in der Reihe

$$x_0 y_0,\ x_1 y_1,\ \ldots\ x_n y_n,\ x_{n+1} y_{n+1}$$

jede Stelle in der Umgebung der vorhergehenden und $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_0, y_0)$ ist, dann bildet das Product

$$\prod_{\nu=1}^{n+1} E(xy,\ x_\nu y_\nu | x_{\nu-1} y_{\nu-1})$$

eine nie verschwindende Primfunction $E(xy)$ mit der Norm 1. Das Verhalten im Unendlichen drückt

$$E(\bar{x}_t \bar{y}_t) = e^{\sum_\beta \sum_i \int_{(x_0 y_0)}^{(x_{n+1} y_{n+1})} \frac{(x^{(\beta)})_{i-1}}{s_3(x)} dx \cdot \frac{t - \nu_0 \beta + \mu_0 \pi_\beta + \mu_0 i}{B_1 - \nu_0' i + \mu_0' \pi_\beta + \mu_0' i}} \cdot \{1 + t \mathfrak{P}(t)\}$$

aus und hierin sind die Integrationen über einen bestimmt vorgelegten geschlossenen Weg (B) auszudehnen.

§. 4.

Eine einfache Betrachtung lehrt, dass die Ableitung des Logarithmus der $E(xy)$-Function nach t und auch die nach x überall vom Charakter der rationalen Function ist, und daher selbst eine rationale Function ist.

Diese Verbindung der transcendenten Function $E(xy)$ mit der rationalen zu finden, sei das nächste Ziel der Untersuchung.

Wir wollen in der Differentialgleichung

$$\frac{d \log E(xy,\ x_\tau y_\tau | ab)}{d\tau} = H(xy,\ x_\tau y_\tau) \cdot \frac{dx_\tau}{d\tau},$$

die wir kurz so schreiben

$$\frac{d \log E}{d\tau} = H(xy,\ x'y') \cdot \frac{dx_\tau}{d\tau},$$

eine Differentiation nach t oder noch besser in

$$\frac{d \log E}{dx'} = H(xy,\ x'y')$$

eine Differentiation nach x ausführen

$$\frac{d^2 \log E}{dx\, dx'} = \frac{d}{dx} H(xy, x'y')$$

und wenn wir für $\frac{d}{dx} H(xy, x'y')$ einen nach x' integrirbaren Ausdruck angeben können, haben wir auch schon

$$\frac{d \log E}{dx}$$

ermittelt.

Wenden wir auf die rationale Function

$$F(xy) = H(xy, x_2 y_2) \cdot \frac{d}{dx} H(xy, x_1 y_1)$$

den in §. 3 erwähnten Satz an, nach dem

$$\sum \left[F(x_t y_t) \cdot \frac{dx_t}{dt} \right]_{t-1} = 0,$$

so setzt sich diese Summe unter der Voraussetzung, dass die Umgebungen der Stellen $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ durch

$$\begin{aligned} x_t &= x_1 + t \quad y_t = y_1 + t \mathfrak{P}_1(t) \\ x_t' &= x_2 + t \quad y_t' = y_2 + t \mathfrak{P}_2(t) \end{aligned}$$

dargestellt sind, aus den Gliedern

$$\left[H(x_t y_t, x_2 y_2) \cdot \frac{d}{dt} H(x_t y_t, x_1 y_1) \right]_{t-1} = \frac{d}{dx_1} H(x_1 y_1, x_2 y_2)$$

$$\left[H(x_t' y_t', x_2 y_2) \cdot \frac{d}{dt} H(x_t' y_t', x_1 y_1) \right]_{t-1} = -\frac{d}{dx_2} H(x_2 y_2, x_1 y_1)$$

und m_0 Gliedern der Art:

$$\left[H(\bar{x}_t \bar{y}_t, x_2 y_2 \cdot \frac{d}{dt} H(\bar{x}_t \bar{y}_t, x_1 y_1) \right]_{t-1}$$

zusammen. Ersetzt man gleich $x_1 y_1$ durch xy, $x_2 y_2$ durch $x'y'$, so folgt:

$$\frac{d}{dx} H(xy, x'y') = \frac{d}{dx'} H(x'y', xy) - \Sigma \left[H(\bar{x}_t \bar{y}_t, x'y') \cdot \frac{d}{dt} H(\bar{x}_t \bar{y}_t, xy) \right]_{t-1}$$

und nunmehr kommt es auf die Untersuchung der Summe rechts an.

Es war

$$H(\bar{x}_t \bar{y}_t, x'y') = -\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{x'^{\mu-1}}{m} \cdot \frac{t^{\mu\mu_0}}{B_1^{\mu\mu_0}} +$$
$$+ \sum_{\beta=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{p_\beta} \frac{(x'^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x')} \cdot \frac{t^{-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}}{B_1^{-\beta\nu_0'+\mu_0'\pi_\beta+\mu_0' i}} +$$
$$+ \sum_{\beta=1}^{m-1} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(x'^{(\beta)})_{p_\beta+\mu-1}}{s_\beta(x')} \cdot \frac{t^{-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0(p_\beta+\mu)}}{B_1^{-\beta\nu_0'+\mu_0'\pi_\beta+\mu_0'(p_\beta+\mu)}}$$

und daraus gewinnt man nach Vertauschung von (x,y) und (x',y'), nach Differentiation nach t und bei gleichzeitig entgegengesetzter Summationsfolge betreffs β:

$$\frac{d}{dt} H(\bar{x}_t \bar{y}_t, xy) = -\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu\mu_0 x^{\mu-1}}{m} \cdot \frac{t^{\mu\mu_0-1}}{B_1^{\mu\mu_0}} +$$
$$+ \sum_{\beta=1}^{m-1} \sum_{i=1}^{p_{m-\beta}} \frac{(-(m-\beta)\nu_0 + \mu_0\pi_{m-\beta} + \mu_0 i) \cdot (x^{(m-\beta)})_{i-1}}{s_{m-\beta}(x)} \cdot$$
$$\cdot \frac{t^{-(m-\beta)\nu_0+\mu_0\pi_{m-\beta}+\mu_0 i-1}}{B_1^{-(m-\beta)\nu_0'+\mu_0'\pi_\beta+\mu_0' i}}$$
$$+ \sum_{\beta=1}^{m-1} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{(-(m-\beta)\nu_0+\mu_0\pi_{m-\beta}+\mu_0(p_{m-\beta}+\mu)) \cdot (x^{(m-\beta)})_{p_{m-\beta}+\mu-1}}{s_{m-\beta}(x)} \cdot$$
$$\cdot \frac{t^{-(m-\beta)\nu_0+\mu_0\pi_{m-\beta}+\mu_0(p_{m-\beta}+\mu)-1}}{B_1^{-(m-\beta)\nu_0'+\mu_0'\pi_{m-\beta}+\mu_0'(p_{m-\beta}+\mu)}}$$

Aus dem Product dieser zwei Factoren haben wir den Coëfficienten von t^{-1} herauszusuchen.

Wenn wir die zweiten Glieder im ersten Factor mit dem dritten im zweiten multipliciren, wird t^{-1} vorkommen, wenn μ der Bedingung:

$$-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i-(m-\beta)\nu_0+\mu_0\pi_{m-\beta}+\mu_0 p_{m-\beta}+\mu\mu_0-1=-1$$

unterliegt, aus der unter Einführung der Bezeichnung

$$n-\pi_\beta-\pi_{m-\beta}=r_\beta=r_{m-\beta}$$

der Werth

$$\mu=r_\beta-p_{m-\beta}-i$$

hervorgeht, wornach die Glieder

$$-\sum_{\beta}\sum_{i}\frac{((m-\beta)\nu_0-\mu_0\pi_{m-\beta}-\mu_0(r_\beta-i))}{B_1^{-m\nu_0'+\mu_0'n}}\cdot\frac{(x'^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x')}\cdot\frac{(x^{(m-\beta)})_{r_\beta-i-1}}{s_{m-\beta}(x)}$$

in Erwägung kommen. Der Exponent von B_1 ist wegen der Beziehung:

$$\nu_0'\mu_0-\mu_0'\nu_0=1$$

gleich $-m_0$. Da aber $B_1^{m_0}=A$, wird die Summe besagter Glieder über alle unendlich fernen Stellen

$$-\sum_{\beta=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{p_\beta}m_0A((m-\beta)\nu_0-\mu_0\pi_{m-\beta}-\mu_0(r_\beta-i))\cdot\frac{(x'^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x')}\cdot\frac{(x^{(m-\beta)})_{r_\beta-i-1}}{s_{m-\beta}(x)}$$

Verbinden wir umgekehrt die zweiten Glieder im zweiten Factor mit den dritten im ersten, so erhalten wir in ähnlicher Weise die Glieder:

$$+\sum_{\beta=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{p_\beta}m_0A((m-\beta)\nu_0-\mu_0\pi_{m-\beta}-\mu_0(r_\beta-i))\cdot\frac{(x^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x)}\cdot\frac{(x^{(m-\beta)})_{r_\beta-i-1}}{s_{m-\beta}(x')}$$

und in diesen ist

$$(x^{(\beta)})_{i-1}=\left[\frac{s_\beta(\bar{x}_t)}{m(x-\bar{x}_t)}\right]_{\overline{B_1^{-\beta\nu_0'+\mu_0'\pi_\beta+\mu_0'i}}}^{t-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}$$

$$(x^{(m-\beta)})_{r_\beta-i-1}=\left[\frac{s_{m-\beta}(\bar{x}_t)}{m(x-\bar{x}_t)}\right]_{\overline{B_1^{-(m-\beta)\nu_0'+\mu_0'\pi_{m-\beta}+\mu_0'i}}}^{t-(m-\beta)\nu_0+\mu_0\pi_{m-\beta}+\mu_0 i}$$

Geben wir aber nunmehr $(x^{(m-\beta)})_{r_\beta-i-1}$ die Bedeutung:

$$m_0A((m-\beta)\nu_0-\mu_0\pi_{m-\beta}-\mu_0(r_\beta-i))\left[\frac{s_{m-\beta}(\bar{x}_t)}{m(x-\bar{x}_t)}\right]_{\overline{B_1^{-(m-\beta)\nu_0'+\mu_0'\pi_{m-\beta}+\mu_0'(r_\beta-i)}}}^{t-(m-\beta)\nu_0+\mu_0\pi_{m-\beta}+\mu_0(r_\beta-i)}$$

so lautet die Summe der bisher gefundenen Glieder

$$-\sum_{\beta=1}^{m-1}\sum_{i=1}^{p_\beta}\left[\frac{(x'^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x')}\cdot\frac{(x^{(m-\beta)})_{r_\beta-i-1}}{s_{m-\beta}(x)}-\frac{(x^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x)}\cdot\frac{(x'^{(m-\beta)})_{r_\beta-i-1}}{s_{m-\beta}(x')}\right],$$

oder wenn wir

$$\frac{(x^{(\beta)})_{i-1}}{s_\beta(x)}=g(xy)_\alpha,\quad \frac{(x^{(m-\beta)})_{r_\beta-i-1}}{s_{m-\beta}(x)}=g'(xy)_\alpha \qquad (\alpha=1\ldots\rho)$$

einführen, wo α, β, i durch $\alpha=p_1+p_2+\ldots p_{\beta-1}+i$ verbunden sind:

$$-\sum_{\alpha=1}^{\rho}\{g(x'y')_\alpha\cdot g'(xy)_\alpha-g(xy)_\alpha\cdot g'(xy)_\alpha\}$$

Bei der Multiplication der ersten Glieder des ersten oder zweiten Factors mit den zweiten des zweiten oder ersten Factors, bestimmen wir μ aus

$$\mu\mu_0-(m-\beta)\nu_0+\mu_0\pi_{m-\beta}+\mu_0 i-1=0$$

resp. $$\mu\mu_0-1-\beta\nu_0+\mu_0 p_\beta+\mu_0 i=-1$$

$$\mu=m_0\nu_0-\frac{\beta\nu_0}{\mu_0}-\pi_{m-\beta}-i \quad \text{resp.} \quad \mu=\frac{\beta\nu_0}{\mu_0}-\pi_\beta-i$$

Da μ eine ganze Zahl bedeutet, kann β nur ein Vielfaches vo μ_0 sein:

$$\beta=\varepsilon\mu_0 \quad (\varepsilon=1,2\ldots(m_0-1))$$

Wir erhalten Glieder, in denen der Exponent von B_1 $-(m_0-\varepsilon)$ resp. $-\varepsilon$ ist und die Summe über die gleichartigen Glieder bezüglich der m_0 Stellen im Unendlichen wird verschwinden.

Führen wir endlich eine Verbindung der zweiten oder dritten Glieder des ersten Factors mit dritten oder zweiten des zweiten Factors herbei, und hat in den letzteren β den Werth β', so muss in

$$\mu=n-\pi_\beta-\pi_{m-\beta'}-p_{m-\beta'}-i+\frac{\beta-\beta'}{\mu_0}\nu_0$$

resp. $$\mu=n-\pi_\beta-\pi_{m-\beta'}-p_\beta-i+\frac{\beta-\beta'}{\mu_0}\nu_0$$

$$\beta-\beta'=\varepsilon\mu_0 \quad (\varepsilon=1,2\ldots(m_0-2))$$

sein und der Exponent von B wird $-(m_0+\varepsilon)$ und dadurch fallen aus demselben Grund wie oben diese Glieder weg.

So sind wir endlich bei der Formel:

$$\frac{d}{dx}H(xy,x'y')=\frac{d}{dx'}H(x'y',xy)+\sum_{\alpha=1}^{\rho}\{g(x'y')_\alpha\cdot g'(xy)_\alpha- \\ -g(xy)_\alpha\cdot g'(x'y')_\alpha\}$$

angelangt. Wenn wir jetzt in

$$\frac{d^2\log E(xy,x'y'|ab)}{dx\,dx'}=\frac{d}{dx}H(xy,x'y')$$

nach x' von (a,b) bis (x',y') integriren, wobei wir beachten, dass

$$\frac{d\log E(xy,x'y'|ab)}{dx}$$

für $(x',y')=(a,b)$ verschwindet, so folgt:

$$\frac{d\log E(xy,x'y'|ab)}{dx}=H(x'y',xy)-H(ab,xy)+ \\ +\sum_{\alpha=1}^{\rho}\Big\{g'(xy)_\alpha\int_{(ab)}^{(x'y')}g(xy)_\alpha\,dx-g(xy)_\alpha\cdot\int_{(ab)}^{(x'y')}g'(xy)_\alpha dx\Big\}$$

Durch Zusammensetzung resultirt für

$$E(xy)=\prod_{\nu=1}^{n+1}E(xy,\,x_\nu y_\nu|x_{\nu-1}y_{\nu-1})$$

die Gleichung

$$\frac{d\log E(xy)}{dx}=\sum_{\alpha=1}^{\rho}\Big\{g'(xy)\cdot\sum_{\nu=0}^{n+1}\int_{(x_{\nu-1}\,y_{\nu-1})}^{(x_\nu y_\nu)}g(xy)_\alpha\,dx-g(xy)_\alpha\cdot \\ \sum_{\nu=0}^{n+1}\int_{(x_{\nu-1}\,y_{\nu-1})}^{(x_\nu y_\nu)}g'(xy)_\alpha dx\Big\},$$

in der wir die vollständigen Integrale

$$\sum_{\nu} \int_{(x_{\nu-1}y_{\nu-1})}^{(x_\nu y_\nu)} g(xy)_\alpha \, dx \quad \text{und} \quad \sum_{\nu} \int_{(x_{\nu-1}y_{\nu-1})}^{(x_\nu y_\nu)} g'(xy)_\alpha \, dx$$

mit

$$2\omega'_\alpha \quad \text{und} \quad 2\eta'_\alpha$$

bezeichnen, so dass

$$\frac{d \log E(xy)}{dx} = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \left\{ 2\omega'_\alpha g'(xy)_\alpha - 2\eta'_\alpha g(xy)_\alpha \right\}. \qquad \text{(A}$$

In dieser Gleichung tritt klar hervor, dass verschiedenen Integrationswegen verschiedene Primfunctionen $E(xy)$ entsprechen können. Wir werden zeigen, dass es 2ρ und nur 2ρ von einander unabhängige Functionen $E(xy)$ gibt, und wenn wir dann die 2ρ-Gleichungen (A) nach den Grössen $g(xy)_\alpha$ und $g'(xy)_\alpha$ auflösen, haben wir auch eine Darstellung der Integrale

$$\int g(xy)_\alpha \, dx \quad \text{und} \quad \int g'(xy)_\alpha \, dx$$

durch Logarithmen nie verschwindender Primfunctionen gewonnen.

§. 5.

Nachdem wir so die Aufmerksamkeit auf die Integrale

$$\int g(x_\tau y_\tau)_\alpha \cdot \frac{dx_\tau}{d\tau} \, d\tau \quad \text{und} \quad \int g'(x_\tau y_\tau)_\alpha \frac{dx_\tau}{d\tau} \, d\tau$$

gelenkt haben, wollen wir hier gleich ihren charakteristischen Unterschied hervorheben.

Da in der Entwicklung von

$$g(x_\tau y_\tau)_\alpha \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

nirgends negative τ-Potenzen vorkommen, so werden die ρ ersten Integrale nirgends unendlich, sie sind Integrale „erster Gattung“. — Aber die Entwicklung von

$$g'(x_\tau y_\tau)_\alpha \frac{dx_\tau}{d\tau}$$

um die m_0 unendlich fernen Stellen wird eine endliche Anzahl negativer τ-Potenzen aufweisen, unter denen die erste nicht vorkommt und darum werden die zweiten Integrale dort unendlich wie eine rationale Function; sie sind von der „zweiten Gattung".

Für die Integrale

$$\int g(xy)_\alpha \, dx$$

könnten wir als Normalintegrale

$$\int \frac{x^{i-1}}{s_\beta(x)} dx$$

aufnehmen, immer liessen sich ρ-Functionen $g'(xy)_\alpha$ so bestimmen, dass

$$\frac{d}{dx} H(xy, x'y') - \frac{d}{dx'} H(x'y', xy) = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \left\{ g'(xy)_\alpha \cdot \frac{x'^{i-1}}{s_\beta(x')} - \right.$$

$$\left. - g'(x'y')_\alpha \frac{x^{i-1}}{s_\beta(x)} \right\} (\alpha = p_1 + p_2 + \ldots p_{\beta-1} + i, \; i = 1, 2 \ldots p_\beta)$$

besteht.

Integrale zweiter Gattung der Form

$$\int \frac{x^{r_\beta - i - 1}}{s_\beta(x)} dx$$

gibt es

$$\sum_{\beta=1}^{m-1} (r_\beta - p_\beta - 1) = \rho + m_0 - 1 \quad \text{(siehe l. c. P und U).}$$

Beachten wir, dass

$$H(x'y', x_\tau y_\tau) \frac{dx_\tau}{d\tau} = \mathfrak{P}(\tau)$$

$$H(x'y', x_\tau' y_\tau') \cdot \frac{dx_\tau'}{d\tau} = \tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau)$$

$$H(x'y', \overline{x_\tau} \overline{y_\tau}) \cdot \frac{d\overline{x_\tau}}{d\tau} = -\frac{\mu_0}{m} \tau^{-1} + \mathfrak{P}(\tau)$$

so ist offenbar

$$\int H(x'y', x_\tau y_\tau) \cdot \frac{dx_\tau}{d\tau}\, d\tau$$

ein Integral, welches an der Stelle (x', y') wie $\log \tau$ und an jeder der m_0 unendlich fernen Stellen wie $-\frac{\mu_0}{m} \log \tau$ unendlich wird, so dass die Summe der Coëfficienten des Logarithmus an den m_0+1 Stellen Null ist. Das Integral sei unser Normalintegral dritter Gattung.

Die Zerlegung einer rationalen Function von x und y $F(xy)$, welche an den Stellen (x_k, y_k) $(k=1, 2 \ldots r)$ von der l_k-ten Ordnung unendlich wird, so dass

$$F(x_t^k y_t^k) \cdot \frac{dx_t^k}{dt} = \sum_{\mu=0}^{l_k-1} C_k^{(\mu)} t^{-\mu-1} + \mathfrak{P}(t)$$

und

$$\sum_{k=1}^{r} C_k^{(0)} = 0$$

gilt, in eine Summe

$$\sum_k{}' C_k^{(0)} H(x_k y_k, xy) + \sum_\alpha k_\alpha g_\alpha(x) + \sum_\alpha k_\alpha' g_\alpha'(x) + \frac{d}{dx} F_1(xy),$$

wo der Strich bei der ersten Summe anzeigt, dass in derselben einer unendlich fernen Stelle $(x_k y_k)$ kein Glied zugehört und wo $F_1(xy)$ eine rationale Function ist und damit die Reduction des allgemeinen Integrales

$$\int F(xy)\, dx$$

auf die Integrale der drei Gattungen und eine rationale Function $F_1(xy)$, wollen wir hier nicht ausführen.

§. 6.

In §. 4 war durch Integration über einen geschlossenen Weg (B) von (x_0, y_0) über (x_1, y_1) dann $(x_2, y_2) \ldots . (x_n, y_n)$ nach (x_0, y_0) die Gleichung abgeleitet:

$$\frac{d\log E(xy)}{dx} = \int_{(B)} \sum_{\alpha} \{g'(xy)_\alpha g(x'y')_\alpha - g(xy)_\alpha g'(x'y')_\alpha\}\, dx'$$

Multipliciren wir dieselbe mit dx und integriren über einen zweiten geschlossenen Weg (A), der mit (B) keine Stelle gemein hat, so wird:

$$\int_{(A)}\int_{(B)} \sum_{\alpha} \{g'(xy)_\alpha g(x'y')_\alpha - g(xy)_\alpha g'(x'y')_\alpha\}\, dx\, dx' =$$

$$= \int_{(A)}\int_{(B)} \left\{\frac{d}{dx} H(xy, x'y') - \frac{d}{dx'} H(x'y', xy)\right\} dx\, dx' = 0$$

oder bei der Bezeichnung:

$$2\omega_\alpha = \int_{(A)} g(xy)_\alpha\, dx \quad 2\eta_\alpha = \int_{(A)} g'(xy)_\alpha\, dx$$

$$2\omega'_\alpha = \int_{(B)} g(xy)_\alpha\, dx \quad 2\eta'_\alpha = \int_{(B)} g'(xy)_\alpha\, dx$$

$$4\sum_{\alpha=1}^{\rho} (\eta_\alpha \omega'_\alpha - \omega_\alpha \eta'_\alpha) = \int_{(A)} \frac{d\log E(xy)}{dx}\, dx = 0$$

Setzen wir aber voraus, dass der Weg (A) von dem Weg (B) einmal, und zwar im positiven Sinne geschnitten wird, so dass wir auf (B) von der negativen zur positiven Seite von (A) gelangen, so beachten wir, dass zufolge

$$\log E(xy.\, x_\tau y_\tau \mid ab) = \int_0^\tau H(xy, x_\tau y_\tau) \cdot \frac{dx_\tau}{d\tau}\, d\tau$$

auch

$$\log E(xy) = \int_{(B)} H(xy, x'y')\, dx'$$

gilt und demnach die Ermittlung von

$$\log E(x_1 y_1) - \log E(x_2 y_2)$$

auf die von

$$\int_{(B)} (H(x_1 y_1, x'y') - H(x_2 y_2, x'y'))\, dx'$$

hinauskommt, wo $(x_1\ y_1)$ und $(x_2\ y_2)$ zwei Stellen auf (A) in der Nähe des Schnittpunktes $(\alpha\ \beta)$ der Wege sind. Doch dieses Integral ist offenbar

$$\int_{(a)} \frac{dx'}{x'-\alpha} = 2\pi i,$$

nachdem hier die Entwicklung

$$H(xy, x'y') = \frac{1}{x'-\alpha} + \mathfrak{P}(x-\alpha, x'-\alpha)$$

gilt und wir erhalten:

$$\sum_{a=1}^{\rho}(\eta_a\omega'_a - \omega_a\eta'_a) = \frac{\pi i}{2}$$

Im Falle des algebraischen Gebildes

$$y^2 = A(x-a_0)(x-a_1)\ldots(x-a_{2\rho})$$

wo die Grössen

$$a_\lambda = \alpha_\lambda + \beta_\lambda i,\ a_{\lambda+1} = \alpha_{\lambda+1} + \beta_{\lambda+1} i\ (\lambda = 0, 1\ldots 2\rho-1)$$

so geordnet seien, dass

$$\alpha_\lambda > \alpha_{\lambda+1} \text{ oder wenn } \alpha_\lambda = \alpha_{\lambda+1} \text{ doch } \beta_\lambda > \beta_{\lambda+1}$$

ist, legt Weierstrass um a_λ und $a_{\lambda+1}$ eine solche geschlossene Curve, dass sie keine weiteren Stellen $(a,\ o)$ einschliesst, und erhält so 2ρ Wege oder ρ Wegepaare A_β, B_β $(\beta = 1, 2\ldots\rho)$ um

$a_{2\beta-2}$ und $a_{2\beta-1}$ beziehungsweise $a_{2\beta-1}$ und $a_{2\beta}$.

Die geschlossenen Integrale sind

$$2\omega_a^\lambda = 2\int_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}} g(xy)_a\,dx,\quad 2\eta_a^\lambda = 2\int_{a_\lambda}^{a_{\lambda+1}} g'(xy)_a\,dx$$

und die Summe

$$\sum_{a=1}^{\rho}(\eta_a^\mu\omega_a^\lambda - \omega_a^\mu\eta_a^\lambda)$$

wird Null, wenn die Integrationen nach x und x' über zwei Wege A_β oder B_β, wenn sie über A_β und B_γ $\left(\gamma \begin{matrix} > \beta \\ < \beta-1 \end{matrix}\right)$ oder über B_β und A_γ $\left(\gamma \begin{matrix} < \beta \\ > \beta+1 \end{matrix}\right)$ erfolgen, denn solche Wege haben keine gemeinsame Stelle. Die Summe wird $\frac{\pi}{2}i$, wenn die Integrationen über zwei Wege A_β und B_β oder B_β $A_{\beta+1}$ und $-\frac{\pi}{2}i$, wenn sie über zwei Wege B_β A_β oder A_β $B_{\beta-1}$ ausgeführt werden, denn da schneidet der zweite Weg den ersten im positiven, respective negativen Sinn. Wir schreiben:

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho}(\eta_\alpha^\mu \omega_\alpha^\lambda - \omega_\alpha^\mu \eta_\alpha^\lambda) = \begin{cases} 0 & \mu \gtrless \lambda+1 \\ \frac{\pi}{2}i & \text{wenn } \mu = \lambda+1 \\ -\frac{\pi}{2}i & \mu = \lambda-1 \end{cases}$$

Bei unserem allgemeinen Gebilde wird man die geschlossenen Wege nicht in solch einfacher Weise um die singulären Punkte legen können, da sich dieselben nicht so gleichmässig verhalten wie hier. Aber man kann bekanntlich ρ geschlossene Wegepaare (A_β, B_β) so ziehen, dass B_β A_β nur einmal und im positiven Sinne schneidet und verschiedene Paare keine gemeinsame Stelle besitzen. Bezeichnen wir dann:

$$2\omega_{\alpha\beta} = \int_{(A\beta)} g(xy)_\alpha dx, \quad 2\eta_{\alpha\beta} = \int_{(A\beta)} g'(xy)_\alpha dx$$

$$2\omega'_{\alpha\beta} = \int_{(B\beta)} g(xy)_\alpha dx, \quad 2\eta'_{\alpha\beta} = \int_{(B\beta)} g'(xy)_\alpha dx$$

so ergeben sich zwischen den $(2\rho)^2$ Grössen:

$$\begin{matrix} \omega_{11} \dots \omega_{1\rho} & \omega'_{11} \dots \omega'_{1\rho} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \omega_{\rho 1} \dots \omega_{\rho\rho} & \omega'_{\rho 1} \dots \omega'_{\rho\rho} \\ \eta_{11} \dots \eta_{1\rho} & \eta'_{11} \dots \eta'_{1\rho} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \eta_{\rho 1} \dots \eta_{\rho\rho} & \eta'_{\rho 1} \dots \eta'_{\rho\rho} \end{matrix}$$

wenn die Integrationen nach x und x' der Reihe nach über A_γ und B_β, B_γ und B_β, A_γ und B_β, A_γ und B_γ ausgedehnt werden, die folgenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{\rho}(\eta_{\alpha\gamma}\omega_{\alpha\beta}-\omega_{\alpha\gamma}\eta_{\alpha\beta})=0\\
&\sum_{\alpha=1}^{\rho}(\eta'_{\alpha\gamma}\omega'_{\alpha\beta}-\omega'_{\alpha\gamma}\eta'_{\alpha\beta})=0\\
&\sum_{\alpha=1}^{\rho}(\eta_{\alpha\gamma}\omega'_{\alpha\beta}-\omega_{\alpha\gamma}\eta'_{\alpha\beta})=0\\
&\sum_{\alpha=1}^{\rho}(\eta_{\alpha\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}-\omega_{\alpha\gamma}\eta'_{\alpha\gamma})=\frac{\pi}{2}i
\end{aligned}\right\} A)$$

und das sind

$$4.\frac{\rho(\rho-1)}{2}+\rho=\rho(2\rho-1)$$

an der Zahl.

Denken wir zwei Systeme von je 2ρ Grössen

$$\begin{matrix} p_1\cdots p_\rho & q_1\cdots q_\rho \\ p'_1\cdots p'_\rho & q'_1\cdots q'_\rho \end{matrix}$$

mit zwei Systemen von je 2ρ Grössen

$$\begin{matrix} P_1\ldots P_\rho & Q_1\ldots Q_\rho \\ P'_1\ldots P'_\rho & Q'_1\ldots Q_\rho \end{matrix}$$

durch die Gleichungen:

$$P_\alpha=\sum_{\beta=1}^{\rho}(2p_\beta\eta_{\alpha\beta}-2q_\beta\eta'_{\alpha\beta}) \quad Q_\alpha=\sum_{\beta=1}^{\rho}(2p_\beta\omega_{\alpha\beta}-2q_\beta\omega'_{\alpha\beta}) \qquad 1)$$

$$P'_\alpha=\sum_{\gamma=1}^{\rho}(2p'_\gamma\eta_{\alpha\gamma}-2q'_\gamma\eta'_{\alpha\gamma}) \quad Q'_\alpha=\sum_{\gamma=1}^{\rho}(2p'_\gamma\omega_{\alpha\gamma}-2q'_\gamma\omega'_{\alpha\gamma}) \qquad 2)$$

verbunden, wie das Weierstrass thut, und bildet man

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho}(P_\alpha Q'_\alpha-Q_\alpha P'_\alpha),$$

so wird diese Summe wegen der Relationen (*A*) gleich:

$$-2\pi i\sum_{\alpha=1}^{\rho}(p_\alpha q'_\alpha - p'_\alpha q_\alpha)=\sum_{\alpha=1}^{\rho}(P_\alpha Q'_\alpha - Q_\alpha P'_\alpha) \qquad 3)$$

Setzt man einmal

$$p'_\alpha = 0\ (\alpha = 1 \ldots \rho),\ q'_\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha \gtrless \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases}$$

und dann

$$p'_\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha \lessgtr \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases},\ q'_\alpha = 0\ (\alpha = 1 \ldots \rho),$$

so folgt aus 2)

$$P'_\alpha = -2\eta'_{\alpha\beta} \quad Q'_\alpha = -2\omega'_{\alpha\beta}$$

oder

$$P'_\alpha = 2\eta_{\alpha\beta} \qquad Q'_\alpha = 2\omega_{\alpha\beta}$$

und darnach aus 3)

$$-2\pi i p_\beta = \sum_{\alpha}(Q_\alpha 2\eta'_{\alpha\beta} - P_\alpha 2\omega'_{\alpha\beta}) \quad (\beta = 1, 2 \ldots \rho) \qquad 4)$$

$$-2\pi i q_\beta = \sum_{\alpha}(Q_\alpha 2\eta_{\alpha\beta} - P_\alpha 2\omega_{\alpha\beta}) \qquad 5)$$

und das sind offenbar die Auflösungen der 2ρ Gleichungen (1), wenn in diesen P_α und Q_α als die bekannten, p_β, q_β als die unbekannten Grössen betrachtet werden. Wir erhalten gleichzeitig das Resultat, dass die Determinante unserer $(2\rho)^2$ Grössen, ω, ω', η und η'

$$\begin{pmatrix} \omega & \omega' \\ \eta & \eta' \end{pmatrix}$$

von Null verschieden ist.

Setzt man die Werthe für p_β und q_β wieder in die Gleichungen (1) ein, so ergibt die Vergleichung der Coëfficienten von P_α und Q_α, dass nothwendig die folgenden Beziehungen gelten.

$$\sum_{\gamma=1}^{\rho}(\omega_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma} - \omega_{\beta\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}) = 0 \qquad B)$$

$$\left.\begin{aligned}\sum_{\gamma}(\eta_{\alpha\gamma}\eta'_{\beta\gamma}-\eta_{\beta\gamma}\eta'_{\alpha\gamma})&=0\\ \sum_{\gamma}(\eta_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma}-\eta'_{\alpha\gamma}\omega_{\beta\gamma})&=0\\ \sum_{\gamma}(\eta_{\alpha\gamma}\omega'_{\alpha\gamma}-\eta'_{\alpha\gamma}\omega_{\alpha\gamma})&=\frac{\pi}{2}i\end{aligned}\right\} \quad B)$$

Erstrecken wir die Integrale erster und zweiter Gattung über einen beliebigen geschlossenen Weg (A) und setzen

$$2\omega_\alpha=\int_{(A)}g(xy)_\alpha dx \quad 2\eta_\alpha=\int_{(A)}g'(xy)_\alpha dx \quad (\alpha=1\ldots\rho),$$

so lassen sich ω_α und η_α linear durch $\omega_{\alpha\beta}$, $\omega'_{\alpha\beta}$, respective, $\eta_{\alpha\beta}$, $\eta'_{\alpha\beta}$ ausdrücken. Bilden wir nämlich:

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho}\left\{\int_{(A_\beta)}g'(xy)_\alpha dx\,.\int_{(A)}g(xy)_\alpha dx-\int_{(A_\beta)}g(xy)_\alpha dx\,.\int_{(A)}g'(xy)_\alpha dx\right\}=$$

$$=4\sum_{\alpha}(\eta_{\alpha\beta}\omega_\alpha-\omega_{\alpha\beta}\eta_\alpha)$$

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho}\left\{\int_{(B_\beta)}g'(xy)_\alpha dx\,.\int_{(A)}g(xy)_\alpha dx-\int_{(B_\beta)}g(xy)_\alpha dx\,.\int_{(A)}g'(xy)_\alpha dx\right\}=$$

$$=4\sum_{\alpha}(\eta'_{\alpha\beta}\omega_\alpha-\omega'_{\alpha\beta}\eta_\alpha),$$

so sind diese Summen nur solche Vielfache von $2\pi i$ als die Zahlen angeben, welche die Differenz der Anzahl der positiven und der negativen Schnitte von A mit A_β, respective B_β anzeigen. Es seien also

$$4\sum_{\alpha}(\eta_{\alpha\beta}\omega_\alpha-\omega_{\alpha\beta}\eta_\alpha)=n_\beta 2\pi i$$

$$4\sum_{\alpha}(\eta'_{\alpha\beta}\omega_\alpha-\omega'_{\alpha\beta}\eta_\alpha)=m_\beta 2\pi i$$

Um die Gleichungen 4) und 5) mit diesen in Übereinstimmung zu bringen, müssen wir nur der Reihe nach für

$$P_\alpha,\ Q_\alpha,\ p_\alpha,\ q_\alpha$$
$$\eta_\alpha,\ \omega_\alpha,\ -\frac{m_\beta}{2},\ -\frac{n_\beta}{2}$$

setzen und für diese Werthe lauten die Gleichungen (1)

$$\omega_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\rho}(-m_\beta\,\omega_{\alpha\beta} + n_\beta\,\omega'_{\alpha\beta})$$
$$(\alpha = 1 \ldots \rho) \qquad 6)$$
$$\eta_\alpha = \sum_{\beta=1}^{\rho}(-m_\beta\,\eta_{\alpha\beta} + n_\beta\,\eta'_{\alpha\beta}).$$

Damit ist der obige Satz bewiesen.

Nachdem wir so die Integrale erster und zweiter Gattung über beliebige geschlossene Wege (A) durch die über unsere 2ρ zu Grunde gelegten Wege ersetzt haben, werden wir auch leicht zeigen können, wie eine Primfunction, die sich auf irgend einen Weg (A) bezieht, durch diejenigen auszudrücken ist, die sich auf unsere Fundamentalwege $(A_\beta,\ B_\beta)$ beziehen. Den ρ Wegepaaren entsprechend, definiren wir ρ-Paare von Functionen $E(xy)_\beta$ und $E'(xy)_\beta$ durch:

$$\frac{d\log E(xy)_\beta}{dx} = \sum_{\alpha=1}^{\rho}\{2\omega_{\alpha\beta}\,g'(xy)_\alpha - 2\eta_{\alpha\beta}\,g(xy)_\alpha\}$$
$$(\beta = 1, 2 \ldots \rho) \qquad 7)$$
$$\frac{d\log E'(xy)_\beta}{dx} = \sum_{\alpha=1}^{\rho}\{2\omega'_{\alpha\beta}\,g'(xy)_\alpha - 2\eta'_{\alpha\beta}\,g(xy)_\alpha\}$$

und die Entwicklung in einem unendlich fernen Elemente ist durch:

$$E(\bar{x}_i\bar{y}_i)_\beta = e\sum_{\alpha=1}^{\rho}2\omega_{\alpha\beta}\,\frac{t-\beta'\nu_0+\mu_0\pi_{\beta'}+\mu_0 i}{B_1-\beta'\nu_0'+\mu_0'\pi_{\beta'}+\mu_0' i}\{1+t\mathfrak{P}(t)\}$$
$$E'(\bar{x}_i\bar{y}_i)_\beta = e\sum_{\alpha=1}^{\rho}2\omega'_{\alpha\beta}\,\frac{t-\beta'\nu_0+\mu_0\pi_{\beta'}+\mu_0 i}{B_1-\beta'\nu_0'+\mu_0'\pi_{\beta'}+\mu_0' i}\{1+t\mathfrak{P}(t)\}$$
$$\beta = 1, 2 \ldots \rho$$
$$\alpha = p_1 + p_2 + \ldots p_{\beta'-1} + i$$
$$i = 1, 2 \ldots p_{\beta'}$$
$$\beta' = 1, 2 \ldots m-1 \qquad \text{dargestellt (siehe §. 3).}$$

Gilt für irgend eine Primfunction $E(xy)$ die Differentialgleichung:

$$\frac{d\log E(xy)}{dx} = \sum_{\alpha=1}^{\rho}\{2\omega_\alpha g'(xy)_\alpha - 2\eta_\alpha g(xy)_\alpha\},$$

wo ω_α, η_α die in (6) angegebenen Werthe besitzen, so folgt mit Hilfe der Gleichungen (7)

$$\frac{d\log E(xy)}{dx} = \sum_{\beta=1}^{\rho}\left\{n_\beta \frac{d\log E'(xy)_\beta}{dx} - m_\beta \frac{d\log E(xy)_\beta}{dx}\right\}$$

und die Integration liefert

$$E(xy) = C\prod_{\beta=1}^{\rho}\frac{E'(xy)_\beta^{n_\beta}}{E(xy)_\beta^{m_\beta}}$$

Machen wir die Entwicklung um die Stelle, deren Umgebung $(\bar{x}_t\ \bar{y}_t)$ definirt, setzen also

$$E(\bar{x}_t\bar{y}_t) = e^{\sum_{\alpha=1}^{\rho}2\omega_\alpha \frac{t-\beta'\nu_0+\mu_0\pi_{\beta'}+\mu_0 i}{B_1-\beta'\nu'_0+\mu_0\pi_{\beta'}+\mu'_0 i}}\{1+t\mathfrak{P}(t)\}\quad a)$$

so stellt sich heraus, dass $C=1$ ist, so dass $E(xy)$ nur das Product ganzzahliger Potenzen der 2ρ Primfunctionen $E(xy)_\beta$ und $E'(xy)_\beta$ ist, wodurch denn alle nie verschwindenden Primfunctionen auf 2ρ zurückgeführt sind.

Das Charakteristische einer jeden Primfunction $E(xy)$ liegt in dem Verhalten im Unendlichen, denn setzt man von einer transcendenten Function von x und y

$$g_0(x) + g_1(x)y + \ldots \underset{m-1}{g(x)}\cdot y^{m-1}$$

nur voraus, dass sie an den m_0 unendlich fernen Stellen eine Entwicklung der Form (a) habe, wo ω_α als constante Grössen angesehen werden, so lässt sich zeigen, dass diese Function das Product ganzzahliger Potenzen der 2ρ Primfunctionen $E(xy)_\beta$ und $E'(xy)_\beta$ ist und ω_α linear aus $\omega_{\alpha\beta}$ und $\omega'_{\alpha\beta}$ mit ganzzahligen Coëfficienten zusammengesetzt sind. (Der Beweis liesse sich leicht erbringen.)

Vergleichen wir die Gleichungen 7) wieder mit denen in 4) und 5), so setzen wir zur Übereinstimmung:

$$P_\alpha = g'(xy)_\alpha \quad Q_\alpha = g(xy)_\alpha,$$
$$p_\beta = \frac{1}{2\pi i}\frac{d\log E'(xy)_\beta}{dx}, \quad q_\beta = \frac{1}{2\pi i}\frac{d\log E(xy)_\beta}{dx}$$

und für diese Werthe werden die Gleichungen 1) lauten:

$$g(xy)_\alpha = \frac{1}{\pi i}\sum_{\beta=1}^{\rho}\left\{\omega_{\alpha\beta}\frac{d\log E'(xy)_\beta}{dx} - \omega'_{\alpha\beta}\frac{d\log E(xy)_\beta}{dx}\right\}$$
$$g'(xy)_\alpha = \frac{1}{\pi i}\sum_{\beta=1}^{\rho}\left\{\eta_{\alpha\beta}\frac{d\log E'(xy)_\beta}{dx} - \eta'_{\alpha\beta}\frac{d\log E(xy)_\beta}{dx}\right\} \qquad 8)$$
$$\alpha = 1, 2 \ldots \rho$$

Setzen wir

$$\frac{d}{dx}J(xy)_\alpha = g(xy)_\alpha \text{ und } \frac{d}{dx}J'(xy)_\alpha = g'(xy)_\alpha,$$

so werden

$$J(xy)_\alpha = \frac{1}{\pi i}\sum_{\beta=1}^{\rho}\{\omega_{\alpha\beta}\log E'(xy)_\beta - \omega'_{\alpha\beta}\log E(xy)_\beta\}$$
$$J'(xy)_\alpha = \frac{1}{\pi i}\sum_{\beta=1}^{\rho}\{\eta_{\alpha\beta}\log E'(xy)_\beta - \eta'_{\alpha\beta}\log E(xy)_\beta\} \qquad 9)$$
$$(\alpha = 1, 2 \ldots \rho)$$

Ausdrücke, deren Ableitungen $g(xy)_\alpha$ und $g'(xy)_\alpha$ sind. Eine Constante haben wir hier nicht hinzugefügt, denn ohne eine solche findet in der Entwicklung um die unendlich fernen Stellen die Übereinstimmung statt.

Diese Ausdrücke definiren genau die Natur der Integralfunctionen, das Verhalten an allen Stellen des Gebildes und die Vieldeutigkeit, die hier in der des Logarithmus der eindeutigen ganzen transcendenten Function von x und y liegt. Aus einem Werth $J(xy)_\alpha$ oder $J'(xy)_\alpha$ erhält man alle Werthe durch Addition von

$$\sum_{\beta=1}^{\rho}(m'_\beta \cdot 2\omega_{\alpha\beta} - m_\beta \cdot 2\omega'_{\alpha\beta}) \text{ oder } \sum_{\beta=1}^{\rho}(m'_\beta 2\eta_{\alpha\beta} - m_\beta \cdot 2\eta'_{\alpha\beta})$$

d. h. ganzzahligen linearen Ausdrücken in den „Perioden“ $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$, respective $2\eta_{\alpha\beta}$ und $2\eta'_{\alpha\beta}$.

Ich will hier noch die in der Theorie der hyperelliptischen Integrale vorkommenden Formeln, wie sie Weierstrass ableitet, zusammenstellen, wenn auch in etwas modificirter Schreibweise.

Die $(2\rho)^2$ Grössen $\omega^{\lambda}_{\alpha}$, η^{λ}_{α} $(\alpha = 1 \ldots \rho\,;\, \lambda = 0, 1 \ldots 2\rho-1)$ sind schon definirt. Die 2ρ auf diese geschlossenen Integrale bezüglichen Primfunctionen sind durch

$$\frac{d \log E^{(\lambda)}(xy)}{dx} = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \{2\omega^{\lambda}_{\alpha} g'(xy)_{\alpha} - 2\eta^{\lambda}_{\alpha} g(xy)_{\alpha}\}$$

definirt. Bezeichnet man die Grössen

$$\omega_{\alpha}^{2\beta-1} \quad \text{und} \quad \eta_{\alpha}^{2\beta-1},$$

welche sich also auf die von uns mit (B_β) bezeichneten Wege beziehen, mit

$$\omega_{\alpha\beta} \quad \text{und} \quad \eta_{\alpha\beta}$$

und führt

$$\sum_{\gamma=1}^{\beta} \omega_{\alpha}^{2\gamma-2} = \omega_{\alpha,\,\rho+\beta}, \qquad \sum_{\gamma=1}^{\rho} \eta_{\alpha}^{2\gamma-2} = \eta_{\alpha,\,\rho+\beta}$$

und entsprechend:

$$\overset{(2\beta-1)}{E(xy)} = E(xy)_\beta, \qquad \prod_{\gamma=1}^{\beta} \overset{(2\gamma-2)}{E(xy)} = E'(xy)_\beta$$

ein, so gelten für diese Grössen und Primfunctionen folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{\rho} (\eta_{\alpha\gamma}\,\omega_{\alpha\beta} - \omega_{\alpha\gamma}\,\eta_{\alpha\beta}) = 0 \\
&\sum_{\alpha=1}^{\rho} (\eta_{\alpha,\,\rho+\gamma}\cdot\omega_{\alpha,\,\rho+\beta} - \omega_{\alpha,\,\rho+\gamma}\,\eta_{\alpha,\,\rho+\beta}) = 0 \\
&\sum_{\alpha=1}^{\rho} (\eta_{\alpha\gamma}\cdot\omega_{\alpha,\,\rho+\beta} - \omega_{\alpha\gamma}\,\eta_{\alpha,\,\rho+\beta}) = \begin{cases} 0 & \beta \gtrless \gamma \\ \dfrac{\pi i}{2} & \beta = \gamma \end{cases}
\end{aligned}\right\} \qquad A')$$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{\gamma=1}^{\rho}(\omega_{\alpha\gamma}\omega_{\beta,\rho+\gamma}-\omega_{\beta\gamma}\cdot\omega_{\alpha,\rho+\gamma})=0\\
&\sum_{\gamma=1}^{\rho}(\eta_{\alpha\gamma}\eta_{\beta,\rho+\gamma}-\eta_{\beta\gamma}\cdot\eta_{\alpha,\rho+\gamma})=0\\
&\sum_{\gamma=1}^{\rho}(\eta_{\alpha\gamma}\omega_{\beta,\rho+\gamma}-\eta_{\alpha,\rho+\gamma}\cdot\omega_{\beta\gamma})=\begin{cases}0 & \beta\gtrless\alpha\\ \pi i & \\ \frac{1}{2} & \beta=\alpha\end{cases}
\end{aligned}\right\}\qquad B')$$

$$\frac{d\log E(xy)_\beta}{dx}=\sum_{\beta=1}^{\rho}(2\omega_{\alpha\beta}g'(xy)_\alpha-\eta_{\alpha\beta}g(xy)_\alpha)$$

$$\frac{d\log E'(xy)_\beta}{dx}=\sum_{\beta=1}^{\rho}(2\omega_{\alpha,\rho+\beta}g'(xy)_\alpha-\eta_{\alpha,\rho+\beta}g(xy)_\alpha)\qquad 7')$$

$$E(\bar{x}_t\bar{y}_t)_\beta=e^{\sum_{\alpha=1}^{\rho}2\omega_{\alpha\beta}\frac{t^{-2\rho+2\alpha-1}}{A^{-\rho+\alpha}}}\{1+t\mathfrak{P}(t)\};$$

$$E'(\bar{x}_t\bar{y}_t)_\beta=e^{\sum_{\alpha=1}^{\rho}2\omega_{\alpha\rho+\beta}\cdot\frac{t^{-2\rho+2\alpha-1}}{A^{-\rho+\alpha}}}\{1+t\mathfrak{P}(t)\}$$

und ferner:

$$J(xy)_\alpha=\frac{1}{\pi i}\sum_{\beta=1}^{\rho}\{\omega_{\alpha\beta}\log E'(xy)_\beta-\omega_{\alpha,\rho+\beta}\log E(xy)_\beta\}$$

$$J'(xy)_\alpha=\frac{1}{\pi i}\sum_{\beta=1}^{\rho}\{\eta_{\alpha\beta}\log E'(xy)_\beta-\eta_{\alpha,\rho+\beta}\log E(xy)_\beta\}$$

§. 7.

Wir wollen noch unsere zweite Primfunction $E(xy,\ x'y')$ näher betrachten, die wir durch das Product

$$E(xy,x_0y_0)\frac{E(xy,x_1y_1|a_0b_0)}{E(xy,x_0y_0|a_0b_0)}\cdot\ldots\cdot\frac{E(xy,x'y'|a_nb_n)}{E(xy,x_ny_n|a_nb_n)}$$

definirten, wo $(x_0\ y_0)$ dem durch das Functionenpaar $(\bar{x}_\tau\ \bar{y}_\tau)$ definirten Elemente und die Stelle $(x_\nu,\ y_\nu)$ der Umgebung von $(a_\nu,\ b_\nu)$ angehört, die überdies noch die Stelle $(x_{\nu+1},\ y_{\nu+1})$ enthält.

Es war (§. 4)

$$\frac{d\log E(xy,\bar{x}_\tau\bar{y}_\tau)}{d\tau}=H(xy,\bar{x}_\tau\bar{y}_\tau)\cdot\frac{d\bar{x}_\tau}{d\tau},$$

$$\frac{d\log E(xy,x_\tau y_\tau\,|\,ab)}{d\tau}=H(xy,x_\tau y_\tau)\cdot\frac{dx_\tau}{d\tau}$$

und zufolge:

$$\frac{d}{dx}H(xy,x'y')=\frac{d}{dx}H(x'y',xy)+\sum_{\alpha=1}^{\rho}\{g(x'y')_\alpha\cdot g'(xy)_\alpha-$$

$$-g(xy)_\alpha g'(x'y')_\alpha\}$$

wird:

$$\frac{d\log E(xy,\bar{x}_\tau\bar{y}_\tau)}{dx}=H(x_0y_0,xy)+\sum_{\alpha=1}^{\rho}\{J(\bar{x}_\tau\bar{y}_\tau)_\alpha\cdot g'(xy)_\alpha-$$

$$-J'(\bar{x}_\tau\bar{y}_\tau)_\alpha\cdot g(xy)_\alpha\},$$

$$\frac{d\log E(xy,x_\tau y_\tau\cdot ab}{dx}=H(x'y',xy)-H(a,b\,|\,xy)+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{\rho}\{(J(x_\tau y_\tau)_\alpha-J(ab)_\alpha)\cdot g'(xy)_\alpha-(J'(x_\tau y_\tau)_\alpha-J'(ab)_\alpha)g(xy)_\alpha\}$$

und die Zusammensetzung ergibt:

$$\frac{d\log E(xy,x'y')}{dx}=H(x_0y_0,xy)+H(x_1y_1,xy)-H(x_0y_0,xy)+\ldots$$

$$\ldots H(x'y',xy)-H(x_ny_n,xy)$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{\rho}\{J(x'y')_\alpha g'(xy)_\alpha-J'(x'y')_\alpha\cdot g(xy)_\alpha\}$$

oder

$$\frac{d\log E(xy,x'y')}{dx}=H(x'y',xy)+\sum_{\tau=1}^{\rho}\{J(x'y')_\alpha\,g'(xy)_\alpha-$$

$$-J'(x'y')_\alpha\,g(xy)_\alpha\}\qquad 1)$$

wo

$$J(x'y')_\alpha=\int_{(\infty\infty)_1}^{(x'y')}g(xy)_\alpha\,dx,\quad J'(x'y')_\alpha=\int_{(\infty\infty)_2}^{(x'y')}g'(xy)_\alpha\,dx$$

und überdies noch die Darstellungen:

$$E(\bar{x}_t \bar{y}_t, x'y') = -t^{-1} \cdot e^{\sum_{\alpha=1}^{\rho} J(x'y')_\alpha \cdot \frac{t-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}{B_1-\beta\nu_0'+\mu_0'\pi_\beta+\mu_0 i}} \{1+t\mathfrak{P}(t)\} \quad 2)$$

$$E(\bar{\bar{x}}_t \bar{\bar{y}}_t, x'y') = e^{\sum_{\alpha=1}^{\rho} J(x'y')_\alpha \cdot \frac{t-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}{B_2-\beta\nu_0'+\mu_0'\pi_\beta+\mu_0 i}} \{1+t\mathfrak{P}(t)\} \quad 3)$$

im Unendlichen gelten.

Die ganze transcendente Function $E(xy, x'y')$, welche an der Stelle $(x, y) = (x', y')$ von der ersten Ordnung verschwindet, genügt demnach der Differentialgleichung 1) und hat im Unendlichen das in 2) und 3) dargestellte charakteristische Verhalten. Es lässt sich wieder umgekehrt von einer ganzen transcendenten Function, die ein solches Verhalten im Unendlichen aufweist, zeigen, dass sie eine Nullstelle (x', y') besitzen muss und sonach als das Product einer Function $E(xy, x'y')$ in eine nie verschwindende Function von x und y anzusehen ist. Dann ist sie aber eine Function $E(xy, x'y')$ selbst, indem zu einer Stelle $(x'y')$ die unendlich vielen Functionen

$$E(xy, x'y') = E_1(xy, x'y') \prod_{\beta=1}^{\rho} E(xy)_\beta^{\dot{m}_\beta} \cdot E'(xy)_\beta^{m'_\beta}$$

gehören; $E(xy, x'y')$ ist als Function von $(x'y')$ unendlich vieldeutig.

Nun können wir unmittelbar den allgemeinsten Ausdruck einer Function

$$F(xy) = G_0(x) + G_1(x)y + \ldots \underset{m-1}{G(x)} y^{m-1}$$

wo $G(x)$ ganze transcendente Functionen sind, angeben, welche an einer endlichen Anzahl r von Stellen (x_k, y_k) verschwindet.

$$F(xy) = e^{g_0(x)+g_1(x)y+\ldots \underset{m-1}{g(x)} \cdot y^{m-1}} \cdot E(xy) \cdot \prod_{k=1}^{r} E(xy, x_k y_k)$$

ist dieser Ausdruck und $g(x)$ sind ganze transcendente Functionen. Wählen wir $r-1$ der Functionen $E(xy, x_k y_k)$ beliebig, so kann man die letzte derart bestimmen, dass $E(xy)$ aus dem Ausdruck herausfällt.

Soll $F(xy)$ eine ganze rationale Function sein, müssen $g_1(x), \ldots g_{m-1}(x)$ verschwinden, $g_0(x)$ muss eine Constante werden und damit die Entwicklungen von

$$F(xy) = C \cdot \prod_{k=1}^{r} E(xy, x_k y_k)$$

im Unendlichen übereinstimmen, müssen noch die transcendenten Bedingungen:

$$\sum_{k=1}^{r} J(x_k y_k)_\alpha = 0 \quad (\alpha = 1 \ldots \rho)$$

erfüllt sein.

Die rationale Function $F(xy)$ mit den Nullstellen (x_k, y_k) und den Unendlichkeitsstellen (x'_k, y'_k) ist durch

$$C \prod_{k=1}^{r} \frac{E(xy, x_k y_k)}{E(xy, x'_k y'_k)}$$

dargestellt, wobei die Gleichungen

$$\sum_{k=1}^{r} (J(x_k y_k)_\alpha - J(x'_k y'_k)_\alpha) = 0 \quad (\alpha = 1 \ldots \rho)$$

d. i.:

$$\sum_{k=1}^{r} \int_{(x'_k y'_k)}^{(x_k y_k)} g(xy)_\alpha \, dx = 0 \quad \alpha = 1 \ldots \rho)$$

erfüllt sind und umgekehrt, wenn diese Gleichungen bestehen, so gibt es eine rationale Function $F(xy)$ mit (x_k, y_k) als Null und mit (x'_k, y'_k) als Unendlichkeitsstellen, denn das obige Product ist eine solche Function, da dasselbe nirgends mehr wesentlich singuläre Stellen besitzt.

Das ist das Abel'sche Theorem für die Integrale erster Gattung.

Eines erübrigt uns noch, nämlich der Integralausdruck für

$$\int H(x'y', xy)\, dx = J(xy, x'y')$$

in den Primfunctionen. Die Differentialgleichung 1) erlaubt die Ermittlung:

$$J(xy, x'y') = \int_{(\infty\infty)_1}^{(xy)} H(x'y', xy)\, dy = \log E(xy, x'y') - \\ - \sum_{\alpha=1}^{p} \{J(x'y')_\alpha . J'(xy)_\alpha - J(x'y')_\alpha . J(xy)_\alpha\},$$

$$J(xy, x'y') = \log E(xy, x'y') + \sum_{\alpha=1}^{p} \{\log E(x'y')_\alpha . \log E'(xy)_\alpha - \\ - \log E'(x'y')_\alpha . \log E(xy)_\alpha\}.$$

so dass nun auch das Integral dritter Gattung durch die Logarithmen eindeutiger Functionen von x und y dargestellt ist.

§. 8.

Nachdem das allgemeinste zur binomischen Irrationalität y gehörige Abel'sche Integral auf die der drei Gattungen zurückzuführen ist und diese Integrale durch Logarithmen der Primfunctionen integrirt sind, hat der analytische Ausdruck des allgemeinen Integrales die Form:

$$\sum_k{}' c_k \log E(xy, x_k y_k) + \sum_\alpha k'_\alpha \log E'(xy)_\alpha + \sum k_\alpha \log E(xy)_\alpha + F_1(xy) \quad (A$$

wo $F_1(xy)$ eine rationale Function von x und y bedeutet.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass das allgemeine Integral auf eine algebraische Function von x reducirbar ist, bestehen zufolge der Natur der Primfunctionen offenbar darin, dass in dem Ausdruck (A) die Coëfficienten dieser Logarithmen einzeln verschwinden und zugleich ist ersichtlich, dass das Integral dann einer rationalen Function von x und y gleich sein muss.

Ebenso leicht liessen sich nach den Bemerkungen des vorigen §. die transcendenten Bedingungen angeben, unter welchen das Integral durch algebraische Functionen von x und Logarithmen solcher Functionen darzustellen ist und wiederum ist klar, dass diese algebraischen Functionen nur rationale Functionen von x

und y sein können, indem in dem allgemeinen Integralausdruck die Logarithmen eindeutiger Functionen von x und y stehen.

Wir wollen uns hier mit der Reduction der zur Irrationalität y gehörigen Abel'schen und der hyperelliptischen Integrale auf elliptische näher beschäftigen.

Ausgehend von der allgemeinsten algebraischen Beziehung zwischen einem Abel'schen oder einem hyperelliptischen Integral, elliptischen Integralen und algebraisch-logarithmischen Functionen, wo zwischen den Grenzen der Integrale und den Argumenten der Logarithmen algebraische Relationen stattfinden, hat Herr Königsberger gezeigt,[1] dass die Existenz einer solchen Beziehung erfordert, „dass jedenfalls ein zur Irrationalität y gehöriges Integral erster Gattung auf ein Integral erster Gattung, welches den in der Relation vorkommenden elliptischen Integralen zugehörig ist, zurückgeführt werden kann," und zwar sind in

$$\int^{(\xi\eta)} \frac{d\xi}{\eta} = \int^{(xy)} g(xy)\,dx$$

ξ und η rational durch x und y ausdrückbar.

Insbesondere kommt die Untersuchung bei den hyperelliptischen Integralen auf die Ermittlung derjenigen Integrale erster Gattung zurück, welche durch eine rationale Substitution auf elliptische Integrale erster Gattung zurückführbar sind und die Untersuchung dieser rationalen Transformation zeigt, dass für jeden Rang ρ und jeden Grad α (wo der Grad α durch den Grad des Zählers der Function unter dem Integral definirt ist) ein hyperelliptisches Integral existirt, welches auf ein elliptisches zurückführbar ist, aber „nicht jedes zu derselben Irrationalität gehörige Integral muss auf ein elliptisches zurückgeführt werden können."

Königsberger behandelt diese Reductionsprobleme auch neuerdings in seinem Buche: „Allgemeine Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen" von allgemeineren

---

[1] Königsberger: Über die Reduction hyperelliptischer Integrale auf elliptische. Borchardts Journal. Bd. 85. — Zur Reduction Abel'scher Integrale auf elliptische. Bd. 86.

Gesichtspunkten und erledigt dort die Aufgabe, hyperelliptische Integrale anzugeben, welche auf elliptische reducirbar sind.

Zur Ermittlung der Polynome $R(x)$, deren zugehörige Integrale erster Gattung auf elliptische zurückführbar sind, „kann man die Betrachtung auch auf die zu diesen Integralen gehörigen ϑ-Functionen ausdehnen und die Relationen für die Moduln dieser ϑ-Functionen aufsuchen, wenn die zugehörigen Integrale auf elliptische reducirbar oder die ϑ-Functionen in ϑ-Functionen niederer Ordnung und in elliptische ϑ-Functionen zerlegbar sein sollen." Setzt man in den ϑ-Relationen die Argumente Null, so ergeben sich die Beziehungen in den Integralmoduln und setzt man die Reductionsformel der ϑ-Functionen in die entsprechende zwischen den Integralgrenzen um, so erhält man die algebraische Transformation.

Die Relationen in den ϑ-Moduln sind es, die wir hier in sehr einfacher Weise ableiten werden. Die Kenntniss derselben in der Theorie der ϑ-Functionen ist gewiss von einiger Bedeutung. Doch sehen wir erst zu, wie sich all' die besprochenen Theoreme mit Hilfe der Integralausdrücke in den Primfunctionen begreifen lassen.

Setzen wir voraus, dass zwischen einem Abel'schen Integral der obigen Art, elliptischen Integralen und algebraisch-logarithmischen Functionen eine Beziehung besteht, in welcher die oberen Grenzen der elliptischen Integrale und die Argumente der Logarithmen algebraisch mit der oberen Grenze des ersten Integrales zusammenhängen, so ist diese Beziehung nach einem Satze von Abel eine lineare der Form:

$$\int_{(x,y)} F(xy)\,dx = \int^{\xi_1\eta_1^{(1)}} F_1(\xi\eta^{(1)})\,d\xi + \int^{(\xi_1\eta_2^{(2)})} F_2(\xi\eta^{(2)})\,d\xi + \ldots \int^{(\xi_\nu\eta_\nu^{(\nu)})} F_\nu(\xi\eta^{(\nu)})\,d\xi + \\ + u + \sum_{i=1}^{\mu} A_i \log v_i, \qquad a)$$

wo wir die Irrationalitäten $\eta^{(\varkappa)}$ in der Form:

$$\sqrt{(1-\xi^2)(1-k_\varkappa^2\xi^2)}$$

annehmen können.

Zum Bestehen der entsprechenden Gleichung in den Logarithmen der Primfunctionen ist nothwendig, dass man durch eine Transformation von den den elliptischen Integralen zugehörigen Primfunctionen $\mathfrak{E}(\xi\eta^{(1)})$ und $\mathfrak{E}(\xi\eta^{(2)}, \xi_\nu\eta_\nu^{(2)})$ zu denen des Integrales links gelangen kann, insbesondere von $\mathfrak{E}(\xi\eta)$ zu der allgemeinen Function $E(xy)$, die sich als Product ganzzahliger Potenzen der $2p$ von einander unabhängigen Primfunctionen $E(xy)_\alpha$, $E'(xy)_\alpha$ darstellen lassen. Dann ist aber auch klar, dass zur Irrationalität y gehörige Integrale erster Gattung existiren müssen, welche auf je ein der zu den elliptischen Integralen der rechten Seite von a) gehörigen Integrale erster Gattung reducirbar sind.

In der Beziehung

$$\mathfrak{E}(\xi\eta) = E(xy)$$

müssen ξ und η eindeutige Functionen von x und y sein, weil $E(xy)$ eine eindeutige Function von x und y ist. Da aber die durch die Transformation hervorgehende Function $E(xy)$ nur in der Entwicklung um die unendlich fernen Stellen des durch die Gleichung

$$y^m = R(x)$$

definirten algebraischen Gebildes eine endliche Anzahl negativer t Potenzen im Exponenten der Exponentialfunction enthalten soll, müssen ξ und η rationale Functionen von x und y sein. Wenn wir diese Transformation verfolgten, liessen sich leicht nähere Aufschlüsse über die Beschaffenheit der rationalen Functionen ertheilen.

Geben wir x einen festen Werth und bilden die Norm von $E(xy)$, so ist diese gleich 1. Den m Werthepaaren (x, y_1), (x, y_2) $\ldots(x, y_m)$ mögen (ξ_1, η_1), $(\xi_2, \eta_2)\ldots(\xi_m, \eta_m)$ entsprechen, dann gilt die Gleichung:

$$\mathfrak{E}(\xi_1\eta_1).\mathfrak{E}(\xi_2\eta_2)\ldots\mathfrak{E}(\xi_m\eta_m) = 1,$$

doch diese wird nicht anders möglich sein, als wenn:

$$\prod_{\alpha=1}^{m}\mathfrak{E}(\xi_\alpha\eta_\alpha) = (\mathfrak{E}(\xi_\alpha\eta_\alpha))^0 = 1,$$

oder wenn wir für $\mathfrak{E}(\xi_\alpha\eta_\alpha)$ wieder $\mathfrak{E}(\xi\eta)$ schreiben, sobald:

$$\mathfrak{E}(\xi_\beta \eta_\beta) = (\mathfrak{E}(\xi\eta))^{\cos\frac{2\pi\varepsilon}{m} + i\sin\frac{2\pi\varepsilon}{m}}$$

wo β alle Werthe von $1 \ldots m$ besitzt, bis auf denjenigen, der rechts eingegangen ist und ε die Werthe $1, 2 \ldots . m-1$ hat.

Denken wir nun die Beziehung:

$$g(xy)_\alpha dx = \frac{d\xi}{\eta'^{(\alpha)}} \quad (\alpha = 1 \ldots \rho)$$

in den Primfunctionen geschrieben, so ergibt die Anwendung des eben erhaltenen Resultates, dass das elliptische Integral, auf welches das Abel'sche Integral erster Gattung reducirbar ist, einen Modul k_α der complexen Multiplication haben muss. Mit Hilfe der bekannten Beschaffenheit des Multiplicators der complexen Multiplication leitet man nun aber ganz leicht ab,[1] dass ein Abel'sches Integral

$$\int g(xy)_\alpha dx$$

nur dann auf ein elliptisches reducirt werden kann, wenn

$$m = 2, 3, 4, 6$$

ist.

Der erste Fall bezieht sich auf die Frage nach der Reduction der hyperelliptischen Integrale auf elliptische, und wir wollen denn auch gleich nach den Bedingungen forschen, unter welchen das zur Gleichung

$$y^2 = R(x)_{2\rho+1}$$

gehörige Integral:

$$\int \frac{b_0 + b_1 x + \ldots b_{\rho-1} x^{\rho-1}}{y} dx,$$

welches sich mit Hilfe der Fundamentalintegrale erster Gattung:

$$\int g(xy)_\alpha dx$$

auf die Form:

---

[1] Königsberger: Borchardts Journal. Bd. 86.

$$\int \sum_{\alpha=1}^{\rho} C_\alpha g(xy)_\alpha \cdot dx$$

bringen lässt, gleich ist dem zu dem Gebilde

$$\eta^2 = R_3(\xi)$$

gehörigen elliptischen Integral:

$$\int \frac{d\xi}{\eta}.$$

Wenn wir die Bezeichnung:

$$\sum_{\alpha=1}^{\rho} C_\alpha \omega_{\alpha\lambda} = \omega_\lambda \quad (\lambda = 1, 2 \ldots 2\rho)$$

einführen, so lautet der Ausdruck für das vorgelegte Integral:

$$\frac{1}{\pi i} \log \left\{ e^{2\pi i \sum_{\beta=1}^{\rho} (m'_\beta \omega_\beta - m_\beta \omega_{\rho+\beta})} \frac{E(xy)_1^{\omega_1} E(xy)_2^{\omega_2} \ldots E(xy)_\rho^{\omega_\rho}}{E(xy)_1^{\omega+1} . E(xy)_2^{\omega_\rho+2} \ldots E(xy)_\rho^{\omega_{2\rho}}} \right\}$$

und dieser soll gleich sein:

$$\frac{1}{\pi i} \log \left\{ e^{2\pi i(\mu' \tilde{\omega}_{11} - \mu \tilde{\omega}_{12})} \frac{\mathfrak{S}'(\xi\eta)_1^{\tilde{\omega}_{11}}}{\mathfrak{S}(\xi\eta)_1^{\tilde{\omega}_{12}}} \right\},$$

wo $\tilde{\omega}_{11}$, $\tilde{\omega}_{12}$ die Perioden des elliptischen Integrales sind, also soll auch eine Beziehung:

$$C \frac{E(xy)^{\omega_1} \ldots E(xy)_\beta^{\omega_\rho}}{E(xy)_1^{\omega_1} \ldots E(xy)_\rho^{\omega_{2\rho}}} = c \cdot \frac{\mathfrak{S}'(\xi\eta)_1^{\tilde{\omega}_{11}}}{\mathfrak{S}(\xi\eta)_1^{\tilde{\omega}_{12}}}$$

bestehen.

Für den Fall eines hyperelliptischen Integrales erster Ordnung und erster Gattung:

$$\int \frac{a + bx}{y} dx$$

müssen wir nun insbesondere von den Functionen $\mathfrak{S}(\xi\eta)_1$ und $\mathfrak{S}'(\xi\eta)_1$ zu Functionen

$$\mathfrak{E}(xy)_1 = E(xy)_1^{m_1}\, E(xy)_2^{m_2}\, E'(xy)_1^{m_3}\, E'(xy)_2^{m_4}$$
$$\mathfrak{E}(xy)_2 = E(xy)_1^{n_1}\, E(xy)_2^{n_2}\, E'(xy)_1^{n_3} \cdot E'(xy)_2^{n_4}$$

gelangen können und in dem Logarithmus des Ausdruckes

$$c\,\frac{\mathfrak{E}(xy)_1^{\tilde{\omega}_{11}}}{\mathfrak{E}(xy)_2^{\tilde{\omega}_{12}}}$$

erhalten wir dann einen Ausdruck des vorgelegten Integrales, das reducirbar ist und hier erscheinen $\mathfrak{E}(xy)_1$, $\mathfrak{E}(xy)_2$ als die unabhängigen nie verschwindenden Primfunctionen.

Doch damit das Integral im Unendlichen nicht unendlich wird, müssen in der Entwicklung um die unendlich ferne Stelle die Coëfficienten der Potenzen t^{-3} und t^{-1} im Exponenten der Exponentialfunction verschwinden, d. h. es müssen die Gleichungen:

$$\tilde{\omega}_{11}\sum_{\lambda=1}^{4} m_\lambda\, \omega_{1\lambda} - \tilde{\omega}_{12}\sum_{\lambda=1}^{4} n_\lambda\, \omega_{1\lambda} = 0$$
$$\tilde{\omega}_{11}\sum_{\lambda} m_\lambda\, \omega_{2\lambda} - \tilde{\omega}_{12}\sum_{\lambda} n_\lambda\, \omega_{2\lambda} = 0$$

bestehen und diese sind als Bestimmungsgleichungen für die zwei Grössen $\tilde{\omega}$ aufgefasst, nicht anders möglich, als wenn:

$$\begin{vmatrix} \sum_{\lambda=1}^{4} m_\lambda\, \omega_{1\lambda} & \sum_{\lambda=1}^{4} n_\lambda\, \omega_{1\lambda} \\ \sum_{\lambda=1}^{4} m_\lambda\, \omega_{2\lambda} & \sum_{\lambda=1}^{4} n_\lambda\, \omega_{2\lambda} \end{vmatrix} = 0.$$

Entwickelt lautet diese Gleichung:

$$\begin{aligned}
&(m_1 n_2 - m_2 n_1)(\omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}) + \\
+&(m_1 n_3 - m_3 n_1)(\omega_{11}\omega_{23} - \omega_{21}\omega_{13}) + \\
+&(m_1 n_4 - m_4 n_1)(\omega_{11}\omega_{24} - \omega_{21}\omega_{14}) + \\
+&(m_2 n_3 - m_3 n_2)(\omega_{12}\omega_{23} - \omega_{22}\omega_{13}) + \\
+&(m_2 n_4 - m_4 n_2)(\omega_{12}\omega_{24} - \omega_{22}\omega_{14}) + \\
+&(m_3 n_4 - m_4 n_3)(\omega_{13}\omega_{24} - \omega_{13}\omega_{14}) = 0.
\end{aligned}$$

oder unter Einführung der Thetamoduln:

$$\tau_{11} = \frac{\omega_{22}\omega_{13} - \omega_{12}\omega_{23}}{(\omega)} \quad \tau_{22} = \frac{\omega_{11}\omega_{24} - \omega_{21}\omega_{14}}{(\omega)}$$

$$\tau_{12} = \frac{\omega_{22}\omega_{14} - \omega_{12}\omega_{24}}{(\omega)} \quad \tau_{21} = \frac{\omega_{11}\omega_{23} - \omega_{21}\omega_{13}}{(\omega)}$$

wo

$$(\omega) = \omega_{11}\omega_{22} - \omega_{12}\omega_{21}, \quad \tau_{12} = \tau_{21},$$

I)
$$(m_1 + m_2\tau_{11} + m_4\tau_{12})(n_2 + n_3\tau_{21} + n_4\tau_{22}) - (m_2 + m_3\tau_{21} + m_4\tau_{22})(n_1 + n_3\tau_{11} + n_4\tau_{12}) = 0.$$

Also zwischen den Thetamoduln muss eine derartige Gleichung in ganzzahligen Coëfficienten bestehen, wenn sich ein Integral

$$\int \frac{a + bx}{y} dx$$

in ein elliptisches transformiren lassen soll.

Besteht umgekehrt eine derartige Gleichung in den Thetamoduln, die uns allerdings in der Form

2)
$$q_1 + q_2\tau_{11} + q_3\tau_{12} + q_4\tau_{22} + q_5(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2) = 0$$

begegnen wird, so fragen wir nach den Systemen ganzer Zahlen:

$$m_\lambda, n_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 3, 4)$$

welche die fünf Gleichungen:

3)
$$m_1n_2 - m_2n_1 = q_1 \quad m_3n_2 - m_2n_3 = q_2$$
$$m_1n_4 - m_4n_1 = q_4 \quad m_3n_4 - m_4n_3 = q_5$$

4)
$$(m_1n_3 - m_3n_1) - (m_2n_4 - m_4n_2) = q_3$$

befriedigen, und dann haben wir in

$$\log\left\{c\frac{(E(xy)_1^{m_1}E(xy)_2^{m_2}\cdot E'(xy)_1^{m_3}E'(xy)_2^{m_4})^{\tilde{\omega}_{11}}}{(E(xy)_1^{n_1}E(xy)_2^{n_2}\cdot E'(xy)_1^{n_3}E'(xy)_2^{n_4})^{\tilde{\omega}_{12}}}\right\} = \log\left(c\frac{\mathfrak{E}(xy)_1^{\tilde{\omega}_{11}}}{\mathfrak{E}(xy)_2^{\tilde{\omega}_{12}}}\right),$$

wo $\tilde{\omega}_{11}$ und $\tilde{\omega}_{12}$ den Gleichungen:

$$\tilde{\omega}_{11}\cdot\sum_{\lambda=1}^{4} m_\lambda\omega_{1\lambda} - \tilde{\omega}_{12}\cdot\sum_{\lambda} n_\lambda\omega_{1\lambda} = 0$$

$$\tilde{\omega}_{11} \cdot \sum_{\lambda} m_\lambda \omega_{2\lambda} - \tilde{\omega}_{12} \cdot \sum_{\lambda} n_\lambda \omega_{2\lambda} = 0$$

genügen, den Ausdruck eines Integrales erster Gattung, welches auf ein elliptisches zu reduciren ist.

Damit wir von einer Gleichung (2) auf eine Gleichung (I) zurückgehen können, müssen die Grössen q noch eine Bedingung erfüllen. Berechnet man nämlich aus den Gleichungen (3)

$$m_1 = \frac{q_1 m_4 - q_4 m_2}{m_4 n_2 - m_2 n_4} \qquad n_1 = \frac{q_1 n_4 - q_4 n_2}{m_4 n_2 - m_2 n_4}$$
$$m_3 = \frac{q_2 m_4 - q_5 m_2}{m_4 n_2 - m_2 n_4} \qquad n_3 = \frac{q_2 n_4 - q_5 n_2}{m_4 n_2 - m_2 n_4}$$

und substituirt diese Werthe in der Gleichung (4) so folgt

$$(m_4 n_2 - m_2 n_4)[(m_4 n_2 - m_2 n_4)^2 - q_3(m_4 n_2 - m_2 n_4) + (q_2 q_4 - q_1 q_5)] = 0.$$

Wir setzen

$$(m_4 n_2 - m_2 n_4)^2 - q_3(m_4 n_2 - m_2 n_4) + (q_2 q_4 - q_1 q_5) = 0$$

dann resultirt:

$$m_4 n_2 - m_2 n_4 = \frac{q_3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q_3^2 - 4(q_2 q_4 - q_1 q_5)} = M, N$$

$$m_1 n_3 - m_3 n_1 = \frac{q_3}{2} \mp \frac{1}{2}\sqrt{q_3^2 - 4(q_2 q_4 - q_1 q_5)} = N, M$$

Damit aber

$$m_4 n_2 - m_2 n_4, \quad m_1 n_3 - m_3 n_1$$

ganze Zahlen sind, muss

$$q_3^2 - 4(q_2 q_4 - q_1 q_5)$$

das Quadrat einer ganzen Zahl p sein, wo p mit q_3 gerade und ungerade ist. Der Fall

$$q_2 q_4 - q_1 q_5 = 0$$

führt zu

$$m_1 n_3 - m_3 n_1 = 0$$

oder

$$m_4 n_2 - m_2 n_4 = 0$$

und umgekehrt muss mit einer dieser Gleichungen die erste in den q verbunden sein.

Wir erhalten somit die Gleichungen:

$$m_4 n_2 - m_2 n_4 = M, N \qquad m_1 n_3 - m_3 n_1 = N, M$$
$$M + N = q_3 \qquad MN = q_2 q_4 - q_1 q_5$$

und das Gleichungssystem für die Grössen m_λ, n_λ lautet unter Gebrauch der ersten Wurzel für $m_4 n_2 - m_2 n_4$

$$q_1 m_4 - q_4 m_2 = m_1 M \qquad q_2 m_4 - q_5 m_2 = m_3 M$$
$$q_1 n_4 - q_4 n_2 = n_1 M \qquad q_2 n_4 - q_5 n_2 = n_3 M$$

oder:

$$q_1 m_3 - q_2 m_1 = m_2 N \qquad q_4 m_3 - q_5 m_1 = m_4 N$$
$$q_1 n_3 - q_2 n_1 = n_2 N \qquad q_4 n_3 - q_5 n_1 = n_4 N$$

Wählen wir den zweiten Werth für $(m_2 n_4 - n_4 m_2)$, so entsteht ein zweites Gleichungssystem, in welchem gegenüber diesem ersten nur M und N vertauscht sind. Es gibt somit zwei verschiedene Systeme von Zahlen m_λ, n_λ und entsprechend zwei Systeme von Lösungen für unsere Aufgabe, ausser wenn

$$q_3^2 = 4(q_2 q_4 - q_1 q_5).$$

Doch man überzeugt sich leicht, dass in einem derartigen System nur eine wesentliche Lösung vorhanden ist und damit stellt sich das Resultat heraus, dass wir nur zwei zu derselben Irrationalität gehörige Integrale erster Gattung

$$\int \frac{a + bx}{y} dx$$

angeben können, die sich gleichzeitig auf je ein elliptisches transformiren lassen.

Diese Ergebnisse stimmen mit den Resultaten überein, die Herr Weierstrass Herrn Königsberger mitgetheilt hat, und die folgendermassen lauten:[1]

„Wenn ein Abel'sches System erster Ordnung

[1] Königsberger: Borchardts Journal. Bd. 67, p. 72.

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = du_1$$
$$\frac{x_1 dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{x_2 dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = du_2$$

sich in ein anderes transformiren lässt, für welches der Modul der ϑ-Function $\tau'_{12} = 0$ ist, so lassen sich die Constanten a und b (auf zweierlei Art) so bestimmen, dass

$$\int \frac{a + bx}{\sqrt{R(x)}}\, dx = \int \frac{d\xi}{\sqrt{R_1(\xi)}},$$

wo $R_1(\xi)$ vom dritten Grade und ξ und $\sqrt{R_1(\xi)}$ rational durch x und $\sqrt{R(x)}$ ausdrückbar sind. Umgekehrt muss zwischen den Grössen $\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}$ eine Gleichung der angegebenen Form stattfinden, wenn sich das Integral

$$\int \frac{a + bx}{\sqrt{R(x)}}\, dx$$

in der in Rede stehenden Weise in ein elliptisches soll transformiren lassen."

Nun und der ϑ-Modul τ'_{12} hat bis auf einen constanten Factor gerade einen Ausdruck

$$\begin{aligned}&(m_1 + m_3\tau_{11} + m_4\tau_{22})\,(n_2 + n_3\tau_{21} + n_4\tau_{22})\\ -\,&(m_2 + m_3\tau_{21} + m_4\tau_{22})\,(n_1 + n_3\tau_{11} + n_4\tau_{12})\end{aligned}$$

zum Zähler.[1]

Bevor wir die Bedingung aufsuchen, unter welcher das hyperelliptische Integral zweiter Ordnung und erster Gattung, das aus den Integralen

$$J(xy)_\alpha = \int \frac{x^{\alpha-1}}{y}\, dx = \frac{1}{\pi i} \sum_{\beta=1}^{3} \{\omega_{\alpha\beta} \log E'(xy)_\beta - \omega_{\alpha,\rho+\beta} \log E(xy)_\beta\}$$

zusammengesetzt sein mag, auf ein elliptisches reducirbar ist, wollen wir fragen, wenn dasselbe auf ein hyperelliptisches Integral erster Ordnung und erster Gattung zu transformiren ist.

---

[1] Königsberger: Borchardts Journal. Bd. 65, p. 344.

Wir müssen auch hier von den Primfunctionen $\mathfrak{E}(\xi\eta)_\alpha$ und $\mathfrak{E}'(\xi\eta)_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$ in dem Ausdruck für das letztere Integral:

$$\log\left\{c\,\frac{\mathfrak{E}'(\xi\eta)_1^{\tilde{\omega}_1}\,\mathfrak{E}'(\xi\eta)_2^{\tilde{\omega}_2}}{\mathfrak{E}(\xi\eta)_1^{\tilde{\omega}_3}\,\mathfrak{E}(\xi\eta)_2^{\tilde{\omega}_4}}\right\}$$

zu Primfunctionen

$$\mathfrak{E}(xy)_\nu = E(xy)_1^{m_1^{(\nu)}}\,E(xy)_2^{m_2^{(\nu)}}\,E(xy)_3^{m_3^{(\nu)}}\,.\,E'(xy)_1^{m_4^{(\nu)}}\,E'(xy)_2^{m_5^{(\nu)}}\,E'(xy)_3^{m_6^{(\nu)}}$$

gelangen und darnach werden wir in:

$$\log\left\{c\,\frac{\mathfrak{E}(xy)_3^{\tilde{\omega}_1}\,.\,\mathfrak{E}(xy)_4^{\tilde{\omega}_2}}{\mathfrak{E}(xy)_1^{\tilde{\omega}_3}\,.\,\mathfrak{E}(xy)_2^{\tilde{\omega}_4}}\right\}$$

einen Ausdruck für das vorgelegte reducirbare Integral zweiter Ordnung haben, wenn nur noch die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\omega}_1 \sum_{\lambda=1}^{6} m_\lambda^{(3)}\omega_{1\lambda} + \tilde{\omega}_2 \Sigma m_\lambda^{(4)}\omega_{1\lambda} - \tilde{\omega}_3 \Sigma m_\lambda^{(1)}\omega_{1\lambda} - \tilde{\omega}_4 \Sigma m_\lambda^{(2)}\omega_{1\lambda} = 0\\
&\tilde{\omega}_1 \Sigma m_\lambda^{(3)}\omega_{2\lambda} + \tilde{\omega}_2 \Sigma m_\lambda^{(4)}\omega_{2\lambda} - \tilde{\omega}_3 \Sigma m_\lambda^{(1)}\omega_{2\lambda} - \tilde{\omega}_4 \Sigma m_\lambda^{(2)}\omega_{2\lambda} = 0\\
&\tilde{\omega}_1 \Sigma m_\lambda^{(3)}\omega_{3\lambda} + \tilde{\omega}_2 \Sigma m_\lambda^{(4)}\omega_{3\lambda} - \tilde{\omega}_3 \Sigma m_\lambda^{(1)}\omega_{3\lambda} - \tilde{\omega}_4 \Sigma m_\lambda^{(2)}\omega_{3\lambda} = 0
\end{aligned}$$

welche aussagen, dass der obige Ausdruck im Unendlichen nicht unendlich wird, indem die linken Seiten gerade die Coëfficienten der Potenzen t^{-5}, t^{-3}, t^{-1} im Exponenten der Exponentialfunction aus der Entwicklung des Ausdruckes um die unendlich ferne Stelle sind.

Doch damit zufolge dieser nothwendigen Gleichungen nicht drei der vier Grössen $\tilde{\omega}$ der vierten proportional sind — was nicht stattfinden darf — müssen die Adjuncten der Elemente der ersten Zeile in der folgenden Determinante verschwinden:

$$\begin{vmatrix}
a & b & c & d\\
\Sigma m_\lambda^{(3)}\omega_{1\lambda} & \Sigma m_\lambda^{(4)}\omega_{1\lambda} & \Sigma m_\lambda^{(1)}\omega_{1\lambda} & \Sigma m_\lambda^{(2)}\omega_{1\lambda}\\
\Sigma m_\lambda^{(3)}\omega_{2\lambda} & \Sigma m_\lambda^{(4)}\omega_{2\lambda} & \Sigma m_\lambda^{(1)}\omega_{2\lambda} & \Sigma m_\lambda^{(2)}\omega_{2\lambda}\\
\Sigma m_\lambda^{(3)}\omega_{3\lambda} & \Sigma m_\lambda^{(4)}\omega_{3\lambda} & \Sigma m_\lambda^{(1)}\omega_{3\lambda} & \Sigma m_\lambda^{(2)}\omega_{3\lambda}
\end{vmatrix}$$

Wir schreiben eine der vier Bedingungen in der Form:

$$\begin{vmatrix}
\Sigma\alpha_\lambda\omega_{1\lambda} & \Sigma\beta_\lambda\omega_{1\lambda} & \Sigma\gamma_\lambda\omega_{1\lambda}\\
\Sigma\alpha_\lambda\omega_{2\lambda} & \Sigma\beta_\lambda\omega_{2\lambda} & \Sigma\gamma_\lambda\omega_{2\lambda}\\
\Sigma\alpha_\lambda\omega_{3\lambda} & \Sigma\beta_\lambda\omega_{3\lambda} & \Sigma\gamma_\lambda\omega_{3\lambda}
\end{vmatrix} = 0$$

und diese lautet unter Anwendung der Schreibweise

$$(\alpha_k\ \beta_\lambda\ \gamma_\mu)$$

für die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \alpha_k & \alpha_\lambda & \alpha_\mu \\ \beta_k & \beta_\lambda & \beta_\mu \\ \gamma_k & \gamma_\lambda & \gamma_\mu \end{vmatrix}$$

und $(\omega)_{ij}$ für die Adjuncte des Elementes ω_{ij} in der Determinante

$$(\omega) = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix}:$$

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1\beta_2\gamma_3)\,(\omega_{11}(\omega)_{11} + \omega_{12}(\omega)_{12} + \omega_{13}(\omega)_{13}) \\
&+\sum_{i=4,5,6}(\alpha_2\beta_3\gamma_i)\,(\omega_{1i}(\omega)_{11} + \omega_{2i}(\omega)_{21} + \omega_{3i}(\omega)_{31}) \\
&-\sum_{i}(\alpha_1\beta_3\gamma_i)\,(\omega_{1i}(\omega)_{12} + \omega_{2i}(\omega)_{22} + \omega_{3i}(\omega)_{32}) \\
&+\sum_{i}(\alpha_1\beta_2\gamma_i)\,(\omega_{1i}(\omega)_{13} + \omega_{2i}(\omega)_{23} + \omega_{3i}(\omega)_{33})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+(\omega_{24}\omega_{35} - \omega_{34}\omega_{25})\,(\omega_{11}(\alpha_1\beta_4\gamma_5) + \omega_{12}(\alpha_2\beta_4\gamma_5) + \omega_{13}(\alpha_3\beta_4\gamma_5)] \\
&+(\omega_{34}\omega_{15} - \omega_{14}\omega_{35})\,(\omega_{21}(\alpha_1\beta_4\gamma_5) + \omega_{22}(\alpha_2\beta_4\gamma_5) + \omega_{23}(\alpha_3\beta_4\gamma_5)] \\
&+(\omega_{14}\omega_{25} - \omega_{24}\omega_{15})\,(\omega_{31}(\alpha_1\beta_4\gamma_5) + \omega_{32}(\alpha_2\beta_4\gamma_5) + \omega_{33}(\alpha_3\beta_4\gamma_5) \\
&+(\omega_{24}\omega_{36} - \omega_{34}\omega_{26})\,(\omega_{11}(\alpha_1\beta_4\gamma_6) + \omega_{12}(\alpha_2\beta_4\gamma_6) + \omega_{13}(\alpha_3\beta_4\gamma_6)] \\
&+(\omega_{34}\omega_{16} - \omega_{14}\omega_{36})\,(\omega_{21}(\alpha_1\beta_4\gamma_6) + \omega_{22}(\alpha_2\beta_4\gamma_6) + \omega_{23}(\alpha_3\beta_4\gamma_6)] \\
&+(\omega_{14}\omega_{26} - \omega_{24}\omega_{16})\,(\omega_{31}(\alpha_1\beta_4\gamma_6) + \omega_{32}(\alpha_2\beta_4\gamma_6) + \omega_{33}(\alpha_3\beta_4\gamma_6)] \\
&+(\omega_{25}\omega_{36} - \omega_{35}\omega_{26})\,(\omega_{11}(\alpha_1\beta_5\gamma_6) + \omega_{12}(\alpha_2\beta_5\gamma_6) + \omega_{13}(\alpha_3\beta_5\gamma_6)] \\
&+(\omega_{35}\omega_{16} - \omega_{15}\omega_{36})\,(\omega_{21}(\alpha_1\beta_5\gamma_6) + \omega_{22}(\alpha_2\beta_5\gamma_6) + \omega_{23}(\alpha_3\beta_5\gamma_6)] \\
&+(\omega_{15}\omega_{26} - \omega_{25}\omega_{16})\,(\omega_{31}(\alpha_1\beta_5\gamma_6) + \omega_{32}(\alpha_2\beta_5\gamma_6) + \omega_{33}(\alpha_3\beta_5\gamma_6)]
\end{aligned}$$

$$+(\alpha_4\beta_5\gamma_6)\begin{vmatrix} \omega_{14} & \omega_{15} & \omega_{16} \\ \omega_{24} & \omega_{25} & \omega_{26} \\ \omega_{34} & \omega_{35} & \omega_{36} \end{vmatrix} = 0.$$

Dividirt man diese Gleichung durch (ω) und führt die Thetamoduln ein:

$$\tau_{\beta\gamma} = \frac{1}{(\omega)} \sum_{\alpha=1}^{3} (\omega)_{\alpha\beta} \cdot \omega_{\alpha, 3+\gamma} \quad (\beta, \gamma = 1, 2, 3.),$$

beachtet neben

$$\tau_{\beta\gamma} = \tau_{\gamma\beta}$$

die Relationen:

$$\omega_{\alpha, 3+\gamma} = \sum_{\beta=1}^{3} \tau_{\beta\gamma} \omega_{\alpha\beta}$$

$$\sum_{\alpha} (\omega)_{\alpha\beta} \omega_{\alpha\gamma} = 0 \qquad \sum_{\alpha} (\omega)_{\beta\alpha} \omega_{\gamma\alpha} = 0 \qquad (\beta \gtrless \gamma)$$

$$\sum_{\alpha} (\omega)_{\alpha\beta} \omega_{\alpha\beta} = (\omega) \quad \sum_{\alpha} (\omega)_{\beta\alpha} \omega_{\beta\alpha} = (\omega),$$

so erhält man nach einigen Umformungen die Gleichung:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1 \beta_2 \gamma_3) \\
&+(\alpha_2\beta_3\gamma_4)\tau_{11} + (\alpha_2\beta_3\gamma_5)\tau_{12} + (\alpha_2\beta_3\gamma_6)\tau_{13} \\
&-(\alpha_1\beta_3\gamma_4)\tau_{21} - (\alpha_1\beta_3\gamma_5)\tau_{22} - (\alpha_1\beta_3\gamma_6)\tau_{23} \\
&+(\alpha_1\beta_2\gamma_4)\tau_{31} + (\alpha_1\beta_2\gamma_5)\tau_{32} + (\alpha_1\beta_2\gamma_6)\tau_{33} \\
&+(\alpha_3\beta_4\gamma_5)(\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2) + (\alpha_3\beta_4\gamma_6)(\tau_{11}\tau_{23} - \tau_{12}\tau_{13}) + \\
&\qquad + (\alpha_3\beta_5\gamma_6)(\tau_{12}\tau_{23} - \tau_{22}\tau_{13}) \\
&-(\alpha_2\beta_4\gamma_5)(\tau_{11}\tau_{23} - \tau_{12}\tau_{13}) - (\alpha_2\beta_4\gamma_6)(\tau_{11}\tau_{33} - \tau_{13}^2) - \\
&\qquad - (\alpha_2\beta_5\gamma_6)(\tau_{12}\tau_{33} - \tau_{22}\tau_{13}) \\
&+(\alpha_1\beta_4\gamma_5)(\tau_{12}\tau_{23} - \tau_{22}\tau_{13}) + (\alpha_1\beta_4\gamma_6)(\tau_{12}\tau_{33} - \tau_{23}\tau_{13}) + \\
&\qquad + (\alpha_1\beta_5\gamma_6)(\tau_{22}\tau_{33} - \tau_{23}^2) \\
&+(\alpha_4\beta_5\gamma_6)\{\tau_{11}\tau_{22}\tau_{33} + 2\tau_{12}\tau_{13}\tau_{23} - \tau_{11}\tau_{13}^2 - \tau_{22}\tau_{13}^2 - \tau_{33}\tau_{12}^2\} = 0,
\end{aligned}$$

der wir unter Gebrauch der Bezeichnung $(\tau)_{ij}$ für die Adjuncte des Elementes τ_{ij} in der Determinante

$$(\tau) = \begin{vmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{vmatrix}$$

noch die übersichtlichere Form geben:

$$\begin{aligned}
&(\alpha_1\beta_2\gamma_3) \\
&+(\alpha_2\beta_3\gamma_4)\tau_{11} + (\alpha_2\beta_3\gamma_5)\tau_{12} + (\alpha_2\beta_3\gamma_6)\tau_{13} \\
&-(\alpha_1\beta_3\gamma_4)\tau_{12} - (\alpha_1\beta_3\gamma_5)\tau_{22} - (\alpha_1\beta_3\gamma_6)\tau_{23} \\
&+(\alpha_1\beta_2\gamma_4)\tau_{13} + (\alpha_1\beta_2\gamma_5)\tau_{23} + (\alpha_1\beta_2\gamma_6)\tau_{33}
\end{aligned}$$

$$+(\alpha_1\beta_5\gamma_6)(\tau)_{11}+(\alpha_2\beta_5\gamma_6)(\tau)_{12}+(\alpha_3\beta_5\gamma_6)(\tau)_{13}$$
$$-(\alpha_1\beta_4\gamma_6)(\tau)_{12}-(\alpha_2\beta_4\gamma_6)(\tau)_{22}-(\alpha_3\beta_4\gamma_6)(\tau)_{23}$$
$$+(\alpha_1\beta_4\gamma_5)(\tau)_{13}+(\alpha_2\beta_4\gamma_5)(\tau)_{23}+(\alpha_3\beta_4\gamma_5)(\tau)_{33}$$
$$+(\alpha_4\beta_5\gamma_6)(\tau)=0. \qquad \text{II)}$$

Solch eine Gleichung soll ferner in ganzen Zahlen

$$\alpha,\ \beta,\ \delta$$

aber auch in $\alpha,\ \gamma,\ \delta$

und $\beta,\ \gamma,\ \delta$

bestehen. Denken wir die vier Gleichungen der Reihe nach mit

$$d,\ -c,\ b,\ -a$$

multiplicirt und addirt, so erhalten wir eine einzige Gleichung der obigen Art mit Determinanten:

$$(\alpha_\lambda, \beta_\lambda \gamma_\mu, d) = \begin{vmatrix} \alpha_k & \alpha_\lambda & \alpha_\mu & a \\ \beta_k & \beta_\lambda & \beta_\mu & b \\ \gamma_k & \gamma_\lambda & \gamma_\mu & c \\ \delta_k & \delta_\lambda & \delta_\mu & d \end{vmatrix}$$

welche nothwendig ist, damit ein hyperelliptisches Integral zweiter Ordnung und erster Gattung auf ein solches erster Ordnung reducirbar ist.

Wir werden diese Bedingungsgleichung gleich specialisiren. Damit das vorgelegte Integral auf ein elliptisches reducirbar ist, muss dasselbe einen Ausdruck folgender Gestalt besitzen:

$$\log\left\{ c\,\frac{(\prod_\lambda E(xy)_\lambda^{m_\lambda}\, E'(xy)_\lambda^{m_{3+\lambda}})^{\tilde{\omega}_{11}}}{(\prod_\lambda E(xy)_\lambda^{n_\lambda}\, E'(xy)^{n_{3+\lambda}})^{\tilde{\omega}_{12}}}\right.$$

und die ganzen Zahlen m und n und Perioden des ursprünglichen Integrales genügen Gleichungen, die aus den folgenden hervorgehen:

$$\tilde{\omega}_{11}\sum_{\mu=1}^{6} m_\mu \omega_{\alpha\mu} - \tilde{\omega}_{12}\sum_{\mu=1}^{6} n_\mu \omega_{\alpha\mu} = 0 \quad (\alpha = 1,2,3)$$

welche ihrerseits ausdrücken, dass der obige Ausdruck im Unend lichen nicht unendlich wird und zwar lauten jene Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} \Sigma m_\mu \omega_{1\mu} & \Sigma n_\mu \omega_{1\mu} \\ \Sigma m_\mu \omega_{2\mu} & \Sigma n_\mu \omega_{2\mu} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} \Sigma m_\mu \omega_{1\mu} & \Sigma m_\mu \omega_{2\mu} \\ \Sigma m_\mu \omega_{3\mu} & \Sigma m_\mu \omega_{3\mu} \end{vmatrix} = 0$$

Um aber eine Gleichung in den ϑ-Moduln zu erhalten, werden wir nur

$$\frac{1}{(\omega)} \cdot \begin{vmatrix} \Sigma m_\mu \omega_{1\mu} & \Sigma n_\mu \omega_{1\mu} & \omega_{14} + \omega_{15} + \omega_{16} \\ \Sigma m_\mu \omega_{2\mu} & \Sigma n_\mu \omega_{2\mu} & \omega_{24} + \omega_{25} + \omega_{26} \\ \Sigma m_\mu \omega_{3\mu} & \Sigma n_\mu \omega_{3\mu} & \omega_{34} + \omega_{35} + \omega_{36} \end{vmatrix} = 0$$

bilden, und es ist klar, dass wir die gewünschte Relation aus der früher gefundenen in α, β, γ erhalten, wenn wir

$$\alpha_\mu = m_\mu \quad \beta_\mu = n_\mu \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0, \quad \gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = 1$$

setzen. Sie lautet:

$$\begin{aligned}
&(m_1 n_2 - m_2 n_1)(\tau_{13} + \tau_{23} + \tau_{33}) - (m_1 n_3 - m_3 n_1)(\tau_{12} + \tau_{22} + \tau_{32}) \\
&+ (m_2 n_3 - m_3 n_2)(\tau_{11} + \tau_{21} + \tau_{31}) + (m_1 n_4 - m_4 n_1)((\tau)_{13} - (\tau)_{12}) \\
&- (m_1 n_5 - m_5 n_1)((\tau)_{13} - (\tau)_{11}) + (m_1 n_6 - m_6 n_1)((\tau)_{12} - (\tau)_{11}) \\
&+ (m_2 n_4 - m_4 n_2)((\tau)_{23} - (\tau)_{22}) - (m_2 n_5 - m_5 n_2)((\tau)_{23} - (\tau)_{21}) \\
&+ (m_2 n_6 - m_6 n_2)((\tau)_{22} - (\tau)_{21}) + (m_3 n_4 - m_4 n_3)((\tau)_{33} - (\tau)_{32}) \\
&- (m_3 n_5 - m_5 n_3)((\tau)_{33} - (\tau)_{31}) + (m_3 n_6 - m_6 n_3)((\tau)_{32} - (\tau)_{31})
\end{aligned}$$

$$+ \begin{vmatrix} m_4 & m_5 & m_6 \\ n_4 & n_5 & n_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} (\tau) = 0. \qquad \text{III)}$$

Führen wir die Bezeichnungen ein:

1) $m_1 n_2 - m_2 n_1 = p_3, \quad m_1 n_3 - m_3 n_1 = p_2, \quad m_2 n_3 - m_3 n_2 = p_1,$

2) $m_\alpha n_4 - n_\alpha m_4 = q_\alpha, \quad m_\alpha n_5 - m_5 n_\alpha = r_\alpha, \quad m_\alpha n_6 - n_\alpha m_6 = s_\alpha,$
$(\alpha = 1, 2, 3)$

3) $(m_4 n_5 - n_4 m_5) - (m_4 n_6 - m_6 n_4) + (m_5 n_6 - m_6 n_5) = t$

so bestehen zwischen diesen 13 Grössen die drei folgenden Beziehungen:

$$p_1 t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \\ q_3 & r_3 & s_3 \end{vmatrix}, \quad p_2 t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_3 & r_3 & s_3 \end{vmatrix}, \quad p_3 t = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & r_1 & s_1 \\ q_2 & r_2 & s_2 \end{vmatrix}$$

die man sowohl dadurch findet, dass man aus den Gleichungen (2) m_4, n_4, m_5, n_5, m_6, n_6 berechnet und die Werthe in (3) substituirt, als auch dadurch, dass man mit Hilfe der Gleichungen (2) die Grössen $m_1 n_1$, $m_2 n_2$, $m_3 n_3$ auf alle möglichen Arten ausdrückt und in (1) einsetzt und die Gleichungen in denselben p Grössen addirt.

An der Bedingungsgleichung III) ist gegenüber den vorhergehenden auffallend, dass sie kein von den ϑ-Moduln freies Glied enthält und man wird zu der Vermuthung geführt, dass ein constantes Glied in unseren Relationen nur bei der Reduction eines hyperelliptischen Integrales erster Gattung und n-ter Ordnung auf ein gleiches $(n-1)$-ter Ordnung auftreten kann, wo das elliptische Integral als dasjenige von der nullten Ordnung gilt. Wenn wir weitere Relationen in den ϑ-Moduln der Integrale höherer Ordnung aufsuchten, liesse sich diese Vermuthung bestätigen und manch' andere Eigenschaft ermitteln, doch wir begnügen uns mit den bisherigen Ergebnissen und wollen unsere Aufmerksamkeit nur noch auf die Beziehungen in den ϑ-Moduln eines zu einer binomischen Gleichung

$$y^m = A(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_\lambda)^{n_\lambda}$$

vom Range $\rho = 2$ gehörigen Abel'schen Integrals erster Gattung lenken, wenn dasselbe in ein elliptisches transformirbar ist.

Die Form all dieser Integrale lassen sich leicht aufstellen, denn wir haben nur zu prüfen, welche Werthe die positiven ganzen Zahlen $n_1\ n_2 \ldots n_\lambda$, welche kleiner als m sind, bei den Werthen

$$m = 3, 4, 6$$

$$\rho = \sum_{\beta=1}^{m-1} p_\beta = 2$$

annehmen können. Da stellt sich heraus, dass die in Frage kommenden Integrale die Form

$$\int \frac{dx}{y}$$

haben und in

$$y = \sqrt[m]{A(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\ldots(x-a_\lambda)^{n_\lambda}}$$

sind nur folgende 16 Werthe-Combinationen für $m, n_1 \ldots n_\lambda$ möglich:

m	3			4				6								
n_1	1	1	1	1	1	2	1	2	2	2	5	3	3	3	2	2
n_2	1	2	1	2	2	2	2	5	3	3	5	3	3	4	5	3
n_3	2	2	2	2	3	3	2	0	3	4	0	4	5	4	5	3
n_4	0	0	2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	4

Wir geben noch die Exponenten der Potenzen

$$\frac{t-\beta\nu_0+\mu_0\pi_\beta+\mu_0 i}{B-\beta\nu'_0+\mu'_0\pi_\beta+\mu'_0} \qquad \begin{pmatrix} i=1,2\ldots p_\beta \\ \beta=1,2\ldots m-1 \end{pmatrix}$$

im Exponenten der σ-Function bei den Entwicklungen einer der vier niemals verschwindenden Primfunctionen um irgend eine der m_0 unendlich fernen Stellen an, und zwar schreiben wir im Falle der Potenzen

$$\frac{t-\varepsilon}{B-\varepsilon'}, \text{ und } \frac{t-\varepsilon_1}{B-\varepsilon'_1}$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon'}, \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon'_1}\right)$$

Man findet:

$$\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{1}, \frac{3}{3}\right), \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{3}{1}, \frac{1}{1}\right), \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{1}, \frac{2}{2}\right),$$
$$\left(\frac{1}{1}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{3}\right). \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{1}\right), \left(\frac{2}{1}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{5}{1}, \frac{3}{1}\right), \left(\frac{5}{1}, \frac{2}{1}\right), \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{1}, \frac{1}{5}\right);$$

Zur Frage der Reduction des Integrales erster Gattung wenden wir die obige Mothode an und offenbar ergibt sich unter Einführung der ϑ-Moduln

$$\tau_{\beta\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{\rho} \frac{(\omega)_{\alpha\beta}\,\omega'_{\alpha\gamma}}{(\omega)}$$

dieselbe Gleichung (I) in den Grössen $\tau_{\beta\gamma}$; doch in dem Falle, dass in den Entwicklungen der Primfunctionen nur eine negative t-Potenz auftritt, erhalten wir nur eine Gleichung in $\tilde{\omega}_{11}\,\tilde{\omega}_{12}$, z. B. im dritten Falle:

$$\frac{\tilde{\omega}_{11}}{B^{-2}}(m_1(B_1\omega_{11}+\omega_{21})+m_2(B\omega_{21}+\omega_{22})+m_3(B\omega'_{11}+\omega'_{21})+ \\ +m_4(B\omega'_{21}+\omega'_{22}))$$

$$-\frac{\tilde{\omega}_{12}}{B^{-2}}(n_1(B_1\omega_{11}+\omega_{21})+n_2(B\omega_{21}+\omega_{22})+n_3(B\omega'_{11}+\omega'_{21})+ \\ +n_4(B\omega'_{21}+\omega'_{22}))=0.$$

Damit $\tilde{\omega}_{11}$ nicht $\tilde{\omega}_{12}$ proportional ist, müssen die Coëfficienten von $\tilde{\omega}_{11}$ und $\tilde{\omega}_{12}$ einzeln verschwinden. Ziehen wir die entstehenden Gleichungen von einander ab, so entsteht:

$$(B(m_2-n_2)+(m_1-n_1))\omega_{21}+(B(m_4-n_4)+(m_3-n_3))\omega'_{21} \\ +(m_1-n_1)\omega_{11}+(m_3-n_3)\omega'_{11}+(m_2-n_2)\omega_{22}+(m_4-n_4)\omega'_{22}=0$$

Und da analoge Gleichungen für die zwei weiteren möglichen B-Werthe bestehen, so gibt die Summirung dieser drei Gleichungen

$$(m_1-n_1)(\omega_{11}+\omega_{21})+(m_2-n_2)\omega_{22}+(m_3-n_3)(\omega'_{11}+\omega'_{21})+ \\ +(m_4-n_4)\omega'_{22}=0$$

indem ja die Summe über die drei B-Werthe verschwindet.

Hier resultirt also nur eine lineare Relation in den Perioden, aber immerhin involvirt sie einen Zusammenhang zwischen den ϑ-Moduln.

Prag, Anfangs April 1883.

Methode zur Bahnbestimmung aus drei vollständigen Beobachtungen.

Von J. Gerst.

1.

Durch eine vollständige Beobachtung eines Planeten oder Cometen ist die Lage desjenigen grössten Kreises auf der scheinbaren Himmelssphäre bestimmt, in welchem sich die vom Beobachtungsorte nach dem Himmelskörper gezogene Richtungslinie, von der Sonne aus betrachtet, projicirt, da man zwei Punkte desselben kennt. Der eine dieser Punkte ist der beobachtete Ort des Himmelskörpers und als den anderen pflegt man denjenigen Punkt A der Sphäre zu wählen, in welchem dieselbe von einer aus dem Sonnencentrum nach dem Durchschnittspunkt der Beobachtungsrichtung mit der Ekliptik (locus fictus) gezogenen Geraden getroffen wird. Ist L die heliocentrische Länge dieses Durchschnittspunktes, R seine Entfernung von der Sonne und λ, β die beobachtete Länge und Breite des Himmelskörpers, so ist durch λ, β, L die Lage des erwähnten grössten Kreises bestimmt. Bezeichnet man mit γ den Winkel, welchen die Richtung der wachsenden Breiten auf dem grössten Kreis mit der Richtung der wachsenden Längen in der Ekliptik bildet, so liegt derselbe zwischen 0° und 180° und bestimmt sich unzweideutig aus der Relation

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin(\lambda - L)}.$$

Bezeichnet man den beobachteten Ort des Himmelskörpers auf der Sphäre mit B und den Bogen AB mit χ und zählt letzteren

positiv oder negativ von 0° bis 180°, je nachdem β positiv oder negativ ist, so erhält man zur Bestimmung desselben die Relation

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{tg}\chi = \frac{\operatorname{tg}(\lambda - L)}{\cos\gamma}.$$

Betrachtet man nunmehr das vom Himmelskörper P, dem Sonnencentrum S und dem *locus fictus* E gebildete ebene Dreieck, so kennt man in demselben bis jetzt die Seite $SE = R$ und den von der Verlängerung dieser Seite und der anstossenden Seite EP gebildeten Aussenwinkel χ und es ist zur Bestimmung des Dreieckes noch eine Angabe nöthig, wofür man zweckmässig den Winkel $EPS = z$ wählt. Man erhält dann zur Bestimmung der Seiten $SP = r$ und $PE = \Delta$ die Gleichungen

$$\text{(3)} \qquad r = \frac{R\sin\chi}{\sin z}$$

$$\text{(4)} \qquad \Delta = \frac{R\sin(\chi - z)}{\sin z} = \frac{r\sin(\chi - z)}{\sin\chi}.$$

Bezeichnet man mit C den von der Sonne aus auf die Sphäre projicirten Ort des Himmelskörpers, so ist leicht einzusehen, dass dieser letztere Punkt stets auf dem Bogen AB liegen muss, welche Gestalt und Lage das Dreieck SEP auch haben möge. Der Winkel z ist identisch mit dem Bogen CB und aus der Betrachtung der Gleichung (3) folgt, dass derselbe dasselbe Vorzeichen, wie χ, erhalten muss, damit negative Werthe von r vermieden werden.

Liegen die Punkte S, E, P in einer Geraden, so wird $\chi = z = 0$ und die Punkte A, B, C fallen zusammen. Dieser Fall soll von der Betrachtung ausgeschlossen werden.

Man kann das Vorstehende kurz dahin zusammenfassen, dass durch eine vollständige Beobachtung eines Planeten oder Cometen ein Bogen AB eines grössten Kreises seiner Lage und Grösse nach bestimmt wird, auf welchem sich im vorläufig noch unbekannten Abstande z vom Punkte B der auf die scheinbare Himmelssphäre projicirte heliocentrische Ort des Himmelskörpers befindet.

2.

Die Punkte $C, C', C'', \ldots$, welche einer gegebenen Reihe vollständiger Beobachtungen entsprechen, müssen zunächst die

Bedingung erfüllen, dass sie auf demselben grössten Kreis liegen und ausserdem müssen zwischen den Bogen CC', $C'C''$, ... und den Differenzen der gegebenen Beobachtungszeiten gewisse Relationen stattfinden, welche weiter unten entwickelt werden sollen. Aus den sich hieraus ergebenden Bedingungsgleichungen können die Unbekannten z, z', z'', ... bestimmt werden, wodurch das Problem der Bahnbestimmung gelöst ist.

Um zunächst die Zahl der Beobachtungen zu ermitteln, welche gegeben sein müssen, damit das Problem bestimmt ist, muss man in Erwägung ziehen, dass die den Punkten C, C', C'',... entsprechenden heliocentrischen Entfernungen r, r', r'', ... ihrer Grösse und Lage nach bestimmt sind, sobald man für die Unbekannten z, z', z'', ... bestimmte Werthe annimmt. Setzt man also zunächst zwei Beobachtungen als gegeben voraus und ertheilt den beiden in diesem Falle zu ermittelnden Unbekannten z und z' bestimmte, aber willkürlich gewählte Werthe, so entsprechen denselben zwei bestimmte Orte im Raume, durch welche sich unendlich viele Kegelschnitte derart legen lassen, dass sich das Sonnencentrum in einem der Brennpunkte befindet. Ist nun unter Voraussetzung eines bestimmten Kegelschnittes auch die Bewegung in demselben vollständig bestimmt ist, so entspricht jedem dieser unzähligen Kegelschnitte eine bestimmte Zeit, welche ein in demselben in Bewegung gedachter Körper braucht, um von dem ersten Orte zum zweiten zu gelangen und es wird unter allen diesen Kegelschnitten einen oder mehrere geben, für welche diese Zeit gleich der gegebenen Differenz der beiden Beobachtungszeiten ist. Man erhält also für eine bestimmte Annahme von Werthen für z und z' eine oder mehrere Bahnen, welche den gegebenen Beobachtungen genügen und für eine jede beliebige andere Annahme über die Werthe von z und z' wieder mehrere Bahnen und es bleibt unentschieden, welche von diesen unendlichen Lösungen der Wirklichkeit entspricht. Ähnliche Erörterungen allgemeinerer Natur könnten auch für den Fall, dass drei Beobachtungen gegeben sind, gemacht werden. Es soll jedoch für diesen Fall eine andere Form der Betrachtungen gewählt werden, wodurch gleichzeitig die weiteren Verwicklungen, welche zur Lösung des Problems führen, in einfacher und übersichtlicher Weise angedeutet werden. Von den

für die drei Unbekannten z, z', z'' zu wählenden Werthen sind nur zwei willkürlich, indem der dritte Werth der Bedingung, dass die drei Punkte C, C', C'' in einem grössten Kreise liegen, entsprechen muss und daher aus einer diese Bedingung ausdrückenden Gleichung von der Form

$$f(z, z', z'') = 0 \tag{5}$$

bestimmt werden kann. Durch die drei Orte im Raume, welche dreien in solcher Weise bestimmten Werthen von z, z', z'' entsprechen, lässt sich ein bestimmter Kegelschnitt derart legen, dass sich das Sonnencentrum in einem seiner Brennpunkte befindet und ein in diesem Kegelschnitte in Bewegung gedachter Körper braucht bestimmte Zeiten, um vom ersten zum zweiten, resp. vom zweiten zum dritten Ort zu gelangen, welche Zeiten also Functionen der Unbekannten z, z', z'' sind und gleich $t'-t$, resp. $t''-t'$ sein werden, wo t, t', t'' die drei Beobachtungszeiten bedeuten, wenn die für die Unbekannten angenommenen Werthe die richtigen waren. Setzt man der Kürze halber $t''-t'=\theta$, $t''-t=\theta'$, $t'-t=\theta''$, so sind durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \varphi(z, z', z'')\\ \theta'' &= \psi(z, z', z'')\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

in Verbindung mit der Gleichung (5) die drei Unbekannten z, z', z'' bestimmt und somit ist auch das Problem, aus drei vollständigen Beobachtungen die Bahn eines Himmelskörpers zu ermitteln, ein bestimmtes.

Die in den Gleichungen (6) vorkommenden Functionen sind von so complicirter Art, dass es behufs Erzielung einer praktisch brauchbaren Lösung nöthig ist, sich der Vermittlung von Grössen zu bedienen, welche einerseits zu den Unbekannten z, z', z'', anderseits zu den gegebenen Zwischenzeiten θ, θ'' in verhältnissmässig einfachen Beziehungen stehen. Solche Grössen sind die Verhältnisse der von je zwei der heliocentrischen Radienvectoren r, r', r'' und der zugehörigen Sehne gebildeten Dreiecke n, n', n'', bei welcher Bezeichnung der Accent mit demjenigen des nicht als Dreiecksseite vorkommenden Radiusvectors gleich sein möge. Ihr Zusammenhang mit den Unbekannten liefert zwei einfache Gleichungen von der Form:

$$(7)\qquad \begin{cases} n : n' = \Phi(z, z', z'') \\ n'' : n' = \Psi(z, z', z'') \end{cases}$$

und ihr Zusammenhang mit den Zwischenzeiten ist ein derartiger, dass zu ihrer genauen Bestimmung allerdings ausser den Zwischenzeiten noch einige Bestimmungsstücke der Bahn des Himmelskörpers nöthig sind, dass man aber auch ohne Kenntniss der letzteren für dieselben brauchbare Näherungswerthe finden kann, durch deren Substitution in (7) man aus diesen Gleichungen mit Hinzuziehung der Gleichung (5) genäherte Werthe für die Unbekannten und damit genauere Werthe für die Dreiecksverhältnisse erhält, mit welchen die Rechnung wiederholt wird.

3.

Um die in den Gleichungen (5) und (7) vorkommenden Functionen zu entwickeln, ist es nöthig, die Lage und Grösse der Bogen CC', $C'C''$ aus den sphärischen Dreiecken zu bestimmen, welche von diesen Bogen und den in Art. 1 bestimmten grössten Kreisen gebildet werden. Je zwei dieser letzteren Kreise schneiden sich in zwei diametral entgegengesetzten Punkten der Sphäre, von denen der eine auf der Nordseite, der andere auf der Südseite der Ekliptik liegen muss, wenn wir den Fall, dass einer oder mehrere dieser Kreise mit der Ekliptik zusammenfallen, von der Betrachtung ausschliessen. Sind D'', D, D' die auf der Nordseite der Ekliptik gelegenen Durchschnittspunkte der durch die erste und zweite, zweite und dritte, erste und dritte Beobachtung bestimmten Kreise, so sind in den Dreiecken $AA'D''$, $A'A''D$, $AA''D'$ eine Seite und die beiden anliegenden Winkel bekannt und es können die übrigen Stücke berechnet werden. Bezeichnet man die Winkel bei D'', D, D' mit ε'', ε, ε', so erhält man für das erste Dreieck aus $AA' = L' - L$, $\sphericalangle D''AA' = \gamma$, $\sphericalangle D''A'A = 180° - \gamma'$ die Formeln

$$8)\qquad \begin{cases} \sin\tfrac{1}{2}(AD'' + A'D'')\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon'' = \sin\tfrac{1}{2}(\gamma' + \gamma)\sin\tfrac{1}{2}(L' - L) \\ \cos\tfrac{1}{2}(AD'' + A'D'')\sin\tfrac{1}{2}\varepsilon'' = \sin\tfrac{1}{2}(\gamma' - \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(L' - L) \\ \sin\tfrac{1}{2}(AD'' - A'D'')\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon'' = \cos\tfrac{1}{2}(\gamma' + \gamma)\sin\tfrac{1}{2}(L' - L) \\ \cos\tfrac{1}{2}(AD'' - A'D'')\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon'' = \cos\tfrac{1}{2}(\gamma' - \gamma)\cos\tfrac{1}{2}(L' - L) \end{cases}$$

und ähnliche Formeln für die beiden anderen Dreiecke, wenn man

statt	$\frac{1}{2}(A\,D'' \pm A'\,D''), \frac{1}{2}\varepsilon'', \frac{1}{2}(\gamma' \pm \gamma), \frac{1}{2}(L' - L)$
für d. 2. Dreieck die Grössen	$\frac{1}{2}(A'D \pm A''D), \frac{1}{2}\varepsilon, \frac{1}{2}(\gamma'' \pm \gamma'), \frac{1}{2}(L'' - L')$
und für d. 3. Dreieck	$\frac{1}{2}(A\,D' \pm A''D'), \frac{1}{2}\varepsilon', \frac{1}{2}(\gamma'' \pm \gamma), \frac{1}{2}(L'' - L)$

in die obigen Formeln einsetzt. Die Quadranten, in denen die zu bestimmenden Winkel liegen, sind unzweideutig bestimmt, da die Bogen AD'', $A'D''$, $A'D$, ... kleiner als 180° sind.

Man kennt nunmehr auf jedem der drei in Art. 1 bestimmten grössten Kreise ausser seinem Durchschnittspunkte mit der Ekliptik die Lage dreier Punkte, nämlich des beobachteten Ortes und der Durchschnittspunkte mit den beiden anderen grössten Kreisen, während die Lage eines vierten Punktes, nämlich des heliocentrischen Ortes, gesucht wird. Für den der ersten Beobachtung entsprechenden Kreis beispielsweise ist die Lage der Punkte B, D'', D' durch die Bogen $AB = \chi$, AD'', AD' bestimmt, welche sämmtlich kleiner als 180° sein müssen und von denen der erste auch negativ sein kann. Setzt man ferner

$$(9)\quad \begin{cases} B\,D'' = A\,D'' - \chi = a'' & B\,D' = A\,D' - \chi = a' \\ B'D'' = A'D'' - \chi' = b'' & B'\,D = A'\,D - \chi' = b \\ B''D' = A''D' - \chi'' = c' & B''D = A''D - \chi'' = c, \end{cases}$$

so können a'', a', b'', b, c', c als diejenigen Bogenstücke aufgefasst werden, um welche sich ein Punkt auf jedem der drei grössten Kreise in der für die Winkel χ, χ', χ'' festgesetzten positiven Zählungsrichtung fortbewegen muss, um von dem entsprechenden beobachteten Ort zu den Durchschnittspunkten mit den beiden anderen grössten Kreisen zu gelangen, während z, z', z'' nach Art. 1 in analoger Weise die Bogenstücke bedeuten, um welche sich der Punkt in der entgegengesetzten Richtung bewegen muss, um von den beobachteten Orten zu den zugehörigen heliocentrischen Orten zu gelangen. Daraus ergibt sich, dass $z + a''$, $z + a'$, $z' + b''$, $z' + b$, $z'' + c'$, $z'' + c$ diejenigen Seiten in den sphärischen Dreiecken $CC'D''$, $C'C''D$, $CC''D'$ sind, welche die Winkel ε'', ε, ε' einschliessen. Ferner ergibt sich durch die Betrachtnng des Dreiecks $DD'D''$ die als Controle brauchbare Relation

$$(10) \qquad \frac{\sin(a''-a')}{\sin\varepsilon} = \frac{\sin(b''-b)}{\sin\varepsilon'} = \frac{\sin(c'-c)}{\sin\varepsilon''},$$

deren allgemeine Giltigkeit sich durch eine diesbezügliche Discussion nachweisen lässt.

Nunmehr kann zur Ermittlung der in Gleichung (5) angedeuteten Function geschritten werden. Man erhält unter der Voraussetzung, dass die Punkte C, C', C'' auf demselben grössten Kreise liegen, welcher mit den drei gegebenen grössten Kreisen die Winkel η, η', η'' (Zählweise beliebig) bilden möge, aus den zuletzt erwähnten drei Dreiecken die Gleichungen

$$\frac{\sin(z+a'')}{\sin(z'+b'')} = \frac{\sin\eta'}{\sin\eta}\,\frac{\sin(z'+b)}{\sin(z''+c)} = \frac{\sin\eta''}{\sin\eta'}\,\frac{\sin(z''+c')}{\sin(z+a')} = \frac{\sin\eta}{\sin\eta''}$$

und durch Multiplication derselben

$$(11) \qquad \frac{\sin(z+a'')\sin(z'+b)\sin(z''+c')}{\sin(z+a')\sin(z'+b'')\sin(z''+c)} = 1$$

als die gesuchte Bedingungsgleichung. Behufs Ermittlung der Functionen in den Gleichungen (7) hat man zunächst, wenn $CC = 2f''$, $CC' = 2f$, $CC'' = 2f'$ gesetzt wird:

$$\frac{n}{n'} = \frac{\frac{1}{2}r'r''\sin 2f}{\frac{1}{2}r\,r''\sin 2f'} = \frac{r'\sin 2f}{r\sin 2f'}, \qquad \frac{n''}{n'} = \frac{\frac{1}{2}rr'\sin 2f''}{\frac{1}{2}rr''\sin 2f'} = \frac{r'\sin 2f''}{r''\sin 2f'}.$$

Durch Berücksichtigung der Relationen

$$r = \frac{R\sin\chi}{\sin z}, \qquad r' = \frac{R'\sin\chi'}{\sin z'}, \qquad r'' = \frac{R''\sin\chi''}{\sin z''}$$

$$\sin 2f.\ \sin\eta'' = \sin\varepsilon\sin(z'+b) \qquad \sin 2f''\sin\eta = \sin\varepsilon''\sin(z'+b'')$$
$$\sin 2f'\ \sin\eta'' = \sin\varepsilon'\sin(z+a') \qquad \sin 2f'\ \sin\eta = \sin\varepsilon'\ \sin(z''+c')$$

erhält man hieraus, wenn man die Bezeichnungen

$$(12) \qquad \begin{cases} w = \dfrac{R\sin\chi}{\sin\varepsilon}, \quad w' = \dfrac{R'\sin\chi'}{\sin\varepsilon'}, \quad w'' = \dfrac{R''\sin\chi''}{\sin\varepsilon''} \\ \dfrac{n\,w}{n'w'} = \nu \qquad \dfrac{n''w''}{n'w'} = \nu'' \end{cases}$$

einführt, die Gleichungen

13) $$\frac{\cos b + \sin b \cot g z'}{\cos a' + \sin a' \cot g z} = \nu \qquad \frac{\cos b'' + \sin b'' \cot g z'}{\cos c' + \sin c' \cot g z''} = \nu'',$$

wodurch die den Gleichungen (7) entsprechenden Functionen ermittelt sind.

Um aus den Gleichungen (11) und (13) die Unbekannten z, z', z'' unter Voraussetzung bestimmter Werthe für die darin vorkommenden Dreiecksverhältnisse auf möglichst kurzem Wege zu erhalten, ist es zweckdienlich, die erste derselben nach Wegschaffung des Bruches und Division durch $\sin z \sin z' \sin z''$ auf die Form

$$(\cos a'' + \sin a'' \cot g z)(\cos b + \sin b \cot g z')(\cos c' + \sin c' \cot g z'') =$$
$$= (\cos a' + \sin a' \cot g z)(\cos b'' + \sin b'' \cot g z')(\cos c + \sin c \cot g z'')$$

zu bringen, worauf die drei Gleichungen durch Einführung des Symbols $[m, z] = \cos m + \sin m \cot g z$ die Form

$$[a'', z].[b, z'].[c', z''] = [a', z].[b'', z'].[c, z'']$$
$$[b, z'] = \nu. \quad [a', z]$$
$$[b'', z'] = \nu''. [c', z'']$$

annehmen. Dividirt man das Product aus der ersten und letzten Gleichung durch die zweite, so wird

$$[a'', z].\nu = [c, z''].\nu'',$$

aus welcher Gleichung man in Verbindung mit den beiden unmittelbar vorhergehenden eine bloss z' enthaltende Gleichung ableiten kann, indem man die leicht ableitbare Relation

$$[m', z] = \frac{[m, z].\sin m' + \sin(m - m')}{\sin m}$$

benützt, um die Symbole $[a'', z]$ und $[c, z'']$ durch $[a', z] = \frac{[b, z']}{\nu}$ und $[c', z''] = \frac{[b'', z']}{\nu''}$ auszudrücken, wodurch man

$$\frac{\frac{[b, z']}{\nu} \sin a'' + \sin(a' - a'')}{\sin a'} .\nu = \frac{\frac{[b'', z']}{\nu''} \sin c + \sin(c' - c)}{\sin c'} .\nu''$$

erhält. Ersetzt man hier die Symbole durch ihre Werthe, so erhält man schliesslich nach gehöriger Transformation und Einführung der Abkürzungen

$$(14)\qquad \begin{cases} N = \sin a'' \sin b \sin c' - \sin a' \sin b'' \sin c \\ A = \sin a' \cos b'' \sin c - \sin a'' \cos b \sin c' \\ B = \sin c' \sin (a'' - a') \\ C = \sin a' \sin (c' - c) \end{cases}$$

zur Bestimmung von z' die Gleichung

$$(15)\qquad N \operatorname{cotg} z' = A + B\nu + C\nu''$$

und zur Bestimmung von z und z'' nach einigen Umformungen aus (13) die Gleichungen

$$(16)\qquad \begin{cases} tg\, z = \dfrac{\nu \sin a' \sin z'}{\sin (z' + b) - \nu \cos a' \sin z'} \\ tg\, z'' = \dfrac{\nu'' \sin c' \sin z'}{\sin (z' + b'') - \nu'' \cos c' \sin z'}. \end{cases}$$

Eine Probe für die Richtigkeit der in (15) vorkommenden Coëfficienten ergibt sich aus dem Umstande, dass für die in einem grössten Kreise liegenden Punkte A, A', A'' die Dreiecksverhältnisse die Werthe $\frac{n}{n'} = \frac{\sin (L'' - L')}{R} : \frac{\sin (L'' - L)}{R'}$ und $\frac{n''}{n'} = \frac{\sin (L' - L)}{R''} : \frac{\sin (L'' - L)}{R'}$ haben, durch deren Substitution in (15) man $z' = \chi'$ erhalten muss.

Für $N = 0$ liegen, wie aus (11) hervorgeht, die Punkte B, B', B'' in einem grössten Kreise, welcher Fall von der Betrachtung ausgeschlossen werden soll.

4.

Ist die Bahn eines Himmelskörpers ein Kreis, so sind die Dreiecksverhältnisse $n : n'$ und $n'' : n'$ durch den Halbmesser der Bahn, welcher r' heissen möge, und die Zwischenzeiten θ und θ'' vollkommen genau bestimmt. Es ist nämlich die mittlere tägliche Bewegung $\mu = \frac{k}{r'^{3/2}}$, wo k die bekannte Constante bedeutet und $2f = \mu\theta$, $2f' = \mu\theta' = \mu(\theta + \theta'')$, $2f'' = \mu\theta''$, woraus

$$(17) \qquad \frac{n}{n'} = \frac{\sin \frac{k\theta}{r'^{3/2}}}{\sin \frac{k\theta'}{r'^{3/2}}} \qquad \frac{n''}{n'} = \frac{\sin \frac{k\theta''}{r'^{3/2}}}{\sin \frac{k\theta'}{r'^{3/2}}}$$

folgt. Aus diesen genauen Werthen lassen sich Näherungswerthe finden, wenn man statt der Sinus die betreffenden Reihen setzt und in dem Quotienten je zweier Reihen nur eine beschränkte Zahl von Anfangsgliedern berücksichtigt. Bleibt man beim zweiten Gliede stehen, so erhält man, wenn zur Abkürzung $k\theta = \vartheta$, $k\theta' = \vartheta'$, $k\theta'' = \vartheta''$ gesetzt wird, für die Dreiecksverhältnisse die Näherungswerthe

$$(17\,a) \qquad \frac{n}{n'} = \frac{\vartheta}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta^2}{6r'^3}\right) \qquad \frac{n''}{n'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\vartheta'^2 - \vartheta''^2}{6r'^3}\right).$$

Etwas ungenauer werden die Näherungswerthe, wenn man in der ersten Gleichung für $\vartheta'^2 - \vartheta^2 = (\vartheta + \vartheta'')^2 - \vartheta^2 = 2\vartheta\vartheta'' + \vartheta''^2$ den Werth $3\vartheta\vartheta''$ setzt und in analoger Weise mit der zweiten Gleichung verfährt. Man erhält dann

$$(17\,b) \qquad \frac{n}{n'} = \frac{\vartheta}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2r'^3}\right) \qquad \frac{n''}{n'} = \frac{\vartheta''}{\vartheta'}\left(1 + \frac{\vartheta\vartheta''}{2r'^3}\right),$$

welche Werthe von Gauss als erste Näherungen zu Grunde gelegt werden und welche, wie aus $n : n'' = \vartheta : \vartheta''$ hervorgeht, die Beziehung in sich enthalten, dass die Sehne zwischen dem ersten und dritten Ort vom mittleren Radiusvector im Verhältnisse der Zwischenzeiten geschnitten wird.

Führt man in (17a) oder (17b) statt r' den durch die Gleichung (3) bestimmten Winkel z' ein, so erhält man für die Dreiecksverhältnisse Ausdrücke von der Form

$$(18) \qquad \frac{n}{n'} = a + b \sin^3 z' \qquad \frac{n''}{n'} = c + d \sin^3 z',$$

wo a, b, c, d bekannte Grössen sind. Diese unter der Voraussetzung einer Kreisbahn erhaltenen Ausdrücke werden auch dann noch brauchbare Näherungswerthe liefern, wenn der Himmelskörper eine elliptische Bahn von geringer Excentricität beschreibt, oder wenn die Bahn zwar stark vom Kreise abweicht, aber die Zwischenzeiten klein sind. Substituirt man daher dieselben in die Gleichung (15), wodurch dieselbe die Form

$$19) \qquad \sin^3 z' = \alpha \operatorname{cotg} z' + \beta$$

annimmt, wo α und β bekannte Grössen sind, so wird jeder diese Gleichung befriedigende Werth von z' in Verbindung mit den zugehörigen, aus (16) folgenden Werthen von z und z'' eine Bahn bestimmen, welche durch die drei aus den Beobachtungen bestimmten Richtungslinien hindurchgeht und ausserdem die Eigenschaft hat, dass die Zeiten, welche ein in dieser Bahn in Bewegung gedachter Körper braucht, um vom Durchschnittspunkte der Bahn mit der ersten Richtungslinie zu dem mit der zweiten u. s. w. zu gelangen, näherungsweise den gegebenen Zwischenzeiten gleich sind. Wie man sieht, ist hiebei an die Stelle der zu erfüllenden Bedingung, dass der in der gefundenen Bahn sich bewegende Körper zu den Beobachtungszeiten in den durch die Beobachtungen bestimmten Richtungen gesehen werde, die allgemeinere Bedingung getreten, dass derselbe sich irgendwo in diesen Richtungslinien befinde, also unter Umständen auch in den den Punkten B, B', B'' entgegengesetzten Punkten der Sphäre gesehen werden könnte. Um von diesem allgemeineren Gesichtspunkte aus die Zahl aller möglichen Auflösungen zu bestimmen, sei zunächst bemerkt, dass in diesem Falle die Lage des Punktes C' nicht mehr auf den Bogen $A'B'$ des der mittleren Beobachtung entsprechenden grössten Kreises beschränkt ist, sondern dass sich derselbe irgendwo auf dem von B' über A' nach dem entgegengesetzten Punkte führenden Halbkreise befinden kann, denn während der Punkt C' diesen Halbkreis durchwandert, wird von dem entsprechenden Punkte in der mittleren Richtungslinie diese ganze Richtungslinie durchlaufen. Dieselben Verallgemeinerungen gelten in Betreff der Lage der Punkte C und C'' und die absoluten Werthe von z, z', z'' liegen daher zwischen 0° und 180°. Drückt man nun in (19) $\sin z'$ durch $\operatorname{cotg} z'$ aus, so erhält man

$$\sin z' = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{cotg}^2 z'}},$$

wo das obere oder untere Zeichen zu wählen ist, je nachdem z' positiv oder negativ ist und die Gleichung geht, wenn $\operatorname{cotg} z' = x$ gesetzt wird, über in

$$\pm(1+x^2)^{-1/2} = \alpha x + \beta$$

und es sind dann die Abscissen der Schnittpunkte der Geraden $y = \alpha x + \beta$ mit der Curve $y = \pm(1+x^2)^{-3/2}$ die Cotangenten der gesuchten Werthe von z', wobei ausdrücklich bemerkt werden soll, dass in der Gleichung der Curve immer nur das eine der beiden Vorzeichen anzuwenden ist und dass der diesem Vorzeichen entsprechende Curvenzweig in Verbindung mit der Geraden sämmtliche Lösungen des Problems liefert. Die Lage dieser geraden Linie muss, wenn die Werthe von α und β nicht willkürlich angenommen, sondern aus wirklichen Beobachtungen abgeleitet werden, eine derartige sein, dass sie mindestens zwei Punkte mit dem in Betracht kommenden Curvenzweige gemeinsam hat, weil ausser der vom Himmelskörper beschriebenen Bahn auch die Erdbahn die gestellten Bedingungen erfüllt, wenn auch nur näherungsweise wegen des Umstandes, dass die den Beobachtungen entsprechenden Richtungslinien nicht genau durch das Erdcentrum gehen. Es wird also die Abscisse eines der gemeinsamen Punkte näherungsweise $=$ cotg χ' sein. Solcher gemeinsamer Punkte können zwei oder drei existiren. Im ersteren Falle kann die Erdbahn nur dem grösseren der beiden absolut genommenen Werthe von z' entsprechen, da für die Bahn des Himmelskörpers $z' < \chi'$ sein muss. Im letzteren Falle kann die Erdbahn entweder dem mittleren der drei absolut genommenen Werthe von z' entsprechen, wo dann der kleinste Werth der wirklichen Bahn des Himmelskörpers und der grösste Werth einer Bahn angehört, für welche die den Beobachtungszeiten entsprechenden Richtungen von den Erdorten nach den Orten in der Bahn den wirklichen Beobachtungsrichtungen entgegengesetzt sind, oder es kann die Erdbahn dem grössten Werthe von z' entsprechen, wo dann die beiden anderen Werthe Bahnen bestimmen, welche allen an sie gestellten Forderungen Genüge leisten und es daher unentschieden bleibt, welche der beiden Bahnen der Himmelskörper wirklich beschreibt.

Die Gleichung (19) oder die aus derselben durch die Substitution $\alpha = q \sin Q$, $\beta = q \cos Q$ hervorgehende Gleichung

$$\sin^4 z' = q \sin (z' + Q) \tag{19a}$$

hat nur so lange ihre Giltigkeit, als der absolute Werth von $z' < 180°$ ist. Denn sobald $z' > 180°$, wird der aus (3) folgende

Werth von r' negativ und es muss in die Gleichungen (17a) oder (17b) der Werth $r' = -\frac{R' \sin \chi'}{\sin z'}$ substituirt werden, da in diesen Gleichungen r' in allen Fällen positiv sein muss.

Man erhält daher für die Dreiecksverhältnisse in diesem Falle Ausdrücke von der Form

$$\frac{n}{n'} = a - b \sin {}^3z' \qquad \frac{n''}{n'} = c - d \sin {}^3z',$$

durch deren Substitution in (15)

$\sin {}^3z' = -\alpha \operatorname{cotg} z' - \beta$ [oder $\sin {}^4z' = q \sin (z' + Q \pm 180°)$] erhalten wird. Es kommt jetzt also der zweite, mit dem ersten in Beziehung auf die Abscissenachse symmetrisch gelegene Curvenzweig, aber auch die mit der früheren Geraden in Beziehung auf dieselbe Achse symmetrische Gerade in Betracht, folglich sind die jetzt den gemeinsamen Punkten entsprechenden Werthe von z' gleich den früheren vermehrt um 180° und die denselben entsprechenden Punkte C' bestimmen mit Berücksichtigung des Umstandes, dass r' negativ ist, dieselben Orte im Raume, also auch dieselben Bahnen, wie die früheren Werthe von z'.

Sämmtliche Schlüsse, bei welchen die Durchschnittspunkte b e i d e r Curvenzweige mit d e r s e l b e n Geraden in Betracht kommen, stehen daher im Widerspruche mit den obigen Auseinandersetzungen. Dahin gehört die Annahme der p r a k t i s c h e n Möglichkeit des Falles, dass die Gleichung (19a) nur zwei Auflösungen hat, von denen die eine für $\sin z'$ einen positiven, die andere einen negativen Werth liefert, oder dass dieselbe vier Auflösungen hat, von denen die eine (absolute Werthe vorausgesetzt) für $\sin z'$ einen positiven, die anderen drei hingegen negative Werthe liefern.

5.

Die Ableitung der Gleichung (19), respective (19a) aus (15) war nur nöthig, um über die Zahl und die Vertheilung der Auflösungen einen Aufschluss zu gewinnen. Es soll nun in Folgendem angegeben werden, wie man diese Auflösungen erhalten kann.

Durch die Annahme bestimmter Werthe für die Dreiecksverhältnisse $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$ ist eine Bahn bestimmt, welche durch die

drei Beobachtungsrichtungen hindurchgeht und daher, wenn man ohne Rücksicht auf irgend ein Bewegungsgesetz diese Durchschnittspunkte als die Orte des Himmelskörpers zu den Beobachtungszeiten ansieht, die drei beobachteten Orte vollständig darstellt. Diese Bedingung erfüllt die Bahn unter allen Umständen, also auch in dem Falle, wenn die Werthe der Dreiecksverhältnisse nicht willkürlich angenommen werden, sondern sich den der wahren Bahn zukommenden Werthen nähern und es wird sich dann auch die diesen Näherungswerthen entsprechende Bahn in Grösse, Gestalt und Lage der wahren Bahn nähern und ausser der vollständigen Darstellung der beobachteten Orte auch die Zwischenzeiten genähert darstellen.

Um zu solchen Näherungswerthen der Dreiecksverhältnisse zu gelangen, kann man zunächst von der Ungleichförmigkeit der Bewegung des Himmelskörpers in seiner Bahn während des die Beobachtungen umfassenden Zeitraumes absehen, wodurch sich die Ermittlung der beiden Unbekannten $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$ auf die einer einzigen, nämlich r', respective z' reducirt, wie die Gleichungen (17) zeigen und eine genäherte Bestimmung dieser letzteren durch die im vorigen Artikel angedeutete Construction ermöglicht wird. Diese Construction kann man sich jedoch ersparen und dabei schneller zum Ziele gelangen, wenn man im Hinblick auf die Gleichungen (18) bedenkt, dass bei kleinen Zwischenzeiten die Dreiecksverhältnisse zwischen den verhältnissmässig engen Grenzen

$$a < \frac{n}{n'} < a + b \qquad\qquad c < \frac{n''}{n'} < c + d,$$

ja für $\chi' < 90°$ zwischen den noch engeren Grenzen

$$a < \frac{n}{n'} < a + b \sin^2\chi' \qquad c < \frac{n''}{n'} < c + d \sin^2\chi'$$

liegen und man sich in Folge dessen gestatten darf, in der Gleichung (15) statt der wirklichen, unbekannten Werthe zunächst ihre Minimalwerthe $\frac{n}{n'} = a = \frac{\theta}{\theta'}$ und $\frac{n''}{n'} = c = \frac{\theta''}{\theta'}$ zu substituiren, den dadurch erhaltenen Werth von r' zu verwenden, um aus (17)

genauere Werthe von $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$ zu erhalten, diese wieder in (15) zu substituiren und dieses Verfahren so lange fortzusetzen, bis die zuletzt erhaltenen Werthe sich von den unmittelbar vorhergehenden nur wenig unterscheiden.

Durch diese Wiederholungen wird man sich der wahren Bahn zwar nähern, dieselbe aber im Allgemeinen nicht erreichen, da die Gleichungen (17) unter Voraussetzung einer Kreisbahn entstanden sind und daher nur den Einfluss der Grösse der Bahn, nicht aber den ihrer Form und ihrer Lage in der Bahnebene auf die Dreiecksverhältnisse berücksichtigen. Um dieses letztere Ziel zu erreichen, ist es zunächst nöthig, aus den bisher erlangten Näherungswerthen von $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$ durch Substitution derselben in die Gleichungen (15) und (16) die denselben entsprechenden heliocentrischen Entfernungen r, r', r'' abzuleiten. Zur Bestimmung der gegenseitigen Lage dieser Radienvectoren folgt aus den Dreiecken $C'C''D$ und $CC'D''$:

$$(20)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin^2 f = \sin^2\tfrac{1}{2}[(z'+b)-(z''+c)]+\sin(z'+b)\sin(z''+c)\sin^2\tfrac{1}{2}\varepsilon \\ \sin 2f'' = \dfrac{\sin 2f \sin\varepsilon'' \sin(z+a'')}{\sin\varepsilon \sin(z''+c)} \\ 2f' = 2f + 2f'' \end{array}\right.$$

und als Controle ergeben sich die Gleichungen:

$$(21)\qquad \frac{n}{n'} = \frac{\sin 2f}{r} : \frac{\sin 2f'}{r'} \qquad \frac{n''}{n'} = \frac{\sin 2f''}{r''} : \frac{\sin 2f'}{r'}.$$

Hierauf ist die Gestalt und Grösse des durch die Grössen r, r', r'', f, f'' bestimmten Kegelschnittes und die Lage der drei heliocentrischen Orte in demselben zu ermitteln. Zur Lösung dieser Aufgabe kann man sich der aus der Polargleichung der Kegelschnitte leicht ableitbaren Relation

$$(22)\quad e = \frac{r'-r}{r\cos v - r'\cos v'} = \frac{r'-r''}{r''\cos v'' - r'\cos v'} = \frac{r''-r}{r\cos v - r''\cos v''}$$

bedienen, welche den Satz enthält, dass die Excentricität eines Kegelschnittes gleich ist der Differenz zweier Radienvectoren,

dividirt durch die Projection der zugehörigen Sehne auf die grosse Achse des Kegelschnittes. Wenn man in der hieraus folgenden Gleichung

$$\frac{r\cos v - r'\cos v'}{r''\cos v'' - r'\cos v'} = \frac{r' - r}{r' - r''}$$

den Zähler und den Nenner des Bruches auf der rechten Seite mit $\cos v'$ multiplicirt und hierauf den bekannten Satz, dass für $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ auch $\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, anwendet, so erhält man

$$\frac{r(\cos v - \cos v')}{r''(\cos v'' - \cos v')} = \frac{r' - r}{r' - r''}$$

und hieraus

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(v+v')}{\sin\frac{1}{2}(v''+v')} = \frac{\left(\frac{r'}{r} - 1\right)\sin f}{\left(1 - \frac{r'}{r''}\right)\sin f''}.$$

Bezeichnet man die unbekannte Grösse $\frac{1}{2}(v+v')$ mit x, so wird $\frac{1}{2}(v''+v') = x + f'$ und man erhält schliesslich zur Bestimmung der Lage der heliocentrischen Orte im Kegelschnitte die Gleichungen

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \operatorname{cotg} x &= \frac{\left(1 - \frac{r'}{r''}\right)\sin f''}{\left(\frac{r'}{r} - 1\right)\sin f'\sin f'} - \operatorname{cotg} f' \\ v &= x - f'' \\ v' &= x + f'' \\ v'' &= x + f'' + 2f, \end{aligned}\right.$$

wobei der für x zu wählende Quadrant sich unzweideutig aus den Grössenverhältnissen von r, r', r'' ergibt. Die Excentricität e folgt sodann aus der durch Umformung von (22) entstandenen Gleichung

$$(24)\qquad e = \frac{\frac{r''}{r} - 1}{\cos v - \frac{r''}{r}\cos v''} = \frac{\frac{r}{r''} - 1}{\cos v'' - \frac{r}{r''}\cos v},$$

wodurch die Gestalt des Kegelschnittes bestimmt ist. Schliesslich erhält man den die Grösse desselben bestimmenden Parameter,

welchen man zur Controle aus allen drei Orten berechnen kann, durch

$$(25)\quad p = r(1+e\cos v) = r'(1+e\cos v') = r''(1+e\cos v'').$$

Die Bahn, welche den Grössen x, e, p entspricht, wird, wie bereits erwähnt wurde, die beobachteten Orte unter allen Umständen vollkommen, die in bekannter Weise wegen Aberration verbesserten Zwischenzeiten, welche mit θ_0 und θ_0'' bezeichnet werden mögen, jedoch im Allgemeinen nur genähert darstellen. Denkt man sich nun die beiden äusseren Orte derart in der Bahnlinie verschoben, dass die Zwischenzeiten genau dargestellt werden (wodurch natürlich die genaue Darstellung der beiden äusseren beobachteten Orte verloren geht), so ändern sich die Dreiecksverhältnisse, und zwar kommen sie nunmehr der Wahrheit näher, da bei ihrer Ableitung ausser den gegebenen Zwischenzeiten eine genäherte, vom Kreise abweichende Bahnform angewendet wurde. Aus diesem hier angedeuteten Princip entwickelt sich folgendes Verfahren zur Verbesserung der Dreiecksverhältnisse: Man rechnet die zu v' gehörige mittlere Anomalie M' und die mittlere tägliche Bewegung μ. Dann sind $M = M' - \mu\theta_0''$ und $M'' = M' + \mu\theta_0$ die mittleren Anomalien für die durch die erwähnte Verschiebung erhaltenen äusseren Orte. Berechnet man die zu M und M'' gehörigen wahren Anomalien und Radienvectoren, welche zum Unterschiede von den oben erhaltenen Werthen v_0, r_0 und v_0'', r_0'' heissen mögen, so sind $2f_0 = v_0'' - v_0'$, $2f_0'' = v' - v_0$, $2f_0' = v_0'' - v_0 = 2f_0 + 2f_0''$ die von den Radienvectoren r_0, r', r_0'' gebildeten Winkel, und die zugehörigen Dreiecksverhältnisse, welche mit $\left(\frac{n}{n'}\right)_0$ und $\left(\frac{n''}{n'}\right)_0$ bezeichnet werden mögen, ergeben sich aus:

$$(26)\quad \left(\frac{n}{n'}\right)_0 = \frac{\sin 2f_0}{r_0} : \frac{\sin 2f_0'}{r'} \qquad \left(\frac{n''}{n'}\right)_0 = \frac{\sin 2f_0''}{r_0''} : \frac{\sin 2f_0'}{r'}.$$

Bei kleinen Excentricitäten kann man $r_0 = r$ und $r_0'' = r''$ setzen und erhält unter dieser Voraussetzung, wenn man die Gleichungen (21) und (26) logarithmisch schreibt und von einander subtrahirt, für die Änderungen der Logarithmen der Dreiecksverhältnisse die Formeln

$$(27)\qquad \begin{cases} \Delta\left(\log\frac{n}{n'}\right) = d\,.\,\Delta(2f) - d'.\,\Delta(2f') \\ \Delta\left(\log\frac{n''}{n'}\right) = d''.\,\Delta(2f'') - d'.\,\Delta(2f'), \end{cases}$$

wo d, d', d'' die aus den trigonometrischen Tafeln zu entnehmenden Änderungen von log sin $2f$, log sin $2f'$, log sin $2f''$ für eine Bogensecunde bedeuten und $\Delta(2f) = v_0'' - v''$, $\Delta(2f'') = v - v_0$, $\Delta(2f') = \Delta(2f) + \Delta(2f'')$ in Bogensecunden auszudrücken sind.

Mit den aus (26) oder (27) erhaltenen verbesserten Werthen von $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$ wiederholt man die Berechnung von r, r', r'', f, f'' und der daraus hervorgehenden Werthe von x, e, p, welche eine Bahn bestimmen, die der wahren Bahn näher liegt, als die vorher erhaltene, wesshalb auch die daraus abgeleiteten Dreiecksverhältnisse der Wahrheit näher kommen werden, als früher. Setzt man diese Wiederholung so lange fort, bis die Werthe von $\Delta\left(\log\frac{n}{n'}\right)$ und $\Delta\left(\log\frac{n''}{n'}\right)$ verschwindend klein werden, so ist man zur Kenntniss der definitiven Werthe der Dreiecksverhältnisse gelangt, wodurch auch die Lage der Bahnebene und ihrer Durchschnittspunkte mit den Beobachtungsrichtungen, d. h. der Orte des Himmelskörpers in der Bahnebene definitiv bestimmt ist. Sind nun r, r', r'' an Grösse stark verschieden, wie es bei starken Excentricitäten und nicht zu kleinen Zwischenzeiten der Fall ist, so wird die Bestimmung von x, e, p aus den Formeln (23), (24), (25) eine sichere, und der diesen Grössen entsprechende Kegelschnitt stellt ausser den beobachteten Orten auch die Zwischenzeiten vollständig dar, da die letzteren der definitiven Werthbestimmung von $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$ zu Grunde liegen. Der erhaltene Kegelschnitt ist also eine der Lösungen des Problems.

Sind jedoch r, r', r'' wenig von einander verschieden, wie es bei kleinen Excentricitäten und kleinen Zwischenzeiten der Fall ist, so wird die Bestimmung von x, e, p mehr oder weniger unsicher. Ist z. B.

$$\log r = 0{\cdot}468972 \quad \log r' = 0{\cdot}470772 \quad \log r'' = 0{\cdot}472577$$

gegeben, so erhält man, wenn nur so viele Decimalen angesetzt werden, als man verbürgen kann:

$$\frac{r'}{r''}=0{\cdot}995852 \qquad \frac{r'}{r}=1{\cdot}004153 \qquad \frac{r''}{r}=1{\cdot}008335$$

$$\log\left(1-\frac{r'}{r''}\right)=7{\cdot}6178 \quad \log\left(\frac{r'}{r}-1\right)=7{\cdot}6184 \quad \log\left(\frac{r''}{r}-1\right)=7{\cdot}92091,$$

woraus folgt, dass bei der Bestimmung von x und e höchstens eine vier-, respective fünfstellige Rechnung angewendet werden soll. Da man jedoch zur Bestimmung von f_0, f_0', ... genaue Werthe von x, e, p benöthigt, so wird man die Rechnung mit mehr Decimalen führen, als man verbürgen kann und man kann je nach der angewendeten Berechnungsart zu verschiedenen, merklich von einander abweichenden Systemen genauer Werthe von x, e, p gelangen, von denen jedoch jedes die Controle (25) genau erfüllt, also einen Kegelschnitt liefert, welcher durch die drei definitiv bestimmten Orte des Himmelskörpers hindurchgeht. (Der scheinbare Widerspruch mit dem Satze, dass durch drei Punkte bei gegebener Lage des Brennpunktes nur ein einziger Kegelschnitt gelegt werden kann, löst sich selbstverständlich dadurch, dass die Lage der drei Punkte nicht absolut genau bestimmt ist.) Jedem dieser Kegelschnitte entsprechen andere Werthe von f_0 und f_0'' und es handelt sich darum, einen solchen Kegelschnitt ausfindig zu machen, für welchen $\Delta f=f_0-f=$ $=\frac{1}{2}v_0''-\frac{1}{2}v''$ und $\Delta f''=f_0''-f''=\frac{1}{2}v-\frac{1}{2}v_0$ verschwindend klein werden, weil ein solcher ausser den beobachteten Orten auch die Zwischenzeiten darstellt. Zu diesem Zwecke ist es nur nöthig, $\Delta f'=\Delta f+\Delta f''$ zum Verschwinden zu bringen. Denn wäre für $\Delta f'=0$ $\Delta f=-\Delta f''=\varepsilon$, so erhielte man statt der auf die wahre Bahn bezogen gedachten Grössen r, r', r'', f, f', f'' die Grössen r, r', r'', $f\pm\varepsilon$, f', $f''\mp\varepsilon$ bei vollständiger Darstellung der Zwischenzeiten in beiden Fällen. Da nun die zweite Werthreihe aus der ersten durch blosse Verschiebung des mittleren Radiusvectors um den Winkel 2ε hervorgeht, so würde sich ergeben, dass durch eine solche Verschiebung die Darstellung der Zwischenzeiten nicht gestört wird, was unmöglich ist.

Einen solchen Kegelschnitt, für welchen $\Delta f'=0$ ist, kann man aus zwei Werthsystemen von x, e, p, welche beide die

Controle (25) genau erfüllen und welchen merklich verschiedene, womöglich entgegengesetzt bezeichnete Werthe von $\Delta f''$ entsprechen, auf dem Wege der Interpolation dadurch ableiten, dass man sich den dem ersteren Werthsystem entsprechenden Kegelschnitt in die dem letzteren entsprechende Form und Lage durch stetige und gleichförmige Änderung der Grössen x, e, p übergeführt denkt, wobei sich auch $\Delta f'$ jedenfalls stetig und, wie man bei der Kleinheit dieser Grösse voraussetzen darf, gleichförmig ändern wird. Das eine der beiden Systeme wird bereits bei der definitiven Bestimmung von $\frac{n}{n'}$ und $\frac{n''}{n'}$ erhalten. Zur Kenntniss des anderen Systems kann man dadurch gelangen, dass man $\log r$ und $\log r''$ um $\pm\rho$, $\log r'$ hingegen um $\mp\rho$ ändert, wo ρ eine halbe Einheit der letzten Decimale bedeutet; diese Änderungen sind gestattet, ohne dass die Controle (25) aufhört, genau erfüllt zu sein und sie lassen merkliche Änderungen von x, e, p und somit auch von $\Delta f'$ erwarten. Dadurch ändern sich die Logarithmen der in den Formeln (23), (24) vorkommenden Verhältnisse $\frac{r'}{r''}$ und $\frac{r'}{r}$ um $\mp 2\rho$ und $\frac{r''}{r}$ bleibt ungeändert, welchen Effect man auch erreicht, wenn man blos $\log r'$ um $\mp 2\rho$, d. h. um eine ganze Einheit der letzten Decimale ändert. Die Wahl des Vorzeichens ist in jedem einzelnen Falle durch eine diesbezügliche passende Überlegung zu treffen.

Es erübrigt schliesslich noch die Ermittlung der Lage der Bahnebene und des Kegelschnittes in derselben. Diese Bestimmungsstücke, nämlich die Länge des aufsteigenden Knotens Ω, die von $0°$—$180°$ gezählte Neigung i und der im Sinne der Bewegung gezählte Abstand ω des Perihels vom aufsteigenden Knoten ergeben sich aus einem Dreieck, welches von der Ekliptik, der Bahn $CC'C''$ des Himmelskörpers und irgend einem der drei durch die Beobachtung bestimmten grössten Kreise gebildet wird, sobald der Winkel zwischen diesem grössten Kreise und der Bahn des Himmelskörpers bekannt ist. Diese schon früher benöthigten und bei willkürlicher Zählweise mit η, η', η'' bezeichneten Winkel sollen nunmehr aufgefasst werden als die von der Bewegungsrichtung in der Bahn mit derjenigen Richtung auf den grössten Kreisen, in welcher die

Winkel χ, χ', χ'' gezählt werden, gebildeten Winkel. Es empfiehlt sich, zwei dieser Winkel zu ermitteln und aus jedem derselben durch Auflösen des betreffenden Dreieckes die erwähnten Bahnelemente abzuleiten, um eine Controle für die fehlerfreie Bestimmung derselben zu haben. So ergeben sich z. B. die Winkel η und η'' aus dem Dreieck $CC''D'$ durch die Gleichungen:

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin f' \sin \frac{1}{2}(\eta''+\eta) = \sin \frac{1}{2}(z+a'+z''+c') \sin \frac{1}{2}\varepsilon' \\ \sin f' \cos \frac{1}{2}(\eta''+\eta) = \sin \frac{1}{2}(z+a'-z''-c') \cos \frac{1}{2}\varepsilon' \\ \cos f' \sin \frac{1}{2}(\eta''-\eta) = \cos \frac{1}{2}(z+a'+z''+c') \sin \frac{1}{2}\varepsilon' \\ \cos f' \cos \frac{1}{2}(\eta''-\eta) = \cos \frac{1}{2}(z+a'-z''-c') \cos \frac{1}{2}\varepsilon', \end{array}\right.$$

aus welchen man auch zur Controle f' berechnen kann und man erhält dann die gesuchten Grössen bei Verwendung des Winkels η, wenn $v+\omega=g$ und $L-\Omega=h$ gesetzt wird, aus

$$(29)\quad \left\{\begin{array}{l} \sin \frac{1}{2}(g+h) \sin \frac{1}{2} i = \sin \frac{1}{2}(\chi-z) \sin \frac{1}{2}(\gamma+\eta) \\ \cos \frac{1}{2}(g+h) \sin \frac{1}{2} i = \cos \frac{1}{2}(\chi-z) \sin \frac{1}{2}(\gamma-\eta) \\ \sin \frac{1}{2}(g-h) \cos \frac{1}{2} i = \sin \frac{1}{2}(\chi-z) \cos \frac{1}{2}(\gamma+\eta) \\ \cos \frac{1}{2}(g-h) \cos \frac{1}{2} i = \cos \frac{1}{2}(\chi-z) \cos \frac{1}{2}(\gamma-\eta) \\ \omega = g-v \qquad \Omega = L-h \end{array}\right.$$

und bei Verwendung des Winkels η'' zur Controle aus analogen Formeln, wobei $g''-g=2f'$ und $h''-h=L''-L$ sein muss.

6.

Die in den vorhergehenden Artikeln durchgeführte Methode soll nunmehr an Beispielen erläutert werden. Im Anhange zum Berliner Jahrbuch für 1879 befindet sich eine Zusammenstellung aller für die Berechnung einer Planetenbahn aus drei vollständigen Beobachtungen erforderlichen Formeln nebst Rechnungsschema und es soll die vollständige Berechnung des dort gegebenen Beispiels nach den hier gegebenen Vorschriften mitgetheilt werden, um eine bessere Vergleichung beider Methoden zu ermöglichen. Die der Berechnung zu Grunde gelegten Daten sind:

t, t', t''	Aug. 9·68726	Aug. 41·43906	Aug. 69·44922
λ, λ', λ''	321° 3′ 53″2	315°29′ 3″5	314°24′ 31″4
β, β', β''	+4 43 26·36	+6 6 21·42	+6 34 44·83
L, L', L''	317 47 6·8	348 28 20·1	15 57 22·5
$\log R$, $\log R'$, $\log R''$	0·005550	0·002552	9·999178

Die Formeln (1) und (2) ergeben nun zunächst:

$\lambda - L =$	$+3°16'46'4$	$-32°59'16'6$	$-61°32'51'1$
$tg\beta$	8·917172	9·029279	9·061960
$\sin(\lambda - L)$	8·757455	$_n$9·735968	$_n$9·944094
$tg\gamma$	0·159717	$_n$9·293311	$_n$9·117866
$\gamma =$	$55°18'21'1$	$168°53'3'5$	$172°31'35'9$
$\cos\gamma$	9·755262	$_n$9·991775	$_n$9·996295
$tg(\lambda - L)$	8·758167	$_n$9·812317	$_n$0·266095
$tg\chi$	9·002905	9·820542	0·269800
$\chi =$	$+5°44'55'19$	$+33°29'7'4$	$+61°45'6'5$

Aus der Verbindung der ersten und zweiten Beobachtung ergibt sich hierauf durch die Formeln (8) und (9)

$\gamma =$	$55°18'21'1$	$\sin\frac{1}{2}(\gamma'+\gamma)$	9·966874	$\sin\frac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$	9·922550
$\gamma' =$	168 53 3·5	$\sin\frac{1}{2}(L'-L)$	9·422599	$\cos\frac{1}{2}(L'-L)$	9·984238
$\frac{1}{2}(\gamma'+\gamma) =$	112 5 42·3	$\cos\frac{1}{2}(\gamma'+\gamma)$	$_n$9·575355	$\cos\frac{1}{2}(\gamma'-\gamma)$	9·738559
$\frac{1}{2}(\gamma'-\gamma) =$	56 47 21·2	$\sin\frac{1}{2}(AD''+A'D'')\sin\frac{1}{2}\varepsilon''$	9·389473	$\sin\frac{1}{2}(AD''-A'D'')\cos\frac{1}{2}\varepsilon''$	$_n$8·997954
$\frac{1}{2}(L'-L) =$	15 20 36·6	$\cos\frac{1}{2}(AD''+A'D'')\sin\frac{1}{2}\varepsilon''$	9·906788	$\cos\frac{1}{2}(AD''-A'D'')\cos\frac{1}{2}\varepsilon''$	9 722797
$\frac{1}{2}(AD''+A'D'') =$	16 54 8·42	$tg\frac{1}{2}(AD''+A'D'')$	9·482685	$tg\frac{1}{2}(AD''-A'D'')$	$_n$9·275157
$\frac{1}{2}(AD''-A'D'') =$	− 10 40 16·64	$\cos\frac{1}{2}(AD''+A'D'')$	9·980822	$\cos\frac{1}{2}(AD''-A'D'')$	9·992423
$AD'' =$	6 13 51·78	$\sin\frac{1}{2}\varepsilon''$	9·925966	$\cos\frac{1}{2}\varepsilon''$	9·730374
$A'D'' =$	27 34 25·06	$tg\frac{1}{2}\varepsilon''$	0·195592		
$a'' =$	+ 0 28 56·59			$\frac{1}{2}\varepsilon'' =$	$57°29'12'4$
$b'' =$	− 5 54 42·34			$\varepsilon'' =$	114 58 24·8

Aus der Verbindung der zweiten und dritten Beobachtung folgt:

$\gamma''=$	172°31′35′′9	$\sin\frac{1}{2}(\gamma''+\gamma')$	9·208198	$\sin\frac{1}{2}(\gamma''-\gamma')$	8·502153
$\gamma'=$	168 53 3·5	$\sin\frac{1}{2}(L''-L')$	9·375755	$\cos\frac{1}{2}(L''-L')$	9·987387
$\frac{1}{2}(\gamma''+\gamma')=$	170 42 19·7	$\cos\frac{1}{2}(\gamma''+\gamma')$	„9·994261	$\cos\frac{1}{2}(\gamma''-\gamma')$	9·999780
$\frac{1}{2}(\gamma''-\gamma')=$	1 49 16·2	$\sin\frac{1}{2}(A'D+A''D)\sin\frac{1}{2}\varepsilon$	8·583953	$\sin\frac{1}{2}(A'D-A''D)\cos\frac{1}{2}\varepsilon$	„9·370016
$\frac{1}{2}(L''-L')=$	13 44 31·2	$\cos\frac{1}{2}(A'D+A''D)\sin\frac{1}{2}\varepsilon$	8·489540	$\cos\frac{1}{2}(A'D-A''D)\cos\frac{1}{2}\varepsilon$	9·987167
$\frac{1}{2}(A'D+A''D)=$	51 10 45·8	$tg\frac{1}{2}(A'D+A''D)$	0·094413	$tg\frac{1}{2}(A'D-A''D)$	„9·382849
$\frac{1}{2}(A'D-A''D)=$	− 13 34 29·68	$\sin\frac{1}{2}(A'D+A''D)$	0·891600	$\cos\frac{1}{2}(A'D-A''D)$	9·987695
$A'D=$	37 36 16·12	$\sin\frac{1}{2}\varepsilon$	8·692353	$\cos\frac{1}{2}\varepsilon$	9·999472
$A''D=$	64 45 15·48	$tg\frac{1}{2}\varepsilon$	8·692881		
$b=$	+ 4 7 8·72			$\frac{1}{2}\varepsilon=2°49'21''42$	
$c=$	+ 3 0 8·98			$\varepsilon=5\ 38\ 42{\cdot}84$	

Aus der Verbindung der ersten und dritten Beobachtung folgt:

$\gamma''=$	172°31′35′′9	$\sin\frac{1}{2}(\gamma''+\gamma)$	9·961012	$\sin\frac{1}{2}(\gamma''-\gamma)$	9·931278
$\gamma\ =$	55 18 21·1	$\sin\frac{1}{2}(L''-L)$	9·686739	$\cos\frac{1}{2}(L''-L)$	9·941460
$\frac{1}{2}(\gamma''+\gamma)=$	113 54 58·5	$\cos\frac{1}{2}(\gamma''+\gamma)$	„9·607885	$\cos\frac{1}{2}(\gamma''-\gamma)$	9·716717
$\frac{1}{2}(\gamma''-\gamma)=$	58 36 37·4	$\sin\frac{1}{2}(AD'+A''D')\sin\frac{1}{2}\varepsilon'$	9·647751	$\sin\frac{1}{2}(AD'-A''D')\cos\frac{1}{2}\varepsilon'$	„9·294624
$\frac{1}{2}(L''-L)=$	29 5 7·8	$\cos\frac{1}{2}(AD'+A''D')\sin\frac{1}{2}\varepsilon'$	9·872738	$\cos\frac{1}{2}(AD'-A''D')\cos\frac{1}{2}\varepsilon'$	9·658177
$\frac{1}{2}(AD'+A''D')=$	30 46 53·1	$tg\frac{1}{2}(AD'+A''D')$	9·775013	$tg\frac{1}{2}(AD'-A''D')$	„9·636447
$\frac{1}{2}(AD'-A''D')=$	−23 24 38·28	$\cos\frac{1}{2}(AD'+A''D')$	9·934057	$\cos\frac{1}{2}(AD'-A''D')$	9·962692
$AD'=$	7 22 14·82	$\sin\frac{1}{2}\varepsilon'$	9·938681	$\cos\frac{1}{2}\varepsilon'$	9.695485
$A''D'=$	54 11 31·38	$tg\frac{1}{2}\varepsilon'$	0·243196		
$a'=$	+ 1 37 19·63			$\frac{1}{2}\varepsilon'=\ 60°15'50''5$	
$c'=$	− 7 33 35·12			$\varepsilon'=120\ 31\ 41{\cdot}0$	

Die Controlegleichung (10) ergibt:

$a''-a'=-1°8'23''04$		$b''-b=-10°1'51''06$		$c'-c=-10°33'44''10$	
$\sin(a''-a')$	$_n8\cdot298652$	$\sin(b''-b)$	$_n9\cdot240995$	$\sin(c'-c)$	$_n9\cdot263171$
$\sin\varepsilon$	$8\cdot992857$	$\sin\varepsilon'$	$9\cdot935195$	$\sin\varepsilon''$	$9\cdot957369$
	$_n9\cdot305795$		$_n9\cdot305800$		$_n9\cdot305802$

Die Übereinstimmung ist mit Rücksicht auf die Kleinheit des Winkels $a''-a$ eine befriedigende. Aus (12) folgt nun:

R	$0\cdot005550$	R'	$0\cdot002552$	R''	$9\cdot999178$
$\sin\chi$	$9\cdot000716$	$\sin\chi'$	$9\cdot741722$	$\sin\chi''$	$9\cdot944929$
$\sin\varepsilon$	$8\cdot992857$	$\sin\varepsilon'$	$9\cdot935195$	$\sin\varepsilon''$	$9\cdot957369$
w	$0\cdot013409$	w'	$9\cdot809079$	w''	$9\cdot986738$
w'	$9\cdot809079$			w'	$9\cdot809079$
$w:w'$	$0\cdot204330$			$w'':w'$	$0\cdot177659$

und aus (14) folgt:

$\sin a''$	$7\cdot925268$	$\sin a'$	$8\cdot451902$	$\sin a'$	$8\cdot451902$	$\sin a''$	$7\cdot925268$
$\sin b$	$8\cdot856305$	$\sin b''$	$_n9\cdot012824$	$\cos b''$	$9\cdot997684$	$\cos b$	$9\ 998877$
$\sin c'$	$_n9\cdot119125$	$\sin c$	$8\cdot719160$	$\sin c$	$8\cdot719160$	$\sin c'$	$_n9\cdot119125$
	$_n5\cdot900698$		$_n6\cdot183886$		$7\cdot168746$		$_n7\cdot043270$
	$_n6\cdot183886$	$\sin(c'-c)$	$_n9\cdot263171$		$_n7\cdot043270$	$\sin(a''-a')$	$_n8\cdot298652$
	$0\cdot283188$	C	$_n7\cdot715073$		$0\cdot125476$	B	$7\cdot417777$
	$9\cdot963552$				$0\cdot368284$		
N	$5\cdot864250$			A	$7\cdot411554$		

Die Gleichung (15) lautet daher:

$$[5\cdot864250]\cot g\,z' = +0\cdot002579612 + [7\cdot417777].\nu + \\ + [{}_n7\cdot715073].\nu''$$

und die angegebene Controle liefert:

$L''-L'=27°\ 29'\ 2''4$		$L''-L=58°\ 10'\ 15''7$			$L'-L=30°\ 41'\ 13''3$		
$\sin(L''-L')$	9·664173	$\sin(L''-L)$	9·929227		$\sin(L'-L)$	9·707867	
R	0·005550	R'	0·002552		R''	9·999178	
	9.658623		9·926675			9·708689	
	9·926675	A	$=+0\cdot002579612$			9·926675	
$n:n'$	9·731948	$B\nu$	$=+0\cdot002259721$		$n'':n'$	9·782014	
$w:w'$	0·204330	$C\nu''$	$=-0\cdot004728744$		$w'':w'$	0·177659	
B	7·417777		$+0\cdot000110589$		C	${}_n7\cdot715073$	
$B\nu$	7·354055		6·043712		$C\nu''$	${}_n7\cdot674746$	
		N	5·864250				
		$\mathrm{tg}\,z'$	9·820538		$z'=33°\ 29'\ 6''5$		

also bis auf 0''9 mit χ' übereinstimmend.

Um nun für ν und ν'' Näherungswerthe zu bekommen, hat man

			log	
t = Aug. 9·68726	θ = 28·01016	1·447316	9·670891
t' = „ 41·43906	θ' = 59·76196	1·776425	
t'' = „ 69·44922	θ'' = 31·75180	1·501768	9·725343

Der erste Versuch ist also mit $\log(n:n')=9\cdot6709$ und $\log(n'':n')=9\cdot7253$ in der Weise anzustellen, dass dieselben in (15) substituirt werden und der dadurch erlangte Werth von r' zur Ermittlung genauerer Werthe für die Dreiecksverhältnisse aus (17) verwendet wird. Berücksichtigt man, dass $\log k$ (in Minuten) $=1\cdot7718553$ und $\log k$ (in Secunden) $=3\cdot5500066$, so erhält man:

	I. Versuch	II. Versuch		I. Versuch	II. Versuch
$n:n'$	9·6709	9·67300		6·5944	6·58275
$w:w'$	0·2043	0·20433	N	5·8643	5·86425
B	7·4178	7·41778	$\mathrm{tg}\,z'$	9·2699	9·28150
$B\nu$	7·2930	7·29511	$z'=$	10°32' 8	10°49' 28''
$n'':n'$	9·7253	9·72740	$\sin z'$	9·2626	9·27370
$w'':w'$	0·1777	0·17766	$R'\sin\chi'$	9·7443	9·74427
C	${}_n7\cdot7151$	${}_n7\cdot71507$	r'	0·4817	0·47057
$C\nu''$	${}_n7\cdot6181$	${}_n7\cdot62013$	$\sqrt{r'}$	0·2408	0·23528
$A=$	+0·002580	+0·0025796	$r'^{3/2}$	0·7225	0·70585
$B\nu=$	+0·001963	+0·0019729	k	1·7719	3·55001
$C\nu''=$	−0·004150	−0·0041699	μ	1·0494	2·84416
	+0·000393	+0·0003826			

	I. Versuch	II. Versuch		I. Versuch	II. Versuch
μ	1·0494	2·844160	$\sin 2f$	8·9598	8·976399
θ	1·4473	1·447316	$\sin 2f'$	9·2868	9·303191
θ''	1·5018	1·501768	$\sin 2f''$	9·0142	9·030666
$\mu\theta$	2·4967	4·291476	$n : n'$	9·6730	9·673208
$\mu\theta''$	2·5512	4·345928	$n'' : n'$	9·7274	9·727475
$2f =$	5°13'8	5°26' 4'82			
$2f'' =$	5 55·8	6 9 38·30			
$2f' =$	11 9·6	11 35 43·12			

Da die zuletzt erhaltenen Werthe für die Dreiecksverhältnisse von den vorhergehenden nur um 208, respective 75 Einheiten der sechsten Decimale abweichen, so kann zur Bestimmung der denselben entsprechenden Bahn, welche von der wahren Bahn nicht sehr verschieden sein wird, geschritten werden. Die Bestimmung von r', r, r'', f, f'' aus den Gleichungen (15), (16) und (20) liefert folgende Rechnung:

$n : n'$	9·673208	$n'' : n'$	9·727475
$w : w'$	0·204330	$w'' : w'$	0·177659
B	7·417777	C	7·715073
$B\nu$	7·295315	$C\nu''$	7·620207

$A = +0{\cdot}002579612$
$B\nu = +0{\cdot}001973855$
$C\nu'' = -0{\cdot}004170680$
$+0{\cdot}000382787$
$6{\cdot}582957$

N	5·864250
tg z'	9·281293
sin z'	9·273502
$R' \sin \chi'$	9·744274
r'	0·470772

$z' = +10°49'10'44$
$b = +4\ 7\ 8{\cdot}72$
$b'' = -5\ 54\ 42{\cdot}34$
$z'+b = +14\ 56\ 19{\cdot}16$
$z'+b'' = +4\ 54\ 28{\cdot}10$

ν	9·877538	ν	9·877538
sin z'	9·273502	sin z'	9·273502
cos a'	9·999826	sin a'	8·451902
	9·150866		7·602942
sin $(z'+b)$	9·411257		9·065390
	0·260391	tg z	8·537552
	9·914524	sin z	8·537294
	9·065390	$R \sin \chi$	9·006266
		r	0·468972

$z = +1°58'28'95$
$a' = +1\ 37\ 19{\cdot}63$
$a'' = +0\ 28\ 56{\cdot}59$
$z+a' = +3\ 35\ 48{\cdot}58$
$z+a'' = +2\ 27\ 25{\cdot}54$

ν''	9·905134	ν''	9·905134	$z'' = +$	17°13'38"11
sin z'	9·273502	sin z'	9·273502	$c = +$	3 0 8·98
cos c'	9·996208	sin c'	$_n$9·119125	$c' = -$	7 33 35·12
	9·174844		$_n$8·297761	$z''+c = +$	20 13 47·09
sin $(z'+b'')$	8·932233		$_n$8·806297	$z''+c' = +$	9 40 2·99
	0·242611	tg z''	9·491464		
	9·874064	sin z''	9·471530		
	$_n$8·806297	R'' sin χ''	9·944107		
		r''	0·472577		

$$\tfrac{1}{2}(z'+b-z''-c) = -2°\,38'\,43"96 = \alpha$$

sin $(z'+b)$	9·411257	sin $2f$	8·985743	$f =$	2°46'35"79
sin $(z''+c)$	9·538806	sin $(z+a'')$	8·632167	$f' =$	5 57 1·95
sin$^2\frac{1}{2}\varepsilon$	7·384706	sin ε''	9·957369	$f'' =$	3 10 26·16
	6·334769		7·575279	$2f =$	5 33 11·58
sin$^2\alpha$	7·328476	sin $(z''+c)$	9·538806	$2f' =$	11 54 3·90
	0·993707	sin ε	8·992857	$2f'' =$	6 20 52·82
	1·035676	sin $2f''$	9·043616		
sin$^2 f$	7·370445				
sin f	8·685222				

Zur Controle folgt aus (21):

sin $2f$	8·985743	sin $2f'$	9·314336	sin $2f''$	9·043616
r	0·468972	r'	0·470772	r''	0·472577
	8·516771		8·843564		8·571039
	8·843564				8·843564
$n : n'$	9·673207			$n'' : n'$	9·727475

Aus (23), (24) und (25) folgt sodann:

$r' : r''$	9·998195	$r'' : r$	0·003605	$x =$	35°11'51"10
$r' : r$	0·001800	cos v''	9·857485	$v =$	32 1 24·94
$1 - r' : r''$	7·617839		9·861090	$v' =$	38 22 17·26
sin f''	8·743253	cos v	9·928309	$v'' =$	43 55 28·84
	6·361092		0·067219	$\varphi =$	3 55 52·55
$r' : r - 1$	7·618362		9·223747	$45° + \frac{1}{4}\varphi =$	46 57 56·27
sin f	8·685222		9·084837		
sin f'	9·015652	$r'' : r - 1$	7·920906		
	1·041856	e	8·836069		
cotg f''	0·982001	$1 : \sin 1''$	5·314425		
	0·059855	e (in Sec.)	4·150494		
	0·169589				
cotg x	0·151590				

e	8·836069	e	8·836069	e	8·836069
cos v	9·928309	cos v'	9·894318	cos v''	9·857485
e cos v	8·764378	e cos v'	8·730387	e cos v''	8·693554
$1+e\cos v$	0·024538	$1+e\cos v'$	0·022738	$1+e\cos v''$	0·020933
p	0·493510	p	0·493510	p	0·493510

und aus p und $e = \sin\varphi$ ergibt sich in bekannter Weise:

$\sqrt{p}$	0·246755
$p^{3/2}$	0·740265
cos $^3\varphi$	9·996931
k	3·550007
μ	2·806673

Die zu v' gehörige mittlere Anomalie M' folgt aus:

$\frac{1}{2}v' =$	19°11' 8"63	tg $\frac{1}{2}v'$	9·541526
$\frac{1}{2}E' =$	17 59 50·14	tg $(45°+\frac{1}{2}\varphi)$	0·029821
$E' =$	35 59 40·28	tg $\frac{1}{2}E'$	9·511705
$v \sin E' =$	2 18 31·05	sin E'	9·769162
$M' =$	33 41 9·23	e	4·150494
		$e \sin E'$	3·919656

Die wegen Aberration verbesserten Zwischenzeiten ϑ_0 und ϑ_0'' ergeben sich aus (4), wenn die in Einheiten des mittleren Tages ausgedrückte Zeit, welche das Licht zum Zurücklegen der Längeneinheit braucht, mit A bezeichnet und $\log A = 7{\cdot}76057$ gesetzt wird, durch folgende Rechnung:

$\chi =$	5°44'55"2	33°29' 7"4	61°45' 6"5	
$z =$	1 58 28·9	10 49 10·4	17 13 38·1	
$\chi - z =$	3 46 26·3	22 39 57·0	44 31 28·4	$\vartheta_0 = 28{\cdot}00844$
A	7·76057	7·76057	7·76057	$\vartheta_0'' = 31{\cdot}75105$
sin $(\chi - z)$	8·81836	9·58587	9·84585	
R	0·00555	0·00255	9·99918	
sin z	8·53729	9·27350	9·47153	
	8·04719	8·07549	8·13407	
	0·01115	0 01190	0·01362	
$t =$	9·68726	41·43906	69·44922	
$t_0 =$	9·67611	41·42716	69 43560	

Unter Zugrundelegung dieser verbesserten Zwischenzeiten erhält man für die mittleren Anomalien der beiden äusseren Orte:

θ_0''	1·501758	θ_0	1·447289	$M'-M=$	5°39′ 3′76
μ	2·806673	μ	2·806673	$M''-M'=$	4 59 5·76
$M'-M$	4·308431	$M''-M'$	4·253962	$M'=$	33 41 9·23
				$M=$	28 2 5·47
				$M''=$	38 40 14·99

und für die entsprechenden excentrischen Anomalien die Werthe

$$E = 29°59'55'97$$
$$E' = 41\ 15\ 41{\cdot}21.$$

Die zugehörigen wahren Anomalien v_0 und v_0'' werden:

$\frac{1}{2}E=$ 14°59′ 57′98	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E$	9·428035	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}E''$ 9·575751
$\frac{1}{2}E'=$ 20 37 50·60	$\operatorname{tg}(45°+\frac{1}{2}\varphi)$	0·029821	$\operatorname{tg}(45°+\frac{1}{2}\varphi)$ 0·029821
$\frac{1}{2}v_0=$ 16 0 45·25	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_0$	9·457856	$\operatorname{tg}\frac{1}{2}v_0''$ 9·605572
$\frac{1}{2}v_0''=$ 21 57 41·97			

und daraus folgt:

$$\Delta(2f) = -4'90 \quad \Delta(2f') = -10'46 \quad \Delta(2f'') = -5'56$$

Schliesslich ergibt sich aus (27), wenn $d = 21{\cdot}65$, $d' = 9{\cdot}99$, $d'' = 18{\cdot}93$ angenommen wird, in Einheiten der 6. Decimale

$$\Delta \log (n:n') = +1{\cdot}6 \qquad \Delta \log (n'':n') = +0{\cdot}8.$$

Es tritt also hier die Nothwendigkeit ein, ein zweites Werthsystem von x, e, p zu berechnen und den auf p. 1012 angegebenen Weg einzuschlagen. Um zu entscheiden, in welchem Sinne die Änderung von $\log r'$ geschehen soll, ist zu bedenken, dass dadurch im vorliegenden Falle der der Zeit θ_0' entsprechende Winkel $2f''$ vergrössert werden soll, was durch Verkleinerung des Winkels x erreicht wird. Daraus ergibt sich im Hinblick auf die Gleichung (23), dass r' verkleinert werden muss. Führt man also die Berechnung von x, e, p mit dem Werthe $\log r' = 0{\cdot}470771$ durch, so erhält man

$r':r''$	9·998194	$r'':r$	0·003605	$x=$	34°59′ 48′40
$r':r$	0·001799	$\cos v''$	0·858945	$v=$	31 49 22·24
$1-r':r''$	7·618048		9·862550	$v'=$	38 10 14·56
$\sin f''$	8·743253	$\cos v$	9·929257	$v''=$	43 43 26·14
	6·361301		0·066707		
$r':r-1$	7·618153		9·220165		
$\sin f$	8·685222		9·082715		
$\sin f'$	9 015652	$r'':r-1$	7·920906		
	1·042274	e	8·838191		
$\operatorname{cotg} f'$	0·982001				
	0·060273				
	9·172824				
$\operatorname{cotg} x$	0·154825				

e	8·838191	e	8·838191	e	8·838191
$\cos v$	9·929257	$\cos v'$	9·895518	$\cos v''$	9·858945
$e\cos v$	8·767448	$e\cos v'$	8·733709	$e\cos v''$	8·697136
$1+e\cos v$	0·024707	$1+e\cos v'$	0·022908	$1+e\cos v''$	0·021102
r	0·468972	r'	0·470771	r''	0·472577
p	0·493679	p	0·493679	p	0·493679

Die weitere Durchführung der Rechnung ergibt schliesslich

$$\Delta(2f) = -1'88 \qquad \Delta(2f'') = -0'50.$$

Man hat also

x	$\log e$	$\log p$	$\Delta(2f')$
35°11'51'10	8·836069	0·493510	−10'46
34 59 48·40	8·838191	0·493679	− 2·38,

woraus durch Interpolation die definitiven Werthe

x	$\log e$	$\log p$	$\Delta(2f')$
34°56'15'53	8·838815	0·493729	0·00

folgen. Schliesslich erhält man aus den Formeln (28) und (29)

$f' = 5°57'\ 1'70$	$\eta = 44°32'34'30$	$\eta'' = 164°48'31'04$
$g''-g = 11\ 54\ 4·41$	$g = 16\ 15\ 57·49$	$g'' = 28\ 10\ 1·90$
$h''-h = 58\ 10\ 16·35$	$h = 13\ 49\ 30·13$	$h'' = 71\ 59\ 46·48$
	$i = 11\ 8\ 24·78$	$i = 11\ 8\ 24·40$
	$\omega = 344\ 30\ 8·12$	$\omega = 344\ 30\ 8·63$
	$\Omega = 303\ 57\ 36·67$	$\Omega = 303\ 57\ 36·02$

und daraus die Elemente:

1876 Sept. 10·42716 mittl. Berliner Z.

$M = 33°25'30'6$

$\left.\begin{aligned}\omega &= 344\ 30\ 8·4\\ \Omega &= 303\ 57\ 36·3\\ i &= 11\ 8\ 24·6\end{aligned}\right\}$ mittl. Aequin. 1876·0

$\varphi = 3\ 57\ 22·5$

$\log \mu = 2·806306$

Die Berechnung der der Bahnbestimmung zu Grunde gelegten Planetenorte aus diesen Elementen nach den Formeln

$$\rho\cos\beta\cos(\lambda-\Omega) = r\cos g - R\cos h$$
$$\rho\cos\beta\sin(\lambda-\Omega) = r\sin g\cos i - R\sin h$$
$$\rho\sin\beta = r\sin g\sin i$$

ergab die Werthe

$$\lambda = 321^\circ\ 3'53''4 \qquad \beta = +4^\circ 43' 26''40$$
$$\lambda' = 315\ 29\ 3\cdot7 \qquad \beta' = +6\ 6\ 21\cdot31$$
$$\lambda'' = 314\ 24\ 31\cdot5 \qquad \beta'' = +6\ 34\ 44\cdot87,$$

also eine befriedigende Übereinstimmung.

7.

Um die Brauchbarkeit der durchgeführten Methode für den Fall, dass die Zwischenzeiten sehr gross sind, zu zeigen, soll die Berechnung des im Artikel 159 der „Theoria motus" durchgeführten Beispieles der Bahnbestimmung des Planeten Ceres in ihren Hauptzügen angegeben werden. Die der Berechnung zu Grunde gelegten Daten sind:

t, t', t''	1805 Sept. 5·51336	Sept. 139·42711	Sept. 265·39813
$\lambda, \lambda', \lambda''$	95°32'18''56	99°49' 5''87	118° 5'28''85
β, β', β''	− 0 59 34·06	+ 7 16 36·80	+ 7 38 49·39
L, L', L''	342 54 56·00	117 12 43·25	241 58 50·71
$\log R, \log R', \log R''$	0·0031514	9·9929861	0·0056974

Die Beobachtungszeiten sind bereits wegen Aberration corrigirt.

Es ergaben sich folgende Werthe:

$\gamma = 178°55'28''08$	$\gamma' = 156°52'11''49$	$\gamma'' = 170°48'44''78$
$\chi = -112\ 37\ 9\cdot66$	$\chi' = +18\ 48\ 39\cdot81$	$\chi'' = +123\ 32\ 52\cdot12$
$a' = +219\ 54\ 50\cdot61$	$b = -3\ 15\ 58\cdot40$	$c = +15\ 12\ 12\cdot51$
$a'' = +156\ 34\ 47\cdot33$	$b'' = +159\ 17\ 17\cdot18$	$c' = -117\ 6\ 10\cdot99$
$= 29\ 18\ 8\cdot18$	$\epsilon' = 350\ 32\ 59\cdot08$	$\epsilon'' = 23\ 53\ 34\cdot72$

$$\log(w : w') = 9\cdot9926156$$
$$\log(w'' : w') = {}_n0\cdot0329811$$

Die zur Bestimmung von z' dienende Gleichung lautet:

$$[8\cdot9012976]\cot g z' = +0\cdot5106427 + [9\cdot9006445].v + [9\cdot6762601].v''$$

Die weiteren Resultate sind aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich, wobei von den durch einige Vorversuche gewonnenen Näherungswerthen $\log(n:n') = 9\cdot7525$ und $\log(n'':n') = 9\cdot7765$ ausgegangen wurde.

	I.	II.	III.	IV.	V.
$n : n'$	9·7525	9·7509	9·751300	9·751236	9·751244
$n'' : n'$	9·7765	9·7763	9·776900	9·776864	9·776876
r'	0·4143	0·4133	0·413308	0·413281	0·413281
r	0·4272	0·4284	0·428239	0·428282	0·428277
r''	0·4083	0·4069	0·406218	0·406213	0·406199
$2f =$	31°14'1	31°17'3	31°19' 0"6	31°19' 0"0	31°19' 2"1
$2f'' =$	31 38·5	31 35·8	31 36 21·8	31 36 14·4	31 36 15·0
$v' =$	321 3·8	323 57·0	320 30 59·7	320 48 5·6	320 42 59·9
e	8·8403	8·9307	8·903920	8·907799	8·907180
p	0·4371	0·4422	0·439376	0·439680	0·439610
μ	2·8912	2·8819	2·886746	2·886212	2·886329
$\Delta(2f) =$	−15"0	+5"1	−44"7	+7"6	−1"5
$\Delta(2f'') =$	− 7·9	+5·8	−35·9	+9·0	−0·8
$n : n'$	9·7509	9·7513	9 751236	9·751244	9·751240
$n'' : n'$	9·7763	9·7769	9·776864	9·776876	9·776875

dürfte, anzugeben, sei die Rechnung für die Zahlen der V. Columne hiehergesetzt, wobei bemerkt werden soll, dass die Berechnung von E und E'' aus M und M'' am besten auf einem gesonderten Blatt ausgeführt wird.

$n : n'$	9·751244		$_n$8·716825	$\sin(z'+b)$	8·817981	$z' =$	$+ 7^\circ\ 2'\ 12''77$
$w : w'$	9·992616	$\sin(z'+b)$	8·817981	$\sin(z''+c)$	9·753765	$b'' =$	$+159\ 17\ 17\cdot18$
B	9.900644		0·101156	$\sin\frac{2}{3}\varepsilon$	8·806010	$b =$	$-\ 3\ 15\ 58\cdot40$
$B\nu$	9·644504		0·354546		7·377756	$z'+b'' =$	$+166\ 19\ 29\cdot95$
$n'' : n'$	9·776876		9·071371	$\sin^2\alpha$	8·847958	$z'+b =$	$+\ 3\ 46\ 14\cdot37$
$w'' : w'$	$_n$0·032981		$_n$8·639315		1·470202	$z =$	$-\ 20\ 17\ 36\cdot31$
C	9·676260	tg z	$_n$9·567944		1·484667	$a'' =$	$+156\ 34\ 47\cdot33$
$C\nu''$	$_n$9·486117	sin z	$_n$9·540114	$\sin^2 f$	8·862423	$a' =$	$+219\ 54\ 50\cdot61$
$A =$	$+$0·510643	$R\sin\chi$	$_n$9·968391	$\sin f$	9·431211	$z+a'' =$	$+136\ 17\ 11\cdot02$
$B\nu =$	$+$0·441066	r	0·428277	$\sin 2f$	9·715816	$z+a' =$	$+199\ 37\ 14\cdot30$
$C\nu'' =$	$-$0·306279	$\sin c'$	$_n$9·949482	$\sin(z+a'')$	9·839512	$z'' =$	$+\ 19\ 21\ 15\cdot67$
	$+$0·645430	ν''	$_n$9·809857	$\sin z''$	9·607487	$c =$	$+\ 15\ 12\ 12\cdot51$
	9·809849	$\sin z'$	9·088165		9·162815	$c' =$	$-117\ 6\ 10\cdot99$
N	8·901298	$\cos c'$	$_n$9·658576	$\sin(z''+c)$	9·753765	$z''+c =$	$+\ 34\ 33\ 28\cdot18$
tg z'	9·091449		8·556598	$\sin\varepsilon$	9·689679	$z''+c' =$	$-\ 97\ 44\ 55\cdot32$
$\sin z'$	9·088165	$\sin(z'+b'')$	9·373673	$\sin 2f''$	9·719371	$\alpha =$	$-\ 15\ 23\ 36\cdot90$
$k'\sin\chi'$	9·501446		0·817075	$\sin 2f''_1$	9·949577	$f =$	$15\ 39\ 31\cdot07$
r'	0·413281		0·745277	$(\sin 2f) : r$	9·287539	$f' =$	$31\ 27\ 38\cdot57$
$\sin a'$	$_n$9·807290		9·301875	$(\sin 2f') : r'$	9·536296	$f'' =$	$15\ 48\ 7\cdot50$
ν	9·743860		8·847504	$(\sin 2f'') : r''$	9·313172	$2f =$	$31\ 19\ 2\cdot14$
$\sin z'$	9·088165	tg z''	9·545629	$n : n'$	9·751243	$2f' =$	$62\ 55\ 17\cdot14$
$\cos a'$	$_n$9·884800	$\sin z''$	9·520365	$n'' : n'$	9·776876	$2f'' =$	$31\ 36\ 15\cdot00$
	$_n$8·716825	$R''\sin\chi''$	9·926564				
		r''	0·406199				

$r' : r''$	0·007082	$e \cos v$	8·422240	$M'' - M'$	4·986600	$x =$	304°54′ 52″44
$r' : r$	9·985004	$1 + e \cos v$	0·011333	$M' - M$	5.018154	$v =$	289 6 44·94
$1 - r' : r''$	$_n$8.215902	p	0·439610	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E$	$_n$9·817220	$v' =$	320 42 59·94
$\sin f''$	9·435072	$e \cos v'$	8·795885	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E''$	$_n$8·807672	$v'' =$	352 2 2·08
	$_n$7·650974	$1 + e \cos v'$	0·026329	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0$	$_n$9·852364	$\varphi =$	4 37 53·54
$r' : r - 1$	$_n$8·530712	p	0·439610	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v_0''$	$_n$8·842816	$45° + \frac{1}{2}\varphi =$	47 18 56·77
$\sin f$	9·431211	$e \cos v''$	8·902919			$\frac{1}{2} v' =$	160 21 29·97
$\sin f'$	9·717599	$1 + e \cos v''$	0·033411			$\frac{1}{2} E' =$	161 46 49·86
	9·971452	p	0·439610			$E' =$	323 33 39·72
$\operatorname{cotg} f'$	0·213350	$\operatorname{tg}(45° + \frac{1}{2}\varphi)$	0·035144			$e \sin E' =$	— 2 44 52·75
	0·241898	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} v'$	$_n$9·552551			$M' =$	326 18 32·47
	9·872396	$\operatorname{tg} \frac{1}{2} E'$	$_n$9·517407			$M'' - M' =$	26 56 1·60
$\operatorname{cotg} x$	$_n$9·843848	$\sin E'$	$_n$9·773762			$M' - M =$	28 37 55·24
$r'' : r$	9·977922	e	4·221555			$M =$	297 40 37·23
$\cos v''$	9·995789	$e \sin E'$	$_n$3·995317			$M'' =$	353 14 34·07
	9.973711	$\sqrt{p}$	0·219805			$\frac{1}{2} E =$	146 42 57·68
$\cos v$	9·515110	$p^{3/2}$	0·659415			$\frac{1}{2} E'' =$	176 19 31·81
	0·458601	$\cos^3 \varphi$	9·995737			$\frac{1}{2} v_0 =$	144 33 22·89
	0·272944	k	3·550007			$\frac{1}{2} v_0'' =$	176 1 0·27
	$_n$9·788054	μ	2·886329			$v_0 =$	289 6 45·78
$r'' : r - 1$	$_n$8·695184	θ_0	2·100271			$v_0'' =$	352 2 0 54
e	8·907130	θ_0''	2·126825			$\Delta(2f) =$	—1·54
$\cos v'$	9·888755					$\Delta(2f'') =$	—0·84

Zur Vergleichung der am Schlusse der V. Columne erhaltenen Werthe der Dreiecksverhältnisse mit den von Gauss eingeführten Grössen P und Q dienen die Gleichungen:

$$P = \frac{n''}{n'} : \frac{n}{n'} \qquad \frac{n''}{n'} + \frac{n}{n'} = 1 + \frac{Q}{2r'^3},$$

aus welchen $\log P = 0{\cdot}025635$ und $\log Q = 0{\cdot}750894$ folgt.

XII. SITZUNG VOM 10. MAI 1883.

Herr Regierungsrath Prof. Dr. G. A. V. Peschka an der technischen Hochschule in Brünn übersendet den ersten Theil seines eben erschienenen Werkes: „Darstellende und projective Geometrie nach dem gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft", welchem ein besonderer Atlas von 34 Tafeln beigegeben ist.

Das c. M. Herr Regierungsrath Prof. Constantin Freiherr v. Ettingshausen übersendet eine Abhandlung, betitelt: „Beitrag zur Kenntniss der Tertiärflora von Sumatra."

Das c. M. Herr Oberbergrath D. Stur in Wien überreicht eine Abhandlung unter dem Titel: „Zur Morphologie und Systematik der Culm- und CarbonFarne".

Herr Ferdinand Anton, Observator der k. k. österreichischen Gradmessung in Wien, überreicht eine Abhandlung, betitelt: „Definitive Bahnbestimmung und Ephemeriden für den Planeten (154) Bertha".

Herr Dr. Eduard Mahler in Wien überreicht eine Abhandlung: „Über dreifach orthogonale Flächensysteme."

Herr Prof. Dr. Zd. H. Skraup in Wien überreicht eine von ihm in Gemeinschaft mit Herrn A. Cobenzl ausgeführte Untersuchung, welche zwei Chinolinbasen betrifft, die aus den Naphtylaminen entstehen und Naphtochinoline heissen.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Akademie der Wissenschaften, Ungarische in Budapest: Almanach für 1883. Budapest 1883; 8°. — Emlékbeszédek; 1882, Nr. 1—5. Budapest, 1882; 8°. — Értesitö, 16. Jahrg. Nr. 1—6. Budapest, 1882; 8°. — Értekezések a nemzetgazdaságtan és statistika köréböl, I. Band, Nr. 1—5. Budapest, 1882 et 1883; 8°. — Évkönyvei, 16. Band, 8. Theil. Budapest,

1882; 4°. — Ungarische Revue, 1882; 4.—10. Heft. Leipzig, 1882; 8°. 1883, 1.—3. Heft. Budapest, 1883; — 8°. Körösi J., Budapest nemzetiségi állapota és magyarosodása az 1881-diki népszamlálás eredményei szerint. Budapest, 1882; 8°. — Értekezések a mathematikai tudományok köréből. 9. Band, Nr. 1—10. Budapest, 1882; 8°. — Értekezések a természettudományok köréből, 11. Band, Nr. 21—26. Budapest, 1882; 8°. 12. Band 1—7. Budapest, 1882; 8°. — Lenhossék, J., A' Szeged-öthalmi ásatásokról. Budapest, 1882; 4°.

Association, the American pharmaceutical. Proceedings at the 30ᵗʰ annual meeting. Philadelphia, 1883; 8° — XVIIIᵗʰ annual Report of the Alumni association for the year 1881—82. Philadelphia, 1882; 8°.

Bibliothèque universelle: Archives des sciences physiques et naturelles. 3ᵉ période, tome IX. Nr. 3. 15 Mars 1883. Genève, Lausanne, Paris; 8°.

Bureau, k. statistisch-topographisches: Württembergische Jahrbücher für Statistik und Landeskunde. Jahrgang 1882. I. und II. Hälfte. Stuttgart, 1882—83; 4°. Jahrgang 1882. II. Band und Supplementband. Stuttgart 1882—83; 4°.

Central-Observatorium, physikalisches: Annalen. Jahrgang 1881. Theil II. St. Petersburg, 1882; fol. — Neue Reduction der Bradley'schen Beobachtungen aus den Jahren 1750—1762 von Arthur Auwers. II. Band. St .Petersburg, 1882; fol.

Comité international des poids et mesures: Procès verbaux des séances de 1882. Paris, 1883; 8°.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVI. Nr. 17. Paris, 1883; 4°.

Gesellschaft, physikalisch-chemische: Bulletin. Tome XV. Nr. 3 und 4. St. Petersburg, 1883; 8°.

— physikalisch-medizinische zu Würzburg: Sitzungsberichte. Jahrgang 1882. Würzburg, 1882; 8°.

— ungarische geologische: Zeitschrift. XIII. Band. 1.—3. Heft. Budapest, 1883; 8°.

Hortus petropolitanus: Acta. Tomus VIII. Fasciculus L. St. Petersburg, 1883; 8°.

— — Descriptiones plantarum novarum et minus cognitarum. Fasciculus VIII. suppl. auctore E. Regel. Petropoli, 1883; 8°.

Lotos: Jahrbuch für Naturwissenschaft. N. F. III. u. IV. Band. Prag, 1883; 8°.

Militär-Comité, k. k. technisches und administratives: Mittheilungen über Gegenstände des Artillerie- und Geniewesens. Jahrgang 1883. 1.—4. Heft. Wien, 1883; 8°.

Moniteur scientifique du Docteur Quesneville: Journal mensuel. 27ᵉ année, 3ᵉ série, tome XIII. 497ᵉ livraison. Mai 1883. Paris; 4°.

Montigny, M. Ch.: Les grandes découvertes faites en Physique depuis la fin du XVIIIᵉ siècle. Bruxelles, 1882; 8°. Notice sur une particularité de l'Aurore boréale du 2 Octobre 1882 et sur l'accroissement d'intensité de la scintillation des étoiles pendant les aurores boréales. Bruxelles, 1882; 8°.

Nature. Vol. XXVIII. Nr. 705. London, 1883; 8°.

Observations de Poulkova. Vol. XIII. St. Pétersbourg, 1881; fol.

— — Jahresbericht. St. Petersburg, 1882; 8°.

Observatoire impérial de Rio de Janeiro: Bulletin astronomique et météorologique. Nos. 10—12. Rio de Janeiro 1882; 4°. Nr. 1 & 2. Rio de Janeiro, 1883; 4°.

Observatory, the: A monthly Review of Astronomy. Nr. 73. 1883, Mai 1. London; 8°.

Reichsanstalt, k. k. geologische: Jahrbuch. Jahrgang 1883 XXXIII. Band. Nr. 1. Jänner—März. Wien, 1883; 4°.

— — Verhandlungen. 1883 Nr. 6. Wien, 1883; 4°.

Reichsforstverein, österreichischer: Österreichische Vierteljahrsschrift. N. F. I. Band. I. Quartal. Wien, 1883; 8°.

Società degli Spettroscopisti Italiani: Memorie. Vol. XII. Disp. 2ª e 3ª. Roma, 1883; gr. 4°.

Societas entomologica rossica: Horae. Tom. XI—XIII. St. Petersburg, 1880—81—82; 8°. Tom. XVI. St. Petersburg, 1881; 8°.

Verein, naturwissenschaftlicher von Neu-Vorpommern und Rügen in Greifswald: Mittheilungen. XIV. Jahrgang. Berlin, 1883; 8°.

Über eine neue Integration der Differentialgleichungen der Planetenbewegung.

Von **S. Oppenheim**,
Elève der k. k. Sternwarte.

Mit 1 Holzschnitt.

(Vorgelegt in der Sitzung am 19. April 1883.)

Wenn man bisher verschiedene Probleme der theoretischen Astronomie einzig als geometrische Probleme betrachtet und eine Lösung derselben daher auch nur auf rein geometrischem Wege versucht hatte, so lag der Grund hievon zumeist in dem Umstande, als man die Integration der betreffenden Differentialgleichungen nur in Bezug auf den Radiusvector vollständig ausführte, indem man sich begnügte, jene Gleichungen aus denselben zu entwickeln, welche die unter dem Namen „Kepler's" wohlbekannten drei Gesetze dieser Bewegung darstellen. Jede neue Integrationsmethode, die nicht bloss diese Gesetze ableitet, sondern auch die Lösung für andere Probleme der theoretischen Astronomie, insoweit sich dieselben auf die ungestörte Bewegung der Planeten oder Kometen um die Sonne beziehen, in sich enthält, dürfte daher ein um so grösseres Interesse für sich in Anspruch nehmen, als sie gestatten würde, alle diese Fragen auf einem einzigen einheitlichen Wege, durch Integration der Differentialgleichungen dieser Bewegung zu beantworten.

Die Entwicklung und Auseinandersetzung einer solchen Methode bildet den Gegenstand der vorliegenden Untersuchung. Hiebei ist das angewandte Integrationsverfahren vollständig jenem nachgebildet, welches in der theoretischen Physik überhaupt und speciell in der Elasticitätslehre und Hydrodynamik, d. i. bei Aufstellung der Gesetze der Schwingungen der kleinsten Theilchen fester und flüssiger Körper gebräuchlich ist und seinem Wesen nach hauptsächlich in der Anwendung willkürlicher Func-

tionen und eben solcher Constanten zur Darstellung der Lösungen partieller Differentialgleichungen und deren nachherigen Bestimmung aus anderen Bedingungen des Problems besteht.

Was durch diese Methode, und namentlich durch die Einführung der willkürlichen Functionen, erzielt wird, ist nicht bloss die grössere Anschaulichkeit, in der sie die verschiedenen Lösungen der zu integrirenden Differentialgleichungen erscheinen lässt, als vielmehr die grössere Allgemeinheit der Resultate, die sie liefert, eine Allgemeinheit, die es gestattet, alle die verschiedenen Lösungen aus einer einzigen, allgemeinen abzuleiten und die Bedingungsgleichung einer jeden derselben näher zu characterisiren. Speciell was das hier vorliegende Problem anlangt, so wird nachgewiesen, wie die Einführung der willkürlichen Functionen zur Darstellung der Lösungen der Differentialgleichungen der Planetenbewegung gleichzeitig die beiden zuerst von Gauss aufgestellten Formeln zur Berechnung der rechtwinkeligen Coordinaten, nämlich:

$$x = \lambda + l \sin(E+L) \quad y = \mu + m \sin(E+M) \quad z = \nu + n \sin(E+N)$$
$$x = r\alpha \sin(A+v) \quad y = \beta r \sin(B+v) \quad z = \gamma r \sin(C+v)$$

so wie die für dieselben geltenden Beziehungsgleichungen

$$M = E - e \sin E \qquad \cos E = \frac{a-r}{ae}$$

aus den Differentialgleichungen selbst abzuleiten gestattet, wie dieselbe nicht minder gewisse Gleichungen zur Bestimmung der angenommenen willkürlichen Constanten liefert, deren Auflösung genau auf dieselben Formeln führt, die auch Gauss zur Berechnung der Constanten $\lambda\mu\nu lmn$ u. s. w., jedoch auf einem ganz anderen Wege gefunden hat.

1.

Es seien xyz die Coordinaten des Planeten oder Cometen, bezogen auf ein Coordinatensystem, dessen Ebenen beliebig im Raume vertheilt sein mögen und das nur der Beschränkung unterworfen sein soll, dass sein Anfangspunkt in dem Mittelpunkte der Sonne liege, die als im Raume ruhend angenommen werden kann. Ist ferner r der Radius vector, d. i. die Entfernung des

betrachteten Gestirnes von der Sonne, k^2 die Constante der theoria motus, so lauten die zu integrirenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k^2x}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k^2y}{r^3} &= 0 \\ \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{k^2z}{r^3} &= 0 \end{aligned} \qquad 1)$$

zu denen noch

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

hinzukömmt.

Bisher verfuhr man bei Integration dieser Differentialgleichungen in folgender Weise:

Man multiplicirte dieselben der Reihe nach mit

$$\frac{dx}{dt} \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{dz}{dt}$$

und addirte sie sodann. Es ergab sich

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{d^2z}{dt^2}\cdot\frac{dz}{dt} + \frac{k^2}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right) = 0$$

und hieraus als erstes Integral

$$\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = \frac{k^2}{r} + h. \qquad a)$$

Man multiplicirte die Gleichungen ferner der Reihe nach mit

$$yz, \quad zx \quad \text{und} \quad xy$$

und subtrahirte je zwei derselben von einander. Die Gleichungen, die man so erhielt, waren

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = 0 \qquad z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt^2} = 0 \qquad x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

und stellen die in der analytischen Mechanik, unter dem Namen der Flächensätze bekannten Gesetze der Planetenbewegung vor.

Die Integration derselben lieferte

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt}=c_3 \quad z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt}=c_1 \quad x\frac{dz}{dt}-z\frac{dx}{dt}=c_2 \qquad b)$$

als drei weitere Integrale der Differentialgleichungen. Indem man nun diese Gleichungen quadrirte und addirte, fand man mit Rücksicht auf den bekannten Satz, dass, wenn $a\,b\,c\,a_1b_1c_1$ irgendwelche Grössen sind, stets

$$(ab_1-a_1b)^2+(bc_1-b_1c)^2+(ca_1-ac_1)^2=$$
$$=(a^2+b^2+c^2)(a_1^2+b_1^2+c_1^2)-(aa_1+bb_1+cc_1)^2$$

ist,

$$(x^2+y^2+z^2)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-$$
$$-\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)^2=c_1^2+c_2^2+c_3^2$$

oder

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\frac{c_1^2+c_2^2+c_3^2}{r^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \qquad c)$$

Die Elimination von

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

aus den beiden Gleichungen *a)* und *c)* lieferte schliesslich als Endgleichung

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{2k^2}{r}-\frac{c_1^2+c_2^2+c_3^2}{r^2}-h, \qquad d)$$

welche in Bezug auf r unmittelbar integrabel ist und deren Integration man durch Einführung von Hilfswinkeln, wie es die wahre oder excentrische Anomalie sind, vereinfachte. Diese Gleichung bestimmte den Radius vector r in seiner Abhängigkeit von der Zeit; um aber auch Formeln zur Darstellung der rechtwinkeligen Coordinaten als Functionen der Zeit zu erhalten, musste man schon einen indirecten Weg einschlagen.

Unter der Annahme, dass P das Potential der anziehenden Kraft vorstellt, welche die Sonne auf den betrachteten Planeten oder Cometen ausübt, nehmen jedoch die Differentialgleichungen

1) die Form an

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial P}{\partial x} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial P}{\partial z} \end{aligned} \qquad 2)$$

wobei P entweder $= \frac{k^2}{r}$, oder wieder als durch eine Differentialgleichung, nämlich

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} = 0 \qquad 3)$$

bestimmt, angenommen werden kann.

In dieser Form nun sind die Gleichungen partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung und hieraus folgt, dass man die Coordinaten xyz in ihrer Abhängigkeit von der Zeit durch zwei willkürliche Funktionen darstellen kann, deren Bestimmung erst aus anderen Bedingungen des Problems sich ergibt. Demgemäss sollen unmittelbar als Lösungen der Differentialgleichungen 2)

$$\begin{aligned} x &= \lambda + l\varphi + l_1\varphi_1 \\ y &= \mu + m\varphi + m_1\varphi_1 \\ z &= \nu + n\varphi + n_1\varphi_1 \end{aligned} \qquad 4)$$

festgesetzt werden. Hierin bedeuten $\lambda\,\mu\,\nu$, lmn und $l_1\,m_1\,n_1$ gewisse Constante, φ und φ_1 zwei willkürliche Functionen.

Einer jeden Specialisirung dieser Lösungen entspricht eine specielle Darstellung der Coordinaten $x\,y\,z$, von welcher die beiden, von Gauss aufgestellten, nur besondere Fälle sind.

Die angenommenen Lösungen enthalten aber schon explicite neun Constante. Hiezu kommen noch jene, die in den beiden Functionen φ und φ_1 enthalten sind, und ausserdem die Constante h der lebendigen Kraft, die bekanntlich insbesondere für die Form der Bahn von Bedeutung ist. Man hat daher im Ganzen mindestens zehn Constante. Indem aber den Differentialgleichungen 1) zufolge nur sechs Constante in einem vollständigen Integrale derselben vorkommen sollen, ergibt sich, dass die an-

genommenen Grössen $\lambda\,\mu\,\nu$ u. s. w. nicht von einander unabhängig, sondern gewisse Relationen zwischen ihnen bestehen werden.

Einige derselben werden unabhängig sein von der speciellen Form der Functionen φ und φ_1, sowie von der besonderen Form der Bahn des Gestirnes. Es mögen dieselben allgemeine Relationen heissen. Andere jedoch werden von der speciellen Wahl der Functionen φ und φ_1 abhängen und sollen specielle Relationen genannt werden.

Zunächst werden die allgemeinen Relationen zwischen den Constanten $\lambda\,\mu\,\nu\,\ldots$ aufgestellt. Hieran reiht sich die Entwicklung von Differentialgleichungen, die zur Bestimmung der Functionen φ und φ_1 dienen, und schliesslich folgt die Ableitung der speciellen Relationen, als jener Gleichungen, deren Auflösung die Formeln zur Berechnung der Constanten $\lambda\,\mu\,\nu\,\ldots$ liefert.

2.

Eine allgemeine Relation zwischen den Constanten $\lambda\,\mu\,\nu\,l\,m\,n$, $l_1\,m_1\,n_1$ ergibt sich aus jenen Sätzen, die in der analytischen Mechanik unter dem Namen der Flächensätze bekannt sind, und ausdrücken, dass

$$y\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2y}{dt^2}=0 \qquad z\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2z}{dt^2}=0 \qquad x\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2x}{dt^2}=0$$

mithin die Ausdrücke

$$y\frac{dx}{dt}-x\frac{dy}{dt} \qquad z\frac{dy}{dt}-y\frac{dz}{dt} \qquad x\frac{dz}{dt}-z\frac{dx}{dt}$$

als Integrale derselben constant sind. Die ersteren Grössen stellen bekanntlich die Componenten der Flächenbeschleunigungen, die zweiten die der Flächengeschwindigkeiten vor, bezogen auf das angenommene rechtwinkelige Coordinatensystem.

Substituirt man in diese Ausdrücke für $x\,y\,z$ die angenommenen Werthe derselben aus 4), so wie die sich hieraus ergebenden Werthe für

$$\frac{d^2x}{dt^2} \qquad \frac{d^2y}{dt^2} \qquad \frac{d^2z}{dt^2}$$

so erhält man

$$y\frac{d^2x}{dt^2} - x\frac{d^2y}{dt^2} = (\mu l - m\lambda)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (\mu l_1 - m_1\lambda)\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} +$$
$$+ (ml_1 - m_1 l)\left(\varphi\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \varphi_1\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) = 0$$

$$z\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2z}{dt_2} = (\nu m - n\mu)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (\nu m_1 - n_1\mu)\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} +$$
$$+ (nm_1 - n_1 m)\left(\varphi\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \varphi_1\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) = 0$$

$$x\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2x}{dt^2} = (\lambda n - l\nu)\frac{d^2\varphi}{dt^2} + (\lambda n_1 - l_1\nu)\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} +$$
$$+ (ln_1 - l_1 n)\left(\varphi\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} - \varphi_1\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) = 0.$$

Damit jedoch diese Gleichungen unter einander verträglich sind, d. h. durch jeden beliebigen Werth, den wir den Functionen φ und φ_1 beilegen, erfüllt werden, muss die aus den Coëfficienten gebildete Determinante verschwinden, mithin

$$D = \begin{vmatrix} \mu l - m\lambda, & \mu l_1 - m_1\lambda, & ml_1 - m_1 l \\ \nu m - n\mu, & \nu m_1 - n_1\mu, & nm_1 - n_1 m \\ \lambda n - l\nu, & \lambda n_1 - l_1\nu, & ln_1 - l^1 n \end{vmatrix} = 0.$$

Um diese Determinante in einfacherer Form darzustellen, sei dieselbe vorerst durch Versetzung der Glieder in der Form

$$D = \begin{vmatrix} mn_1 - m_1 n & \mu n_1 - m_1\nu & \mu n - m\nu \\ nl_1 - n_1 l & \nu l_1 - n_1\lambda & \nu l - n\lambda \\ lm_1 - l_1 m & \lambda m_1 - l_1\mu & \lambda m - l\mu \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben und nun aus den Constanten $\lambda\mu\nu \ldots$ eine zweite Determinante gebildet, nämlich

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & l & l_1 \\ \mu & m & m_1 \\ \nu & n & n_1 \end{vmatrix}.$$

Es sind dann alle Glieder der Determinante D Unterdeterminanten von D, daher D die in Bezug auf D adjungirte Determinante.

Nach einem bekannten Satze aus der Lehre der Determinanten ist sodann

$$D = D^2$$

und daher wegen $D = 0$ auch $D = 0$. Die Bedingung, dass die Determinante D gleich Null ist, ist somit zurückgeführt auf die einfachere

$$D = 0,$$

welche auch die erste allgemeine Relation zwischen den Constanten $\lambda\mu\nu \ldots$ der angenommenen Lösungen 4) darstellt Entwickelt lautet dieselbe

$$\lambda(mn_1 - m_1 n) + \mu(nl_1 - n_1 l) + \nu(lm_1 - l_1 m) = 0. \qquad 5)$$

Aus ihr folgen noch eine Reihe anderer Beziehungen zwischen den Constanten, und, wenn auch dieselben keine neuen Relationen mehr repräsentiren, so mögen doch der späteren Anwendung wegen einige hier angeführt werden. Zuvörderst muss neben 5) auch noch

$$\begin{aligned} l(mn_1 - m_1 n) + m(nl_1 - n_1 l) + n(lm_1 - l_1 m) &= 0 \\ l_1(mn_1 - m_1 n) + m_1(nl_1 - n_1 l) + n_1(lm_1 - l_1 m) &= 0 \end{aligned} \qquad 5a)$$

sein, und ausserdem, wegen $D = 0$, die Proportion bestehen:

$$\begin{aligned} &(mn_1 - m_1 n) : (nl_1 - n_1 l) : (lm_1 - l_1 m) = \\ &= (m_1\nu - n_1\mu) : (n_1\lambda - l_1\nu) : (l_1\mu - m_1\lambda) = \\ &= (m\nu - n\mu) : (n\lambda - l\nu) : (l\mu - m\lambda) \end{aligned} \qquad 5b)$$

so dass man setzen kann:

$$\begin{aligned} \frac{m_1\nu - n_1\mu}{m_1 n - n_1 m} &= \frac{n_1\lambda - \nu l_1}{n_1 l - n l_1} = \frac{l_1\mu - \lambda m_1}{l_1 m - l m_1} = -\eta \\ \frac{m\nu - n\mu}{m_1 n - n_1 m} &= \frac{n\lambda - \nu l}{n_1 l - n l_1} = \frac{l\mu - \lambda m}{l_1 m - l m_1} = -\eta_1 \end{aligned} \qquad 5c)$$

wo η und η_1 neue Constante sind.

3.

In der Lehre von den Schwingungen der kleinsten Theilchen der Körper wird ein Satz bewiesen, den man auch für das hier

vorliegende Problem zur Aufstellung einer zweiten Relation zwischen den Constanten $\lambda\ \mu\ \nu\ \ldots$ benützen kann.

Bezeichnet man nämlich mit $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1\ \xi_2\ \eta_2\ \zeta_2$ u. s. w. die Componenten der Verschiebungen der einzelnen Körpertheilchen, so gelten für diese die Differentialgleichungen

$$m_1\frac{d^2\xi_1}{dt^2}=\frac{\partial P}{\partial\xi_1}\qquad m_2\frac{d^2\xi_2}{dt^2}=\frac{\partial P}{\partial\xi_2}\quad\ldots$$

$$m_1\frac{d^2\eta_1}{dt^2}=\frac{\partial P}{\partial\eta_1}\qquad m_1\frac{d^2\eta_2}{dt^2}=\frac{\partial P}{\partial\eta_2}\quad\ldots$$

$$m_1\frac{d^2\zeta_1}{dt^2}=\frac{\partial P}{\partial\zeta_1}\qquad m_2\frac{d^2\zeta_2}{dt^2}=\frac{\partial P}{\partial\zeta_2}\quad\ldots$$

worin $m_1\ m_2\ \ldots$ die Massen der einzelnen Theilchen, P das Potential der inneren Kräfte bedeutet. Nimmt man nun als Lösungen dieser Differentialgleichungen irgend ein System von Werthen an, etwa

$$\begin{aligned}
\xi_1&=a_1\cos\mu t+A_1\sin\mu t+a_1'\cos\mu' t+A_1'\sin\mu' t+\ldots\\
\eta_1&=b_1\cos\mu t+B_1\sin\mu t+b_1'\cos\mu' t+B_1'\sin\mu' t+\ldots\\
\zeta_1&=c_1\cos\mu t+C_1\sin\mu t+c_1'\cos\mu' t+C_1'\sin\mu' t+\ldots\\
\xi_2&=a_2\cos\mu t+A_2\sin\mu t+a_2'\cos\mu' t+A_2'\sin\mu' t+\ldots\\
&\quad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots\qquad\ldots
\end{aligned}$$

so gelten stets zwischen den Constanten in diesem Lösungssystem die Beziehungen:[1]

$$\begin{aligned}
m_1(a_1a_1'+b_1b_1'+c_1c_1')+m_2(a_2a_2'+b_2b_2'+c_2c_2')+\ldots&=0\\
m_1(A_1A_1'+B_1B_1'+C_1C_1')+m_2(A_2A_2'+B_2B_2'+C_2C_2')+\ldots&=0\\
m_1(a_1A_1'+b_1B_1'+c_1C_1')+m_2(a_2A_2'+b_2B_2'+c_2C_2')+\ldots&=0\\
m_1(a_1'A_1+b_1'B_1+c_1'C_1)+m_2(a_2'A_2+b_2'B_2+c_2'C_2)+\ldots&=0
\end{aligned}$$

Aus der Übereinstimmung der für diesen Fall geltenden Differentialgleichungen mit jenen, die der Planetenbewegung zu Grunde liegen, vorausgesetzt, dass man letztere in der Form 2)

---

[1] Stefan, Über die Eigenschaften der Schwingungen eines Systems von Punkten. Sitzb. d. Akad. d. Wissensch. Wien, mathem. Classe II. Abth. Band LXVI, 1872, pag. 159 ff.

annimmt, findet man leicht, dass die Giltigkeit dieser Relationen nicht auf den Fall der Schwingungen der Körpertheilchen allein beschränkt ist, sondern auch, und ohne irgend eine Änderung auf das System 4) der Lösungen der Differentialgleichungen 2) ausgedehnt werden kann. Es nimmt auch die Relation für diesen Fall die viel einfachere Form

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0 \qquad 6)$$

an, indem man in den obigen Ausdrücken $m = 1$, $m_2 = m_3 = \ldots 0$ setzt, und ferner, da nur zwei willkürliche Functionen in das Lösungssystem 4) aufgenommen wurden, etwa

$$a_1 = l \quad b_1 = m \quad c_1 = n$$
$$A_1 = l_1 \quad B_1 = m_1 \quad C_1 = n_1$$
$$a_1' = a_2 = \ldots \quad = b_2 = b_2' = \ldots \quad = c_2 = c_2' = \ldots \quad = 0 \text{ ist.}$$

Die Gleichung $ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0$ stellt die zweite, zwischen den Constanten $\lambda\mu\nu\ldots$ bestehende allgemeine Relation vor.

4.

Eine jede Relation zwischen den Coordinaten xyz, die unabhängig ist von den Functionen φ und φ_1, bestimmt eine Beziehung zwischen den aufeinanderfolgenden Örtern des Planeten oder Cometen in seiner Bewegung um die Sonne, d. h. eine Eigenschaft seiner Bahn.

Eine solche Relation erhält man unmittelbar aus den Gleichungen 4) durch Elimination von φ und φ_1 aus denselben. Das Resultat dieser Elimination ist die Determinante

$$\begin{vmatrix} x-\lambda & l & l_1 \\ y-\mu & m & m_1 \\ z-\nu & n & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

Dieselbe zerfällt in die zwei Determinanten

$$\begin{vmatrix} x & l & l_1 \\ y & m & m_1 \\ z & n & n_1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \lambda & l & l \\ \mu & m & m_1 \\ \nu & n & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

von denen die zweite mit der oben aufgestellten D identisch und an und für sich $= 0$ ist. Es verbleibt daher als Eliminationsresultat

$$\begin{vmatrix} x & l & l_1 \\ y & m & m_1 \\ z & n & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

oder entwickelt

$$x(m_1 n - m n_1) + y(n_1 l - n l_1) + z(l_1 m - l m_1) = 0 \qquad 7)$$

Dies ist aber die Gleichung einer Ebene, die durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems geht, so dass man den Satz erhält:

Die Relation (5) $D = 0$ drückt aus, dass die Ebene der Bahn des Sternes durch den Mittelpunkt der Sonne geht.

Hieraus erhellt auch die Bedeutung der Grössen

$$m_1 n - m n_1 \quad n_1 l - n l_1 \quad l_1 m - l m_1$$

Dieselben sind den Componenten der Flächengeschwindigkeiten des Planeten proportional, so dass, wenn man diese, wie oben

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = c_3 \quad x\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt} = c_1 \quad x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} = c_2$$

setzt

$$m_1 n - m n_1 = \frac{c_1}{\vartheta} \quad n_1 l - n l_1 = \frac{c_2}{\vartheta} \quad l_1 m - l m_1 = \frac{c_3}{\vartheta} \qquad 7a)$$

ist, wo ϑ eine neue Constante vorstellt.

Sowie die Gleichung 5) die eben dargelegte geometrische Bedeutung hat, so hat wieder die Relation 6) eine gewisse physikalische Bedeutung.

Differenzirt man nämlich die Gleichungen 4) nach der Zeit, quadrirt sodann eine jede und addirt sie, so erhält man

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (l^2 + m^2 + n^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2$$

indem die doppelten Producte $\frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\varphi_1}{dt}$ wegen der Relation

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0$$

wegfallen. Bezeichnet man daher die lebendige Kraft des Sternes in seiner Bewegung um die Sonne mit T, so ist

$$T = \frac{1}{2}\left\{(l^2 + m^2 + n^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + (l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2\right\} \quad 8)$$

Aus den Gleichungen 4) folgen ferner durch nochmalige Differentiation nach der Zeit

$$\frac{d^2x}{dt^2} = l\frac{d^2\varphi}{dt^2} + l_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = n\frac{d^2\varphi}{dt^2} + n_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2}$$

und indem man diesen Gleichungen die Bedeutung beilegen kann, dass sie ausdrücken, dass die Bewegung des Planeten um die Sonne sich aus zweien zusammensetzt, von denen die eine durch die Function φ und ihre Derivierte nach der Zeit, die zweite in derselben Weise durch φ_1 characterisirt ist, erhält man den Satz, dass

die totale lebendige Kraft des Planeten gleich ist der Summe der lebendigen Kräfte seiner zwei componirenden Bewegungen.

Es hat auch dieser Satz sein Analogon in der Lehre von den Schwingungen, insofern auch hier jede einzelne Schwingung eines materiellen Punktes als aus vielen elementaren Schwingungen zusammengesetzt betrachtet wird, die lebendige Kraft des ganzen Systems von Punkten aber gleich ist der Summe der lebendigen Kräfte der einzelnen Elementarschwingungen.

Dieser Anschauung zufolge kann man die Grössen φ und φ_1 als allgemeine Coordinaten des betrachteten Sternes auffassen, insoferne durch sie die speciellen rechtwinkeligen Coordinaten xyz ohne Hinzufügung irgend welcher anderer Variablen sich aus-

drücken lassen. Nach Lagrange gelten aber für diese allgemeinen Coordinaten die Bewegungsgleichungen in der Form

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \frac{d\varphi}{dt}} + \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \frac{\partial P}{\partial \varphi}$$

wenn T die lebendige Kraft und P das Potential der einwirkenden Kraft vorstellt.

Mit dem eben erhaltenen Ausdrucke für die lebendige Kraft, nämlich

$$T = \frac{1}{2}\left\{(l^2+m^2+n^2)\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + (l_1^2+m_1^2+n_1^2)\left(\frac{d\varphi_1}{dt}\right)^2\right\}$$

erhält man aus denselben

$$(l^2+m^2+n^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{\partial P}{\partial \varphi} \quad (l_1^2+m_1^2+n_1^2)\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{\partial P}{\partial \varphi_1} \qquad 9)$$

zwei neue Gleichungen, die an Stelle der Gleichungen 2) treten.

Durch die Annahme von Lösungen, entsprechend den Gleichungen 4), kann die Integration der drei Differentialgleichungen 2) zurückgeführt werden auf die der zwei Differentialgleichungen 9).

5.

Durch directes Einsetzen des angenommenen Lösungssystems 4) in die Gleichungen 1) erhält man

$$l\frac{d^2\varphi}{dt^2} + l_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}(\lambda + l\varphi + l_1\varphi_1)$$
$$m\frac{d^2\varphi}{dt^2} + m_1\frac{d^2\psi_1}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}(\mu + m\varphi + m_1\varphi_1)$$
$$n\frac{d^2\varphi}{dt^2} + n_1\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}(\nu + n\varphi + n_1\varphi_1).$$

Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit

$$l\,m\,n \text{ und } l_1\,m_1\,n_1$$

und addirt, so wird mit Rücksicht auf 6)

$$(l^2+m^2+n^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}[(\lambda l+\mu m+\nu n)+(l^2+m^2+n^2)\varphi]$$
$$(l_1^2+m_1^2+n_1^2)\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}[(\lambda l_1+\mu m_1+\nu n_1)+(l_1^2+m_1^2+n_1^2)\varphi_1].$$

Vergleicht man ferner diese Gleichungen mit

$$(l^2+m^2+n^2)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}\cdot\frac{\partial r}{\partial \varphi}$$

$$(l_1^2+m_1^2+n_1^2)\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}\cdot\frac{\partial r}{\partial \varphi_1}$$

die die Gleichungen 9) ergeben, wenn man in denselben für P dessen Werth

$$P = \frac{k^2}{r}$$

substituirt, so findet man schliesslich

$$\begin{aligned} r\frac{\partial r}{\partial \varphi} &= (\lambda l+\mu m+\nu n)+(l^2+m^2+n^2)\varphi \\ r\frac{\partial r}{\partial \varphi_1} &= (\lambda l_1+\mu m_1+\nu n_1)+(l_1^2+m_1^2+n_1^2)\varphi_1 \end{aligned} \qquad 10)$$

Gleichungen, welche die beiden Functionen φ und φ_1 in ihrer Abhängigkeit vom Radius vector bestimmen.

Die beiden letzten Gleichungen lassen sich leicht integriren. Man erhält ein particuläres Integral derselben durch die Annahme, dass r eine lineare Function von φ sowohl, wie von φ_1 ist. Es ist gerade dieses particuläre Integral für das hier vorliegende Problem von Wichtigkeit. Indem man nämlich aus 4) sowohl φ als auch φ_1 in linearer Weise durch die $x\ y\ z$ ausdrücken kann, nämlich

$$\varphi = \frac{lx+my+nz-(\lambda l+\mu m+\nu n)}{l^2+m^2+n^2}$$

$$\varphi_1 = \frac{l_1x+m_1y+n_1z-(\lambda l_1+\mu m_1+\nu n_1)}{l_1^2+m_1^2+n_1^2}$$

ergibt sich, dass auch der Radius vector r eine lineare Function der rechtwinkeligen Coordinaten $x\ y\ z$ ist.

Es sei daher allgemein

$$r = p+\alpha x+\beta y+\gamma z \qquad 11)$$

gesetzt und nun die Aufgabe gegeben, die neuen Integrationsconstanten $p\ \alpha\ \beta\ \gamma$ zu bestimmen, d. h. durch die $\lambda\ \mu\ \nu\ \ldots$ auszudrücken.

Ersetzt man in dieser Gleichung, um vorerst die geometrische Bedeutung derselben aufzufinden, die Grösse r durch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

quadrirt sie sodann, so wird

$$(x^2 + y^2 + z^2) = (p + \alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \qquad 11a)$$

Diese Gleichung stellt eine neue Relation zwischen den Coordinaten $x\,y\,z$ dar, welche unabhängig ist von den beiden Functionen φ und φ_1, also für jeden beliebigen Werth derselben erfüllt werden muss. Da diese Beziehungsgleichung vom zweiten Grade ist, repräsentirt sie eine Fläche zweiten Grades. In Verbindung mit 7) spricht diese Gleichung daher den Satz aus:

> Die Bahnen der Planeten sind Kegelschnitte, d. i. Durchschnitte von Ebenen mit Flächen zweiten Grades.

Es wird aber in der analytischen Geometrie allgemein bewiesen, dass, wenn eine Fläche zweiten Grades etwa in dem Punkte $x_1 y_1 z_1$ einen Brennpunkt haben soll, die Gleichung derselben sich in der Form

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 =$$
$$= (Ax + By + Cz + D)(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1)$$

darstellen lassen muss. Dieselbe Form hat aber auch die obige Gleichung, wenn man

$$x_1 = y_1 = z_1 = 0$$
$$A = A_1 = \alpha \quad B = B_1 = \beta \quad C = C_1 = \gamma \quad D = D_1 = p$$

nimmt, so dass der Punkt $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ ein Brennpunkt der Fläche, somit auch eines jeden durch ihn gehenden ebenen Schnittes derselben ist; d. h.

> Die Bahnen der Planeten sind Kegelschnitte, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet.

Die Bestimmung der Coëfficienten $p\,\alpha\,\beta\,\gamma$ in 11) kann nun auf Grund der Gleichungen 10) erfolgen. Sie ergibt sich jedoch in einfacherer Form durch folgende Ausführungen.

Die Differentialgleichungen 1) unmittelbar in Bezug auf den Radius vector integrirt, liefern, wie oben gezeigt wurde, die Gleichung

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2k^2}{r} - \frac{c_1^2+c_2^2+c_3^2}{r^2} - h \qquad 12)$$

welche nach t differenzirt,

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^2} + \frac{c_1^2+c_2^2+c_3^2}{r^3} \qquad 12a)$$

gibt. Differenzirt man aber die Gleichung 11) zweimal nach t, nämlich

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \alpha\frac{d^2x}{dt^2} + \beta\frac{d^2y}{dt^2} + \gamma\frac{d^2z}{dt^2}$$

und ersetzt nun die Grössen $\frac{d^2x}{dt^2}\,\frac{d^2y}{dt^2}\,\frac{d^2z}{dt^2}$ durch ihre Werthe aus 1), so dass

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}(\alpha x + \beta y + \gamma z)$$

wird, sowie in dieser Gleichung wieder $\alpha x+\beta y+\gamma z$ durch die gleichwerthige Grösse $r-p$, so erhält man schliesslich

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{k^2}{r^3}(r-p) = -\frac{k^2}{r^2} + \frac{k^2p}{r^3}$$

woraus die Constante

$$p = \frac{c_1^2+c_2^2+c_3^2}{k^2} \qquad 13)$$

folgt.

Insoferne hierin $c_1\,c_2\,c_3$ die Componenten der Flächengeschwindigkeit des Planeten oder Cometen, bezogen auf das betrachtete Coordinatensystem, vorstellen, bezeichnet die Grösse

$$c_1^2+c_2^2+c_3^2$$

das Quadrat der resultirenden Flächengeschwindigkeit. Nennt man dieselbe C, so wird

$$c_1^2+c_2^2+c = C^2.$$

Es ist aber gemäss den Gleichungen 7 *a)*

$$c_1 = \vartheta(m_1 n - m n_1) \quad c_2 = \vartheta(n_1 l - n l_1) \quad c_3 = \vartheta(l_1 m - l m_1)$$

mithin

$$C^2 = \vartheta^2[(m_1 n - m n_1)^2 + (n_1 l - n l_1)^2 + (l_1 m - l m_1)^2]$$

oder nach dem schon oben erwähnten algebraischen Satze

$$C^2 = \vartheta^2(l^2 + m^2 + n^2)(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) - \vartheta^2(l l_1 + m m_1 + n n_1)^2$$

was mit Rücksicht auf die allgemein geltende Relation $l l_1 + m m_1 + n n_1 = 0$

$$C^2 = \vartheta^2(l^2 + m^2 + n^2)(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)$$

ferner

$$p = \frac{\vartheta^2}{k^2}(l^2 + m^2 + n^2)(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2)$$

gibt.

Multiplicirt man ferner die Gleichung 11) der Reihe nach mit

$$c_1^2 \quad c_2^2 \quad c_3^2$$

und eliminirt zufolge der Gleichung 7) der Bahnebene

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0$$

stets eine Variable, indem man etwa

$$c_1 x = -c_2 y - c_3 z$$

oder

$$c_1^2 x = -c_1 c_2 y - c_1 c_3 z$$

setzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned} c_1^2(r-p) &= -c_1 y(\alpha c_2 - \beta c_1) - c_1 z(\alpha c_3 - \gamma c_1) \\ c_2^2(r-p) &= -c_2 z(\beta c_3 - \gamma c_2) - c_2 x(\beta c_1 - \alpha c_2) \\ c_3^2(r-p) &= -c_3 x(\gamma c_1 - \alpha c_3) - c_3 y(\gamma c_2 - \beta c_3). \end{aligned}$$

Diese Gleichungen addirt, liefern

$$\begin{aligned} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(r-p) = x[\alpha(c_2^2 + c_3^2) - \beta c_1 c_2 - \gamma c_1 c_3] + \\ + y[\beta(c_3^2 + c_1^2) - \gamma c_2 c_3 - \alpha c_2 c_1] + z[\gamma(c_1^2 + c_2^2) - \alpha c_3 c_1 - \beta c_3 c_2]. \end{aligned}$$

Anderseits ist aber wegen $r - p = \alpha x + \beta y + \gamma z$, auch

$$\begin{aligned} (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)(r-p) = \alpha x(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + \beta y(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + \\ \gamma z(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2), \end{aligned}$$

so dass, wenn wir diese Gleichung mit der obigen Glied für Glied vergleichen, die Beziehungen folgen:

$$\begin{aligned}\alpha(c_2^2+c_3^2)-\beta c_1c_2-\gamma c_1c_3 &= \alpha(c_1^2+c_2^2+c_3^2)\\ \beta(c_3^2+c_1^2)-\gamma c_2c_3-\alpha c_2c_1 &= \beta(c_1^2+c_2^2+c_3^2)\\ \gamma(c_1^2+c_2^2)-\alpha c_3c_1-\beta c_3c_2 &= \gamma(c_1^2+c_2^2+c_3^2)\end{aligned}$$

aus denen jedoch zur Bestimmung der $\alpha\,\beta\,\gamma$ nur die eine Gleichung

$$\alpha c_1+\beta c_2+\gamma c_3=0 \qquad 13\alpha)$$

oder

$$\alpha(m_1n-mn_1)+\beta(n_1l-nl_1)+\gamma(l_1m-lm_1)=0$$

resultirt.

Die Determinantengleichung 5) liefert uns jedoch schon Werthe, die dieser Gleichung genügen; es sind dies die Grössen

$$\lambda \quad \mu \quad \nu.$$

Es kann daher bis auf einen constanten Factor, der mit L bezeichnet werden mag

$$\alpha=\frac{\lambda}{L} \qquad \beta=\frac{\mu}{L} \qquad \gamma=\frac{\nu}{L}$$

gesetzt werden, und würde nur noch erübrigen, die neu eingeführte Constante L zu bestimmen. Allein der eben abgeleiteten Gleichung kann man auch noch genügen, wenn man für $\alpha\beta\gamma$ die Werthe

$$\frac{l}{L} \quad \frac{m}{L} \quad \frac{n}{L}$$

oder auch

$$\frac{l_1}{L} \quad \frac{m_1}{L} \quad \frac{n_1}{L}$$

setzt, da der Determinantengleichung 5) zufolge ebenfalls

$$\begin{aligned}lc_1+mc_2+nc_3&=0\\ l_1c_1+m_1c_2+n_1c_3&=0\end{aligned}$$

ist. Um daher in ganz allgemeiner Weise die Rechnung durchzuführen, seien in der Gleichung 11) bis auf Weiteres die Constanten $\alpha\,\beta\,\gamma$ belassen und nur durch die noch zu bestimmende

Grösse L dividirt, so dass schliesslich

$$r = p + \frac{\alpha}{L}x + \frac{\beta}{L}y + \frac{\gamma}{L}z \qquad 11b)$$

gesetzt werden mag, wobei

$$p = \frac{C^2}{k^2} = \frac{\mathfrak{S}^2(l^2+m^2+n^2)(l_1^2+m_1^2+n_1^2)}{k^2}$$

ist, und für $\alpha\ \beta\ \gamma$ entweder

$$\lambda\ \mu\ \nu \quad \text{oder} \quad l\ m\ n \quad \text{oder} \quad l_1\ m_1\ n_1$$

substituirt werden können.

Um nun noch L zu berechnen, bilde man aus $11b)$ durch Differentiation nach der Zeit

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha}{L}\frac{dx}{dt} + \frac{\beta}{L}\frac{dy}{dt} + \frac{\gamma}{L}\frac{dz}{dt}$$

und mit diesem Werthe von $\frac{dr}{dt}$ wieder die Ausdrücke

$$(r-p)\frac{dx}{dt} - x\frac{dr}{dt} \quad (r-p)\frac{dy}{dt} - y\frac{dr}{dt} \quad (r-p)\frac{dz}{dt} - z\frac{dr}{dt}$$

welche denen für die Flächengeschwindigkeiten ganz analog sind und von denen auch bewiesen werden soll, dass sie, sowie diese constant sind. In der That findet man in der angegebenen Weise zunächst

$$(r-p)\frac{dx}{dt} - x\frac{dr}{dt} = \frac{\beta}{L}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right) - \frac{\gamma}{L}\left(x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right)$$

$$(r-p)\frac{dy}{dt} - y\frac{dr}{dt} = \frac{\gamma}{L}\left(z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt}\right) - \frac{\alpha}{L}\left(y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt}\right)$$

$$(r-p)\frac{dz}{dt} - z\frac{dr}{dt} = \frac{\alpha}{L}\left(x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt}\right) - \frac{\beta}{L}\left(z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt}\right)$$

und sohin

$$(r-p)\frac{dx}{dt} - x\frac{dr}{dt} = \frac{1}{L}(\beta c_3 - \gamma c_2)$$

$$(r-p)\frac{dy}{dt} - y\frac{dr}{dt} = \frac{1}{L}(\gamma c_1 - \alpha c_3)$$

$$(r-p)\frac{dz}{dt} - z\frac{dr}{dt} = \frac{1}{L}(\alpha c_2 - \beta c_1)$$

Quadrirt man diese Gleichungen und addirt sie sodann, so erhält man, indem man jede Seite derselben getrennt behandelt, vorerst als Ausdruck auf der linken Seite:

$$(r-p)^2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-$$
$$-2(r-p)\frac{dr}{dt}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}+z\frac{dz}{dt}\right)+r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

oder

$$(r-p)^2\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]-2(r-p)r\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+$$
$$+r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

Die Substitution

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2=\frac{C^2}{r^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

gibt demselben ferner die Form:

$$(r-p)^2\frac{C^2}{r^2}+(r-p)^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2-2(r-p)r\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

oder

$$(r-p)^2\frac{C^2}{r^2}+p^2\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=C^2-2p\frac{C^2}{r}+p^2\left(\frac{C^2}{r^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2\right).$$

Setzt man noch

$$\frac{C^2}{r^2}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=\frac{2k^2}{r}-h,$$

welche Gleichung sich aus der Verbindung von *a)* und *c)* ergibt, so wird schliesslich der Ausdruck gleich

$$C^2-2p\frac{C^2}{r}+\frac{2k^2p^2}{r}-p^2h=C^2\left(1-\frac{C^2h}{k^4}\right)$$

mit Rücksicht auf den schon bekannten Werth von $p=\frac{C^2}{k^2}$. Dagegen wird der Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung

$$\frac{1}{L^2}((\beta c_3-\gamma c_2)^2+(\gamma c_1-\alpha c_3)^2+(\alpha c_2-\beta c_1)^2)=$$
$$=\frac{1}{L^2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(c_1^2+c_2^2+c_3^2)-(\alpha c_1+\beta c_2+\gamma c_3)^2$$

oder, wegen $\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 0$, und wenn man ferner, analog

$$c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = C^2$$

auch

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = A^2$$

setzt, gleich

$$\frac{A^2 C^2}{L^2}$$

Es resultirt daher aus den obigen drei Gleichungen durch Quadriren und Addiren die neue Gleichung

$$C^2\left(1 - \frac{hC^2}{k^2}\right) = \frac{A^2 C^2}{L^2}$$

oder

$$1 - \frac{hC^2}{k^2} = \frac{A^2}{L^2}. \qquad 13b)$$

6.

Die nunmehr bekannten Werthe der Constanten in der Gleichung 11) der Fläche

$$F = r - p - \frac{\alpha}{L}x - \frac{\beta}{L}y - \frac{\gamma}{L}z = 0$$

ermöglichen nun auch Axen und Excentricität des Kegelschnittes aufzufinden, welcher die Bahn des Planeten oder Cometen um die Sonne bildet.

Zu diesem Zwecke mögen vorerst die Coordinaten des Mittelpunktes der Fläche gefunden werden. Dieselben ergeben sich, wie bekannt, durch Auflösung der drei Gleichungen

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Dieselben lauten entwickelt

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x(\alpha^2 - L^2) + y\alpha\beta + z\alpha\gamma + p\alpha L = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x\alpha\beta + y(\beta^2 - L^2) + z\beta\gamma + p\beta L = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x\alpha\gamma + y\beta\gamma + z(\gamma^2 - L^2) + p\gamma L = 0.$$

und geben für die Coordinaten des Mittelpunktes die Werthe

$$x_1 = -\frac{\alpha pL}{A^2-L^2} \quad y_1 = -\frac{\beta pL}{A^2-L^2} \quad z_1 = -\frac{\gamma pL}{A^2-L^2} \quad 14)$$

für welche man mit Rücksicht auf 13 *b)* und den bekannten Werth von p auch schreiben kann:

$$x_1 = \frac{\alpha k^2}{hL} \quad y_1 = \frac{\beta k^2}{hL} \quad z_1 = \frac{\gamma k^2}{hL} \qquad 14a)$$

Aus ihnen folgt zunächst, dass für $h = 0$, die Coordinaten unendlich gross werden, der Mittelpunkt der Fläche also ins Unendliche rückt; d. h.:

Die Bedingung $h = 0$ ist das Kennzeichen einer parabolischen Bahn.

Die eben gefundenen Ausdrücke für die Mittelpunktscoordinaten in die Gleichung der Bahnebene 7) substituirt, erfüllen diese identisch, zufolge der Gleichung

$$\alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = 0.$$

Es liegt also der Mittelpunkt der Fläche in der Ebene der Bahn.

Jene Gerade ferner, welche durch diesen Punkt, sowie durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems, als einen Brennpunkt der Fläche geht, ist somit auch vollständig in der Bahnebene enthalten und gibt daher die Richtung an, in welcher die grosse Axe des Kegelschnittes liegt, in welchem die Bewegung des Planeten oder Cometen um die Sonne erfolgt. Die Länge dieser Geraden von ihren beiden Durchschnittspunkten mit der Fläche bis zum Mittelpunkte derselben gibt die Länge der halben grossen Axe a dieses Kegelschnittes; die Entfernung dieser beiden Punkte vom Brennpunkte, d. i. dem Coordinatenanfangspunkte gibt die Perihel- und Apheldistanz, q und q' und schliesslich die Entfernung des Brennpunktes vom Mittelpunkte der Fläche die geometrische Excentricität, ae.

Die Gleichung dieser Geraden wird dargestellt durch

$$\alpha y - \beta x = 0 \quad \beta z - \gamma y = 0 \quad \gamma x - \alpha z = 0$$

und hieraus findet man als die Coordinaten der beiden Durch-

schnittspunkte mit der Fläche die Werthe:

$$x_{,,} = \alpha \frac{k^2(A \pm L)}{hLA} \qquad y_{,,} = \beta \frac{k^2(A \pm L)}{hLA} \qquad z_{,,} = \gamma \frac{k^2(A \pm L)}{hLA}.$$

Dieselben liefern in der eben angegebenen Weise für a als die Entfernung dieser beiden Punkte vom Mittelpunkte der Fläche

$$a = \sqrt{(x_{,,} - x_{,})^2 + (y_{,,} - y_{,})^2 + (z_{,,} - z_{,})^2} = \frac{k^2}{h}$$

ferner die Perihel- und Apheldistanz

$$q(q') = \sqrt{x_{,,}^2 + y_{,,}^2 + z_{,,}^2} = \frac{k^2}{h} \cdot \frac{A \pm L}{A}$$

und die geometrische Excentricität

$$ae = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \frac{k^2}{h} \cdot \frac{A}{L}$$

woraus mit Rücksicht auf den Werth von $a = \frac{k^2}{h}$ diese selbst, nämlich

$$e = \frac{A}{L} = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}{L}$$

folgt.

Durch Substitution dieser Werthe in die Gleichung 13) findet man ausserdem

$$p = \frac{C^2}{k^2} = \frac{k^2}{h}\left(1 - \frac{A^2}{L^2}\right) = a(1 - e^2)$$

und bezeichnet man mit b die zweite Axe des Kegelschnittes (im Falle derselbe eine Ellipse ist), so dass πab ihr Flächeninhalt ist, ferner mit τ die Umlaufszeit des Planeten, so muss nach den Flächensätzen, welche die mit der Zeit gleichmässig erfolgende Bewegung des Radius vector ausdrücken:

$$\frac{\pi ab}{\tau} = \frac{\pi a^{3/2}\sqrt{p}}{\tau}$$

gleich sein der Flächengeschwindigkeit C. Setzt man für letztere Grösse ihren eben gefundenen Werth ein, nämlich

$$C = k\sqrt{a(1 - e^2)} = k\sqrt{p}$$

so ergibt sich

$$\frac{\pi ab}{\tau} = C = k\sqrt{p}$$

oder

$$\frac{\pi a^{3/2}}{\tau} = k$$

eine Gleichung, welche das dritte Kepler'sche Gesetz ausspricht. Mit diesem Werthe von k findet man wieder

$$p = \frac{C^2}{k^2} = \frac{C^2\tau^2}{a^3\pi^2} = a(1-e^2)$$

oder

$$\frac{C^2\tau^2}{\pi^2} = a^4(1-e^2)$$

und für C^2 dessen Werth $\vartheta^2(l^2+m^2+n^2)(l_1^2+m_1^2+n_1^2)$ eingesetzt, endlich

$$\frac{\vartheta^2\tau^2}{\pi^2}(l^2+m^2+n^2)(l_1^2+m_1^2+n_1^2) = a^4(1-e^2)$$

In dieser Gleichung ist ϑ eine Integrationsconstante, über die wir nach Belieben verfügen können. Es soll nun dieselbe so bestimmt werden, dass

$$\frac{\vartheta^2\tau^2}{\pi^2} = 1$$

dann wird einerseits

$$\vartheta = \frac{\pi}{\tau}$$

anderseits

$$(l^2+m^2+n^2)(l_1^2+m_1^2+n_1^2) = a^4(1-e^2)$$

und aus der ersten Gleichung folgt, dass bei dieser Wahl der Constanten ϑ dieselbe jene Grösse repräsentirt, die in der theoretischen Astronomie den Namen „mittlere tägliche Bewegung" führt und gewöhnlich mit μ bezeichnet wird.

7.

Galten die bisherigen Entwickelungen mehr der Aufstellung der allgemeinen zwischen den Constanten $\lambda\mu\nu\ldots$ des angenommenen Lösungssystems 4) bestehenden Relationen und

den sich hieraus ergebenden allgemeinen Eigenschaften der Bahnen der Planeten oder Cometen, so sollen im Folgenden noch jene Relationen entwickelt, die von der speciellen Wahl der Functionen φ und φ_1 abhängen, und die Methoden angegeben werden, durch welche man bei einer speciellen Form dieser Functionen die Constanten $\lambda\,\mu\,\nu\,\ldots$ berechnen kann.

Zu diesem Zwecke gehen wir von den Gleichungen für die Flächengeschwindigkeiten aus, nämlich:

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = c_3$$

$$z\frac{dy}{dt} - y\frac{dz}{dt} = c_1$$

$$x\frac{dz}{dt} - z\frac{dx}{dt} = c_2$$

und bemerken zu denselben, dass sie nicht von einander unabhängig sind. Denn nicht nur, dass aus den beiden ersten dieser Gleichungen unmittelbar schon die dritte sich ergibt, bestehen anderseits zwischen den Constanten in denselben gewisse Relationen, nämlich insbesondere die Determinantengleichung 5). Im Wesentlichen stellen daher diese drei Gleichungen nur eine einzige vor als Beziehungsgleichung zwischen den Geschwindigkeitscomponenten $\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{dt}\,\frac{dz}{dt}$. Hiemit ist die Willkürlichkeit in der Wahl der beiden Functionen theoretisch bewiesen, mit der Beschränkung jedoch, dass, wenn die eine derselben beliebig gewählt wird, die andere hiedurch schon mitbestimmt erscheint, indem die beiden Differentialgleichungen 10) nicht von einander unabhängig sind, weil die Constanten in denselben nicht von einander unabhängig sind.

Um nun einige specielle Fälle zu entwickeln, seien

1) die Functionen φ und φ_1 durch einen Hilfswinkel ausgedrückt, so dass

$$\varphi = \cos\psi \quad \varphi_1 = \sin\psi$$

gesetzt werde. Dann ist nach 4)

$$\frac{dx}{dt} = -l\sin\psi\,\frac{d\psi}{dt} + l_1\cos\psi\,\frac{d\psi}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -m\sin\psi\,\frac{d\psi}{dt} + m_1\cos\psi\,\frac{d\psi}{dt}$$

und

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\,|(l_1\mu - \lambda m_1)\cos\psi - (l\mu - \lambda m)\sin\psi + \\ + (l_1 m - l m_1)| = c_3$$

oder wegen $c_3 = \vartheta(l_1 m - l m_1)$ und durch $l_1 m - l m_1$ dividirt

$$\frac{d\psi}{dt}\left[\frac{l_1\mu - \lambda m_1}{l_1 m - l m_1}\cos\psi - \frac{l\mu - \lambda m}{l_1 m - l m_1}\sin\psi + 1\right] = \vartheta$$

als die zur Bestimmung des Hilfswinkels ψ dienende Differentialgleichung. Wenn auch jede der drei Gleichungen der Flächengeschwindigkeiten eine neue Gleichung zur Bestimmung von ψ liefert, so sind wegen $5c)$ doch alle diese untereinander vollkommen gleich.

Man kann nun durch geeignete specielle Wahl der Constanten $\lambda\,\mu\,\nu\,\ldots$ diese Differentialgleichung zur leichteren Integration vereinfachen.

A. Es werde vorerst zu diesem Zwecke

$$l\mu - \lambda m = 0$$

angenommen; dann muss wegen $5c)$ auch

$$m\nu - \mu n = 0 \quad n\lambda - \nu l = 0$$

mit anderen Worten

$$\lambda : \mu : \nu = l : m : n$$

sein.

Die Differentialgleichung selbst übergeht dann, wenn wir noch, wie oben

$$\frac{l_1\mu - \lambda m_1}{l_1 m - l m_1} = -\eta$$

setzen in

$$\frac{d\psi}{dt}\left[1 - \eta\cos\psi\right] = \vartheta$$

und bezüglich t integrirt

$$\psi - \eta\sin\psi = \vartheta(t + t_0)$$

wo t_0 eine neue Integrationsconstante bedeutet. Die Grösse $\vartheta(t+t_0)$ stellt aber nichts anderes vor als die mittlere Anomalie von der bestimmten Epoche $t = t_0$ an gerechnet; und bezeichnet man dieselbe mit M, so wird schliesslich

$$\psi - \eta \sin\psi = M$$

was die Definitionsgleichung der excentrischen Anomalie ist, d. h. „Der speciellen Wahl der Functionen φ und φ_1 in der Form

$$\varphi = \cos\psi \quad \varphi_1 = \sin\psi$$

mit der speciellen Relation zwischen den Constanten, als

$$\lambda : \mu : \nu = l : m : n$$

entspricht die Darstellung der rechtwinkeligen Coordinaten $x\ y\ z$ durch die excentrische Anomalie."

B. Es werde ferner zur Vereinfachung der Gleichung

$$l_1\mu - \lambda m_1 = 0$$

angenommen; dann ergibt sich hieraus in analoger Weise

$$\lambda : \mu : \nu = l_1 : m_1 : n_1$$

und die Differentialgleichung selbst wird

$$\psi - \eta_1 \cos\psi = M.$$

„Dieser Fall würde also die Darstellung der rechtwinkeligen Coordinaten durch einen Hilfswinkel liefern, für welchen ein dem Kepler'schen Problem analoges Problem in der Form gegeben ist

$$\psi - \eta_1 \cos\psi = M.$$

2. Man nehme für die Functionen φ und φ_1 die Formen

$$\varphi = r\cos\psi \quad \varphi_1 = r\sin\psi$$

an, wo r der Radius vector ist. Es wird dann

$$\begin{aligned} y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} &= \mu\frac{dr}{dt}(l\cos\psi + l_1\sin\psi) + \mu r\frac{d\psi}{dt}(l_1\cos\psi - l\sin\psi) \\ &\quad - \lambda\frac{dr}{dt}(m\cos\psi + m_1\sin\psi) - \lambda r\frac{d\psi}{dt}(m_1\cos\psi - m\sin\psi) \\ &\quad + (l_1 m - l m_1)r^2\frac{d\psi}{dt} \\ &= c_3 = \vartheta(l_1 m - l m_1) \end{aligned}$$

als die bezüglich ψ zu integrirende Differentialgleichung. Dieselbe

nimmt unter der Annahme

$$\lambda = \mu = \nu = 0$$

die weit einfachere Form

$$y\frac{dx}{dt} - x\frac{dy}{dt} = r^2\frac{d\psi}{dt}(l_1m - lm_1) = \vartheta(l_1m - lm_1)$$

oder

$$r^2\frac{d\psi}{dt} = \vartheta$$

und

$$r^2 d\psi = \vartheta dt$$

an, durch welche Gleichung die Variable ψ als die wahre Anomalie definirt ist.

8.

Für den ersten der eben behandelten drei Fälle sei der Hilfswinkel $\psi = E$ gemäss der allgemein angenommenen Bezeichnungsweise gesetzt. Die Gleichungen

$$x = \lambda + l\cos E + l_1\sin E$$
$$y = \mu + m\cos E + m_1\sin E$$
$$z = \nu + n\cos E + n_1\sin E$$
$$E - \eta\sin E = M$$

und

$$\lambda : \mu : \nu = l : m : n$$

sind dann die vollständigen Integrale der Differentialgleichungen 1) oder 2).

Ausserdem bestehen zwischen den Constanten noch die Relationen

$$\lambda(m_1n - mn_1) + \mu(n_1l - nl_1) + \nu(l_1m - lm_1) = 0$$

und

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0.$$

Eine Reihe anderer Beziehungen liefert ferner ein Verfahren, welches demjenigen analog ist, das in der theoretischen Physik zur Bestimmung der Constanten in den Lösungen einer partiellen Differentialgleichung eingeschlagen wird.

Aus der Definitionsgleichung der excentrischen Anomalie der sogenannten Kepler'schen Gleichung folgt, dass für

$$M = 0° \text{ oder } = 180°$$

auch

$$E = 0° \text{ oder } = 180°$$

wird. Indem man nun diese beiden speciellen Werthe von E in die Gleichungen für $x\,y\,z$ substituirt, erhält man

$$x = \lambda \pm l$$
$$y = \mu \pm m$$
$$z = \nu \pm n$$

und stellen diese Werthe, entsprechend den Annahmen $M = 0$ und $= 180°$ die rechtwinkeligen Coordinaten des Planeten in seinem Perihel ($M = 0°$) und im Aphel ($M = 180°$) vor. Das arithmetische Mittel aus ihnen, nämlich die Grössen

$$\lambda \quad \mu \quad \nu$$

sind sohin die Coordinaten des Mittelpunktes der Ellipse. Diese Coordinaten sind aber oben gefunden worden

$$x_1 = \frac{\alpha k^2}{hL} = \alpha\frac{a}{L} \quad y_1 = \beta\frac{k^2}{hL} = \beta\frac{a}{L} \quad z_1 = \gamma\frac{k^2}{hL} = \gamma\frac{a}{L}$$

$$x_{,,} = \frac{\alpha a}{L}\frac{A \pm L}{A} \quad y_{,,} = \frac{\beta\alpha}{L}\frac{A \pm L}{A} \quad z_{,,} = \gamma\frac{a}{L}\frac{A \pm L}{A}$$

und muss daher zunächst

$$\frac{\alpha a}{L} = \lambda \quad \frac{\beta a}{L} = \mu \quad \gamma\frac{a}{L} = \nu$$

sein. Diesen Gleichungen können wir nur genügen, indem wir

$$\alpha = \lambda \quad \beta = \mu \quad \gamma = \nu$$
$$\frac{a}{L} = 1 \quad a = L$$

setzen. Hiemit werden wieder die Grössen

$$x_{,,} = \lambda(1 \pm \frac{a}{A}) \quad y_{,,} = \mu(1 \pm \frac{a}{A}) \quad z = \nu(1 \pm \frac{a}{A}).$$

Es ist aber

$$\frac{a}{A} = \frac{L}{A} = \frac{1}{e}$$

und somit

$$A = \sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} = \sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2} = ae,$$

sowie

$x_{,,} = \lambda(1 \pm {}^1/e)$ $y_{,,} = \mu(1 \pm {}^1/e)$ $z_{,,} = \nu(1 \pm {}^1/e)$- Gleichungen,

welche mit

$$x_{,,} = \lambda \pm l \quad y_{,,} = \mu \pm m \quad z_{,,} = \nu \pm n$$

verglichen

$$\lambda = \pm el \quad \mu = \pm em \quad \nu = \pm en$$

geben. Hiemit ist auch die Bedingung

$$\lambda : \mu : \nu = l : m : n$$

erfüllt und ergibt sich ferner die Constante η in der Kepler'schen Gleichung

$$-\eta = \frac{l_1\mu - \lambda m_1}{l_1 m - l m_1} = \frac{\pm l_1 em \mp lem_1}{l_1 m - l m_1} = \pm e,$$

welchem zufolge nur

$$\lambda = -le \quad \mu = -me \quad \nu = -ne$$

anzunehmen ist.

Da endlich

$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = a^2e^2$$

ist, wird

$$l^2+m^2+n^2 = a^2$$

und wegen

$$(l+m^2+n^2)\,(l_1^2+m_1^2+n_1^2) = a^4(1-e^2)$$

noch

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2 = a^2(1-e^2).$$

Diese Werthe der Constanten in die Gleichung 11) substituirt, geben derselben die Form

$$r-p = \frac{\alpha}{L}x + \frac{\beta}{L}y + \frac{\gamma}{L}z$$

$$r-a(1-e^2) = \frac{\lambda}{a}x + \frac{\mu}{a}y + \frac{\nu}{a}z,$$

aus welcher, wenn man noch für xyz ihre Werthe einsetzt und hiebei berücksichtigt, dass, da

$$l:m:n = \lambda:\mu:\nu \text{ und } ll_1+mm_1+nn_1 = 0$$

auch

$$\lambda l_1+\mu m_1+\nu n_1 = 0 \text{ ist}$$

$$r-a(1-e^2) = \frac{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}{a}\frac{}{} + \frac{\lambda l+\mu m+\nu n}{a}\cos E$$

oder

$$r-a(1-e^2) = ae^2-ae\cos E$$

d. h.

$$r = a-ae\cos E \quad \text{und} \quad \cos E = \frac{a-r}{ae}$$

folgt.

Sei weiters i die Neigung der Bahnebene des Planeten oder Cometen gegen die XY-Ebene des betrachteten Coordinatensystems und Ω die Länge des aufsteigenden Knotens derselben, so lässt sich die Gleichung der Bahnebene noch schreiben

$$x\sin i\sin\Omega - y\sin i\cos\Omega + z\cos i = 0$$

und liefert so drei weitere Gleichungen zur Bestimmung der Constanten $\lambda\ \mu\ \nu\ \ldots$ nämlich

$$\begin{aligned} m_1n-mn_1 &= -a^2\sqrt{1-e^2}\sin i.\sin\Omega \\ n_1l-nl_1 &= \quad a^2\sqrt{1-e^2}\sin i\cos\Omega \\ l_1m-lm_1 &= -a^2\sqrt{1-e^2}\cos i \end{aligned}$$

Analog gestaltet sich die Rechnung bezüglich der Darstellung der rechtwinkeligen Coordinaten durch den Hilfswinkel ψ für den zweiten der oben behandelten speciellen Fälle. Wir wählen für denselben die Bezeichnung E_1. Wenn man von den, zufolge der Gleichung

$$E_1-\eta_1\cos E_1 = M$$

einander entsprechenden Werthen

$$\begin{aligned} M &= 90°, = 270° \\ E &= 90°, = 270° \end{aligned}$$

ausgeht, findet man die Relationen

$$\lambda = el_1 \quad \mu = em_1 \quad \nu = en_1$$
$$\lambda^2+\mu^2+\nu^2 = a^2e^2$$
$$l_1^2+m_1^2+n_1^2 = a^2$$
$$l^2+m^2+n^2 = a^2(1-e^2)$$

und durch Substitution in die Gleichung der Fläche

$$\sin E_1 = \frac{a-r}{ae}$$

woraus

$$E_1 = E \pm 90$$

folgt.

Führt man endlich den als wahre Anomalie definirten Winkel ein, bezeichnet denselben mit v, so hat man

$$x = r(l\cos v + l_1 \sin v)$$
$$y = r(m\cos v + m_1 \sin v)$$
$$z = r(n\cos v + n_1 \sin v)$$

als Integrale der Differentialgleichungen 1) oder 2).

Im Perihel ist die wahre Anomalie $= 0$, im Aphel $= 180°$ der Radius vector in diesen beiden Fällen

$$r = (1-e)a \quad \text{und} \quad r = (1+e)a$$

mithin sind

$$x_{,,} = al(1-e) \quad y_{,,} = am(1-e) \quad z_{,,} = an(1-e)$$

die rechtwinkligen Coordinaten des Planeten im Perihel, und

$$x_{,,} = -al(1+e) \quad y_{,,} = -am(1+e) \quad z_{,,} = -am(1+e)$$

im Aphel, sowie deren arithmetisches Mittel

$$x_{,} = -ael \quad y_{,} = -aem \quad z_{,} = -aen$$

die Mittelpunktscoordinaten. Diese Werthe der Coordinaten, verglichen mit den oben allgemein abgeleiteten, liefern die Gleichungen

$$\frac{\alpha}{L} = -el \qquad \frac{\beta}{L} = -em \qquad \frac{\gamma}{L} = -en$$

welche quadrirt und addirt mit Beziehung auf

$$\frac{A}{L} = \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}}{L} = e \quad l^2+m^2+n^2 = 1$$

geben. In derselben Weise zeigt man auch, dass

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2 = 1$$

ist, so wie dass

$$\begin{aligned} m_1 n - m n_1 &= -\sin i \sin \Omega \\ n_1 l - n l_1 &= \sin i \cos \Omega \\ l_1 m - l m_1 &= -\cos i \end{aligned}$$

Durch Substitution der Werthe für $\frac{\alpha}{L}\frac{\beta}{L}\frac{\gamma}{L}$, sowie derjenigen für $x\,y\,z$ in die Gleichung 11)

$$r - p = \frac{\alpha}{L}x + \frac{\beta}{L}y + \frac{\gamma}{L}z$$

übergeht diese in

$$\begin{aligned} r - p = elr(l\cos v + l_1 \sin v) - emr(m\cos v + m_1 \sin v) - \\ - enr(n\cos v + n_1 \sin v) \end{aligned}$$

oder

$$r - p = -er\cos v(l^2+m^2+n^2) = -er\cos v$$

woraus

$$r = \frac{p}{1+e\cos v}$$

sich ergibt, als Beziehungsgleichung zwischen dem Radius vector und der wahren Anomalie.

9.

Beschränken wir uns, für die weitere Rechnung auf die Darstellung der rechtwinkeligen Coordinaten durch die excentrische und wahre Anomalie, bezeichnen die Constanten für die erstere Darstellung, wie bisher mit $\lambda\,\mu\,\nu\ldots$, die Constanten für die zweite zur Unterscheidung von diesen mit

$$l_\nu\, m_\nu\, n_\nu \quad \text{und} \quad l'_\nu\, m'_\nu\, n'_\nu$$

so haben wir zur Bestimmung der letzteren die Gleichungen

$$\begin{aligned} l_v l'_v + m_v m'_v + n_v n'_v &= 0 \\ l_v^2 + m_v^2 + n_v^2 &= 1 \qquad \alpha) \\ l_v'^2 + m_v'^2 + n_v'^2 &= 1 \\ m'_v n_v - m_v n'_v &= -\sin i \sin \Omega \\ n'_v l_v - n_v l'_v &= \sin i \cos \Omega \qquad \beta) \\ l'_v m_v - l_v m'_v &= -\cos i \end{aligned}$$

zur Bestimmung der ersteren dagegen

$$\begin{aligned} l l_1 + m m_1 + n n_1 &= 0 \\ l_1^2 + m^2 + n^2 &= a^2 \qquad \alpha') \\ l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= a^2(1-e^2) \\ m_1 n - m n_1 &= -a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i \sin \Omega \\ n_1 l - n l_1 &= a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i \cos \Omega \qquad \beta') \\ l_1 m - l m_1 &= -a^2 \sqrt{1-e^2} \cos i \\ \lambda = -el \quad \mu = -em \quad \nu &= -en \qquad \gamma') \end{aligned}$$

Schon ein blosser Vergleich der beiden Gleichungssysteme mit einander, insbesondere aber der Gleichungen $\alpha)$ und $\beta)$ mit $\alpha')$ $\beta')$ zeigt, dass sich die Constanten $l\ m\ n\ l_1\ m_1\ n_1$ aus den $l_v\ m_v\ n_v\ l'_v\ m'_v\ n'_v$ in einfacher Weise berechnen lassen, indem

$$\begin{aligned} l &= a l_v \qquad m = a m_v \qquad n = a n_v \\ l_1 &= a\sqrt{1-e^2}\, l'_v \quad m_1 = a\sqrt{1-e^2}\, m'_v \quad n_1 = a\sqrt{1-e^2}\, n'_v \end{aligned}$$

gesetzt werden kann. Es genügt daher, die Grössen $l_v m_v n_v l'_v m'_v n'_v$ zu berechnen, die Constanten $l\ m\ n \ldots$ ergeben sich aus denselben dann durch Multiplication mit a, beziehungsweise $a\sqrt{1-e^2}$.

Allein auch die Auflösung der Gleichungen $\alpha)$ und $\beta)$ in Bezug auf die Unbekannten $l_v\ m_v \ldots$ fällt nicht schwer. Hiebei ist jedoch vor der Auflösung Folgendes zu bemerken: Die Zahl der zu bestimmenden Unbekannten in diesen Gleichungen stimmt nur scheinbar mit der Zahl dieser selbst überein; vielmehr sind die Gleichungen wegen der allgemein giltigen Beziehung

$$\begin{aligned} &(m_1 n - m n_1)^2 + (n_1 l - n l_1)^2 + (l_1 m - l m_1)^2 = \\ &= (l^2 + m^2 + n^2)(l_1^2 + m_1^2 + n_1^2) - (l l_1 + m m_1 + n n_1)^2 \end{aligned}$$

nicht von einander unabhängig, und die Zahl der Unbekannten

daher grösser als die Zahl der zur Bestimmung derselben dienenden Gleichungen. Es müssen demnach die allgemeinsten Auflösungen derselben eine willkürliche Constante enthalten.

Um nun zunächst ein particuläres Auflösungssystem der Gleichungen zu erhalten, werde

$$l_\nu = \pm \cos\Omega \quad m_\nu = \pm \sin\Omega \quad n_\nu = 0$$

gesetzt, dann ist

$$l_\nu^2 + m_\nu^2 + n_\nu^2 = 1$$

ferner

$$l'_\nu = \pm \sin\Omega \cos i \quad m'_\nu = \pm \cos\Omega \cos i \quad n'_\nu = \pm \sin i$$

um die Gleichung

$$l_\nu'^2 + m_\nu'^2 + n_\nu'^2 = 1$$

zu erfüllen. Die Gleichungen β) bestimmen dann die Vorzeichen der Grössen und man findet

$$\begin{array}{lll} l_\nu = \cos\Omega & m_\nu = \sin\Omega & n_\nu = 0 \\ l'_\nu = -\sin\Omega \cos i & m'_\nu = \cos\Omega \cos i & n'_\nu = \sin i \end{array} \qquad \varepsilon)$$

Aus diesen speciellen Werthen der Unbekannten, die die Gleichungen α) und β) befriedigen, ergeben sich die allgemeineren in folgender Weise:

Bezeichnet man mit w die neu einzuführende Constante, so zeigt sich, dass auch die Werthe, die aus den obigen speciellen in der Form

$$\begin{array}{c} (l_\nu) = l'_\nu \sin w + l_\nu \cos w \quad (m_\nu) = m'_\nu \sin w + m_\nu \cos w \\ (n_\nu) = n'_\nu \sin w \\ (l'_\nu) = l'_\nu \cos w - l_\nu \sin w \quad (m'_\nu) = m'_\nu \cos w - m_\nu \sin w \\ (n'_\nu) = n'_\nu \cos w \end{array} \qquad \zeta)$$

zusammengesetzt sind, den Gleichungen α) und β) genügen, wenn nur die $l, l'_\nu \ldots$ denselben genügen.

Die Grössen $(l_\nu)(l'_\nu)\ldots$ sind daher als die allgemeinsten Auflösungen von α) und β) zu bezeichnen, und zwar wird

$$\begin{array}{l} (l_\nu) = -\sin\Omega \cos i \sin w + \cos\Omega \cos w \\ (l'_\nu) = -\sin\Omega \cos i \cos w - \cos\Omega \sin w \\ (m_\nu) = \cos\Omega \cos i \sin w + \sin\Omega \cos w \end{array} \qquad \vartheta)$$

$$(m'_v) = \cos\Omega\cos i\cos w - \sin\Omega\sin w$$
$$(n_v) = \sin i\sin w$$
$$(n'_v) = \sin i\cos w$$

Durch Einführung von Hilfswinkeln, nämlich

$$\operatorname{tg}\Omega\cos i = \operatorname{tg}\Phi$$
$$\operatorname{cotg}\Omega\cos i = \operatorname{ctg}\Phi'$$

erhält man noch

$$(l_v) = \frac{\cos\Omega}{\cos\Phi}\cos(w+\Phi) \qquad (l'_v) = -\frac{\cos\Omega}{\cos\Phi}\sin(w+\Phi)$$
$$(m_v) = \frac{\sin\Omega}{\sin\Phi'}\sin(w+\Phi') \qquad (m'_v) = \frac{\sin\Omega}{\sin\Phi'}\cos(w+\Phi') \qquad \text{9')}$$

Das Coordinatensystem, auf welches hiebei die Grössen l_v.. und mit ihnen die Coordinaten $x\,y\,z$ bezogen erscheinen, ist, sofern auch Ω und i auf dasselbe bezogen sind, das allgemeine, welches allen vorhergegangenen Entwickelungen zu Grunde lag. Jede Specialisirung desselben ergibt daher eine Darstellung der rechtwinkeligen Coordinaten in Bezug auf dies specielle Coordinatensystem. Ehe wir jedoch an diese Specialisirung gehen, mag vorerst die Bedeutung der Constanten w näher erläutert werden.

Die Gleichungen ζ), durch welche die speciellen Werthe l_v... mit den allgemeinen (l_v).... verbunden sind, kommen einer Coordinatentransformation gleich und zwar in der Weise, dass, wenn man die Grössen

$$l_v \text{ und } l'_v \text{ oder } m_v \text{ und } m'_v \text{ oder } n_v = 0 \text{ und } n'_v$$

als die rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes, bezogen auf ein Coordinatensystem in irgend einer Ebene betrachtet, die Grössen

$$(l'_v) \text{ und } (l'_v) \text{ bez. } (m_v) \text{ und } (m'_v) \text{ oder } (n_v) \text{ und } (n'_v)$$

die rechtwinkeligen Coordinaten desselben Punktes, bezogen auf ein Coordinatensystem in derselben Ebene vorstellen, dessen Coordinatenaxen aber gegen die ursprünglichen um den Winkel w verdreht sind. Man kann also in dem gegebenen ursprünglichen Coordinatensystem die Axen desselben in ihren Ebenen um beliebige Winkel drehen. Die Wirkung einer solchen Drehung

auf die Werthe der Constanten $l_v \ldots$ ist einzig die, dass an Stelle der Formeln ε) zur Berechnung derselben die Gleichungen ζ) treten, sofern w der Drehungswinkel ist.

Im Allgemeinen sollen die rechtwinkeligen Coordinaten xyz auf ein äquatoreales System bezogen werden, d. h. ein solches, dessen xy-Ebene der Äquator ist, dessen X-Axe durch den Frühlingspunkt geht und dessen Z-Axe senkrecht auf der Äquatorebene steht. Sind nun die Grössen Ω und i schon auf diesen Äquator an und für sich bezogen, so bleiben die obigen Formeln zur Berechnung der Constanten $l_v \ldots$ unverändert bestehen. Der Winkel w bezeichnet hiebei den Winkel, um welchen die X-Axe aus irgend einer beliebigen Lage in diesem Coordinatensystem verdreht werden müsste, um ihr die bestimmte Lage zu geben, dass sie durch den Frühlingspunkt geht. War daher die ursprüngliche X-Axe so gelegen, dass die durch den aufsteigenden Knoten der Bahnebene des Planeten oder Cometen ging, so wird

$$w = \pi - \Omega.$$

Dass diese Annahme hiebei keine willkürliche, sondern vielmehr eine nothwendige ist, ergibt sich aus der Differentialgleichung

$$r^2 dv = \vartheta dt$$

die oben als Definitionsgleichung der wahren Anomalie aufgestellt wurde und bei deren Integration man die Integrationsconstante zu dem Winkel v schlägt. Indem man nämlich die mittlere Anomalie $M = \vartheta t$ vom Perihel an zählt, muss die Integrationsconstante gleich sein der Differenz der Längen des Perihels und des aufsteigenden Knotens.

In den Formeln, wie sie Gauss in seiner Theoria motus zuerst zur Berechnung der rechtwinkeligen Coordinaten aufgestellt hat, sind statt der Grössen $l_v \ldots$ eingeführt:

$$\begin{aligned} \alpha \sin A &= l_v & \beta \sin B &= m_v & \gamma \sin C &= n_v \\ \alpha \cos A &= l'_v & \beta \cos B &= m_v & \gamma \cos C &= n'_v \end{aligned}$$

Hiedurch übergehen nämlich die Gleichungen für $x\,y\,z$ in

$$\begin{aligned} x &= r\alpha \sin (A+v) \\ y &= r\beta \sin (B+v) \\ z &= r\gamma \sin (C+v) \end{aligned}$$

und die Formeln ε) zur Berechnung der speciellen Werthe

$$\alpha \sin A = \cos \Omega \quad \beta \sin B = \sin \Omega \quad \gamma \sin C = 0$$
$$\alpha \cos A = -\sin \Omega \cos i \quad \beta \cos B = \cos \Omega \cos i \quad \gamma \cos C = \sin i$$

sowie die zur Berechnung der allgemeinen, die von den ersteren dadurch unterschieden werden sollen, dass wir sie mit einem Index versehen,

$$\alpha' \sin A' = \alpha \cos A \sin w + \alpha \sin A \cos w = \alpha \sin (A + w)$$
$$\alpha' \cos A' = \alpha \cos A \cos w - \alpha \sin A \sin w = \alpha \cos (A + w)$$

und ebenso die anderen Grössen

$$\beta' \sin B' = \beta \sin (B + w) \qquad \gamma' \sin C' = \gamma \sin w$$
$$\beta' \cos B' = \beta \cos (B + w) \qquad \gamma' \cos C' = \gamma \cos w,$$

woraus

$$\alpha' = \alpha \quad \beta' = \beta \quad \gamma' = \gamma$$
$$A' = A + w \quad B' = B + w \quad C' = w$$

folgt. Geht man jedoch von den Gleichungen ϑ_1) aus, so erhält man directe:

$$\operatorname{tg} \Omega \cos i = \operatorname{tg} \Phi$$
$$\operatorname{ctg} \Omega \cos i = \operatorname{ctg} \Phi'$$
$$\alpha \sin A' = \frac{\cos \Omega}{\cos \Phi} \cos (w + \Phi) \qquad \beta \sin B' = \frac{\sin \Omega}{\sin \Phi'} \sin (w + \Phi')$$
$$\gamma \sin C' = \sin i \sin w$$
$$\alpha \cos A' = \frac{\cos \Omega}{\cos \Phi} \sin (w + \Phi) \qquad \beta \cos B' = \frac{\sin \Omega}{\sin \Phi'} \cos (w + \Phi')$$
$$\gamma \cos C' = \sin i \cos w$$

und dürften diese Formeln insbesondere zur Berechnung der Grössen $l m n \; l_1 m_1 n_1 \ldots$ der Darstellung der rechtwinkeligen Coordinaten durch die excentrische Anomalie recht geeignet sein, indem sie es gestatten, unmittelbar aus den Constanten Ωi und w dieselben zu bestimmen. Man hätte speciell

$$\operatorname{tg} \Omega \cos i = \operatorname{tg} \Phi$$
$$\operatorname{ctg} \Omega \cos i = \operatorname{ctg} \Phi'$$
$$l = a \frac{\cos \Omega}{\cos \Phi} \cos (w + \Phi) \qquad m = a \frac{\sin \Omega}{\sin \Phi'} \sin (w + \Phi')$$

$$n = a \sin i \sin w$$

$$l_1 = -a\sqrt{1-e^2}.\frac{\cos \Omega}{\cos \Phi}\sin(w+\Phi) \quad m_1 = a\sqrt{1-e^2}.\frac{\sin \Omega}{\sin \Phi_1}\cos(w+\Phi$$

$$n_1 = a\sqrt{1-e^2}.\sin i \cos w$$

$$\lambda = -el \quad \mu = -em \quad \nu = -en$$

Hiebei ist vorausgesetzt, dass Ωi sowie w sich directe auf den Äquator beziehen. Sind jedoch, wie dies im Allgemeinen der Fall ist, diese Grössen auf die Ekliptik bezogen, so geben die Formeln

$$\alpha_0 \sin A_0 = \cos \Omega \qquad \beta_0 \sin B_0 = \sin \Omega$$
$$\alpha_0 \cos A_0 = -\sin \Omega \cos i \qquad \beta_0 \cos B_0 = \cos \Omega \cos i$$
$$\gamma_0 \sin C_0 = 0$$
$$\gamma_0 \cos C_0 = \sin i$$

zunächst die Werthe der Constanten auf dies Ekliptiksystem bezogen, und man muss durch eine Coordinatentransformation dieselben auf den Äquator reduciren. Ist ε die Schiefe der Ekliptik, so werden die äquatorealen Constanten sein

$$\alpha \sin A = \alpha_0 \sin A_0 \qquad \beta \sin B = \beta_0 \sin B_0 \cos \varepsilon - \gamma_0 \sin C_0 \sin \varepsilon$$
$$\alpha \cos A = \alpha_0 \cos A_0 \qquad \beta \cos B = \beta_0 \cos B_0 \cos \varepsilon - \gamma_0 \cos C_0 \sin \varepsilon$$
$$\gamma \sin C = \beta_0 \sin B_0 \sin \varepsilon + \gamma_0 \sin C_0 \cos \varepsilon$$
$$\gamma \cos C = \beta_0 \cos B_0 \sin \varepsilon + \gamma_0 \cos C_0 \cos \varepsilon$$

oder

$$\alpha \sin A = \cos \Omega \qquad \beta \sin B = \sin \Omega \cos \varepsilon$$
$$\gamma \sin C = \sin \Omega \sin \varepsilon$$

$$\alpha \cos A = -\sin \Omega \cos i \qquad \beta \cos B = \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon$$
$$\gamma \cos C = \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon - \sin i \cos \varepsilon$$

in der speciellen Form und

$$\alpha' = \alpha \quad \beta' = \beta \quad \gamma' = \gamma$$
$$A' = A + w \quad B' = B + w \quad C' = C + w,$$

deren allgemeinen Werthe. Setzt man aber diese Werthe in die Gleichungen ζ) ein, um wieder Formeln zur directen Berechnung derselben aufzustellen, so erhält man:

$$\alpha' \sin A' = -\sin\Omega \cos i \sin w + \cos\Omega \cos w = \frac{\cos\Omega \cos(w+\Phi)}{\cos\Phi}$$

$$\alpha' \cos A' = \sin\Omega \cos i \cos w + \cos\Omega \sin w = -\frac{\cos\Omega \sin(w+\Phi)}{\cos\Phi},$$

wobei

$$\operatorname{tg}\Phi = \operatorname{tg}\Omega \cos i$$

gesetzt ist, ferner

$$\beta' \sin B' = (\cos\Omega \cos i \cos\varepsilon - \sin i \sin\varepsilon) \sin w + \sin\Omega \cos\varepsilon \cos w$$
$$\beta' \cos B' = (\cos\Omega \cos i \cos\varepsilon - \sin i \sin\varepsilon) \cos w - \sin\Omega \cos\varepsilon \sin w$$
$$\gamma' \sin C' = (\cos\Omega \cos i \sin\varepsilon + \sin i \cos\varepsilon) \sin w + \sin\Omega \sin\varepsilon \cos w$$
$$\gamma' \cos C' = \cos\Omega \cos i \sin\varepsilon + \sin i \cos\varepsilon) \cos w - \sin\Omega \sin\varepsilon \sin w.$$

Führt man zunächst

$$\cos\Omega \cos i = p \sin P$$
$$\sin i = p \cos P$$

als Hilfswinkel ein, so übergehen die Formeln in

$$\beta' \sin B' = p \cos(P+\varepsilon) \sin w + \sin\Omega \cos\varepsilon \cos w$$
$$\beta' \cos B' = p \cos(P+\varepsilon) \cos w - \sin\Omega \cos\varepsilon \sin w$$
$$\gamma' \sin C' = p \sin(P+\varepsilon) \sin w + \sin\Omega \sin\varepsilon \cos w$$
$$\gamma' \cos C' = p \sin(P+\varepsilon) \cos w - \sin\Omega \sin\varepsilon \sin w$$

und durch die weitere Substitution

$$\frac{p \cos(P+\varepsilon)}{\sin\Omega \cos\varepsilon} = \operatorname{cotg}\Psi$$
$$\frac{p \sin(P+\varepsilon)}{\sin\Omega \sin\varepsilon} = \operatorname{ctg}\Psi_1$$

in

$$\beta' \sin B' = \frac{\sin\Omega \cos\varepsilon}{\sin\Psi} \sin(w+\Psi)$$
$$\beta' \cos B' = \frac{\sin\Omega \cos\varepsilon}{\sin\Psi} \cos(w+\Psi)$$
$$\gamma' \sin C' = \frac{\sin\Omega \sin\varepsilon}{\sin\Psi_1} \sin(w+\Psi_1)$$
$$\gamma' \cos C' = \frac{\sin\Omega \sin\varepsilon}{\sin\Psi_1} \cos(w+\Psi_1)$$

aus denen man durch Multiplication mit a, bezogen $a\sqrt{1-e^2}$ directe die Constanten $l\ m\ n\ \ldots$ der Darstellung der rechtwinkeligen Coordinaten durch die excentrische Anomalie berechnen kann.

10.

Wir wollen von diesen Entwickelungen sogleich Gebrauch machen zur Lösung eines Problemes, das in einiger Beziehung für die practische Rechnung von Nutzen sein dürfte.

Insoferne nämlich die Elemente der Bahn eines Planeten gewöhnlich auf irgend ein bestimmtes Äquinoctium bezogen sind, hat man, um die rechtwinkeligen Coordinaten desselben auch bezüglich irgend eines anderen Äquinoctiums zu erhalten, vorerst diese Elemente auf das zweite Äquinoctium zu reduciren und aus denselben dann die Constanten $\lambda\ \mu\ \nu\ldots$ zu berechnen. Man kann nun die Frage stellen, ob nicht diese Grössen selbst von einem Äquinoctium auf irgend ein anderes reducirt werden können, sobald sie für das erste aus den Elementen berechnet sind.

Beachtet man, dass die Grössen

$$\lambda\quad \mu\quad \nu$$

als Coordinaten des Mittelpunktes der Bahn, ferner

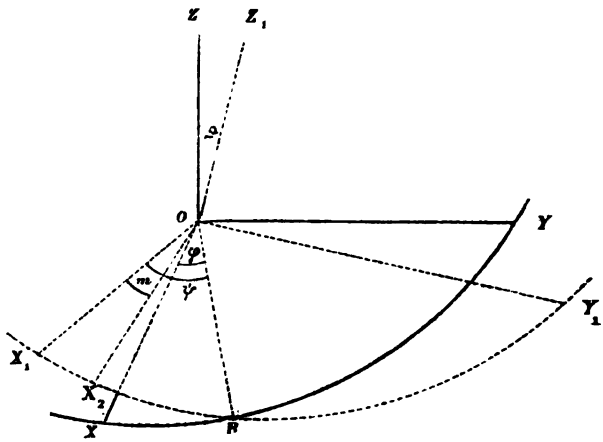
$$\lambda \pm l\quad \mu \pm m\quad \nu \pm n$$

als Coordinaten des Planeten in seinem Perihel und Aphel, sowie

$$\lambda \pm l_1\quad \mu \pm m_1\quad \nu \pm n_1$$

als Coordinaten desselben in einem Punkte, in welchem die excentrische Anomalie $= 90°$ oder $= 270°$ ist, — allgemein rechtwinkelige Coordinaten von Örtern des Planeten oder bestimmten Punkten seiner Bahn vorstellen, — so findet man, dass das eben erwähnte Problem der directen Reduction der Constanten $\lambda\ \mu\ \nu\ldots$ von einem Äquinoctium auf irgend ein anderes seine Lösung findet in dem analogen Problem der Transformation der rechtwinkeligen Coordinaten eines Punktes von einem Coordinatensystem auf ein beliebiges andere, das jedoch denselben Anfangspunkt hat.

Benutzt man zu dieser Transformation die Euler'schen Gleichungen, betrachtet in der untenstehenden Figur XYZ als das ursprüngliche Coordinatensystem, in welchem die Coordinaten



eines Punktes $x_0\ y_0\ z_0$ sein mögen, $X_1\ Y_1\ Z_1$ als das zweite Coordinatensystem, in welchem die Coordinaten desselben Punktes $x_1\ y_1\ z_1$ sein sollen, setzt den Neigungswinkel der beiden XY-Ebenen, oder was dasselbe ist, den Neigungswinkel der beiden Z-Axen gegen einander $= \vartheta$, ferner den Winkel zwischen der X-Axe und der Durchschnittslinie der beiden XY-Ebenen mit φ, und für die X_1-Axe mit Ψ, so hat man zur Transformation der Coordinaten die Formeln

$$x_1 = x_0 A_1 + y_0 b_1 + z_0 c_1$$
$$y_1 = x_0 a_2 + y_0 B_2 + z_0 c_2$$
$$z_1 = x_0 a_3 + y_0 b_3 + z_3 C_3$$

wobei

$$A_1 = \cos\varphi \cos\Psi + \sin\varphi \sin\Psi \cos\vartheta$$
$$b_1 = \sin\varphi \cos\Psi - \cos\varphi \sin\Psi \cos\vartheta$$
$$c_1 = -\sin\Psi \sin\vartheta$$

$$a_2 = \cos\varphi \sin\Psi - \sin\varphi \cos\Psi \cos\vartheta \qquad a_3 = \sin\varphi \sin\vartheta$$
$$B_2 = \sin\varphi \sin\Psi + \cos\varphi \cos\Psi \cos\vartheta \qquad b_3 = -\cos\varphi \sin\vartheta$$
$$c_2 = \cos\Psi \sin\vartheta \qquad C_3 = \cos\vartheta.$$

Es stelle nun die XY-Ebene die Ebene des Äquators für die

Epoche t_0 vor, X den Frühlingspunkt, und Y den Punkt, dessen Rectascension $= 90°$ ist, dagegen die $X_1 Y_1$-Ebene die Äquatorebene für die Epoche t_1 und X_1 den entsprechenden Frühlingspunkt. Macht man noch

$$\text{arc}\, RX = \text{arc}\, RX_2$$

so ist der Winkel $X_1 O X_2$ der Zählungsunterschied in den Rectascensionen der Sternörter, wenn sie auf diese beiden verschiedenen Äquatorebenen bezogen werden. Diese Grösse wird im Allgemeinen mit m bezeichnet; ferner ist bei diesen Annahmen

$$\varphi = P = 90° - p \quad \vartheta = n \quad \Psi = P + m = 90° + (m - p)$$

und mit diesen Werthen werden die obigen Reductionscoëfficienten

$$\begin{aligned} A_1 &= -\sin p \sin(m-p) + \cos p \cos(m-p) \cos n \\ b_1 &= -\cos p \sin(m-p) - \sin p \cos(m-p) \cos n \\ c_1 &= -\cos(m-p) \sin n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \sin p \cos(m-p) + \cos p \sin(m-p) \cos n & a_3 &= \cos p \sin n \\ B_2 &= \cos p \cos(m-p) - \sin p \sin(m-p) \cos n & b_3 &= -\sin p \sin n \\ c_2 &= -\sin(m-p) \sin n & C_3 &= \cos n \end{aligned}$$

Substituirt man in den obigen Reductionsformeln

$$A_1 = a_1 + 1 \quad B_2 = b_2 + 1 \quad C_3 = c_3 + 1$$

so erhält man,

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= x_1 - x_0 = a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0 \\ \Delta y_1 &= y_1 - y_0 = a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0 \\ \Delta z_1 &= z_1 - z_0 = a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 z_0 \end{aligned}$$

wo nun die Coëfficienten die Werthe haben:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2\,(\sin^2 \tfrac{1}{2} m + \cos p \cos(m-p) \sin^2 \tfrac{1}{2} n) \\ b_1 &= -\sin m + 2 \sin p \cos(m-p) \sin^2 \tfrac{1}{2} n \\ c_1 &= -\cos(m-p) \sin n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_2 &= \sin m - 2 \cos p \sin(m-p) \sin^2 \tfrac{1}{2} n & a_3 &= \cos p \sin n \\ b_2 &= -2(\sin^2 \tfrac{1}{2} m - \sin p \sin(m-p) \sin^2 \tfrac{1}{2} n) & b_3 &= -\sin p \sin n \\ c_2 &= -\sin(m-p) \sin n & c_3 &= -2 \sin^2 \tfrac{1}{2} n \end{aligned}$$

Ersetzt man in denselben schliesslich die Sinus- und Cosinusfunctionen durch die entsprechenden Reihen, so werden

$$a_1 = -\tfrac{1}{2}(m^2+n^2) \qquad a_2 = m-\tfrac{1}{6}m^3-\tfrac{1}{2}(m-p)n^2$$
$$b_1 = -m+\tfrac{1}{6}m^3+{}^1pn^2 \qquad b_2 = \tfrac{1}{2}m^2$$
$$c_1 = -n+\tfrac{1}{6}n^3+\tfrac{1}{2}n(m-p)^2 \qquad c_2 = -(m-p)n$$
$$a_3 = n-\tfrac{1}{6}n^3-\tfrac{1}{2}np^2$$
$$b_3 = -np$$
$$c_3 = -\tfrac{1}{2}n^2$$

wenn man bei Ausführung der betreffenden Rechnungsoperationen nur bis zu Gliedern dritter Ordnung geht.

Es sind nun die numerischen Werthe dieser Constanten, nach Struve bezogen auf das Jahr 1800 als Ausgangsepoche

$$m = 46''0623\,t+0''00014245\,t^2$$
$$n = 20\cdot0607\,t-0\cdot00004315\,t^2$$
$$p = 23\cdot0312\,t+0\cdot00007123\,t^2$$

Um aber eine Reduction von irgend einem Jahre t_1 auf ein anderes t_2 vornehmen zu können, setzt man entweder

$$m = [46\cdot0623+0\cdot0002849\ \ t]\,\tau+0\cdot00014245\,t^2$$
$$n = [20\cdot0607-0\cdot0000863\ \ t]\,\tau-0\cdot00004315\,t^2$$
$$p = [23\cdot0312+0\cdot00014245\,t]\,\tau+\ldots\ldots$$

in welchen Formeln $t = t_1-1800$, $\tau = t_2-t_1$ ist, oder man nimmt die Reduction mit den mittleren Werthen dieser Constanten vor, indem man annimmt

$$m = \left[46''0623+0''0002849\ \left(\frac{t_1+t_2}{2}-1800\right)\right](t_2-t_1)$$
$$n = \left[20\cdot0607-0\cdot0000863\ \left(\frac{t_1+t_2}{2}-1800\right)\right](t_2-t_1)$$
$$p = \left[23\cdot0312+0\cdot00014245\left(\frac{t_1+t_2}{2}-1800\right)\right](t_2-t_1)$$

Die Substitution dieser numerischen Werthe in die obigen Ausdrücke für die Reductionscoëfficienten ergibt sohin die Werthe derselben zu:

$$a_1 = [-0'00611875 - 0'0000000552t]\tau^2$$
$$b_1 = [-46'0623 - 0'0002849t]\tau$$
$$c_1 = [-20'0607 + 0'0000863t]\tau$$
$$a_2 = [+46'0623 + 0'0002849t]\tau$$
$$b_2 = [+0'00514323 + 0'0000000636t]\tau^2$$
$$c_2 = [-0'00223994 - 0'0000000042t]\tau^2$$
$$a_3 = [+20'0607 - 0'0000863t]\tau$$
$$b_3 = [-0'00223994 - 0'0000000042t]\tau^2$$
$$c_3 = [-0'00097552 + 0'0000000084t]\tau^2$$

in Secunden, oder

$$10^7 . a_1 = [-0 \cdot 296646 - 0 \cdot 000002678t]\tau^2$$
$$10^7 . b_1 = [-2233 \cdot 164 - 0 \cdot 013812t]\tau$$
$$10^7 . c_1 = [-972 \cdot 570 + 0 \cdot 004184t]\tau$$
$$10^7 . a_2 = [+2233 \cdot 164 + 0 \cdot 013812t]\tau$$
$$10^7 . b_2 = [+0 \cdot 249351 + 0 \cdot 000003085t]\tau^2$$
$$10^7 . c_2 = [-0 \cdot 108595 - 0 \cdot 000000205t]\tau^2$$
$$10^7 . a_3 = [+972 \cdot 570 - 0 \cdot 004184t]\tau$$
$$10^7 . b_3 = [-0 \cdot 108595 - 0 \cdot 000000205t]\tau^2$$
$$10^7 . c_3 = [-0 \cdot 047295 + 0 \cdot 000000407t]\tau^2$$

in Theilen des Radius, wobei die angesetzten Zahlen Einheiten der siebenten Decimalstelle bedeuten. Wie man sieht, sind von diesen Coëfficienten

$$a_1 \quad b_2 \quad c_2 \quad b_3 \quad c_3$$

Grössen zweiter Ordnung, und als solche mit dem Qnadrate der Zwischenzeit τ zu multipliciren, ferner ist

$$t = \frac{t_1 + t_2}{2} - 1800$$

zu setzen. Von den Coëfficienten selbst sind

$$b_1 = -a_2 \quad c_1 = -a_3 \quad c_2 = b_3$$

Die Formeln

$$\Delta x = a_1 x_0 + b_1 y_0 + c_1 z_0$$
$$\Delta y = a_2 x_0 + b_2 y_0 + c_2 z_0$$
$$\Delta z = a_3 x_0 + b_3 y_0 + c_3 z_0$$

worin die Coëfficienten $a\ b\ c$ die oben angegebenen numerischen

Werthe besitzen, sind nun auch gleichzeitig die Reductionsformeln für die Äquatorconstanten $\lambda\ \mu\ \nu\ l\ m\ n\ l_1\ m_1\ n_1$, in der Weise, dass wenn man unter den

$$\lambda_0\ \mu_0\ \nu_0 \quad l_0\ m_0\ n_0 \quad l_0'\ m_0'\ n_0'$$

die Werthe dieser Constanten für das Äquinoctium t_1, unter

$$\lambda_1\ \mu_1\ \nu_1 \quad l_1\ m_1\ n_1 \quad l_1'\ m_1'\ n_1'$$

die Werthe derselben für irgend ein anderes Äquinoctium t_2 steht, allgemein

$$\begin{aligned}
\Delta\lambda_1 &= a_1\lambda_0 + b_1\mu_0 + c_1\nu_0 & \Delta l_1 &= a_1 l_0 + b_1 m_0 + c_1 n_0\\
\Delta\mu_1 &= a_2\lambda_0 + b_2\mu_0 + c_2\nu_0 & \Delta m_1 &= a_2 l_0 + b_2 m_0 + c_2 n_0\\
\Delta\nu_1 &= a_3\lambda_0 + b_3\mu_0 + c_3\nu_0 & \Delta n_1 &= a_3 l_0 + b_3 m_0 + c_3 n_0\\
\Delta l_1' &= a_1 l_0' + b_1 m_0' + c_1 n_0'\\
\Delta m_1' &= a_2 l_0' + b_2 m_0' + c_2 n_0'\\
\Delta n_1' &= a_3 l_0' + b_3 m_0' + b_3 n_0'
\end{aligned}$$

ist, wobei man zur Prüfung der erhaltenen neuen Werthe irgend eine der oben erhaltenen Gleichungen

$$\begin{aligned}
l_1 l_1' + m_1 m_1' + n_1 n_1' &= 0\\
l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 &= a^2\\
l_1'^2 + m_1'^2 + n_1'^2 &= a^2(1-e^2)
\end{aligned}$$

benützen kann.

Den Constanten $\lambda\ \mu\ \nu\ldots$ entsprechen die Darstellungen der rechtwinkeligen Coordinaten des Planeten in der Form

$$\begin{aligned}
x &= \lambda + l\cos E + l'\sin E\\
y &= \mu + m\cos E + m'\sin E\\
z &= \nu + n\cos E + n'\sin E.
\end{aligned}$$

Um dieselben für die Rechnung einfacher zu gestalten, setzt man jedoch im Allgemeinen für die Grössen

$$l\ m\ n \quad l'\ m'\ n'$$

ein

$$l\sin L\ \ m\sin M\ \ n\sin N \quad l\cos L\ \ m\cos M\ \ n\cos N$$

und erhält dann

$$x = \lambda + l \sin(E+L)$$
$$y = \mu + m \sin(E+M)$$
$$z = \nu + n \sin(E+N)$$

Für die Grössen $l\ m\ n$ in dieser ihrer neuen Bedeutung, sowie für die $L\ M\ N$ werden die obigen Reductionsformeln aber

$$\left.\begin{aligned}
\Delta(l\sin L) &= a_1 l\sin L + b_1 m\sin M + c_1 n\sin N\\
\Delta(m\sin M) &= a_2 l\sin L + b_2 m\sin M + c_2 n\sin N\\
\Delta(n\sin N) &= a_3 l\sin L + b_3 m\sin M + c_3 n\sin N\\
\Delta(l\cos L) &= a_1 l\cos L + b_1 m\cos M + c_1 n\cos N\\
\Delta(m\cos M) &= a_2 l\cos L + b_2 m\cos M + c_2 n\cos N\\
\Delta(n\cos N) &= a_3 l\cos L + b_3 m\cos M + c_3 n\cos N.
\end{aligned}\right\} \quad A)$$

Man kann nun mit Vernachlässigung von Grössen zweiter Ordnung, was für Reductionen für kleinere Zwischenzeiten gestattet ist,[1] setzen

$$\Delta(l\sin L) = \sin L.\Delta l + l\cos L.\Delta l = + b_1 m\sin M + c_1 n\sin N$$
$$\Delta(l\cos L) = \cos L.\Delta l - l\sin L.\Delta l = + b_1 m\cos M + c_2 n\cos N.$$

Multiplicirt man die erste Gleichung mit sin L, die zweite mit cos L und addirt, so ergibt sich

$$\Delta l = + b_1 m\cos(L-M) + c_1 n\cos(L-N)$$

und

$$\frac{\Delta l}{l} = + b_1 \frac{m}{l}\cos(L-M) + c_1 \frac{n}{l}\cos(L-N)$$

oder

$$\Delta lgl = [+ b_1 \frac{m}{l}\cos(L-M) + c_1 \frac{n}{l}\cos(L-N)]\Lambda,$$

wo Λ der Modul der Brigg'schen Logarithmen ist, d. h.

$$\Lambda = 0{\cdot}4342945.$$

Multiplicirt man dagegen die beiden letzten Gleichungen mit cos L und sin L und subtrahirt sie, so wird andererseits

$$l\Delta L = b_1 m\sin(M-L) + c_1 n\sin(N-L)$$

---

[1] und wodurch gleichzeitig die mit den Coëfficienten $a_1\ b_2\ c_2\ b_3\ c_3$ multiplicirten Glieder, weil ebenfalls von zweiter Ordnung, wegfallen.

oder

$$\Delta L = b_1 \frac{m}{l} \sin(M-L) + c_1 \frac{n}{l} \sin(N-L).$$

Man hat daher allgemein für die Constanten lmn, LMN in dieser neuen Form zur Reduction derselben auf verschiedene Äquinoctien, entweder die streng giltigen Formeln A) oder

$$\begin{aligned}
\Delta \log l &= [+b_1 \frac{m}{l} \cos(M-L) + c_1 \frac{n}{l} \cos(N-L)]\Lambda \\
\Delta \log m &= a_2 \frac{l}{m} \cos(L-M)\Lambda \\
\Delta \log n &= a_3 \frac{l}{n} \cos(L-N)\Lambda \\
\Delta L &= b_1 \frac{m}{l} \sin(M-L) + c_1 \frac{n}{l} \sin(N-L) \\
\Delta M &= a_2 \frac{l}{m} \sin(L-M) \\
\Delta N &= a_3 \frac{l}{n} \sin(L-N),
\end{aligned} \qquad B)$$

worin die Coëfficienten abc die obigen numerischen Werthe haben, ferner

$$\Lambda = 0{\cdot}4342945 \text{ ist.}$$

Es ist klar, dass dieselben Reductionsformeln auch für die Constanten $\alpha\beta\gamma$ ABC der Darstellung der rechtwinkeligen Coordinaten durch die wahre Anomalie gelten; denn, wenn auch die Grössen

$$\alpha \sin A \quad \beta \sin B \quad \gamma \sin C \quad \alpha \cos A \quad \beta \cos B \quad \gamma \cos C$$

nicht directe als rechtwinkelige Coordinaten von bestimmten Punkten der Bahn des betreffendon Sternes angesehen werden können, wie dies bei den Constanten $l\,m\,n$ $l_1\,m_1\,n_1$ der Fall ist, so sind doch die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
& a(1-e)\alpha \sin A \quad a(1-e)\beta \sin B \quad a(1-e)\gamma \sin C \\
\text{und } & -a\sqrt{1-e^2}\,\alpha \cos A \quad a\sqrt{1-e^2}\,\beta \cos B \quad a\sqrt{1-e^2}\,\gamma \cos C
\end{aligned}$$

die den Annahmen $v = 0°$ und $v = 90°$ in den Formeln

$$x = r\alpha \sin(A+v)$$
$$y = r\beta \sin(B+v)$$
$$z = r\gamma \sin(C+v)$$

entsprechen, als rechtwinkelige Coordinaten von bestimmten Punkten der Bahn zu betrachten. Es sind daher die obigen Reductionsformeln auf diese Ausdrücke anzuwenden. Die Coëfficienten

$$a(1-e) \text{ und } a\sqrt{1-e^2}$$

fallen aber dann, weil von einer solchen Reduction unabhängig, fort. Man hat daher auch für diese Constanten die Formeln zur Reduction derselben auf verschiedene Äquinoctien.

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha \sin A) &= a_1 \alpha \sin A + b_1 \beta \sin B + c_1 \gamma \sin C \\
\Delta(\beta \sin B) &= a_2 \alpha \sin A + b_2 \beta \sin B + c_2 \gamma \sin C \\
\Delta(\gamma \sin C) &= a_3 \alpha \sin A + b_3 \beta \sin B + c_3 \gamma \sin C \\
\Delta(\alpha \cos A) &= a_1 \alpha \cos A + b_1 \beta \cos B + c_1 \gamma \cos C \\
\Delta(\beta \cos B) &= a_2 \alpha \cos A + b_2 \beta \cos B + c_2 \gamma \cos C \\
\Delta(\gamma \cos C) &= a_3 \alpha \cos A + b_3 \beta \cos B + c_3 \gamma \cos C
\end{aligned} \qquad A')$$

oder

$$\Delta \lg \alpha = \left[b_1 \frac{\beta}{\alpha} \cos(B-A) + c_1 \frac{\gamma}{\alpha} \cos(C-A) \right] \Lambda$$

$$\Delta \lg \beta = a_2 \frac{\alpha}{\beta} \cos(A-B) \Lambda$$

$$\Delta \lg \gamma = a_3 \frac{\alpha}{\gamma} \cos(A-C) \Lambda$$

$$\Delta A = b_1 \frac{\beta}{\alpha} \sin(B-A) + c_1 \frac{\gamma}{\alpha} \sin(C-A) \qquad B_1)$$

$$\Delta B = a_2 \frac{\alpha}{\beta} \sin(A-B)$$

$$\Delta C = a_3 \frac{\alpha}{\gamma} \sin(A-C)$$

wo

$$\Lambda = 0 \cdot 4342945 \text{ ist.}$$

Die folgenden Tafeln geben für das Jahr 1800 und die einzelnen Jahrzehnte von 1850—1900 die Werthe der Coëfficienten

$$\alpha_2 = -\beta_1 = \frac{a_2}{\tau} = -\frac{b_1}{\tau}$$

$$\alpha_3 = -\gamma_1 = \frac{a_3}{\tau} = -\frac{c_1}{\tau}$$

$$\alpha_1 = \frac{a_1}{\tau^2}$$

$$\beta_2 = \frac{b_2}{\tau^2}$$

$$\gamma_2 = \beta_3 = \frac{b_3}{\tau^2} = \frac{b_2}{\tau^2}$$

$$\gamma_3 = \frac{c_3}{\tau^2}$$

und zwar Tafel I die Werthe dieser Reductionsgrössen in Theilen des Radius ausgedrückt, wobei die angesetzten Zahlen Einheiten der siebenten Decimalstelle bedeuten, sowie Tafel II die dazu gehörigen Logarithmen. Man wird diese Tafeln benutzen bei den Formeln A oder A' und hiedurch die Zuwächse der Constanten $l\,m\,n$ sofort in Einheiten der siebenten Decimalstelle erhalten. Speciell wird man zu rechnen haben:

$$\begin{aligned}
\Delta(l \sin L) &= \alpha_1 \tau^2 l \sin L + \beta_1 \tau m \sin M + \gamma_1 \tau n \sin N \\
\Delta(m \sin M) &= \alpha_2 \tau l \sin L + \beta_2 \tau^2 m \sin M + \gamma_2 \tau^2 n \sin N \\
\Delta(n \sin N) &= \alpha_3 \tau l \sin L + \beta_3 \tau^2 m \sin M + \gamma_3 \tau^2 n \sin N
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(l \cos L) &= \alpha_1 \tau^2 l \cos L + \beta_1 \tau m \cos M + \gamma_1 \tau n \cos N \\
\Delta(m \cos M) &= \alpha_2 \tau l \cos L + \beta_2 \tau^2 m \cos M + \gamma_2 \tau^2 n \cos N \\
\Delta(n \sin N) &= \alpha_3 \tau l \cos L + \beta_3 \tau^2 m \cos M + \gamma_2 \tau^2 n \cos N
\end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha \sin A) &= \alpha_1 \tau^2 \alpha \sin A + \beta_1 \tau \beta \sin B + \gamma_1 \tau \gamma \sin C \\
\Delta(\beta \sin B) &= \alpha_2 \tau \alpha \sin A + \beta_2 \tau^2 \beta \sin B + \gamma_2 \tau^2 \gamma \sin C \\
\Delta(\gamma \sin C) &= \alpha_3 \tau \alpha \sin A + \beta_3 \tau^2 \beta \sin B + \gamma_3 \tau^3 \gamma \sin C
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha \cos A) &= \alpha_1 \tau^2 \alpha \cos A + \beta_1 \tau \beta \cos B + \gamma_1 \tau \gamma \cos C \\
\Delta(\beta \cos B) &= \alpha_2 \tau \alpha \cos A + \beta_2 \tau^2 \beta \cos B + \gamma_2 \tau^2 \gamma \cos C \\
\Delta(\gamma \cos C) &= \alpha_3 \tau \alpha \cos A + \beta_3 \tau^2 \beta \cos B + \gamma_3 \tau^2 \gamma \cos C
\end{aligned}$$

Tafel III schliesslich gibt nur die Werthe der Coëfficienten erster Ordnung,

$$\alpha_2 = -\beta_1 = \frac{a_2}{\tau} = -\frac{b_1}{\tau}$$

$$\alpha_3 = -\gamma_1 = \frac{a_3}{\tau} = -\frac{c_1}{\tau}$$

und zwar einerseits in Secunden ausgedrückt, sowie die hiezugehörigen Logarithmen, (T. III*a* und III*b*), wie man dieselben insbesondere zu den Reductionsformeln für die Winkelgrössen *L M N*, oder *A B C* benöthigt, d. i. zu den Formeln:

$$\Delta L = \left[\beta_1 \frac{m}{l} \sin(M-L) + \gamma_1 \frac{n}{l} \sin(N-L)\right] \tau$$

$$\Delta M = \alpha_2 \frac{l}{m} \sin(L-M)\tau$$

$$\Delta N = \alpha_3 \frac{l}{n} \sin(L-N)\tau$$

resp.

$$\Delta A = \left[\beta_1 \frac{\beta}{\alpha} \sin(B-A) + \gamma_1 \frac{\gamma}{\alpha} \sin(C-A)\right] \tau$$

$$\Delta B = \alpha_2 \frac{a}{\beta} \sin(A-B)\tau$$

$$\Delta C = \alpha_3 \frac{a}{\gamma} \sin(A-C)\tau$$

andererseits, in III*c* in Theilen des Radius, und zwar nur mehr die Logarithmen der Coëfficienten, um $\lg \Lambda = \lg 0{\cdot}4342945 = 9{\cdot}6377843$ vermehrt. Diese Tafel speciell wird bei den Formeln zu verwenden sein

$$\Delta(\lg l) = \left[\beta_1 \frac{m}{l} \cos(M-L) + \gamma_1 \frac{n}{l} \cos(N-L)\right] \tau$$

$$\Delta(\lg m) = \alpha_2 \frac{l}{m} \cos(L-M)\tau$$

$$\Delta(\lg n) = \alpha_3 \frac{l}{n} \cos(L-N)\tau$$

$$\Delta(\lg\alpha) = \left[\beta_1 \frac{\beta}{\alpha}\cos(B-A) + \gamma_1 \frac{\gamma}{\alpha}\cos(C-A)\right]\tau$$

$$\Delta(\lg\beta) = \alpha_2 \frac{\alpha}{\beta}\cos(A-B)\tau$$

$$\Delta(\lg\gamma) = \alpha_3 \frac{\alpha}{\gamma}\cos(A-C)\tau$$

wobei die Multiplication mit dem Modul A schon entfällt.

Zur Berechnung der Tafeln wurden die Struve'schen Constanten der Präcession verwendet, nämlich die Zahlen

$$m = 40^s0623 + 0^s0002849\,t$$
$$n = 20\cdot0607 - 0\cdot0000863\,t$$
$$p = \frac{m}{2}$$

welche für das Jahr 1800 als Ausgangsepoche gelten.

Indem ich hiemit diese Untersuchung schliesse, erlaube ich mir an dieser Stelle Herrn Dir. Prof. E. Weiss für seinen freundlichen Rath und seine bewährte Unterstützung bei Ausführung derselben meinen Dank auszusprechen.

I

	$10^7(\alpha_2 = -\beta_1)$	$10^7(\alpha_3 = -\gamma_1)$	$10^7.\alpha_1$	$10^7.\beta_2$	$10^7(\beta_3 = \gamma_2)$	$10^7.\gamma_3$
1800	+2233·164	+972·570	−0·296646	+0·249351	−0·108595	−0·047295
1850	3·854	361	779	505	606	274
1860	3·992	319	806	536	608	270
1870	4·130	277	833	567	610	266
1880	4·269	235	860	598	612	262
1890	4·407	194	887	629	614	258
1900	+2234·545	+972·152	−0·296913	+0·249659	−0·108616	−0·047254

II

log	$10^7(\alpha_2 = -\beta_1)$	$10^7(\alpha_3 = -\gamma_1)$	$10^7.\alpha_1$	$10^7.\beta_2$	$10^7(\beta_3 = \gamma_2)$	$10^7.\gamma_3$
1800	3·348921	2·987921	9_n47224	9·39681	9_n03581	8_n67481
1850	9055	7828	243	708	585	463
1860	9082	7809	247	713	586	459
1870	9108	7790	251	719	587	455
1880	9135	7772	255	724	588	451
1890	9162	7753	259	729	588	448
1900	3·349189	2·987734	9_n47263	9·39735	9_n03589	8_n67444

	III a)		III b)		III c)	
	$\alpha_2 = -\beta_1$	$\alpha_3 = -\gamma_1$	$\lg(\alpha_3 = -\beta_1)$	$\lg(\alpha_3 = -\gamma_1)$	$\lg\Lambda 10^7(\alpha_2 = -\beta_1)$	$\lg\Lambda 10^7(\alpha_3 = -\gamma_2)$
1800	46″0623	20″0607	1·663346	1·302346	2·986705	2·625705
1850	0765	0564	3479	2253	6839	5612
1860	0795	0555	3507	2233	6866	5593
1870	0822	0546	3533	2215	6893	5575
1880	0851	0538	3560	2197	6920	5556
1890	0879	0530	3587	2178	6947	5537
1900	46″0908	20″0521	1·663614	1 302159	2·986974	2·625518

XIII. SITZUNG VOM 25. MAI 1883.

Se. Excellenz der Herr Curator-Stellvertreter macht der Akademie mit hohem Erlasse vom 11. Mai die Mittheilung, dass er in Verhinderung Seiner kaiserlichen Hoheit des durchlauchtigsten Herrn Erzherzog-Curators in Höchstdessen Stellvertretung die diesjährige feierliche Sitzung am 30. Mai mit einer Ansprache eröffnen werde.

Das c. M. Herr Ch. Hermite in Paris übersendet zwei gedruckte Abhandlungen: „Sur la reduction des intégrales hyperelliptiques aux fonctios de première, de seconde et de troisième espéce“ und „Sur une relation donnée par M. Cayley dans la théorie des fonctions elliptiques,“ ferner die zweite lithographirte Ausgabe der von ihm an der Faculté des Sciences im Sommersemester 1881—82 gehaltenen Vorlesungen.

Herr Professor Dr. Albert Adamkiewicz an der Universität in Krakau übersendet eine Abhandlung unter dem Titel: „Die Lehre vom Hirndruck und die Pathologie der Hirncompression, I. Theil. Die Lehre vom Hirndruck.“

Der Secretär legt folgende eingesendete Abhandlungen vor:

1. „Mémoire sur la Prophylaxie et la Thérapeuthique de la Fièvre Typhoïde“ von Herrn Dr. A. Delbovier in Brüssel.
2. „Zur elementar-geometrischen Kegelschnittslehre“ von Herrn K. Lauermann, Bürgerschullehrer in Grulich.

Ferner legt der Secretär ein versiegeltes Schreiben behufs Wahrung der Priorität von Herrn Dr. C. Braun, Director der erzbischöflichen Sternwarte in Kalocsa (Ungarn), vor, welches die Aufschrift trägt: „Instrumentum Soli observando destinatum“.

Das w. M. Herr Prof. Ad. Lieben überreicht zwei in seinem Laboratorium ausgeführte Arbeiten:

1. „Bildungsweise der isomeren Bibromcampher", von den Herren J. Kachler und F. V. Spitzer.
2. „Über Reichenbach's Picamar", von Herrn G. Niederist.

An Druckschriften wurden vorgelegt:

Académie royale des Sciences, des Lettres et des Beaux-Arts de Belgique. 52e année, 3e série, tome 5. Nr. 3. Bruxelles, 1883; 8°.

— royale de Copenhague: Bulletin Nr. 3. Oversigt over det Forhandlingar og dets Medlemers Arbejder i Aaret 1882. Kjøbenhavn; 8°; Bulletin pour 1883. Nr. 1. Kjøbenhavn, 1883; 8°.

Accademia, R. delle scienze di Torino: Atti. Vol. XVIII. Disp. 3 (Febbraio 1883) Torino; 8°.

— — Atti. Anno CCLXXVIII. 1880—81. Serie terza. Memorie della classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Vol. IX & X. Roma, 1881; 4°.

— — Atti. Anno CCLXXX, 1882—83. Serie terza. Transunti. Vol. VII. Fascicoli 5°—8°. Roma, 1883: 4°.

Akademie, kaiserliche Leopoldino-Carolinisch-deutsche der Naturforscher: Leopoldina. Heft XIX, Nr. 7—8. Halle a. S., 1883; 4°.

Akademija umiejętnošci w Krakowie: Sprawozdonie komisyi fizyjograficznéj w roku 1881. Tom XVI. W Krakowie, 1882; 8°.

— — Lud. Seria XV, Nr. 7. Krakow, 1882; 8°,

— — Pokucie. Obraz etnograficzny. Tom I. Skreštił Oskar Kolberg. Krakow, 1882; 8°.

— — Ptaki krajowe przez Wladislawa Taczanowskiego. Tom II. W. Krakowie, 1882; 8°.

Archivio per le scienze mediche. Vol. VI. Fascicolo 4°. Torino, 1883; 8°.

Ateneo veneto: Revista mensile di scienze, lettere ed arti. Serie V. Nro. 1—6. — Serie VI, Nr. 1—6. Venezia, 1882; 8°. — Serie VII. Nro. 1—3. Venezia, 1883; 8°.

Berliner Astronomisches Jahrbuch für 1885 mit Ephemeriden der Planeten (1) — (225) für 1883. Berlin, 1883; 8°.

Central-Anstalt, k. k. für Meteorologie und Erdmagnetismus: Jahrbücher. Jahrgang 1879. N. F. XVI. Band. Wien, 1882; gr. 4°. — Jahrgang 1881. N. F. XVIII. Band. I. Theil. Wien, 1882; gr. 4°.

Central-Commission, k. k. statistische: Statistisches Jahrbuch für das Jahr 1880. VI.—VIII. Heft. Wien, 1883; 8°.

Chemiker-Zeitung: Central-Organ. Jahrgang VII, Nr. 32 bis 37.

Comptes rendus des séances de l'Académie des sciences. Tome XCVI. Nrs. 18 & 19. Paris, 1883; 4°.

Gesellschaft, deutsche chemische: Berichte. XV. Jahrgang Nr. 19. Berlin, 1882; 8°. — XVI. Jahrgang. Nr. 7. Berlin, 1883; 8°.

— naturwissenschaftliche Isis in Dresden. Sitzungsberichte und Abhandlungen. Jahrgang 1882. Juli bis December. Dresden, 1883; 8°

— österreichische für Meteorologie: Zeitschrift XVIII. Band, Mai-Heft 1883. Wien; 8°.

Johns Hopkins University: American chemical Journal. Vol. V. Nr. 1, April, 1883. Baltimore; 8°.

— — American Journal of Mathematics. Vol. V. Nr. 3. Baltimore, 1882; 4°.

Journal, the American of science: Vol. XXV. Nr. 149. New Haven, 1883; 8°.

Journal für praktische Chemie. N. F. Band XXVII. 6. & 7. Heft. Leipzig 1883; 8°.

Karpathen-Verein, ungarischer: Jahrbuch. X. Jahrgang, 1883. I. Heft. Késmárk; 8°.

Lüttich, Universität: Druckschriften aus den Jahren 1869, 1876, 1878, 1881 & 1882; 12 Stücke; 8°.

Mittheilungen aus Justus Perthes' geographischer Anstalt. XXIX. Band, 1883. V. Gotha; 4°.

Nature. Vol. XXVIII. Nrs. 706 & 707. London, 1883; 8°.

Nederlandsch Gasthuis door Ooglijders: XXIII. jaarlijksch Verslag. Utrecht, 1882; 8°.

Observatoire de Leiden: Areographische Beiträge zur genauen Kenntniss und Beurtheilung des Planeten Mars, in mathematisch-physischer Hinsicht von Dr. J. H. Schroeter. Leiden, 1881; 8°. — Catalogus van de boeken aanwezig in de Bibliothek der Sterrenwacht te Leiden. 1. & 2. Supplement van 1. Jan. tot 1 Juli 1882. 's Gravenhage, 1881—82; 8°.

Société d'Histoire naturelle de Colmar: Bulletin. 22e et 23e années. Colmar, 1883; 8°.

— géologique de France: Bulletin. 3e série, tome X. 1882. Nrs. 2, 5 & 6. Paris, 1881—82; 8°. — 3e série, tome XI. 1883. Nr. 1. Paris, 1882—83; 8°.

— zoologique de France: Bulletin pour l'année 1881. 6e année Nr. 6. Paris, 1881; 8°. — Bulletin pour l'année 1882. 7e année. Nos. 1—5. Paris, 1882; 8°.

Society, the American geographical: Bulletin. Nrs. 3 & 4. New-York, 1882; 8°. — 1883. Nr. 1. New-York, 1883; 8°.

— the royal geographical: Proceedings and Monthly record of Geography. Vol. V. Nr. 5. May 1883. London; 8°.

Verein, naturwissenschaftlicher zu Bremen: Abhandlungen. VIII. Band. 1. Heft. Bremen, 1883; 8°.

Zeitschrift für Instrumentenkunde: Organ. III. Jahrgang, 1883. 4. Heft. April. Berlin; 8°.

— für physiologische Chemie. VII. Band, 4. Heft. Strassburg, 1883; 8°.

Über α- und β-Naphtochinolin.

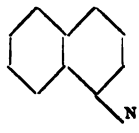
Von Zd. H. Skraup und A. Cobenzl.

(Aus dem Laboratorium der Wiener Handelsakademie.)

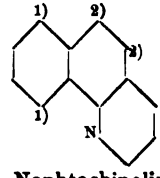
(Vorgelegt in der Sitzung am 10. Mai 1883.)

Vor längerer Zeit hat der Eine[1] von uns unter dem Namen α-Naphtochinolin eine Base der Chinolinreihe beschrieben, welche entsteht, wenn α-Naphtylamin, α-Nitronaphtalin, Glycerin und Schwefelsäure erhitzt werden und die Zusammensetzung $C_{13}H_9N$ besitzt, daher vom Anthracen oder Phenanthren in derselben Weise abgeleitet werden kann, wie Chinolin vom Naphtalin, Pyridin vom Benzol, d. i. durch den Ersatz einer CH-Gruppe durch ein N-Atom.

Die Constitution des α-Naphtochinolins ist schon in Folge seiner Entstehung zweifellos die unten angeführte, also ähnlich der des Phenanthrens. Die Untersuchung seiner Oxydationsproducte hatte nun insofern grosses Interesse, als das α-Naphtochinolin einmal als Naphtalinderivat sich verhalten, also bei der Oxydation eine Chinolindicarbonsäure liefern könnte, analog der Bildung von Phtalsäure aus Naphtalin, das anderemal aber seine phenanthrenartige Structur sich Geltung verschaffen und aus demselben dann durch blosse Sauerstoffaddition eine Dicarbonsäure entstehen konnte, die mit der Diphensäure zu vergleichen wäre. Der erste Process verläuft, wenn in untenstehender Formel des Naphtochinolins die mit 1), der zweite, wenn die mit 2) bezeichneten C-Atome Carboxylgruppen liefern.



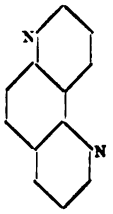
α-Naphtylamin



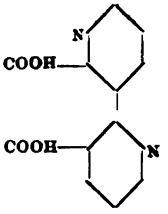
α-Naphtochinolin

[1] Monatshefte, II, 139.

Die letztere Möglichkeit war von vornherein besonders ins Aug' zu nehmen, da der Eine von uns in ähnlichem Falle, d. i. beim Phenanthrolin[1] aus *m*-Diphenylamin, das als Phenanthren mit zweimaligem Ersatz von CH durch N anzusehen ist, thatsächlich einen glatten Übergang in eine der Diphensäure analoge Verbindung, die Dipyridyldicarbonsäure beobachtet hat.



Phenanthrolin



Dipyridyldicarbonsäure

Doch war auch der erste Process nicht ganz unmöglich, da das Phenanthrolin ja nur einen, das α-Naphtochinolin aber zwei Benzolringe besitzt, also zweierlei bei der Oxydation relativ leicht angreifbare Atomgruppen.

Um unserer Arbeit einen allgemeineren Charakter zu geben, versuchten wir aus dem β-Naphtylamin eine dem α-Naphtochinolin isomere Base darzustellen, was in der That gelang und ist auch die Oxydation dieser neuen Chinolinbase vorgenommen worden, um die Constitution des zweiten, des β-Naphtochinolins womöglich festzustellen.

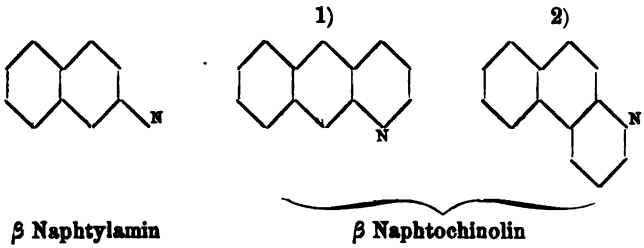
Die Bildung einer Chinolinbase aus dem β-Naphtylamin vermittelst der Glycerinreaction kann nämlich in zweifacher Art vor sich gehen, es ist im vorhinein ebenso gut die Entstehung eines in der Anordnung der C-Atome dem Anthracen ähnlichen Körpers zu erwarten, wie die eines phenanthrenartigen.

In Wirklichkeit bildet sich ein Körper der zweiten Formel, wie seine Untersuchung zweifellos nachwies. S. S. 1091.

Die Structur der beiden Naphtochinoline liess ferner hoffen, durch Abbau derselben zu Pyridincarbonsäuren von bekannter Stellung zu kommen und die wichtige Frage über Constitution der Monocarbonsäuren des Pyridins endgültig zu beantworten. Wir wollen uns hierüber erst weiter unten äussern.

---

[1] Monatshefte, III, 570.



β Naphtylamin β Naphtochinolin

Darstellung des β-Naphtochinolins.

Zur Gewinnung des β-Naphtochinolins haben wir, wie in vielen anderen Fällen, β-Naphtylamin, Glycerin und Schwefelsäure, dann aber Nitrobenzol verwendet, das als Oxydationsmittel ebenso dienen sollte, wie sonst die dem Amin correspondirende Nitroverbindung. Diese Abänderung war aus präparativen Gründen geboten und bot die Möglichkeit, zu prüfen, ob auch hier neben der Chinolinbase, herrührend aus dem Amin, dem erwarteten Naphtochinolin, eine zweite aus dem Nitrokörper entstehe, also Chinolin. Dass das Nitrobenzol bei der Chinolin-Glycerinreaction in vielen Fällen Verwendung finden kann, war, nebenbei bemerkt, schon lange festgestellt, bevor H. la Coste darüber Mittheilung gemacht hat.

Es sei gleich an dieser Stelle hervorgehoben, dass wir im Reactionsproduct vergeblich Chinolin zu fassen suchten, der Übergang vom Nitrokörper in das Chinolinderivat also nicht immer stattfindet.[1]

Folgende Vorschrift können wir als verlässlich empfehlen. 28 Grm. β-Naphtylamin, 13 Grm. Nitrobenzol, 50 Grm. Glycerin und 40 Grm. englische Schwefelsäure werden vor dem Rückflusskühler im Ölbad erhitzt, wobei die anfangs breiige Masse flüssig und braunschwarz gefärbt wird. Bei etwa 150° tritt eine lebhafte Reaction ein, während welcher der Kolben aus dem Bade gehoben wird, schliesslich erwärmt man auf 150—160°, im Ganzen fünf

[1] Aus Nitrobenzol entsteht Chinolin, wenn es gleichzeitig mit *m*-Amidobenzoesäure oder *p*-Phenylendiamin in die Glycerinreaction eingeht. Ebenso liefert *o*-Nitrophenol mit Anilin gemengt erheblich *o*-Oxychinolin.

Stunden, nach welcher Zeit das Nitrobenzol fast vollständig verschwunden ist.

Dem Kolbeninhalt setzt man das dreifache Volumen Wasser, dann eine concentrirte Lösung von 20 Grm. Ätzkali zu, filtrirt von den ausfallenden theerigen Massen ab und gewinnt aus dem lichtbräunlichen Filtrate das Naphtochinolin am besten derart, dass man es mit Äther überschichtet, unter Schütteln und guter Kühlung mit Ätzkali bis zur alkalischen Reaction versetzt, das im Äther gelöste Chinolinderivat sodann mit Pottasche trocknet und, nach Verjagen des Äthers am Wasserbade, über freiem Feuer destillirt. Über der Thermometergrenze destillirt ein fast farbloses, leicht erstarrendes Öl über, das durch nochmalige Destillation, am leichtesten und vollständigsten aber durch Überführung in das in Alkohol schwer lösliche Sulfat ganz rein erhalten wird.

Das β-Naphtochinolin ist, frisch dargestellt, nahezu farblos, kleinstrahlig krystallinisch, sehr leicht in Äther, Alkohol und Benzol löslich, leicht in verdünnten Säuren, sehr schwierig in Wasser löslich. Aus der kochend bereiteten wässerigen Lösung krystallisiren beim Erkalten kleine glänzende Schüppchen von schneeweisser Farbe. Sehr bald wird es aber röthlich oder gelblich bis lichtgelbbraun gefärbt, mit Wasserdampf ist es sehr schwer flüchtig, in der Kälte riecht es fast gar nicht, in der Wärme intensiv doch nicht unangenehm, dem α-Naphtochinolin äusserst ähnlich. Es schmilzt bei 90° uncorr. und erstarrt leicht wieder krystallinisch. Ganz reine Substanz ist nahezu unzersetzt destillirbar. Die alkoholische Lösung färbt sich auf Zusatz von Eisenchlorid braun, allmälig fallen braune eisenhydroxydähnliche Flocken aus, Eisenvitriol verändert nicht, Silbernitrat bewirkt eine gallertartige, beim Schütteln krystallinisch werdende Füllung, die in heissem Wasser ziemlich leicht, aber nicht ohne Zersetzung löslich ist. Kupferacetat färbt olivengrün, bei weiterem Zusatz smaragdgrün, endlich wird die Flüssigkeit trübe und es fallen hübsche grüne Kryställchen, anscheinend Prismen aus.

0·2533 Grm. über Schwefelsäure getrocknet gaben bei der Elementaranalyse 0·8083 Grm. CO_2 und 0·1184 Grm. H_2O.

Berechnet für $C_{13}H_9N$	Gefunden
C .....87·15	87·02
H ..... 5·03	5·19.

Zur weiteren Charakterisirung der neuen Base haben wir einige Salze derselben dargestellt.

Salzsäureverbindung. Aus der mit concentrirter Salzsäure versetzten Lösung der Base in Alkohol krystallisiren lange spröde Nadeln von weisser Farbe, mit schwachem Stich ins Gelbe. Sie sind in Wasser sehr leicht löslich, nicht aber zerfliesslich, sehr schwer in Alkohol löslich. Im Röhrchen erhitzt, sublimiren und destilliren sie unter schwacher Salzsäureentwicklung, das Sublimat ist in Wasser vollständig löslich.[1] Die Krystalle enthalten Wasser, das beim Trocknen bei 100° entweicht, wobei aber auch schon geringe Zersetzung und Verflüchtigung der Trockensubstanz wahrzunehmen ist. Auf die Bestimmung des Krystallwassers wurde desshalb verzichtet.

1) 0.6352 Grm. lufttrocken analysirt gaben 0.3570 Grm. AgCl.
2) 0.4251 „ „ „ „ 0.2480 „ „ „

	Berechnet für $C_{13}H_9N.HCl+2H_2O$	Gefunden 1.	2.
ClH	14.11	13.91	13.85 Proc.

Das Platindoppelsalz ist ein röthlichgelber, krystallinischer Niederschlag, der in Wasser nicht, in Salzsäure sehr schwer löslich ist.

0.2518 Grm. verloren bis 110° getrocknet 0.0052 Grm. und hinterliessen 0 0632 Grm. Pt.

	Berechnet für $(C_{13}H_9N)_2H_2Cl_6Pt+H_2O$	Gefunden
H_2O	2.29	2.07
Pt	24.84	25.09.

Das Chromat ist ein gelber krystallinischer Niederschlag, der auf Zusatz wässeriger Chromsäurelösung zur Lösung der Base in verdünnter Schwefelsäure ausfällt. In vollkommen reinem Zustande kann es, ohne Veränderung zu erleiden, mit Wasser

[1] Darnach löst sich das in Wasser nicht lösliche β-Naphtochinolin in den Lösungen seiner Salze klar auf, wie dies bei ähnlichen Basen schon oft beobachtet worden ist.

gekocht werden, war jedoch die Base verunreinigt, zersetzt es sich beim Kochen, ja schon bei Darstellungen in der Wärme. Die kochend gesättigte Lösung trübt sich beim Erkalten ölig, ein Theil der gelösten Substanz fällt als erstarrendes Harz aus, ein anderer setzt sich später in hellgelben kurzen Prismen an.

Zur Analyse kam luftrockene Substanz.

1) 0·2034 Grm. gaben 0·0533 Grm. Cr_2O_3
2) 0·3615 „ „ 0·0958 „ „ „

Berechnet für $(C_{13}H_9N)_2H_2Cr_2O_7$	Gefunden 1.	2.
Cr.....18·34	18·04	18·24

Pikrinsäureverbindung. In der üblichen Weise dargestellt, ist sie ein lichtgelber krystallinischer Niederschlag, der in Alkohol und Benzol selbst in der Hitze schwer löslich ist, beim Erkalten in feinen Prismen ausfällt, die unter vorhergehender Dunklerfärbung bei 251 — 252 uncorr. schmelzen.

Jodmethylverbindung. Die in der 12fachen Menge Äther gelöste Base, mit etwas überschüssigem Jodmethyl versetzt (das $1^1/_2$fache der theoretischen Menge), scheidet nach und nach feine, grüngelbe Nadeln ab, deren Menge nach drei Tagen sich nicht mehr vermehrt, trotzdem ein grosser Theil des Naphtochinolins noch unverändert ist. Um anhaftende Base zu entfernen, werden die Nadeln wiederholt aus Wasser krystallisirt und dann von lichtgelber Farbe erhalten. Sie schmelzen unter Braunfärbung bei 200 — 205°, enthalten Krystallwasser, das bei 100° unter Dunkelfärbung entweicht und fluoresziren in Lösung schwach blau.

0·2500 Grm. verloren 0·0259 Grm. H_2O.
0·2234 „ Trockensubstanz gaben 0·1650 Grm. Ag J.

Berechnet für $C_{13}H_9N,CH_3J+2H_2O$	Gefunden
H_2O.....10·09	10·36

Berechnet für $C_{13}H_9N,CH_3J$	Gefunden
J.....39·56 Proc.	39·91.

Oxydation des β-Naphtochinolins.

Die kochende Lösung des β-Naphtochinolins in verdünnter Schwefelsäure wird nach Zusatz einer nicht zu kleinen Menge von Chromsäure allmälig oxydirt, die weiter zugesetzte Chromsäure dann ziemlich rasch verbraucht. Die Oxydation geht aber sehr wenig glatt vor sich, da ein Theil der Base unverändert bleibt, ein anderer total verbrennt und nur ein kleiner Rest in das unten beschriebene Oxydationsproduct verwandelt wird. In einem Versuche kamen pro Mol. Base 90 zur Wirkung, trotzdem war die Hälfte jener wiederzugewinnen.

Versuche, ein intermediäres Oxydationsproduct zu gewinnen, blieben ganz resultatlos, selbst als genau die Verhältnisse eingehalten wurden, unter denen, wie weiter unten beschrieben ist, aus α-Naphtochinolin sehr glatt ein chinonartiger Körper entsteht.

Ziemlich glatt dagegen wird das β-Naphtochinolin von Kaliumpermanganat oxydirt, vorausgesetzt, dass dieses in verdünnter Lösung und bei mittlerer Temperatur einwirkt und geht es dann ohne nachweisbare Nebenproducte in eine gut krystallisirte Dicarbonsäure über, deren Zusammensetzung $C_{13}H_9NO_4$ ist, die also durch blosse Aufnahme von 4O entstanden ist.

Die besten Ausbeuten resultirten, als auf je 5 Grm. Base in etwa 700 Grm. Wasser vertheilt, bei etwa 40—50° nach und nach eine kaltgesättigte Lösung von 12 Grm. $KMnO_4$ in Wirkung kam. Die Vertheilung der Base ist am bequemsten durch Schmelzen unter Wasser, Abkühlen und Schütteln zu bewerkstelligen. Die Entfärbung der Chamäleonlösung geht ziemlich rasch vor sich, in der Regel wird sie schon bei Zusatz des letzten Antheiles sehr auffällig langsam, immer aber wenn allenfalls noch 10—20 CC. überschüssiger Permanganatlösung zugegossen werden.

Die vom Manganniederschlag durch Decantation, wiederholtes Auskochen und endlich durch Pressen getrennte Lösung des Oxydationsproductes riecht trotzdem noch stark nach unveränderter Base, die beim Concentriren dann ausfällt, aber so nur in Spuren wiedergewonnen wird. Die Abscheidung der Säure haben wir in verschiedener Weise versucht, immer aber erst dann, nachdem die organischen Kalisalze nach Neutralisation mit Schwefelsäure durch Alkohol vom Kaliumsulfat getrennt waren.

Wir können dabei die Bemerkung nicht unterlassen, dass es häufig nicht nur überflüssig, sondern auch direct nachtheilig ist, in ähnlichen Fällen zur Trockene zu dampfen und dann die Salzmasse mit Alkohol zu extrahiren und dass die Trennung vollständiger und leichter geschieht, wenn aus der concentrirten Lösung das Kaliumsulfat durch Zusatz von etwas mehr als dem gleichen Quantum Alkohol ausgefällt wird, da ja doch viele Kalisalze und fast alle der Säuren in der Pyridin- und Chinolinreihe in absolutem Alkohol äusserst schwer, dagegen in verdünntem ziemlich leicht löslich sind, anderseits Kaliumsulfat in verdünntem Alkohol so gut wie nicht gelöst bleibt.

Die durch Destillation vom Alkohol befreite Lösung des Kalisalzes gibt mit Silber und Bleisalzen Niederschläge, die mit SH_2 zerlegt, die entstandene Säure liefern; da die Metallsalze in Wasser merklich löslich sind, ist diese Methode aber nicht vortheilhaft. Kupfer kann man zur Ausfällung aus weiter unten stehendem Grunde schon gar nicht verwenden, es ist daher am einfachsten, das Kalisalz vorsichtig mit Salzsäure zu versetzen, worauf die schwerlösliche Säure in wenig gefärbten Krystallkörnern ausfällt. Die Mutterlauge wird unter Zusatz von etwas Salzsäure eingedampft, mit Alkohol die Salzsäureverbindung der Säure ausgezogen, die dann mit Wasser in ihre Bestandtheile zerlegt wird. Durch blosses Umkrystallisiren der Säure aus Wasser wird sie selbst unter Zufügung von Thierkohle schwierig weiss erhalten. Direct weisse Säure entsteht, wenn die verdünnte alkoholische Lösung des rohen Kalisalzes durch Eindampfen bis zum Syrup und Vermischen mit Alkohol zur Krystallisation gebracht und die mit Alkohol gewaschenen Krystalle des gereinigten Salzes zerlegt werden. Diese mit Verlust verbundene Reinigung ist aber weniger bequem, als wenn man die rohe Säure in ihre in verdünnter Salzsäure schwer lösliche Salzsäureverbindung überführt, dieselbe durch einmaliges Umkrystallisiren reinigt und sie dann mit Wasser zerlegt.

Einmaliges Umkrystallisiren der ausgeschiedenen feinkörnigen Säure aus Wasser unter Zusatz von etwas Thierkohle liefert sie dann absolut rein.

Die Ausbeute an mit Salzsäure direct ausgefällter Säure betrug in einem Falle aus 65 Grm. Base 58 Grm. Säure, d. i. über

60 Procent der theoretisch möglichen Menge. Als zuvor reines Kalisalz dargestellt und dieses mit Salzsäure zersetzt wurde, betrug die Ausbeute nicht ganz 50 Procent.

Die Säure wollen wir β-Phenylpyridindicarbonsäure nennen, um einerseits ihre Constitution auszudrücken, wie sie bei weiterer Untersuchung erkannt wurde, anderseits aber auch die Entstehung aus dem β-Naphtochinolin.

Sie ist in reinem Zustande absolut farblos, in kaltem Wasser schwer, ziemlich leicht in heissem löslich, ähnlich auch in Alkohol. Aus Wasser erhält man sie in farblosen, zackigen, unregelmässigen Krystallen, die häufig weiss und undurchsichtig sind, aus Alkohol krystallisirt sie in kurzen wasserklaren, besser gestalteten Prismen.

Äther, Benzol lösen äusserst schwierig. Die wässerige Lösung der Säure wird auf Zusatz von Eisenvitriol orangeroth gefärbt, von Eisenchlorid gelblichweissflockig gefällt; der Niederschlag ist im Überschusse des Fällungsmittels und in Soda löslich, aus letzterer Lösung fallen später braune Flocken. Kupferacetat bringt sehr vorsichtig zugesetzt einen anfangs beim Schütteln wieder verschwindenden bläulichen Niederschlag hervor, der endlich bleibend wird, sich dann rothviolett färbt, in geringem Überschusse von Kupferacetat, besonders aber in der Wärme sich sehr leicht zur prächtig azurblauen Flüssigkeit löst. Aus dieser fallen dann mitunter nach mehreren Tagen lichtgrüne Krystallwärzchen aus. Silbernitrat gibt gleichfalls erst im Überschusse zugesetzt einen weissen krystallinischen, sehr schwer löslichen Niederschlag. Bromwasser scheidet nach kurzer Zeit lichtgelbe Krystalle aus; eine ähnliche Verbindung entsteht, wenn feste Säure mit Brom am Wasserbade erwärmt wird. Es hinterbleibt dabei eine gelbe krystallinische Masse, die am Wasserbad erwärmt, nur schwach nach Brom riecht, dieses aber auch bei längerem Trocknen grösstentheils festhält. In kochendem Wasser löst sie sich unter Entwicklung von Bromdampf farblos auf, beim Erkalten krystallisirt unveränderte Säure. Ebenso erfolglos wie dieser Bromirungsversuch war der, die Nitrogruppe einzuführen; auch aus der Lösung in rauchender Salpetersäure gewinnt man die Säure vollständig unverändert wieder. In beiden Fällen erhält man Säure von grosser Reinheit, so dass das Verhalten gegen Salpetersäure

und Brom bei Reindarstellung der Säure mit grossem Vortheil zu benützen ist.

Die β-Phenylpyridindicarbonsäure schmilzt im Capillarrohr bei 207 uncorr, am Platinblech erhitzt, schmilzt sie unter Aufschäumen, verbreitet aromatisch nicht nach Pyridin riechende Dämpfe und hinterlässt sehr wenig Kohle. Sie schmeckt schwach und unangenehm sauer. Ihr Verhalten beim Erhitzen wird weiter unten noch besprochen werden.

Um ihre Reactionen mit Metallsalzen festzustellen, lösten wir 1 Grm. Säure als neutrales Ammonsalz in 50 CC. Wasser auf. Diese Lösung reagirt wie folgt mit:

Chlorcalcium: Erst nach langem Stehen feine federartig verzweigte Nadeln.
Chlorbaryum: Nach noch längerer Zeit weisse kurze Prismen.
Eisenvitriol: Dunkelorangerothe Färbung, bald darauf braune Trübung.
Eisenchlorid: Gelblichen Niederschlag.
Nickelsulfat: Lichtblaue Färbung. Bei weiterem Zusatz grünlichblaue Fällung die beim Kochen gelöst, nach dem Erkalten in chromchloridähnlichen Schüppchen wieder abgeschieden wird.
Kobaltnitrat: Färbt anfangs lichtgelb, dann rosa.
Silbernitrat: Gelblichweisse Fällung, beim Kochen krystallinisch werdend.
Bleizucker: Ebenso.
Kupferacetat: Reagirt genau so wie mit freier Säure.
Quecksilberchlorid: Weisser flockiger Niederschlag, der sich beim Erhitzen anfangs löst, dann aber während dem Kochen krystallinisch ausfällt.
Quecksilberoxydulnitrat: Reagirt wie Blei- und Silbersalze.

Sämmtliche Niederschläge werden erst bleibend, wenn eine gewisse Menge des Fällungsmittels zugesetzt worden ist.

0·2444 Grm. bei 100° getrockneter Säure gaben 0·5716 Grm. CO_2 und 0·0858 Grm. H_2O.

0·5014 Grm. bei 100° getrockneter Säure gaben 23·5 CC. N bei 753 Mm. und 20·5° C.

	Berechnet für $C_{13}H_9NO_4$	Gefunden
C	64·19	63·78
H	3·70	3·90
N	5·76	5·27.

Die lufttrockene Substanz enthält 1 Molekül Krystallwasser, das bei 100° vollständig entweicht.

0·2717 Grm. verloren 0·0170 Grm. H_2O.

Berechnet für $C_{13}H_9NO_4+H_2O$	Gefunden
H_2O.....6·89	6·25.

Salze der β-Phenylpyridindicarbonsäure.

Neutrales Kaliumsalz. $C_{13}H_7K_2N_2O_4+3H_2O$. Die mit Ätzkali neutralisirte Säurelösung dunstet über Schwefelsäure zu einer glasigen Masse ein, die mit Alkohol übergossen aber bald in ein krystallinisches weisses Pulver zerfällt, das unter dem Mikroskop Blättchen zu erkennen gibt und durch Waschen mit Alkohol von der Mutterlauge leicht zu befreien ist, da es zwar in Wasser sehr leicht, in Alkohol aber fast nicht löslich ist. Das Salz enthält Krystallwasser, das über 300 erst vollständig entweicht und kann bis 360 erhitzt werden, ohne Zersetzung zu erleiden.

0·2497 Grm. bis 300° getrocknet, verloren 0·0364 Grm. H_2O und gaben 0·1157 Grm. K_2SO_4.

Berechnet	Gefunden
$3H_2O$.....14·47	14·58
K.....20·96	20·80.

Saures Kaliumsalz. $C_{13}H_8KN_2O_4+2H_2O$. Dasselbe wird ganz so wie das Neutralsalz in mikroskopischen Blättchen erhalten, die sich auch in der Löslichkeit von jenem nicht unterscheiden. Es enthält Krystallwasser, das grösstentheils bei 120°, vollständig aber erst bei 170° entweicht.

0·2270 Grm. gaben bis 170° erhitzt 0·0260 Grm. H_2O und lieferten dann 0·0610 K_2SO_4.

Berechnet	Gefunden
$2H_2O$.....11·36	11·45
K.....12·35	12·06.

Neutrales Calciumsalz. $C_{13}H_7CaNO_4+3H_2O$. Das Calciumsalz bleibt trotz seiner relativen Schwerlöslichkeit lange in Lösung und kann desshalb auch durch Neutralisation der in kochendem Wasser suspendirten Säure mit Calciumcarbonat oder Kalkmilch dargestellt werden; bei starkem Concentriren fällt es

dann in glänzenden Prismen aus, die, einmal gebildet, sich auch in kochendem Wasser schwer lösen. Mitunter dampft seine Lösung glasig ein und krystallisirt es dann bei ruhigem Stehen erst allmälig, rasch aber beim Verreiben mit schon fertigen Krystallen.

Das Krystallwasser entweicht erst bei 240° vollständig.

0·2112 Grm. verloren bei 240° 0·0334 Grm. H_2O und gaben 0·0853 Grm. $CaSO_4$.

	Berechnet für $C_{13}H_7NO_4$	Gefunden
Ca	14·24	14·11
$3H_2O$	16·12	15·81.

Das neutrale Baryumsalz, $C_{13}H_7BaNO_4 + 4^1/_2H_2O$, wird so erhalten, wie für das Calciumsalz beschrieben ist, krystallisirt in langgestreckten mikroskopischen Täfelchen und löst sich beim Kochen mit Wasser unschwer wieder auf.

0·3352 Grm. gaben 0·3864 Grm. CO_2, 0·1041 Grm. H_2O und 0·1434 Grm. $BaCO_3$.

0·2333 Grm. bis 250° getrocknet, verloren 0·0399 Grm. H_2O.

	Berechnet für $C_{13}H_7BaNO_4 + 4^1/_2H_2O$	Gefunden
C	33·99	34·04
H	3·48	3·45
Ba	29·63	29·75
$4^1/_2H_2O$	17·64	17·10.

Silbersalz. Die heisse wässerige Lösung der Säure mit soviel Silbernitrat vermischt, als sich für Bildung des Neutralsalzes berechnet, lässt beim Erkalten kleine dicke Blättchen fallen, die in Wasser schwer löslich und nach ihrer Zusammensetzung weder Neutral- noch saures Salz, sondern ein übersaures Salz der Zusammensetzung $C_{13}H_8AgNO_4 + C_{13}H_9NO_4$ sind, für welche die Analyse, mit Ausnahme des zu hoch gefundenen C-Gehaltes gut stimmt.

0·2586 Grm. lufttrocken analysirt, gaben 0·5081 Grm. CO_2, 0·0711 Grm. H_2O und 0·0470 Grm. Ag.

	Berechnet	Gefunden
C	52·61	53.59
H	2.87	3.05
Ag	18·21	28·17.

Kupfersalze. Setzt man zur Lösung des neutralen Ammonsalzes unter sehr gelindem Erwärmen vorsichtig Kupferacetat zu, so dass kein Überschuss verbraucht wird, was daran zu erkennen ist, dass die obenstehende Flüssigkeit dann kaum gefärbt ist, erhält man einen lichtgrünen, krystallinisch werdenden Niederschlag, der seine Farbe weder bei weiterem Stehen, noch beim Trocknen verändert. In Wasser ist er gar nicht, in Kupferacetat dagegen leicht, und zwar mit blauer Farbe löslich.

0·2818 Grm. lufttrockene Substanz gaben 0·4166 Grm. CO_2, 0·0987 Grm. H_2O und 0·0606 Grm. CuO.

Diese Zahlen stimmen annähernd mit denen überein, die für ein Neutralsalz mit 4 Mal H_2O sich berechnen:

	Berechnet für $C_{18}H_7CuNO_4+4H_2O$	Gefunden
C	41·46	40·32
H	3·99	3·89
Cu	16·82	17·17.

Ein anderes Kupfersalz von schön lichtvioletter Farbe und das zweifellos identisch ist mit dem gleich gefärbten, welches aus dem Ammonsalz mit schon etwas überschüssigem Kupferacetat entsteht, kann man durch vorsichtiges Eintragen von feingeschlämmten Kupferoxyd in kochende Säurelösung erhalten; die Darstellung desselben ist oft spielend leicht, manchmal ballt sich das Salz so zusammen, dass auch ein grosser Säureüberschuss das Kupferoxyd nicht ganz löst.

Die zwar nicht scharfstimmenden Analysendaten lassen doch keinen Zweifel, dass eine Verbindung von 1 Molekül Neutralsalz mit 1 Molekül saurem Salz vorliegt.

0·2906 Grm. lufttrocken analysirt, gaben 0·5366 Grm. CO_2, 0·0866 Grm. H_2O und 0·0512 Grm. CuO.

	Berechnet für $C_{18}H_7CuNO_4+(C_{18}H_9NO_4)_2Cu$	Gefunden
C	54·67	55·06
H	2·69	3·31
Cu	14·71	14·06.

Die β-Phenylpyridindicarbonsäure gibt auch Salze, in denen sie die Rolle der Base spielt; das Chlorhydrat und Chloroplatinat sind ausführlicher untersucht worden.

Die Salzsäureverbindung $C_{13}H_9NO_4$,HCl krystallisirt aus der heiss bereiteten Lösung der Säure in mässig verdünnter Salzsäure beim Erkalten in kleinen Krystallkörnern, die in Salzsäure sehr schwer, in wenig Wasser leicht und unverändert löslich sind, dann wieder in hübschen wasserklaren Prismen auskrystallisiren, in viel Wasser gelöst aber allmälig die freie Carbonsäure abscheiden. Absoluter Alkohol löst sie ziemlich schwierig, sie krystallisirt wasserfrei.

0·2674 Grm. lufttrocken analysirt, gaben 0·1369 Grm. AgCl.

	Berechnet für $C_{13}H_9NO_4$,HCl	Gefunden
HCl	13·05	13·02.

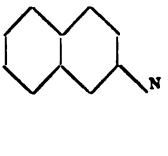
Das Platindoppelsalz bildet sich beim Stehen der vermischten Lösung von Chlorhydrat und Platinchlorid im Exsiccator als gelbes krystallinisches Pulver, das merklich in kaltem, sehr leicht in heissem Wasser löslich ist, auch ziemlich leicht in Alkohol. Aus der heissen wässerigen Lösung fällt es beim Erkalten als gelbes Öl aus, das erst nach langem Stehen in Krystalle übergeht.

0·2646 Grm. verloren bei 105° 0·0122 Grm. H_2O und hinterliessen 0·0546 Grm. Pt.

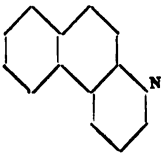
	Berechnet für $(C_{13}H_9NO_4)_2H_2Cl_6Pt+2^1/_2H_2O$	Gefunden
H_2O	4·78	3·61
Pt	20·72	20·64.

Die glatte Überführung des β-Naphtochinolins in eine Dicarbonsäure der Formel $C_{13}H_9NO_4$ spricht entschieden dafür, dass die Constitution des ersteren eine phenanthrenartige und die β-Phenylpyridindicarbonsäure als eine Diphensäure der Pyridinreihe aufzufassen ist.

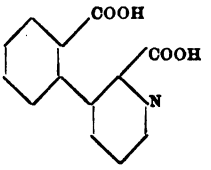
Der Zusammenhang von β-Naphtylamin, β-Naphtochinolin und β-Phenylpyridindicarbonsäure wird durch nachstehende Formeln ausgedrückt:



β-Naphtylamin



β-Naphtochinolin



β-Phenylpyridindicarbonsäure

die Entstehung der Säure durch die Gleichung

$$\underbrace{C_{13}H_9N}_{\beta\text{-Naphtochinolin}} + O_4 = C_{13}H_9NO_4.$$

β-Phenylpyridinmonocarbonsäure.

Bei vorsichtigem Erhitzen der eben beschriebenen Dicarbonsäure in einem Proberohre destillirt unter Kohlensäureentwickelung ein gelbes Öl in den kälteren Rohrtheil über, das bald fest glasig wird und erst nach langem Stehen krystallisirt, rasch aber wenn es in weichem Zustand mit einem Glasstab gerieben wird. Kohle scheidet sich dabei fast gar nicht ab. In Alkohol löst sich das Öl mit gelber Farbe leicht auf, die sauer reagirende Lösung scheidet beim Erkalten weiche weisse Nadeln einer Monocarbonsäure des Phenylpyridins ab, die wir folgendermassen in grösserer Menge erhielten.

8·31 Grm. wasserfreier Dicarbonsäure wurden in einem Ölbade allmälig erhitzt. Bei 180° verflüssigte sich der Kolbeninhalt, und es begann die Entwickelung von Kohlensäure, die gegen 185° lebhafter wurde und nach etwa einer Stunde bei derselben Temperatur aufhörte. Die entweichende Kohlensäure passirte ein Chlorcalciumrohr und einen Kaliapparat, die Gewichtszunahme der Kalilauge betrug 1·42 Grm., der Gewichtsverlust der Dicarbonsäure war 1·57 Grm.

Für den Verlust von 1 Molekül CO_2 berechnen sich dagegen 1·50 Grm. Wasser bildete sich nur in sehr kleinen Mengen, im

oberen Kolbentheil setzten sich Nadeln an, die mit dem geschmolzenen Kolbeninhalt aber identisch sind. Nicht in Kalilauge lösliche Gase waren nicht zu bemerken. Die geschmolzene Masse war braun gefärbt, enthielt aber nur wenige kohlige Flocken, wie beim Lösen zu sehen war. Der Verlauf der Reaction ist also sehr glatt.

Beim Kochen der erstarrten Masse mit viel Wasser geht bis auf wenige Flocken alles in Lösung.

Die wässerige Lösung scheidet beim Concentriren zunächst ein ockergelbes krystallinisches Pulver, ein Gemenge von der Monocarbonsäure mit einem harzigen Körper, dann weisse Krystalle der fast reinen Säure in langen spröden Prismen ab. Dieselben werden durch zweimaliges Umkrystallisiren aus Alkohol vollständig rein erhalten.

Die β-Phenylpyridinmonocarbonsäure krystallisirt aus Alkohol in weichen weissen Krystallfäden, aus Wasser in spröden Nadeln, mitunter auch in grossen kurzen Prismen, die einmal auch aus verdünnt alkoholischer Lösung unreiner Substanz anschossen. Kaltes Wasser löst spärlich, weit mehr heisses, am reichlichsten Alkohol. Sie schmilzt bei 185° zu einer klaren Flüssigkeit, ihre wässerige Lösung wird durch Eisenvitriol nicht, von Eisenchlorid bräunlich gelb gefärbt, die letztere Lösung trübt sich beim Kochen. Der lichtblaue Niederschlag durch Kupfercetat löst sich anfänglich beim Schütteln wieder, wird bald nach seiner vollständigen Ausfällung schwer krystallinisch und schön licht röthlich violett gefärbt. Die durch Silbernitrat endlich entstehende Fällung wird in der Hitze theils harzig, theils gelöst, beim Erkalten dann wieder abgeschieden und ist ziemlich lichtempfindlich.

Die Säure enthält kein Krystallwasser; sie ist vollständig unzersetzt destillirbar, erstarrt glasig, wird aber beim Reiben mit einem Glasstab krystallinisch, die wässerige Lösung lässt auf Bromzusatz gelbe krystallinische Flocken fallen, die beim Kochen, besonders wenn etwas Alkohol zugesetzt wird, unter Bromverlust sich wieder lösen, dabei färbt sich die Flüssigkeit etwas grünlich.

Die Analyse bestättigte die in Folge der Entstehung wahrscheinliche Formel.

1) 0·2273 Grm. gaben 0·6006 Grm. CO_2 und 0·0912 Grm. H_2O.
2) 0·2268 „ „ 0·6021 „ „ „ 0·0917 „ „

	Berechnet für $C_{12}H_9NO_2$	Gefunden 1)	2)
C	72·36	72·06	72·40
H	4·52	4·46	4·49.

Das Calciumsalz kann vermittelst Calciumcarbonat bereitet werden, da es auch in kaltem Wasser leicht, noch reichlicher in heissem löslich ist. Aus der stark concentrirten Lösung schiesst es in seidenglänzenden feinen langen Nadeln an. Sein Krystallwasser entweicht schon bei 130°, erst bei 250° beginnt es sich schwach zu bräunen.

0·1846 Grm. lufttrockene Substanz verloren bis 130° 0·0184 Grm. H_2O und hinterliessen 0·0516 Grm. $CaSO_4$.

	Berechnet für $(C_{12}H_8NO_4)_2Ca+2H_2O$	Gefunden
H_2O	7·62	7·26
Ca	8·47	8·22.

Kupfersalz. Diese schöne Verbindung ist oben schon beschrieben worden. Es ist in Wasser nicht löslich und anscheinend krystallwasserhältig, bei 170° noch vollständig, auch in der Farbe, unverändert.

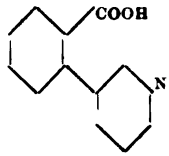
0·2023 Grm. bei 100° getrocknet, hinterliessen 0·0354 Grm. DuO.

	Berechnet für $(C_{12}H_8NO_4)_2Cu$	Gefunden
Cu	13·72	13·95

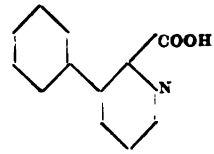
0·2078 Grm. lufttrockene Substanz verloren bei 100° 0·0055 Grm. H_2O = = 2·64 Proc.
½ Molekul Krystallwasser verlangt 1·92, 1 Molekul Wasser 3·77 Procent Gewichtsverlust.

Die Aufarbeitung der Mutterlaugen der β-Phenylpyridindicarbonsäure lieferte stets neue Krystallisationen der beschriebenen Säure, so dass eine zweite Monocarbonsäure in nachweisbaren Mengen nicht entstanden ist.

Nachdem von den zwei Carboxylgruppen der β-Phenylpyridindicarbonsäure eine an Phenyl, die andere am Pyridinrest gebunden ist, könnten aus jener aber zwei verschiedene Monocarbonsäuren entstehen, von denen eine phenylirte Pyridinmonocarbonsäure, die andere eine Pyridylbenzoësäure wäre.



Pyridylbenzoesäure.



Phenylpyridinmonocarbonsäure.

Ob die von uns erhaltene Säure die eine oder die andere Constitution besitzt, konnte möglicherweise durch Oxydation derselben ermittelt werden, da bei Zerstörung des Phenylrestes eine phenylirte Pyridinmonocarbonsäure in eine zweibasische Säure, die Chinolinsäure $C_7H_5NO_4$, eine Pyridylbenzoësäure aber in eine Monocarbonsäure des Pyridins übergehen sollte.

Oxydation der β-Phenylpyridinmonocarbonsäure.

Salpetersäure greift die Monocarbonsäure auch bei längerem Kochen kaum an. 2 Grm. mit etwa 80 Grm. Salpetersäure in einer Retorte durch etwa 4 Stunden gekocht hinterliessen nach dem Abdestilliren und Eindampfen die unveränderte Säure von untadelhafter Weisse, so dass auf diese Art gefärbte Substanz leicht und ohne Verlust gereinigt werden kann.

Auch Kochen mit Königswasser verändert die Säure fast gar nicht. Die aus der Salpetersäurelösung rückgewonnene Substanz innerhalb sechs Stunden mit 600 Grm. eines Gemisches von gleichen Theilen concentrirter Salz- und Salpetersäure zweimal auf einen kleinen Rest abdestillirt, eingedampft und mit Natriumacetat versetzt lieferte 1·6 Grm. unveränderte Säure.

Besser greift sehr concentrirte Chromsäure an.

Die 1·6 Grm. Säure mit 10 Grm. Schwefelsäure und der nöthigen Menge Wasser auf etwa 40 CC. gebracht, zum Kochen erhitzt und mit 7 Grm. CrO_3 (6·5 CrO_3 berechnen sich theoretisch) in etwa 20 CC. H_2O gelöst, versetzt, färbten sich bald braun. Die Oxydation währte etwa 8 Stunden und wurde jedesmal als durch

einige Zeit eine weitere Farbenveränderung nicht beobachtet werden konnte, die Flüssigkeit durch Abdestilliren concentrirt, so dass zum Schluss das Volumen etwa 25 CC. betrug. Die grüngelbe Flüssigkeit wurde mit SO_2 vollständig reducirt, mit möglichst wenig überschüssigem Kaliumcarbonat das Chrom ausgefällt, das farblose Filtrat genau neutralisirt, bis zur Ausscheidung von Kaliumsulfat eingeengt noch heiss mit etwas mehr als dem gleichen Quantum Alkohol vermischt, die alkoholische Lösung vom Kaliumsulfat abfiltrirt, abdestillirt und auf einen kleinen Rest gedampft. In gelinder Wärme schied sich bei allmäligem Zusatz von Kupferacetat anfangs ein pulveriges grünlichblaues Kupfersalz ab, dem sich später geringe Mengen eines gelbgrünen beimischten. Dasselbe mit SH_2 zersetzt gab ein farbloses Filtrat, aus dem nach Concentration im Wasserbad kleine weisse Prismen anschossen, die in Löslichkeit in Wasser Form und Geruch mit der Nicotinsäure vollständig übereinstimmten bei 230—231 sich verflüssigten, nun ein blaugrünes Kupfersalz lieferten, das in Farbe und Form mit dem der Nicotinsäure ganz identisch ist und die in wenig Salzsäure gelöst und mit Platinchlorid vermischt nach mehrtägigem Stehen grosse Tafeln einer Platindoppelverbindung abschieden, die mit der aus Nicotinsäure zum Verwechseln ähnlich ist.

Das Filtrat der ersten Krystallisation enthält gleichfalls noch Nicotinsäure, die den Schmelzpunkt 231 zeigte, für sich am Platinblech erhitzt, fast ohne Rückstand sich verflüchtigte und dabei nicht nach Pyridin roch, deren Kalisalz aber beim Erhitzen den Geruch deutlich zeigte.

Herr Dr. Brezina theilte freundlichst mit, dass er bei Messung unserer Platindoppelverbindung genau die Zahlen fand, welche das Nicotinsäuredoppelsalz sonst liefert. Die Analyse desselben zeigte gleichfalls dass Nicotinsäure vorlag.

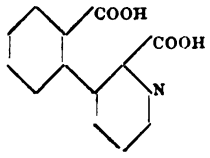
0·2388 Grm. Substanz verloren bei 100°[1] 0·0142 Grm. H_2O und hinterliess 0·0660 Grm. Pt.

---

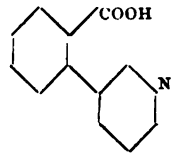
[1] Laiblin gibt an, dass das Platinsalz der Nicotinsäure erst gegen 110° das Wasser abgibt, was nicht ganz richtig, für die Picolinsäure aber giltig ist, ein Unterschied, auf den bisher nicht aufmerksam gemacht wurde.

	Berechnet auf $(C_6H_5NO_2)_2H_2Cl_6Pt$	Gefunden
Pt	29·72	29·38
$+2H_2O$	5·20	5·95.

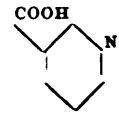
Die Monocarbonsäure geht bei der Oxydation also fast ohne Nebenproducte in eine Monocarbonsäure des Pyridins über, ein Zerfall der durch die Annahme erklärt werden kann, dass jene Carboxylgruppe der Dicarbonsäure, die beim Schmelzen entwich, vom Pyridinrest losgelöst worden ist, und bei der darauffolgenden Oxydation der Phenylrest unter totaler Zerstörung in eine Carboxylgruppe überging, die mit dem Pyridin verbunden blieb.



β-Phenylpyridindicarbons.



β-Phenylpyridinmonocarbonsäure.



Nicotinsäure.

Der Nicotinsäure käme darnach die Stellung 1, 3 zu, N gleich 1 gesetzt, so wie es der Eine von uns vor längerer Zeit,[1] gestützt auf das Verhalten der Pyridinpolycarbonsäuren bei der trockenen Destillation, und auf das verschiedene Verhalten der drei Monocarbonsäuren des Pyridins als sehr wahrscheinlich angenommen hatte.

Immerhin liesse sich dagegen der Einwand erheben, beim Schmelzen der Dicarbonsäure des Phenylpyridins entweicht die Carboxylgruppe vom Benzolring, die Monocarbonsäure enthält die COOH Gruppe am Pyridinrest, geht also bei der Oxydation in eine Dicarbonsäure des Pyridins über, u. zw. in die Chinolinsäure deren COOH-Gruppen zweifellos die Stellung (N = 1) 2, 3 besitzen und diese wäre unter Abspaltung von CO_2 in eine Monocarbonsäure umgewandelt worden, deren Stellung ebenso gut 1, 2 wie 1, 3 sein könnte. Dass diese Möglichkeit ausgeschlossen, und die obigen Betrachtungen über Constitution der Phenylpyridinmono-

[1] Monatshefte, I. 800.

carbonsäure und der Nicotinsäure richtig sind, wird später durch die Oxydation des Phenylpyridins bewiesen.

β-Phenylpyridin.

Wenn das Kalksalz der β-Phenylpyridindicarbonsäure mit Ätzkalk gemischt erhitzt wird, entsteht eine ölige Base, von der Zusammensetzung eines Phenylpyridins $C_{11}H_9N$, deren Darstellung wie folgt vorgenommen wurde.

Das mit der fünffachen Menge Ätzkalk sehr sorgfältig vermischte Kalksalz wird in schwer schmelzbaren Röhren, die vorne ausgezogen, rückwärts geschlossen sind und etwa nur zu einem Drittel angefüllt werden, möglichst rasch bis zur Rothgluth erhitzt. In die Vorlage destillirt nebst etwas Wasser ein dunkles theerartig riechendes Öl, im Rohr scheidet sich fast immer ziemlich viel Kohle ab, und die verschiedensten Modificationen in der Destillation, wie Anwendung des Vacuums etc. haben weder daran zu ändern noch die Ausbeute zu verbessern vermocht. Der Grund ist vermuthlich der, dass das Hauptproduct, das wir allerdings nur in geringer Menge fassen konnten, selbst schon bei höherer Temperatur unter beträchtlicher Kohlenabscheidung sich zersetzt.

Aus 30 Grm. Säure wurden so 8 Grm. des Öles erhalten, das zur Reinigung in verdünnter Salzsäure gelöst, von einer geringen Menge widrig riechenden Pechs abfiltrirt, eingedampft und dann mit Ätzkali in Freiheit gesetzt, behufs leichteren Trocknens mit etwas Alkohol vermischt und mit Pottasche getrocknet wurde. In dem Masse als Pottasche das Wasser abschied, fielen kleine Mengen gelblichbrauner Krystalle aus, die auch noch entstanden, als am Wasserbad der Alkohol abdestillirte. Durch Filtration und Waschen mit Äther wurde die Flüssigkeit von denselben befreit. Bei Destillation über freiem Feuer ging zwischen 273—278 (die Hauptmasse bei 275) ein gelbes Öl über, die Destillation stockte dann vollständig, und im Kolben war etwa die Hälfte des früheren Öles als halbverkohlte Masse zurückgeblieben.

Salzsäure brachte einen grossen Theil derselben in Lösung, aber nur eine kleine Menge einer krystallisirten Substanz war

von den mit in Lösung gehenden Harzen durch wiederholtes Einengen und Wiederauflösen in Salzsäure, endlich Fällen mit Soda zu gewinnen, die aller Wahrscheinlichkeit nach mit den früher beschriebenen braunen Krystallen identisch ist.

Das Öl nochmals getrocknet siedet dann unter 748·9 Mm. Druck bei 269—270 uncorr. ist frisch destillirt fast farblos, wird jedoch bei einigem Stehen bräunlich. Es ist schwerer wie Wasser, in Wasser nicht, dagegen in Alkohol und Äther, und in verdünnten Mineralsäuren leicht löslich, und riecht ähnlich dem Diphenylamin. Die alkoholische Lösung wird von Pikrinsäure krystallinisch gefällt, der Niederschlag löst sich in heissem Alkohol ziemlich leicht auf beim Erkalten schiessen weiche lichtgelbe Nadeln breiigdick an, die bei 161—163·5° uncorr. schmelzen.

Aus der verdünnt salzsauren Lösung fällt Platinchlorid ein in sehr licht orangegelben Nädelchen krystallisirtes Doppelsalz, das in Wasser und verdünnter Salzsäure fast nicht löslich ist und 3 Molekule Krystallwasser enthält, die bei 100° entweichen.

1) 0·2887 Grm. bei 100° getrocknet, verloren 0·0202 Grm. H_2O und hinterliessen 0·0732 Grm. Pt.

2) 0·1890 Grm. Trockensubstanz einer anderen Darstellung hinterliessen 0·0513 Grm. Pt.

Berechnet für $(C_{11}H_9N)_2H_2Cl_6Pt$	Gefunden 1)	2)
Pt.....27·08	27·26	27·14
$3H_2O$ .... 7·00	6·99	—

Die weiter oben beschriebenen bräunlichen Krystalle, die sich aus der alkoholischen Lösung des rohen Phenylpyridins abschieden, konnten nur sehr unvollständig untersucht werden; sie lösen sich sehr schwierig in Alkohol und Benzol, leichter in Eisessig.

Die geringe Menge liess aber eine vollständige Reinigung nicht zu, so dass auch der Schmelzpunkt nicht bestimmt werden konnte.

Wir würden nicht daran zweifeln, dass dieser krystallisirte Körper ein ketonartiger und das Isomere des weiter unten beschriebenen Diketon's des α-Phenylpyridins ist, mit dem er

auch den Diphenylaminartigen Geruch gemein hat, und sonst Ähnlichkeit zeigt, und dessen Entstehung bei Destillation des Kalksalzes der Phenylpyridindicarbonsäure auch leicht zu verstehen ist, wenn nicht der bemerkenswerthe Unterschied existiren würde, dass der flüchtig beschriebene Körper beim Erhitzen fast vollständig verkohlt, das unten erwähnte Keton aber vollständig destillirbar ist.

Oxydation des β-Phenylpyridins.

Die Art der Reactionen, die das Phenylpyridin aus dem Naphtylamin liefern, lässt wohl mit einiger Sicherheit den Schluss zu, dass bei Entstehung desselben oder der Zwischenproducte Umlagerungen nicht eintreten. Dies vorausgesetzt lässt sich das β-Phenylpyridin als jenes der theoretisch möglichen drei Phenylpyridine ansehen, in welchem der Phenylrest zum N-Atom des Pyridins in ähnlicher Art angeordnet ist, wie die Methylgruppe des m-Toluidins zur Amidogruppe d. i. in der Stellung 1, 3 den N gleich 1 gesetzt.

Durch Zerstörung des Phenylrestes vermittelst Oxydation konnte nun möglicherweise eine Monocarbonsäure des Pyridins entstehen, deren Carboxylgruppe zum N in derselben Weise also auch in der Stellung 1, 3 angeordnet sein musste und dann war die Constitution einer der drei bisher dargestellten und nach der üblichen Pyridinformel überhaupt möglichen Monocarbonsäuren des Pyridins mit Zugrundelegung der Pyridinformel endgiltig festgestellt.

Die Oxydation erfolgte mit Kaliumpermanganat, die Menge derselben ist nach den Gleichungen

$$C_{11}H_9N + O_{14} = C_6H_5NO_2 + 2H_2O + 5CO_2$$

und

$$2\,KMnO_4 = K_2O + 2MnO_2 \text{ und } O_3$$

berechnet worden. Einmal haben wir die in viel Wasser suspendirte, das andermal die in so viel sehr verdünnter Schwefelsäure gelöste Base oxydirt, als zur Neutralisation des K nothwendig ist. In beiden Fällen, besonders aber im ersten, geht die Oxydation sehr schwer vor sich. Als Hauptproduct des ersten Oxy-

dationsversuch entstanden nicht unerhebliche Mengen von Benzoësäure, daneben nur Spuren einer Säure von gleichzeitig basischem Charakter. Während der Oxydation war Ammoniak- und Pyridingeruch zu bemerken, wahrscheinlich ist beim Kochen der alkalisch reagirenden Flüssigkeit der grösste Theil der entstandenen Monocarbonsäure in CO_2 und Pyridin zerfallen.

In der Oxydationsflüssigkeit des zweiten Versuches waren nur Spuren einer Benzoësäure ähnlichen Substanz nachzuweisen; vielleicht verflüchtigte sich die Benzoësäure grösstentheils beim Eindampfen der sauren Flüssigkeit. Dagegen liess sich ein in verdünntem Alkohol lösliches Kalisalz erhalten, das mit Kupferacetat einen grünlichen Niederschlag und dieser mit Schwefelwasserstoff zerlegt eine Säure lieferte, die in Form, Ansehen, Löslichkeit und Geruch mit Nicotinsäure vollständig übereinstimmte, deren Platin- und Kupferverbindung makro- und mikroskopisch vollständig Präparaten aus Nicotinsäure[1] entsprach und endlich bei 228°, also wenig niederer als beim Schmelzpunkt der Nicotinsäure sich verflüssigte.

Die Nicotinsäure haben wir auch durch Oxydation der β-Phenylpyridinmonocarbonsäure erhalten, der Eine von uns hat mit G. Vortmann Nicotinsäure auch aus einem Dipyridyl gewonnen, das, wie in einer anderen Mittheilung dargelegt wird, zweifellos ein symmetrisches Metaderivat ist, in welchem also in beiden Pyridinresten, die Substitution durch das zweite Pyridylradical in der Stellung 1, 3, (N = 1) erfolgte, dies zusammengefasst, ist nicht mehr daran zu zweifeln, dass die Nicotinsäure die Stellung 1, 3 thatsächlich besitzt.

Die Ausbeute an Nicotinsäure wird aus dem Phenylpyridin bei Oxydation durch Chromsäure gewiss weit besser sein, es fehlte uns an Material diesen Versuch auch auszuführen.

α-Naphtochinolin.

Der Eine von uns hat in seiner ersten Mittheilung über das α-Naphtochinolin hervorgehoben, dass die Ausbeute an demselben zu wünschen übrig lässt. Verschiedene Abänderungsversuche

[1] Dargestellt aus Chinolinsäure.

haben hieran nichts zu ändern vermocht. Wir verfuhren schliesslich derart, dass wir je 28 Grm. α-Naphtylamin, 13 Grm. Nitrobenzol (statt dem Nitronaphtalin), 50 Grm. Glycerin und 40 Grm. Schwefelsäure im Ölbade erhitzten und nach der ersten Reaction bei 160° fünf Stunden beliessen. Auch hier war es vortheilhaft, durch partielles Fällen mit Kalilauge zuerst die entstandenen Harze abzuscheiden.

Die Trennung vom stets zum Theil unverändert bleibenden Naphtylamin erfolgt am einfachsten und vollständigsten in der Weise, dass man in das neutrale Sulfat verwandelt, das schwerlösliche Salz des Naphtylamins durch Lösen in Wasser grösstentheils abscheidet und zum Filtrat kochend so lange Kaliumbichromat zufliessen lässt, solange noch die Ausscheidung des bekannten blauen Oxydationsproductes des α-Naphtylamins erfolgt.

Die von demselben abfiltrirte gelbliche Lösung mit Ammoniak zersetzt, liefert ein in der Kälte leicht erstarrendes Öl, das nach einmaliger Destillation reines Naphtochinolin liefert.

Eine Anzahl von Salzen des Naphtochinolins hat der Eine von uns schon beschrieben, zur weiteren Charakterisirung haben wir noch einige andere dargestellt.

Chromat. Dasselbe ist in kochendem Wasser ziemlich leicht, schwer dagegen in kaltem löslich und krystallisirt in langen, weichen, gelben Nadeln. Es enthält Krystallwasser, das über Schwefelsäure entweicht, auf 100° erhitzt, erleidet es eine geringe Zersetzung, die durch Dunkelwerden und starken Geruch nach Base sich kundgibt. Auch schon bei gewöhnlicher Temperatur riecht es deutlich nach freiem α-Naphtochinolin.

0·2055 Grm. verloren über H_2SO_4 0·0323 Grm. und hinterliessen 0·0462 Grm. Cr_2O_3.

Berechnet für $(C_{13}H_9N)_2H_2Cr_2O_7$	Gefunden
Cr .....18·34	18·33
$6H_2O$ ...15·79	15·72.

Jodmethylverbindung. Der Eine von uns hat über dieselbe schon mitgetheilt, dass dieselbe schwieriger entsteht als bei anderen Chinolinderivaten und desshalb bei Darstellung derselben

meist ein grosser Theil des Naphtochinolins unverändert blieb, dessen Trennung im Kleinen wenigstens Schwierigkeiten machte.

Nach sechsstündigem Erhitzen des mit der $1^1/_2$ der theoretischen Menge Jodmethyl in Methylalkohol gelösten Naphtochinolins auf 100° erhält man jedoch eine klare Lösung, die beim freiwilligen Verdunsten bräunliche Krusten ansetzt, die wiederholt aus Wasser und endlich aus Alkohol krystallisirt, schwach gelbliche Nadeln liefern, die aber schon bei 100°, ja bei längerem Stehen dunkler gefärbt und etwas zersetzt werden. Das Krystallwasser der so erhaltenen Jodmethylverbindung entweicht nicht über Schwefelsäure, leicht aber bei 100°.

1) 0·2802 Grm. verloren bei 100° 0·0264 Grm. H_2O.
2) 0·4576 Grm. gaben 0·3047 Grm. AgJ.

	Berechnet für $C_{13}H_9N.CH_3J+2H_2O$	Gefunden 1)	2)
H_2O	10·09	9·42	—
J	35·57	—	35·99.

Oxydation des Naphtochinolins.

Bei gemässigter Oxydation entsteht aus dem α-Naphtochinolin zunächst ein chinonartiger Körper, bei energischeren Reactionen ist dieser nicht mehr wahrnehmbar, sondern eine Dicarbonsäure der Formel $C_{12}H_9NO_4$.

In beiden Fällen sind nicht nur die Wahl des Oxydationsmittels, sondern auch andere Verhältnisse von grossem Einflusse.

Das Chinon des α-Naphtochinolins entsteht sehr glatt, wenn die Base in der dreissigfachen Menge Eisessig gelöst, dann die im zehnfachen Gewicht Eisessig gelöste Menge von Chromsäure, wie sie sich theoretisch berechnet, zugefügt und erhitzt wird, bis die Farbe rein grün geworden ist. Ein allmäliges Zufügen des Oxydationsmittels ist überflüssig, da auch beim Kochen die Oxydation erst dann beginnt, wenn fast alle Chromsäure eingetragen ist. Nach erfolgter Oxydation kocht man auf etwa ein Achtel ab und verdünnt mit Wasser. Alsbald fällt ein dunkelgelbes Öl aus, das bald erstarrt. Nach dem Trocknen löst man in Äther, wobei etwas Naphtochinolinchromat zurückbleibt und krystallisirt den

Rückstand der ätherischen Lösung aus Benzol und dann noch aus Alkohol um.

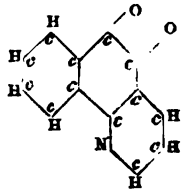
Die beim Erkalten der alkoholischen Lösungen ausfallenden dunkelorangegelb gefärbten Nadeln besitzen die Zusammensetzung eines Naphtochinolinchinons.

0·2065 Gr. bei 100° getrocknet gaben 0·5657 Gr. CO_2 und 0·0642 Gr. H_2O

	Berechnet für $C_{13}H_7NO_2$	Gefunden
C	74·64	74·71
H	3·35	3·45.

Das α-Naphtochinolinchinon ist in Alkohol, in Benzol und Äther ziemlich leicht, schwierig in verdünntem Alkohol, nicht in Wasser löslich, löslich in verdünnten Mineralsäuren, Essigsäure löst es dagegen nur schwierig und die Lösung in wenig Eisessig scheidet auf Wasserzusatz das Chinon wieder ab. Es lässt sich, wenn auch unter Zersetzung destilliren und schmilzt unter Zersetzung und darum undeutlich bei 205—207 uncorr. Mit Kalilauge erwärmt, färbt es sich braun und löst sich endlich zu einer anfangs weinrothen, später bräunlichgelben Flüssigkeit. Concentrirte schweflige Säure verwandelt es in einen weissen Körper, der mit Eisenchlorid wieder dunkelgelb wird und wahrscheinlich das Hydrochinon des Naphtochinolins ist.

Aus Alkohol krystallisirt es in kleinen undeutlichen Prismen aus verdünntem Weingeist in langen Nadeln, aus Benzol in derben prismatischen Krystallen. Die Ausbeute ist nahezu quantitativ, wenn die kleine Menge als Chromat regenerirten Naphtochinolins in Abzug gebracht wird, während unter genau denselben günstigen Bedingungen ein Chinon des β-Naphtochinolins nicht zu erhalten war. Nachdem das Chinon des α-Naphtochinolins bei energischer Oxydation nicht, dafür aber die weiter unten als α-Phenylpiridindicarbonsäure beschriebene Säure entsteht, die durch blosse Sauerstoffaufnahme ohne Abspaltung von Kohlenstoff entsteht und deren Constitution zweifellos ähnlich der Diphensäure ist, ist es wahrscheinlich, dass das Chinon ein intermediäres Oxydationsproduct ist und demnach folgende Formel besitzt:



α-Phenylpyridindicarbonsäure.

Grössere Mengen Chromsäure, zumal in concentrirter Eisessig- oder verdünnter Schwefelsäurelösung, oxydiren das α-Naphtochinolin weit energischer, wie der Eine von uns schon bei vorläufigen Versuchen constatiren konnte. Versuche, mit Chromsäure glatte Reactionen auszuführen, misslangen aber hier ebenso, wie beim β-Naphtochinolin, da ein grosser Theil der Base schon verbrannt wird, wenn ein anderer noch ganz unverändert geblieben ist, wenn man Concentrationen anwendet, die ein halbwegs bequemes Arbeiten gestatten.

Mit befriedigenden Ausbeuten und ziemlich bequem lässt sich aber auch hier mit Kaliumpermanganat oxydiren und erhielten wir in Ausbeuten bis über 70 Procent der theoretischen ohne Nebenproducte eine Säure der Formel $C_{13}H_9NO_4$. Die Darstellung derselben konnte genau so vorgenommen werden, wie es für die β-Phenylpyridindicarbonsäure beschrieben ist, auch die Abscheidung aus dem schliesslich von Kaliumsulfat befreiten Kalisalz geschieht am einfachsten mit Salzsäure so, wie es für jene mitgetheilt ist, und können wir alles Dasjenige, was über die Möglichkeit, die Säure als Salz eines Schwermetalles auszufällen, im ersten Theil unserer Arbeit gesagt ist, auch hier als giltig erklären.

Die durch Salzsäure in Freiheit gesetzte, in kaltem Wasser sehr schwer lösliche Säure kann entweder durch Krystallisiren aus heissem Wasser gereinigt werden, wobei meist die späteren Krystallisationen die reineren und weisseren sind oder auch dadurch, dass man zuerst in die Salzsäureverbindung überführt und diese dann durch viel Wasser zerlegt; haftet noch Salzsäure an, so kann eine noch chlorhältige Säure ausfallen, die sich in heissem Wasser auch wieder ziemlich leicht löst, dann aber meist schon ganz frei von Salzsäure abgeschieden wird.

Die durch wiederholtes Umkrystallisiren rein und ganz weiss erhaltene Säure verlor bei 100° getrocknet nichts an Gewicht und gab bei der Analyse folgende Zahlen.

1) 0·2247 Gr. Trockensubstanz gaben 0·5315 Gr. CO_2 und 0·0794 Gr. H_2O.
2) 0·2954 „ „ „ 0·6964 „ „ „ 0·1031 „ „

	Berechnet für $C_{13}H_9NO_4$	Gefunden 1)	2)
C.....	64·19	64·51	64·28
H.....	3·70	3·98	3·88.

Die Säure enthält gerade soviel C wie das α-Naphtochinolin, ist also ähnlich der β-Phenylpyridindicarbonsäure durch blosse Sauerstoffanlagerung gebildet worden und die Oxydation erfolgte auch hier wie beim Phenanthren. Die Überführung der Säure in das α-Phenylpyridin, wie sie später beschrieben wird, setzt ihre Constitution ausser Zweifel und wollen wir, um diese zu bezeichnen und zum Unterschiede der isomeren β-Säure aus β-Naphtochinolin den Namen α-Phenylpyridindicarbonsäure anwenden.

Die α-Phenylpyridindicarbonsäure ist in Wasser und Alkohol weit schwieriger, als die β-Säure löslich, Alkohol löst reichlicher als Wasser, beide Lösungsmittel in der Hitze viel besser als in der Kälte. Aus beiden Lösungsmitteln krystallisirt sie in kreideweissen, auch unter dem Mikroskope undeutlichen Kryställchen. Angesäuertes Wasser löst weit leichter, wie reines, bei vorsichtigem Säurezusatz krystallisirt beim Erkalten der heissen Lösung die freie Säure fast vollständig aus, ist zu viel Säure zugesetzt worden, aber nicht mehr.

Die wässerige Lösung der Säure färbt sich auf Zusatz von Eisenchlorid schwach röthlich, nicht aber durch Eisenvitriol, Kupferacetat färbt schön berlinerblau, Bromwasser schlägt gelbe krystallinische Flocken nieder, Silbernitrat fällt die wässerige Lösung nicht.

Sehr charakteristisch ist das Verhalten beim Erhitzen. Anfangs schmilzt sie unter Aufschäumen zu einer gelblichen aber sehr rasch durch grünblau in dunkelindigoblau übergehenden Flüssigkeit, es treten dunkelblaue Dämpfe auf, die sich am oberen Theil des Rohres condensiren, beim stärkeren Erhitzen bilden

sich dunkelviolette Dämpfe und ein grosser Theil der Säure ist kohlig zersetzt geworden.

In Folge dieses Verhaltens ist auch der Schmelzpunkt der Säure schwer zu bestimmen. Von 200 etwa lichtblau, dann grünlich und wieder schwarzblau, schmilzt sie undeutlich zwischen 230—235 uncorr., bei 236° tritt lebhaftes Schäumen ein.

Die erwähnte Reaction zeigen die Metallsalze der Säure nicht, dieselben geben erhitzt ein braunes Destillat, das krystallinisch wird und dem Diphenylamin sehr ähnlich riecht.

Aus der bei gelinder Wärme bereiteten Lösung in rauchender Salpetersäure fällt beim Stehen nichts aus, beim Abdampfen hinterbleiben grosse Prismen, die in Wasser leicht löslich, wahrscheinlich die Salpetersäureverbindung sind und mit Natriumacetat die unveränderte Säure abscheiden, wie Schmelzpunkt, Verhalten beim Erhitzen etc. zeigte. Dagegen kann man mit Brom ein Substitutionsproduct herstellen, das weiter unten beschrieben ist.

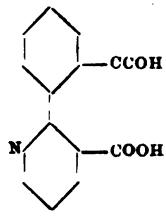
Zur Feststellung der Reactionen mit Metallsalzen diente auch hier wieder eine Lösung, die in 50 CC. 1 Grm. Säure, verwandelt in das neutrale Ammonsalz enthielt. Diese zeigte folgendes Verhalten mit:

Chlorcalcium } keine Niederschläge.
Chlorbaryum }
Eisenvitriol: Schwärzlichgelbe Färbung, beim Kochen Trübung.
Eisenchlorid: Bräunlichgelbe Flocken.
Nickelsulfat } keine Niederschläge.
Cobaltchlorid }
Silbernitrat: Feinflockige Fällung, die beim Kochen sich zum Theil löst.
Bleiacetat: Feinpulverig weiss.
Quecksilberchlorid: Gelblichweiss.
Quecksilberoxydulnitrat: Feinflockig weiss.
Kupferacetat: Schön azurblaue Flüssigkeit, auch bei vorsichtigstem Zusatz keine Fällung. Nach mehrtägigem Stehen bilden sich aber feine violettblaue Nädelchen, die beim Schütteln sich vermehren, so dass in kurzer Zeit die Flüssigkeit dickbreiig erstarrt.

Sämmtliche Niederschläge lösen sich anfangs beim Schütteln und werden erst bei fortgesetztem Zusatz des Fällungsmittels bleibend.

Die Zusammensetzung der aus dem α-Naphtochinolin entstehenden α-Säure, sowie ihr weiteres Verhalten machen es

zweifellos, dass ihre Constitution durch folgende Formel ausgedrückt werden kann



ihre Entstehung durch die Gleichung

$$\underbrace{C_{13}H_9N + O_4}_{\text{α-Naphtochinolin.}} = \underbrace{C_{13}H_9NO_4}_{\text{α-Phenylpyridin-dicarbonsäure.}}$$

Salze der α-Phenylpyridindicarbonsäure.

Kalisalze. Das neutrale Kalisalz ist ein durchsichtiger Firniss, der durch Übergiessen mit Alkohol oder Ätheralkohol nicht krystallisirt erhalten werden konnte. Das saure Kalisalz verhält sich kaum anders. Die im Exsiccator eingedampfte Lösung zeigt wohl allmählich Krystallisation, es gelang uns aber nicht, das Salz in analysirfähigem Zustand zu erhalten, da absoluter Alkohol gar nichts, wenig verdünnter alles löste und auf Zusatz von Wasser Spaltung in freie Säure und Neutralsalz eintrat. Wir haben diese Spaltung zuerst beim Eindampfen von Lösungen beobachtet, die in gewöhnlicher Art durch Vereinigung von 1 Molekul Neutralsalz mit 1 Molekul Säure bereitet waren und da die Möglichkeit doch nicht ausgeschlossen war, dass in verdünnt wässriger Lösung die Umwandlung von Neutralsalz in saures Salz nicht erfolge, ein drittes Salz in der Weise dargestellt, dass wir zu der in Wasser gelösten Säure pro Molekül, 1 Molekül KOH zufügten. Beim Concentriren schied sich in diesem Falle nichts ab, bei Versuchen die eingedunstete halbkrystallinische Masse in analysirfähiger Form zu erhalten, trat die Abscheidung von Säure aber doch wieder ein.

Calciumsalz. $C_{13}H_7CaNO_4 + 2H_2O$. Die mit überschüssigem Calciumcarbonat neutralisirte Säurelösung dampft zu einem dicken

Syrup ein, der langsam kleine Kryställchen abscheidet, die abgesaugt, in heissem Wasser gelöst und durch vorsichtiges Eindampfen wieder zur Krystallisation gebracht wurden. Das Salz krystallisirt in kleinen Täfelchen, ist in kaltem Wasser ziemlich leicht löslich, die kochende bereitete wässerige Lösung lässt es beim Erkalten nicht, sondern immer erst nach dem Eindampfen wieder fallen. Es enthält 2 Molekül Krystallwasser, das erst bei 290° vollständig entweicht, kann aber bis 350° erhitzt werden, ohne sich irgend zu zersetzen.

0·2654 Grm. verloren bis 290° 0·0292 Grm. H_2O. und lieferten 0·1142 Grm. $CaSO_4$.

	Berechnet für $C_{13}H_4CaNO_4$	Gefunden
Ca	14·23	14·22
$2H_2O$	11·35	11·00.

Kupfersalz. $C_{13}H_7CuNO_4+4H_2O$. Weiter oben ist schon der Schwierigkeit gedacht worden, das Kupfersalz vermittelst Kupferacetat darzustellen. Bequem bekommt man es krystallisirt beim Digeriren der wässrigen Säurelösung mit feingeschlemmtem Kupferoxyde am Wasserbad. Die Flüssigkeit färbt sich tief dunkelblau und setzt schon beim Concentriren violette Krystalle ab, die beim Erkalten sich noch vermehren, einmal gebildet auch von kochendem Wasser nicht mehr gelöst werden.

Das Salz enthält 4 Moleküle Krystallwasser und wird bei 100° bis 105° vollständig wasserfrei.

0·3066 Grm. lufttrockene Substanz gaben 0·4639 Grm. CO_2, 0·1079 Grm. H_2O und 0·0653 Grm. CuO.

	Berechnet für $C_{13}H_7CuNO_4+4H_2O$	Gefunden
C	41·48	41·26
H	3 99	3·90
Cu	21·01	21·29.

0·1480 Grm. verloren beim Trocknen auf 105° 0·0282 Grm.

	Berechnet	Gefunden
$4H_2O$	19·15	19·05.

Silbersalz. $C_{13}H_7Ag_2NO_4+1^1/_2H_2O$ Die sehr verdünnte heisse Ammonsalzlösung gibt mit etwas überschüssigem Silbernitrat vermischt sofort einen krystallinischen Niederschlag, der mit kaltem Wasser gewaschen und auf poröser Platte getrocknet wurde. Am Licht färbt er sich bald violettgrau, erhitzt zersetzt er sich sehr ruhig.

Lufttrocken enthält das Silbersalz $1^1/_2$ Molekül Wasser, die bei 100° entweichen, ohne dass das Salz sich zersetzt.

0·2671 Grm. verloren 0·0150 Grm. H_2O und hinterliessen 0·1187 Grm. Ag.

Berechnet für $C_{13}H_7Ag_2NO_4+1^1/_2H_2O$	Gefunden
Ag .....44·63	44·44
H_2O ..... 5·58	5·62.

Von der Salzsäureverbindung war schon gelegentlich Reindarstellung der Säure die Rede. Sie ist in wenig Wasser unzersetzt löslich, und hinterbleibt beim Eindunsten der wenig überschüssige Salzsäure enthaltenden Auflösung in weissen Krystallkrusten.

Vor der Analyse wurde sie über Ätzkalk getrocknet.

0·2590 Grm. gaben 0·1343 Grm. AgCl.

Berechnet für $C_{13}H_9NO_4.HCl$	Gefunden
HCl.....13·07	13·01.

Platindoppelverbindung. $(C_{13}H_9NO_4)_2H_2Cl_6Pt+3H_2O$. Die verdünnt salzsaure Lösung der Säure mit Platinchlorid vermischt, scheidet die Doppelverbindung erst beim Concentriren über Schwefelsäure in Form schön orangegelber glänzender Blätter ab, die schon in kaltem Wasser leicht, noch leichter in heissem löslich sind und aus heiss gesättigter Lösung erst nach langem Stehen aber unverändert auskrystallisiren. Das Krystallwasser entweicht bei 100—110°.

0·2706 Grm. verloren beim Trocknen 0·0155 Grm. und hinterliessen 0·0561 Grm. Pt.

Berechnet für $(C_{13}H_9NO_4)_2H_2Cl_6Pt+3H_2O$	Gefunden
Pt.....20·74	20·73
H_2O ... 5·74	5·73.

α-Dibromphenylpyridindicarbonsäure.

Beim Übergiessen der feingepulverten Säure mit Brom beobachtet man lebhaftes Aufbrausen und es entsteht ein dicker rothbrauner Brei, der am Wasserbade bei gelinder Wärme eingedampft, eine gelbbraune glasige Masse hinterlässt, die nach Brom riecht, in Alkohol leicht löslich ist, nicht aber in Wasser. Suspendirt man sie in Wasser, so schmilzt sie beim Kochen zu einem lichtgelben Öl, das nach und nach unter Bromverlust sich zu einer schwach lichtgelblichen Flüssigkeit löst, besonders leicht nach Zusatz von etwas Alkohol.

Beim Erkalten fallen krystallinische Körner aus, die sich schon durch ihre lichtgelbliche Farbe und ihre besondere Schwerlöslichkeit von der ursprünglichen α-Säure unterscheiden. Die concentrirte Mutterlauge scheidet wieder dieselbe Substanz ab.

Die gebromte Säure krystallisirt wasserfrei, beim Erhitzen auf 100° färbt sie sich lichtschwefelgelb, sie ist in Wasser sehr schwer löslich, ziemlich gut u. zw. leichter als die bromfreie löst sie warmer Alkohol, aus dem sie dann beim Verdunsten in klaren Krystallkörnern anschiesst.

0·2579 Grm. Trockensubstanz mit Ätzkalk geglüht gaben 0·2432 Grm AgBr.

	Berechnet für $C_{13}H_7Br_2NO_4$	Gefunden
Br	39·90	40·13.

Beim Erhitzen im Capillarrohr schmilzt sie unter vorgehender Gelb- und dann Braunfärbung bei 204—205° uncorr. zu einer bräunlichgelben Flüssigkeit, im Proberohr über freier Flamme erhitzt, verkohlt sie theilweise unter Aufschäumen, gleichzeitig destillirt ein gelbbraunes Öl, das leicht strahlig krystallinisch erstarrt.

Die Lösung des neutralen Ammonsalzes gibt zum Unterschied von der bromfreien Säure mit Fällungsmitteln augenblicklich Niederschläge. Das Kupfersalz ist hellgrün flockig, das Bleisalz weiss, feinpulverig, das Silbersalz weiss gelatinös und wird beim Kochen leicht krystallinisch. Das Nickelsalz ist weisslichgrün, das Kalksalz wird durch Fällung nicht augenblicklich erhalten, sondern krystallisirt erst nach dem Stehen in kleinen, gelblich-

weissen Wärzchen. Eisenvitriol färbt vorübergehend schwach gelb, die Flüssigkeit wird bald trüb, Eisenchlorid fällt gelblichrothe feine Flocken.

Verhalten der α-Phenylpyridindicarbonsäure beim Erhitzen.

5·46 Grm. Säure wurden in einen Kolben gefüllt, der mit einem Chlorcalciumrohr und dann mit einem Kaliapparat in Verbindung stand, dann mit einem Ätzkalirohr um reine Luft durchsaugen zu können. Beim Erhitzen im Ölbade zeigte sich bis 210° keine Veränderung, bei 215° begann langsame Gasentwickelung, bei 230° wurde sie lebhafter, gleichzeitig bläute sich der Kolbeninhalt und im Kolbenhals schied sich reichlich Wasser ab. Schliesslich wurde bei 240—245° erhitzt, bei welcher Temperatur die Gasentwickelung nach $1^1/_2$ Stunden endlich einhielt. Das Gas wurde von der Kalilauge vollständig absorbirt, es konnten sich also nur CO_2 und Wasser gebildet haben, da auch irgend ein durch den Geruch auffindbarer flüchtiger Körper nicht zu beobachten war.

Der blauschwarze Kolbeninhalt gab an kochendes Wasser nicht das geringste ab. Von Lösungsmitteln löste Chloroform noch am besten, es wurde daher die wieder getrockene Substanz mit Chloroform so lange extrahirt als dieselbe sich noch dunkel blau färbte, wobei etwa die Hälfte ungelöst blieb, die Auszüge wurden sodann concentrirt, das zuerst ausgeschiedene abfiltrirt und die dunkelblaue Mutterlauge über Paraffin gestellt; die nach einigen Tagen abgeschiedenen Krystalle mussten, um von der Mutterlauge befreit zu werden, mit Alkohol angerührt, filtrirt und mit Alkohol gewaschen, dann aber möglichst rasch abgepresst und über Schwefelsäure im Vacuum getrocknet werden, da die dunklen Krystalle in Alkohol zwar schwer löslich, aber mit diesem Lösungsmittel in Berührung sehr leicht zersetzlich sind, wobei die blaue Farbe in eine rothbraune übergeht.

Der dunkle Körper im Vacuum getrocknet gab bei der Analyse

0·2367 Grm. lieferten 0·6785 Grm. CO_2 und 0·853 Grm. H_2O. Gefunden 78·17 Proc. C, 4·00 Proc. H.

Zahlen, welche von denen, die sich für ein Diketon des Phenyl-

pyridyls berechnen würden, wenig abweichen; berechnet 79·55 C, 3·74 H.

Auch der Gewichtsverlust bei der Darstellung spricht für eine ketonartige Zusammensetzung:

Gefunden: Gesammtverlust (Wasser und Kohlensäure)	1·30 gr.	= 16·2 Proc.
Kohlensäure	0·89 „ [1]	= 17·1 „
Wasser	0·41 „	= 7·5 „

Die Gleichung

$$2C_{13}H_9NO_{11}=C_{24}H_{14}NO_2+3CO_2+2H_2O$$

verlangt

$$CO_2=18·1 \qquad H_2O=7·4 \text{ Proc.}$$

Gewiss ist der Körper nicht das Keton selbst, sondern weit complicirter als dieses zusammengesetzt, und obige Daten können die Bildung nur annähernd veranschaulichen.

Wasser löst die Substanz nicht, Alkohol sehr schwer, Benzol besser, am reichlichsten Chloroform und Eisessig u. zw. mit schön dunkelblauer Farbe. Salzsäure und Kalilauge zersetzen in braunschwarze Harze, Salpetersäure löst orange, Schwefelsäure grün, beim gelinden Erwärmen geht die Farbe in gelbgrün und endlich in braungelb über. Beim Erhitzen im Röhrchen zeigt der Körper genau dieselben Erscheinungen wie die α-Phenylpyridindicarbonsäure, aus der er entstanden ist.

Die Untersuchung desselben wurde schon desshalb nicht weiter geführt, da er sich sehr leicht zersetzt, und unser Material ungenügend war. Am leichtesten tritt Zersetzung in alkoholischer Lösung ein, die bald gelbbraun wird, vorübergehend prächtige grüne Fluorescenz zeigt, die wieder verschwindet und beim Eintrocknen eine neutral reagirende braune Substanz hinterlässt. Wahrscheinlich ist letztere in kleinen Mengen dem analysirten Präparat beigemischt, das sich von den Krystallen, die in kleiner Menge zuerst aus Chloroform ausfielen, dadurch unterscheidet, dass es in Schwefelsäure mit gelbbrauner Farbe löslich ist, Beobachtungen, die wir aber erst nach Beendigung der Versuche machten.

---

[1] Der Kohlensäureverlust ist etwas zu gering gefunden worden; der Verbindungsschlauch des Kaliapparates riss, ohne dass es augenblicklich bemerkt worden wäre.

Destillation der α-Phenylpyridindicarbonsäure mit Ätzkalk.

Das mit etwa dem fünffachen Gewicht Ätzkalk gemischte Kalksalz zersetzt sich erst bei beginnender Rothgluth und liefert ein gelbes bis braunes Öl, in dem sich bald Krystalle abscheiden. Die Destillation geschah in schwer schmelzbaren Röhren im Vacuum. Die Vorlage war, um Verstopfung im schnabelförmigen Ende des Destillationsrohres zu verhüten, mit heissem Wasser umgeben und stand mit einem U-Rohr in Verbindung, das mit verdünnter Salzsäure benetzte Glasperlen enthielt, um den letzten Rest des Destillationsproductes zu verdichten. Ein zweites U-Rohr wurde anfangs benützt, später aber als unnöthig weggelassen. Unter den beschriebenen Umständen und wenn mit der Erhitzung ziemlich rasch vorgeschritten wird, bleibt der Ätzkalk fast ungefärbt, permanente Gase bilden sich nur in geringer Menge und die Vorlage enthält ausser Wasser nur das schon während der Destillation theilweise erstarrende Öl, das aus zwei Körpern besteht. Zur Trennung derselben löst man die halbfeste Masse in der Salzsäure des U-Rohres, das Öl löst sich leicht, die Krystalle bleiben grösstentheils zurück. Einen kleinen Theil derselben erhält man noch, wenn die salzsaure Lösung eingedampft und mit Wasser verdünnt wird, als krystallinischen Niederschlag. Das Filtrat von demselben scheidet, concentrirt und mit Ätzkali vermischt das Öl ab, das aber noch immer kleine Mengen der Krystalle enthält, die durch Destillation getrennt werden können, da sie viel höher sieden als die ölige Base.

Die Gesammtausbeute beträgt aus 10 Grm. Säure bis 5 Grm. wasserfreies Destillat, das beide Producte so ziemlich in gleicher Menge enthält, ob bei der Destillation die fünffache Menge oder weit weniger Ätzkalk zugesetzt war.

Die Untersuchung hat gezeigt, dass das Öl, das α-Phenylpyridin $C_{11}H_9N$, der feste Körper ein Keton dieser Base ist, welche zwei Körper nach den unten stehenden Gleichungen entstanden sind.

α-Phenylpyridin-dicarbonsäure — α-Phenylpyridin

$$C_{11}H_7N\begin{matrix}COOH\\COOH\end{matrix} = 2CO_2 + C_{11}H_9N$$

α-Phenylpyridin-dicarbonsäure — α-Phenylpyridinketon

$$2C_{11}H_7N\begin{matrix}COOH\\COOH\end{matrix} = C_{11}H_7NCO + CO_2 + H_2O.$$

α-Phenylpyridin.

Das durch Ätzkali aus der salzsauren Lösung abgeschiedene phenylirte Pyridin destillirt, mit Pottasche vollständig getrocknet, fast vollständig zwischen 270—275°, im Fractionirkolben bleibt dann hauptsächlich eine kleine Menge des Ketons zurück, von dem etwas auch schon überdestillirt ist, nach mehrtägigem Stehen der Base aber so vollständig auskrystallisirt, dass das abgehobene Öl dann innerhalb zweier Grade siedet.

Der Siedepunkt des ketonfreien Öls liegt bei 749 MM. zwischen 268·5—270·5° uncorr. (Thermometer bei —5° in Korkmitte, Fadentemperatur 40°), ist also derselbe, wie der der isomeren β-Base.

Das α-Phenylpyridin ist frisch destillirt schwach gelb gefärbt, rein nimmt es erst nach mehrtägigem Stehen eine etwas bräunliche Farbe an, es ist schwerer wie Wasser, in Wasser nicht löslich, löslich in Alkohol und Äther. Es besitzt einen angenehmen, dem Diphenylamin sehr ähnlichen Geruch, ist mit Wasserdampf schwer, doch merklich, jedenfalls leichter flüchtig, wie das β-Phenylpyridin. In alkoholischer Lösung mit Pikrinsäure versetzt, scheidet es hübsche gelbe Nädelchen ab, die zu Schuppen vereinigt, in Alkohol in der Kälte schwer, leicht jedoch in der Hitze löslich sind und im Capillarrohr erhitzt, bei 160° sintern und nicht sehr scharf zwischen 169—172° schmelzen.

Die Lösung in Salzsäure krystallisirt erst nach langem Stehen, und zwar in weichen langen Fäden, die in Wasser äusserst leicht löslich, aber nicht zerfliesslich sind.

Die wässerige Lösung des Chlorhydrates scheidet mit Platinchlorid vermischt, hellorangegelbe feine Nädelchen ab, die in Wasser, verdünnter Salzsäure, sowie Alkohol und Äther so gut wie nicht löslich sind und Krystallwasser enthalten, das bei 100° entweicht. Die Analyse zeigte die erwartete Zusammensetzung.

0·2821 Grm. verloren 0·0134 Grm. H_2O und gaben dann 0·3604 Grm. CO_2.
0·0711 Grm. H_2O und 0·0736 Grm. Pt.

	Berechnet für $(C_{11}H_9N)_2H_2Cl_6Pt$	Gefunden
C	36·66	36·20
H	2·82	2·93
Pt	27·09	27·38
$+2H_2O$	4·76	4·75.

α-Phenylpyridinketon. Die aus dem Rohdestillat erhaltenen Krystalle wurden zunächst durch einmalige Destillation gereinigt, dann, da der Schmelzpunkt nicht scharf war, wiederholt aus Alkohol krystallisirt und so in Form grosser unregelmässiger, weicher Blätter von hell schwefelgelber Farbe erhalten.

Das α-Phenylpyridinketon riecht schon bei gewöhnlicher Temperatur, noch stärker beim Erwärmen, gerade so wie das Phenylpyridin angenehm obstartig, ähnlich dem Diphenylamin. Es löst sich in Wasser in der Kälte sehr wenig, etwas besser in der Hitze, kochender Alkohol löst ziemlich reichlich und scheidet beim Erkalten fast Alles wieder ab. Kochende, sehr verdünnte Salzsäure löst, in der Kälte fällt aber das Diketon aus, ebenso hinterbleibt es beim Verdunsten seiner Lösung in concentrirterer Salzsäure. Es siedet um 315° uncorr. und vollständig unzersetzt, wenn es ganz rein ist, bei 100° verflüchtigt es sich in nur unwägbaren Mengen. Im Capillarrohr erhitzt, schmilzt es bei 140—142° zu einer gelben, wieder erstarrenden Flüssigkeit. In Folge seiner Beständigkeit ist die Verbrennung derselben sehr schwierig, die Elementaranalysen mit CuO ergaben zu niedrige Werthe, die vorzügliche Kopfer'sche Methode liess aber auch hier nicht im Stiche.

0·2251 Grm. gaben 0·6270 Grm. CO_2 und 0·0734 Grm. H_2O.

	Berechnet für $C_{12}H_7NO$	Gefunden
C	79·55	79·49
H	3·87	3·79.

Pikrinsäureverbindung. Die heisse alkoholische Lösung, mit Pikrinsäure versetzt, scheidet ein Pikrat ab, dass bei raschem Erkalten feinpulverig, bei langsamer Bildung aber ein deutlich krystallinischer Niederschlag ist, bestehend aus mikroskopischen Täfelchen, die meist in Büscheln angeordnet sind. Es ist hellgelb gefärbt, in kaltem Alkohol schwer, leicht aber in heissem löslich.

Im Capillarrohr erhitzt, sintert es von 160° angefangen und schmilzt nach starkem Erweichen sehr undeutlich zwischen 195—199° zur rothbraunen krystallinisch wieder erstarrenden Flüssigkeit.

Das Chromat bildet rothe Prismen, die aus verdünnter Schwefelsäure unverändert krystallisiren und ist beim Kochen sehr beständig.

Das Platindoppelsalz ist in Farbe und Löslichkeit vom Chloroplatinat des α-Phenylpyridins nicht zu unterscheiden, es bildet gleichfalls Prismen, die auch in der Form denen der α-Phenylpyridindoppelverbindung sehr ähneln, aber lufttrocken wasserfrei sind.

0·2747 Grm. bei 100° getrocknet gab 0·3766 Grm. CO_2, 0·0633 Grm. H_2O und 0·0697 Grm. Pt.

	Berechnet für $(C_{12}H_7NO)_2H_2Cl_6Pt$	Gefunden
C	37·30	37·39
H	2·08	2·56
Pt	25·26	25·37.

Das Keton ist auch gegen Oxydationsmittel sehr beständig; so war, als dasselbe mit so viel Chromsäure und Schwefelsäure in concentrirter Lösung gekocht wurde, als zur Bildung von Pyridindi- und Pyridinmonocarbonsäure nothwendig ist (0·63 Grm. Keton, 3·5 CC. H_2SO_4, 4 Grm. CrO_3, 30 Grm. H_2O), noch nach 18 Stunden etwa die Hälfte unverändert und als Chromat wieder auskrystallisirt, während die Oxydationsflüssigkeit charakterisirte Producte nicht enthielt (von Chinolinsäure, auf die speciell gesucht wurde, sind auch nicht Spuren gebildet worden), die andere Hälfte ist also total verbrannt.

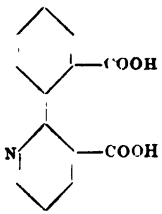
Die Bildung des Keton's findet nur ganz untergeordnet statt und man erhält fast ausschliesslich nur α-Phenylpyridin, wenn man derart für innige Mischung sorgt, dass die Säure in Natronlauge gelöst und mit der Lösung die zehnfache Menge Ätzkalk gelöscht wird. Das so erhaltene Phenylpyridin diente bei der unten beschriebenen Oxydation mit Chromsäure.

Oxydation des α-Phenylpyridins.

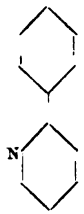
Die Constitution des α-Phenylpyridin's ist in demselben Masse sichergestellt, wie die des β-Phenylpyridins und seine

Oxydation konnte in derselben Weise Aufklärung verschaffen, welche von den drei bekannten Pyridinmonocarbonsäuren die Stellung N = 1, COOH = 2 besitze, wie es beim β-Phenylpyridin für die Säure der Stellung 1, 3 auseinandergesetzt ist.

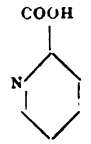
Die Constitution des α-Phenylpyridins, der Dicarbonsäure, aus der es erhalten wurde, und der Pyridincarbonsäure, in die es übergeht, wenn sein Phenylrest zur Carboxylgruppe oxydirt wird, zeigen nachstehende Formeln:



α-Phenylpyridindicarbonsäure.



α-Phenylpyridin.



α-Pyridinmonocarbonsäure.

Nachdem, wie aus früherem hervorgeht, die Nicotinsäure aus dem α-Phenylpyridin nicht entstehen kann, konnte dieses γ-Pyridinmonocarbonsäure oder Picolinsäure liefern und Betrachtungen, die der Eine von uns schon vor längerer Zeit veröffentlicht hat, machten uns die Bildung der letztgenannten Säure sehr wahrscheinlich.

Hoogewerff und van Dorp [1] haben allerdings bemerkt, dass die Annahme, die Picolinsäure hätte die Stellung 1, 2, nicht richtig sein könne, da dann für die γ-Pyridincarbonsäure nur die Stellung 1,4 übrig bleibt, dagegen aber der Umstand spreche, dass drei Dicarbonsäuren des Pyridins eine Carboxylgruppe in der Stellung der γ-Säure besitzen, da sie beim Schmelzen in die letztere übergehen, was auf Grund der üblichen Pyridinformel nicht erklärbar sei.

Wie der Eine von uns aber schon früher bemerkt hat, ist dieser einzige Einwand desshalb unsicher, da die dritte von den eben genannten Dicarbonsäuren des Pyridins, die von Böttinger dargestellte Pyridindicarbonsäure, [2] aller Wahrscheinlichkeit

[1] Ber. XIV, 646.
[2] Ber. XIV, 67.

nach nichts anderes, als unreine Cinchomeronsäure sein dürfte, also doch nur zwei die γ-Säure liefernde Dicarbonsäuren existiren, was mit der Stellung 1, 4 vollkommen vereinbarlich ist.

Bei den Oxydationsversuchen haben wir wo möglich Operationen vermieden, bei denen Picolinsäure sich hätte zersetzen oder verflüchtigen können, da die Picolinsäure sich nicht nur wie Ost fand und wir bestätigen können, beim Eindampfen verflüchtigt, sondern auch beim Kochen leicht in Pyridin und CO_2 zerlegt.

Die Oxydation des Phenylpyridins mit Kaliumpermanganat wurde in Essigsäure-Lösung, sonst aber unter denselben Verhältnissen vorgenommen, wie die des β-Phenylpyridins; sie geht noch viel langsamer und bei der Aufarbeitung der Oxydationsflüssigkeit erhielten wir nur Spuren eines grünlichen Kupfersalzes, das zwar eine Säure von gleichzeitig basischem Charakter enthielt, nicht aber irgend eine Pyridincarbonsäure, neben dieser noch Spuren einer beim Schütteln mit Äther löslichen Säure, vielleicht Benzoësäure.

Der relativ günstige Verlauf der Oxydation der β-Phenylpyridincarbonsäure veranlasste die Oxydation mit Chromsäure doch zu versuchen, wenn auch der vorläufige Versuch mit dem Keton des α-Phenylpyridins resultatlos verlaufen war.

5 Grm. α-Phenylpyridin mit 45 Grm. H_2SO_4 in 100 CC. Wasser gelöst, wurden zum Kochen erhitzt und allmälig die Lösung von 30 Grm. Chromsäure zugefügt; nach kurzem Kochen trat CO_2-Entwicklung ein; es wurde das Kochen am Rückflusskühler fortgesetzt solange Chromsäure eingetragen wurde, dann von Zeit zu Zeit ein Theil der Flüssigkeit abdestillirt, wieder vor dem Rückflusskühler gekocht, bis endlich die Flüssigkeit rein grün war. Diese, kochend anfangs mit Ätzkali, dann mit Pottasche bis zur ganz schwach alkalischen Reaction versetzt, schied neben dem Chromoxyd eine kleine Quantität von Krystallen ab, die offenbar das oben beschriebene Keton sind, das in der Base noch enthalten war und bei der Oxydation unangegriffen blieb. Das gelbliche Filtrat wurde concentrirt, genau neutralisirt, mit Alkohol das Kaliumsulfat gefällt, der Rückstand der alkolischen Lösung nochmals vermittelst Alkohol von einer kleinen Menge Kaliumsulfat befreit und so endlich ein in Wasser spielend leicht

lösliches Kalisalz erhalten, das, auf dem Platinblech erhitzt, intensiv nach Pyridin roch.

Vorsichtig mit Kupferacetat vermischt, färbte sich die gelbe Lösung desselben dunkelblaugrün und schied allmälig ein schweres, blaues Salz ab, dem sich später ein gelbliches beimischte. Das mit kaltem Wasser gewaschene Gemisch gibt an kochendes Wasser das blaue Salz leicht ab, während das gelbliche ungelöst bleibt. Aus dem tiefblauen Filtrate schiessen beim Erkalten violettblaue Prismen an, die mit SH_2 zersetzt, eine fast ungefärbte Lösung lieferten, aus der zuerst einige Stäubchen einer sehr schwer löslichen, dann aber ziemlich reichlich Nädelchen einer in Wasser äusserst leicht löslichen Säure anschossen. Die Letztere gibt, mit concentrirter Salzsäure übergossen, in Salzsäure schwer lösliche Prismen, mit Platinchlorid allmälig Krystalle von dunkel orangegelber Farbe; beide Verbindungen und ebenso auch das Kupfersalz sind von Präparaten, dargestellt aus Picolinsäure, herrührend aus Picolin, nicht zu unterscheiden.

Die Säure schmilzt bei 134—136°, während Weidel den Schmelzpunkt bei 134·5—136°, Ost den Schmelzpunkt 136° beobachtet haben.

Herr Dr. Brezina hat bei krystallographischer Messung der Platindoppelverbindung vollständige Übereinstimmung mit jener der Picolinsäure constatirt. Wir fühlen uns verpflichtet, demselben für seine werthvolle Unterstützung besten Dank zu sprechen.

Die Analyse des Doppelsalzes gab die erforderlichen Werthe:

0·2658 Grm. verloren zwischen 105—110° 0·0140 Grm. H_2O und hinterliessen 0·0753 Grm. Pt.

	Berechnet für $(C_6H_5NO_2)_2H_2Cl_6Pt+2H_2O$	Gefunden
H_2O	5·20	5·27
Pt	28·20	28·33.

Das Krystallwasser des Platinsalzes entweicht zum Unterschiede von dem der Nicotinsäure bei 100° nicht im geringsten, leicht aber zwischen 105—110°.

Alle diese Thatsachen lassen keinen Zweifel aufkommen, dass Picolinsäure vorliegt, die Picolinsäure also die Stellung 1, 2 besitzt. Nachdem wir nun auch nachgewiesen haben, dass der Nicotinsäure die Stellung 1, 3 zukommt, muss die dritte Mono-

carbonsäure des Pyridins, die γ-Säure, die Stellung 1, 4 haben, die Stellung der drei Säuren ist also wirklich derart, wie es früher als wahrscheinlich ausgesprochen worden ist.

Die Verschiedenheit der Eigenschaften der drei Pyridinmonocarbonsäuren ist von ihrer Stellung bedingt und in sehr augenfälliger Weise.

Die Picolinsäure, deren Carboxylgruppe dem N benachbart ist, hat den niedrigsten Schmelzpunkt, die grösste Löslichkeit in Wasser, die geringste Beständigkeit beim Erhitzen, die γ-Pyridindicarbonsäure, deren Carboxylgruppe am entferntesten vom N ist, den höchsten Schmelzpunkt, (wahrscheinlich) die geringste Löslichkeit in Wasser, die grösste Beständigkeit beim Erhitzen, die Nicotinsäure, deren COOH in mittlerer Entfernung sich befindet, steht in all ihren Eigenschaften auch in der Mitte.

Die Consequenzen, die sich jetzt mit Sicherheit ziehen lassen, hat der Eine von uns früher schon genannt, sie sind im Allgemeinen so nahe liegend, dass ein weiteres Eingehen nicht nothwendig ist.

Es sei nur darauf verwiesen, dass unter Anderem die Constitution der im Pyridinkern substituirten Lepidine jetzt sehr leicht festgestellt werden kann, wenn aus denselben Picolindicarbonsäuren, aus diesen dann die Picoline dargestellt werden, die entweder als solche oder nach Überführung in die Carbonsäure über Stellung der Methylgruppe Aufschluss geben müssen.

Den Zusammenhang der Körper, die in vorstehender Abhandlung beschrieben sind, stellt folgende Tabelle dar:

α-Naphtylamin	$C_{10}H_9N$	β-Naphtylamin
α-Naphtochinolin	$C_{13}H_9N$	β-Naphtochinolin
α-Phenylpyridindicarbonsäure	$C_{13}H_9NO_4$	β-Phenylpyridindicarbonsäure
α-Phenylpyridin	$C_{11}H_9N$	β-Phenylpyridin
α-Pyridinmonocarbonsäure, identisch mit Picolinsäure	$C_6H_5NO_2$	β-Pyridinmonocarbonsäure, identisch mit Nicotinsäure.

Bildungsweise der isomeren Bibromcampher.

Von **J. Kachler** und **F. V. Spitzer.**

(Aus dem Universitäts-Laboratorium des Prof. A. Lieben.)

In unserer Abhandlung „Über zwei isomere Bibromcampher aus Monobromcampher“ [1] haben wir gezeigt, dass man durch Einwirkung von Brom auf Monobromcampher $C_{10}H_{15}BrO$ zwei isomere Verbindungen $C_{10}H_{14}Br_2O$ darstellen kann und dieselben mit α- und β-Bibromcampher bezeichnet. Wir konnten damals folgende Bedingungen für die Entstehung dieser Körper aufstellen:

a) α-Bibromcampher (Schmelzpunkt 61° C.) entsteht, wenn man Monobromcampher mit der der Gleichung

$$C_{10}H_{15}BrO+2Br=HBr+C_{10}H_{14}Br_2O$$

entsprechenden Brommenge in zugeschmolzenen Röhren auf 120° C. erhitzt. (30% Ausbeute.)

b) Wendet man jedoch einen Überschuss an Brom (die $1^1/_2$- oder 2fache Menge des obigen Verhältnisses) an, so bildet sich β-Bibromcampher vom Schmelzpunkt 115° C. (Ausbeute 20—40%.)

c) Wenn α-Bibromcampher mit Brom in geschlossenen Röhren auf 120—125° C. erhitzt wird, so erhält man ebenfalls β-Bibromcampher.

Nachdem unsere Abhandlung erschienen war, hat Swarts [2] über diesen Gegenstand ebenfalls Mittheilungen gemacht. Er bestätigt das Ergebniss unserer Untersuchung, wonach sich

---

[1] Sitzb. d. k. Akad. d. W. Bd. 85, II. Abth. 596. Monatshefte f. Ch. 1882, 205.

[2] Ber. d. d. chem. Ges. XV. 1623 u. 2135.

α-Bibromcampher in β-Bibromcampher überführen lässt, dadurch, dass er erstere Substanz durch Erhitzen mit einem Bromwasserstoff bildenden Gemische vom Bromphosphor und Phosphorsäure in die zweite umgewandelt hat.

Bezüglich der Entstehungsweise der beiden isomeren Bibromcampher weichen jedoch seine Angaben von den unserigen theilweise ab. Er behauptet, niemals α-Bibromcampher erhalten zu haben, wenn Monobromcampher mit der zur Bildung der Bibromverbindung nöthigen Menge Brom auf 100—120° C. erhitzt wird, das Product sei bei 114° C. schmelzender Bibromcampher. Auch die Temperatur soll unwesentlich sein, denn er bekam den gleichen Körper, wenn er Monobromcampher in geschlossenen Röhren mit der entsprechenden theoretischen Menge Brom, durch einige Tage auf 80° C. erhitzt oder zwei bis drei Monate dem Sonnenlichte ausgesetzt hat. Er erhielt dagegen α-Bibromcampher, wenn Campher oder Monobromcampher in offenen Gefässen mit Brom erhitzt wurde und meint, dass die Fortschaffung des bei der Reaction entstehenden Bromwasserstoffes die Bildung von α-Bibromcampher wesentlich befördert.

Zur Aufklärung der Widersprüche in den von Swarts und von uns gemachten Angaben erschien es desshalb nothwendig, neue Versuche über die Einwirkung von Brom auf Monobromcampher, sowohl in offenen Gefässen als auch unter Druck anzustellen, um zunächst die Bedingungen der Entstehung der beiden Bibromcampher genauer zu ermitteln und anderseits rationelle Methoden zur Darstellung derselben vorschlagen zu können.

Zur Bereitung von α-Bibromcampher empfiehlt Swarts das in der Fabrik von Schuchardt[1] angewandte Verfahren: „1200 Grm. Campher werden mit 640 Grm. Brom und etwas Chloroform am Rückflusskühler erhitzt und nach Abgabe der Bromwasserstoffsäure nochmals 640 Grm. Brom zugegeben. Nach dem Abdestilliren der Bromwasserstoffsäure wird das erstarrende Product aus absolutem Alkohol umkrystallisirt."

[1] Swarts erwähnt in seiner Abhandlung, dass er seinerzeit von Schuchardt den bei 115° C. schmelzenden, in jüngster Zeit aber bei 57° C. schmelzenden Bibromcampher bezogen habe. In Folge einer Anfrage bezüglich der höher schmelzenden Verbindung, erhielten wir aber von derselben Firma immer nur niedrig schmelzenden α-Bibromcampher.

Wir haben nach diesen Angaben α-Bibromcampher darzustellen versucht, erhielten dabei aber Monobromcampher; thatsächlich genügt auch die im Ganzen angewandte Menge Brom nur, um Campher unter Abspaltung von HBr in Monobromcampher umzuwandeln.[1] Der so erhaltene Monobromcampher auf gleiche Weise nochmals mit den angegebenen Mengen Brom erhitzt, liefert dann allerdings eine gute Ausbeute an leicht zu reinigendem α-Bibromcampher. Dagegen bekamen wir dunkel gefärbte, schwer oder gar nicht krystallisationsfähige Producte, wenn Campher auf dieselbe Art mit der zur Bildung von $C_{10}H_{14}Br_2O$ nöthigen Menge Brom behandelt wurde.

Wenn Monobromcampher direct mit Brom in geschlossenen Röhren erhitzt wird, so kommen, wie mit den folgenden Versuchen gezeigt wird, die Mengen der beiden zu dieser Reaction angewandten Substanzen, im Verhältnisse zum Volumen der sie einschliessenden Röhren, wesentlich in Betracht. Zur vollständigen Übersicht der Resultate haben wir in dieser Beziehung eine genauere Beschreibung des in unserer erwähnten Abhandlung angeführten ersten Versuches nachzutragen: 11 Grm. Monobromcampher wurden mit 8 Grm. Brom durch 6—8 Stunden auf 120° C. in ziemlich geräumigen Röhren erhitzt, wobei ein braun gefärbtes, syrupartiges Reactionsproduct entstand. Wenn dasselbe mit Alkohol versetzt wurde, so trat selbst nach langem Stehen keine Krystallisation ein; unterblieb der Zusatz von Alkohol, so schied sich allmälig eine krystallinische Substanz ab, die nach entsprechender Reinigung den Schmelzpunkt von 61° C. zeigte. Aus dem Inhalte von sechs Röhren konnten auf diese Weise 27 Grm. (30% Ausbeute) solcher Substanz erhalten werden, die durch die Analyse, die zusammen $C_{10}H_{14}Br_2O$ ergab, und sich mithin als α-Bibromcampher erwies.

Wir haben weiterhin nachstehende Versuche ausgeführt, bei welchen die Bedingungen folgendermassen abgeändert wurden:

---

[1] $\underbrace{C_{10}H_{16}O}+Br_2$

152 : 160 = 1200 : x; x = 1263 Grm. Br.

I. Je 21·6 Grm. Monobromcampher und 15 Grm. Brom (2Br auf $C_{10}H_{15}BrO$) während 2 bis 3 Stunden in zwei Röhren (80 Ctm. lang)[1] erhitzt, lieferten ein dünnflüssiges Product, das mit Alkohol vermischt nur sehr langsam Krystalle absetzte, aus welchen 2·5 Grm. β-Bibromcampher gewonnen wurden. Den Rest bildete eine nicht krystallisirbare, zähe Masse.

II. Wird das Erhitzen während 9 Stunden fortgesetzt, so erhält man aus Monobromcampher unter den eben angeführten Bedingungen einen dicken Syrup, der mit Alkohol gemischt nach einiger Zeit ein krystallinisches Pulver abschied, das 16 Grm. reinen β-Bibromcampher gab. Die von dem krystallinischen Product abgegossene alkoholische Lösung begann bei längerem Stehen an den Wänden des Gefässes weiche Krystallkrusten abzuscheiden, von denen mehrere Fractionen gesammelt und gereinigt wurden. Die erste derselben bildete glänzende Blätter vom Schmelzpunkt 75 bis 76° C. und erwies sich als Monobromcampher. Die zweite Fraction war mehr körnig, Schmelzpunkt 66—67° C., davon gaben 0·1846 Grm. 0·1662 Grm. AgBr=38·31% Br. (für $C_{10}H_{15}BrO$ berechnet 34·63% Br). Die dritte Fraction war dunkel und von einem Öl durchzogen.

III. Werden je 21·6 Grm. Monobromcampher und 15 Grm. Brom in zwei kürzeren Röhren (50 Ctm.) durch 3 Stunden auf 110—120° erhitzt[2] und der Röhreninhalt dann wie früher mit Alkohol gemischt, so entsteht ziemlich rasch eine krystallinische Ausscheidung, aus welcher 12 Grm. reiner β-Bibromcampher gewonnen wurden. Die alkoholische Lösung lieferte noch weiterhin Krystalle, die nach dem Abpressen, aus Alkohol umkrystallisirt, farblose, flache Nadeln vom Schmelzpunkte 72 bis 73° C. bildeten; 0·2539 Grm. gaben 0·2011 Grm. AgBr= 33·70% Br. Auch bei diesem Versuche blieb demnach ein Theil des angewandten Monobromcamphers unverändert.

IV. Zwei Röhren (80 Ctm. lang) mit der doppelten Beschickung (43 Grm. Monobromcampher und 30 Grm. Brom für

[1] Selbstverständlich beziehen sich die angegebenen Längen auf Röhren von gleichem Durchmesser (15—17 Mm.).

[2] Dabei empfiehlt es sich, nicht schon öfters zu solchem Zwecke gebrauchte, sondern neue Röhren anzuwenden, da die ersteren den grösseren Druck nicht immer aushalten.

eine Röhre) blos durch 3 Stunden auf 110 bis 120° C. erhitzt, lieferten 21 Grm. β-Bibromcampher.

V. Der vorhergehende Versuch wurde noch insofern abgeändert, dass auf 43 Grm. Monobromcampher ein Überschuss von Brom, 39 Grm. statt 30 Grm. angewandt und das Gemenge 6 Stunden erhitzt wurde. Der Inhalt von zwei Röhren lieferte unter diesen Umständen 40 Grm. β-Bibromcampher.

Nachdem die grösste Ausbeute von diesem Körper bei Einhaltung der eben erwähnten Versuchsbedingungen erzielt werden konnte, so haben wir danach 688 Grm. Monobromcampher mit 624 Grm. Brom (in 16 Röhren) behandelt und 320 Grm. reinen β-Bibromcampher erhalten. Die alkoholischen Laugen krystallisiren nur sehr langsam; erst nach längerer Zeit konnten daraus 75 Grm. Monobromcampher gewonnen werden. Es hinterblieben nun circa 500 Grm. einer rothgelben, dickflüssigen Masse, welche mithin eigentlich das Hauptproduct bildet. Ein Theil davon wurde zur Analyse in der Weise gereinigt, dass die ätherische Lösung mit wässerigem kohlensauren Natron geschüttelt, hierauf mit Wasser gewaschen, mit Chlorcalcium getrocknet und dann filtrirt wurde. Der Äther ist zunächst durch Destillation und schliesslich durch längeres Stehen über Schwefelsäure im Vacuum vollständig entfernt worden. Es blieb ein gelbliches, dickes Öl zurück, das beim Erhitzen, ohne zu destilliren, unter Entwicklung von Bromwasserstoff verkohlte. 0·2536 Grm. gaben 0·2855 AgBr = 47·90% Br. $C_{10}H_{15}BrO$ verlangt 34·63%, $C_{10}H_{14}Br_2O$ 51·61% Br.

Aus dem gefundenen Bromgehalt ist zu schliessen, dass in diesem Producte ein Gemenge von Monobrom- und Bibromcampher vorliegt, welches durch eine Beimengung am Krystallisiren verhindert wird. Monobromcampher konnte durch Destillation mit überhitztem Wasserdampf abgeschieden werden. β-Bibromcampher dürfte kaum noch darin enthalten sein, da sich dieser Körper in kaltem Alkohol sehr schwer löst. α-Bibromcampher konnten wir zwar nicht isoliren, beim Destilliren des Syrupes mit Salpetersäure wurde jedoch ein Brom und Stickstoff enthaltendes Öl (Methanderivat) gebildet, welches, wie wir in der Folge zeigen werden, nur aus dem α-Bibromcampher erhalten werden kann. Wir schliessen daraus, dass neben β-Bibromcampher auch α-Bibromcampher entsteht.

Nachdem bei diesem letzten Versuche trotz Anwendung eines Überschusses an Brom noch Monobromcampher unverändert blieb, alles Brom aber zur Wirkung kam, so ist wohl anzunehmen, dass dasselbe auf einen Theil des Bromcamphers unter Abspaltung von Bromwasserstoff tiefergehend eingewirkt hat und der dadurch bewirkte höhere Druck die Entstehung von β-Bibromcampher begünstigte. Bezüglich der Ausbeute an dieser Substanz lassen sich die Resultate der angeführten fünf Versuche in folgender Tabelle zusammenfassen:

	Länge d. Röhre b. 15 bis 17 Mm. Durchmesser	Beschickung für eine Röhre		Erhitzt auf 110 bis 120° C. durch	Ausbeute	Procente der theoretischen Ausbeute
		Monobromcampher	Brom			
I	80 Ctm.	21·6 Grm.	15 Grm.	$2^1/_2$ h.	1·3 Grm.	4·
II	„ „	21·6 „	15 „	9 „	8·0 „	28·9
III	50 „	21·6 „	15 „	3 „	6·0 „	21·2
IV	80 „	43 „	30 „	3 „	10·5 „	19·1
V	„ „	43 „	39 „	6 „	20·0 „	36·1

Hieraus ist zu ersehen, dass β-Bibromcampher in grösserer Menge entsteht, wenn Monobromcampher und Brom durch längere Zeit und unter höherem Druck auf einander einwirken. Die Anwendung eines Überschusses an Brom bewirkt eine höhere Ausbeute und ist, abgesehen von dem dadurch bedingten höheren Druck schon desshalb empfehlenswerth, da sonst, wie aus den angeführten Versuchen zu ersehen ist, grosse Mengen von Monobromcampher unverändert bleiben.

Der höhere Druck kann bei der Reaction hervorgebracht werden, indem man sie in kürzeren, resp. engeren Röhren vor sich gehen lässt oder dieselben verhältnissmässig stärker beschickt.

Bei weniger lang fortgesetztem Erhitzen von Monobromcampher mit den theoretisch berechnenden Mengen Brom erhält man zwar ebenfalls β-Bibromcampher, die Ausbeute ist jedoch sehr ungünstig.

Wie dies in unserer ersten Abhandlung der Hauptsache nach angegeben wurde, ist es daher zweckmässig, den β-Bibromcampher folgendermassen darzustellen.

Man erhitzt Monobromcampher mit dem $1^1/_2$fachen Gewichte der theoretisch berechneten Menge Brom in zugeschmolzenen Röhren durch längere Zeit (6—10 Stunden) auf 110—120° C.; das Reactionsproduct wird mit Alkohol vermengt, wobei sich der β-Bibromcampher als schweres Pulver nahezu vollständig abscheidet. Nachdem derselbe von der Mutterlauge durch Absaugen befreit ist, kann er durch Umkrystallisiren aus kochendem Alkohol leicht rein erhalten werden. Wir haben auf diese Weise mit günstigem Erfolge gegen 2 Kilo von diesem Körper dargestellt.

Der α-Bibromcampher dagegen bildet sich aus Monobromcampher mit den theoretisch berechneten Mengen Brom nur dann beim Erhitzen in geschlossenen Röhren, wenn das Volumen derselben im Verhältnisse zu dem bei der Reaction entstehenden Bromwasserstoffe so gross ist, dass der dabei entstehende Druck zur Bildung von β-Bibromcampher nicht hinreicht.

Zur Darstellung von grösseren Mengen α-Bibromcampher empfiehlt sich das bereits angeführte Verfahren, den Monobromcampher in einer Chloroformlösung mit den theoretisch berechneten Mengen Brom unter Rückflusskühlung zu erhitzen.

Über Reichenbach's Picamar.

Von **Gustav Niederist.**

(Aus dem k. k. Universitäts-Laboratorium des Prof. Ad. Lieben.)

Vor fünfzig Jahren hat Reichenbach,[1] in der Absicht dem „Träger der Bitterkeit im Kreise der Empyreumata" nachzuspüren, aus dem Buchenholztheer ein Öl isolirt, welchem er, um an den bitteren Geschmack desselben einerseits, an seinen Ursprung anderseits zu erinnern, den Namen „Picamar" beilegte.

So erschöpfend Reichenbach die physikalischen Eigenschaften und die Reactionen dieser Substanz untersucht und beschrieben hat, so wenig konnte er über die Zusammensetzung derselben mittheilen.

Völkel[2], der sich später bemühte, das Picamar nach Reichenbach's Angaben wieder darzustellen, kam nicht zum Ziele und so ist in der That die Natur desselben unaufgeklärt geblieben.

Im Jahre 1878 sprach A. Graetzel[3] auf Grund der Untersuchungen Hofmanns[4] über „die Farbabkömmlinge der Pyrogallussäureäther" die Vermuthung aus, dass das unreine Picamar, aus welchem Reichenbach durch Oxydation Pittakall erhalten zu haben angibt, ein Gemenge von Pyrogallussäuredimethyläther und den Homologen desselben sei und in jüngster Zeit glaubte Pastrovich[5] in dem Propylpyro-

---

[1] Schweigger-Seidel's Journal f. Chemie u. Phys. LXVII, 274 und LXVIII, 295 und 351.

[2] Jahresbericht 6, 541.

[3] Berl. Ber. 11, 2085.

[4] Berl. Ber. 11, 1455.

[5] Monatshefte f. Chemie IV, 182.

gallussäuremethyläther, welchen er aus den über 270° siedenden Fractionen des Buchenholztheeres — neben Propylpyrogallussäuredimethyläther und Blauöl — abgeschieden hatte, das Picamar Reichenbach's wiedergefunden zu haben.

In der Sammlung des hiesigen Universitäts-Laboratoriums wurde ein Originalpräparat Reichenbach's aufbewahrt;[1] Herr Prof. Lieben gestattete mir freundlichst, dasselbe zur Ausführung vorliegender Untersuchung zu verwenden, und so bin ich heute in der Lage, über das wirkliche Picamar Reichenbach's Einiges mittheilen zu können. Wie sich aus dem Folgenden ergibt, ist dasselbe nicht der Monomethyläther der Propylpyrogallussäure, sondern identisch mit jenem bei 285° siedenden Öl, welches Hofmann[2] aus den hochsiedenden Partien des Buchenholztheeres abgeschieden und als Dimethyläther der Propylpyrogallussäure erkannt hat.

Das Picamar, ein dickliches, schwach bräunlich gefärbtes Öl, zeigte alle von Reichenbach angegebenen Eigenschaften; es schmeckte „bitter, brennend und hierauf kühlend pfeffermünzartig", besass schwachen nicht unangenehmen theerartigen Geruch, wurde in einer Kältemischung von Eis und Chlorcalcium sehr dickflüssig, beim Abkühlen mit Äther und fester Kohlensäure aber erstarrte es zu einer glasigen Masse. In Alkohol, Äther, Essigsäure leicht löslich, wurde es von Wasser nur in sehr geringer Menge aufgenommen. Eine gesättigte wässerige Lösung benützte ich zur Ausführung einiger Reactionen, wobei ich Reichenbach's Angaben vollständig bestätigt fand. Kalkwasser und Barytwasser erzeugten sofort weisse Niederschläge, Silbernitrat- und Goldchloridlösungen wurden durch Picamarwasser alsbald reducirt, wobei sich die Flüssigkeit vorübergehend roth färbte; dieselbe Färbung trat auf Zusatz von

---

[1] Das wohlverschlossene Fläschchen, in welchem das Präparat verwahrt war, trug zwei Signaturen; auf der einen stand das Wort „Picamar", — wie ich mich durch Vergleichung mit einigen Manuscripten Reichenbach's überzeugen konnte — unzweifelhaft von dessen eigener Hand geschrieben. Die zweite Signatur zeigte in anderen Schriftzügen die Worte: „Original v. Reichenbach".

[2] Berl. Ber. VIII, 66 und XI, 329.

Salpetersäure ein, ging aber auch hier bald in Gelb über. Eisenchlorid färbte die wässerige Lösung des Picamars röthlich, die alkoholische Lösung blaugrün. Durch Barytwasser wurde die letztere rein weiss gefällt, so dass das Picamar völlig frei von „dem blaufärbenden Principe" zu sein schien; bei Gelegenheit der weiter unten zu beschreibenden Darstellung des Picamarkali's konnte ich dagegen doch eine schwach bläuliche Färbung der weingeistigen Lösung beobachten. Bei derselben Gelegenheit nahm ich auch eine andere Verunreinigung des Picamars wahr, die beim Kochen desselben mit Kalilauge in öligen Tröpfchen ungelöst blieb, deren Menge aber so gering war, dass an eine Abscheidung derselben nicht gedacht werden konnte.

Nach mehrstündigem Erhitzen des Picamars mit starker Salzsäure auf 130° entwichen aus dem geöffneten Rohre Ströme von Chlormethyl; der braune Röhreninhalt, durch Abdampfen von Salzsäure befreit, bildete einen sehr schwer zur Krystallisation zu bringenden Syrup, dessen wässerige Lösung durch Alkalien tiefbraun, durch Eisenchlorid und verdünnte Sodalösung schön blauviolett gefärbt wurde.

Das Picamar siedete unter gewöhnlichem Drucke bei 283—289° (corrig. für den herausragenden Quecksilberfaden); die ersten Tropfen des Destillates enthielten etwas Wasser. Bei der Destillation im Vacuum — unter 18^{mm} Druck, — ging dasselbe zwischen 153° und 158° über, ohne einen nennenswerthen Rückstand zu hinterlassen.

Sowohl die Analyse, als auch die Bestimmung des Gasvolumgewichtes lieferten Zahlen, welche der Formel $C_{11}H_{16}O_3$ nahe entsprechen.

I. 0·1936 Grm. Substanz gaben 0·4814 Grm. Kohlensäure und 0·1437 Grm. Wasser.

II. 0·25075 Grm. Substanz gaben 0·6232 Grm. Kohlensäure und 0·1873 Grm. Wasser.

In 100 Theilen:

	I	II	berechnet für $C_{11}H_{16}O_3$
C . . .	67,82	67,78	67,35
H . .	8,25	8,29	8,16

Die Dampfdichtebestimmung wurde nach dem von Brühl[1] modificirten Hofmann'schen Verfahren im Anilindampf ausgeführt.

	I		II	
Gewicht der Substanz	0,02095	Grm.	0,02045	
Volum des Dampfes	171,44	CC.	171,91	CC.
Druck	18,299	Mm.	17,815	Mm.
Temperatur	181,50°		181,50°	
Gefundene Dampfdichte auf Luft bezogen	6,532		6,525	
Auf Wasserstoff bezogen	94,29		94,19	

Für $C_{11}H_{16}O_3$ berechnete Dampfdichte (auf Luft bez.) = 6,78
„ $C_{11}H_{16}O_3$ berechnete Dampfdichte (auf H bez.) = 98,00

Picamarkalium.

Zur Darstellung des „Picamarkali's" habe ich — genau der Vorschrift Reichenbach's folgend — 5 Grm. Picamar mit 9 Cc. einer Lauge vom spec. Gewicht 1, 15, die im Cubikcentimeter 0,227 Grm. KOH enthielt, vermischt, so dass auf $2^1/_2$ Theile des ersteren 1 Theil Kalihydrat kam. Beim Kochen löste sich bis auf einige kleine Öltröpfchen Alles. Nach dem Erkalten erstarrte die ganze Menge zu einem aus feinen Nadeln bestehenden, lichtbraunen Krystallkuchen, der zuerst zwischen Leinwand, dann zwischen Filtrirpapier abgepresst und hierauf aus heissem Weingeist vom spec. Gewichte 0,82 umkrystallisirt wurde. Dies gelang besonders gut durch rasches und starkes Abkühlen der warmen alkoholischen Lösung mittelst Eis und Kochsalz. Nach dreimaligem Umkrystallisiren erhielt ich so das Picamarkalium in rein weissen, perlmutterartig glänzenden Blättchen, die auch nach mehrmonatlichem Liegen an der Luft sich kaum merklich braun färbten.

Mit Schwefelsäure abgeraucht, gaben 0,2821 Grm. Picamarkalium 0,1049 Grm. K_2SO_4 = 0,04702 Grm. K;

---

[1] Berl. Ber. IX, 1368.

in 100 Theilen:

	gefunden	berechnet für[1] $C_{11}H_{15}O_3K$
K . .	16,67	16,67

Acetylpicamar.

Die Acetylirung des Picamars gelang leicht und vollständig durch mehrstündiges Erhitzen desselben mit überschüssigem Essigsäureanhydrid am Rückflusskühler. Die erkaltete Lösung wurde mit viel Wasser geschüttelt, worauf sich das Acetylproduct als fast weisse Krystallmasse abschied, welche, in Wasser unlöslich, aus warmem Alkohol in schönen, glänzenden Prismen krystallisirte. Der Schmelzpunkt derselben liegt bei 86—87°. Die Übereinstimmung der Eigenschaften des Acetylpicamars mit denen der von Hofmann dargestellten Acetverbindung des Dimethyläthers der Propylpyrogallussäure ist also eine vollständige. Auch die Analyse führte zur entsprechenden Formel $C_{13}H_{18}O_4 = C_{11}H_{15}(C_2H_3O)O_3$.

I. 0,2015 Grm. der im Vacuum über H_2SO_4 getrockneten Substanz gaben 0.4832 Grm. CO_2 und 0,1375 Grm. Wasser.

II. 0,2829 Grm. Substanz gaben 0,6777 Grm. CO_2 und 0,1923 Grm. Wasser.

---

[1] Die einzige quantitative Untersuchung, welche Reichenbach mit dem Picamar ausführte, stimmt hiemit freilich nur annähernd überein, schliesst dagegen die von Pastrovich unter der Voraussetzung, das Picamar sei der Monomethyläther des Propylpyrogallols, für das Picamarkalium gegebene Formel $C_{10}H_{12}K_2O_3$ völlig aus. Reichenbach sagt: „Picamarkalikrystalle, die alle Merkmale der Reinheit zeigten, gab ich in einen Platintiegel und glühte sie aus. Nachdem die entstandene Kohle verglüht war, blieb geschmolzenes weisses Kali zurück. 100 Theile Krystalle hinterliessen 32 Th. Kali. Wenn auch diese vorläufige Prüfung keine Ansprüche auf Genauigkeit machen kann, so weist sie doch das beiläufige Verhältniss der Bestandtheile in den Picamarkalikrystallen nach.“ — Der Rückstand, den Reichenbach erhielt, war natürlich nicht „Kali“, sondern Kaliumcarbonat; 100 Theilen $C_{11}H_{15}O_3K$ entsprechen 29,49 Theile K_2CO_3 100 Theilen $C_{10}H_{12}K_2O_3$ dagegen 53, 49 K_2CO_3.

In 100 Theilen:

	gefunden I	gefunden II	berechnet für $C_{13}H_{18}O_4$
C . . .	65,40	65,33	65,55
H . . .	7,58	7,55	7,56

Herr Dr. Brezina war so freundlich, die krystallografische Bestimmung des Acetylpicamars vorzunehmen und theilt mir darüber Folgendes mit:

Krystallsystem monoklin.

Elemente $a:b:c: = 0{\cdot}3949:1:0{\cdot}5476$; $\eta = 96° 29{\cdot}5$, Formen a (100) m (110) e (011) p ($\bar{1}11$) Juxtapositionszwillinge nach {(100)}

Winkel		Rechnung	Messung
$a\,m$	(100)(110)	28° 33	27° 46
$a\,e$	(100)(011)	83° 57·5	83° 57·5
$a\,p$	(100)($\bar{1}11$)	119° 39	119° 39
$e\,e^1$	(011)(0$\bar{1}$1)	42° 51	42° 57

Optische Orientirung: Axenebene zur Symmetrieebene senkrecht.

$$(100)\,a\,\varsigma = ((36° 15'))\,Na$$

Dibromacetylpicamar.

Beim Zusammenreiben von Acetylpicamar mit Brom entwichen reichliche Mengen von Bromwasserstoff. Die Masse wurde nach dem Verjagen des überschüssigen Broms in heissem Alkohol gelöst. Aus der Lösung krystallisirte beim Stehen über Schwefelsäure das Dibromacetylpicamar in schönen, farblosen, sehr glänzenden Tafeln vom Schmelzpunkte 101—102, 5.

0,5612 Grm. Substanz gaben 0,5296 Grm. Bromsilber, entsprechend 0,22536 Grm. Brom.

In 100 Theilen:

	gefunden	berechnet für $C_{13}H_{16}Br_2O_4$
Br. . . .	40, 16	40, 32.

Herr Dr. Brezina hatte die Güte, auch diese Krystalle zu messen und schreibt darüber:

Krystallsystem prismatisch
Elemente $a:b:c = 0{\cdot}9921:1:1{\cdot}9330$
Formen b (010) c (001) d (101) p (111)

Winkel		Rechnung	Messung
$c\,p$	(001)(111)	72° 6	71° 59
$p\,d$	(111)(101)	42° 5	42° 8
$p\,p'$	(111)($\bar{1}$11)	84° 59	85° 5

Optische Orientirung: Axenebene parallel (100), Bisectrix parallel Y, Schema (b a c).

Über Schwingungen fester Körper in Flüssigkeiten.

Von Dr. **Franz Koláček.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 4. Mai 1883.)

Schon Chladni machte die Erfahrung, dass die Tonhöhe schwingender Körper in Flüssigkeiten erniedrigt wird. In letzter Zeit nahm Herr F. Auerbach [1] diesen Gegenstand mit Experimenten über Stimmgabeln auf.

Einer diesbezüglich geäusserten Ansicht über den Grund dieser Tonerniedrigung glaubte ich eine hydrodynamische Erklärung gegenüber stellen zu dürfen. Ich [2] stellte, allerdings hypothetisch, den allgemeinen übrigens nahe liegenden Satz auf, dass die Schwingungen in einer Flüssigkeit sich so vollziehen, als wäre die elastische Kraft „k" ungeändert geblieben, dafür aber die Masse „m" um eine Grösse vermehrt worden, die dem Producte aus der Dichte „h" in eine blos von geometrischen Umständen abhängige Grösse „c" gleichzusetzen ist. So folgt:

$$(m + hc)\frac{dx^2}{dt^2} = -kx, \quad \frac{No^2}{N^2} = 1 + c'h$$

Dabei ist No die Schwingungszahl im leeren Raume (Luft) N jene in der Flüssigkeit. Letztere Relation habe ich durch Versuche über die Tonerniedrigung von Stimmgabeln in Äther, Wasser, Schwefelsäure, Quecksilber geprüft. Ausserdem behandelte ich im erwähnten Aufsatze das Problem einer radial schwingenden Kugel, sowie ein zweites, wo die Kugel nach Art eines Pendels sich bewegt, ganz allgemein.

Obige Formeln zeigten sich richtig, wenn die Tonwellenlänge gegen die Dimension der Kugel gross ist.

---

[1] F. Auerbach, Wied. Ann. 3, p. 157, 1878,

[2] F. Koláček, Wied. Ann. 7, p. 23, 1879.

Dieselbe Relation hat letzthin auch Herr Auerbach[1] geprüft.

In diesem Aufsatze soll gezeigt werden, dass die Aufgabe weit allgemeiner lösbar ist, wenn man die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen zu Hilfe nimmt. Das zu behandelnde Thema lautet:

„Die Bewegung einer allseits unbegrenzten Flüssigkeit, so wie ihre Rückwirkung auf ein in ihr befindliches schwingendes System zu bestimmen, wenn letzteres sich selbst überlassen ist."

1. Wir verstehen unter $\varphi\ \psi$ etc. allgemeine Coordinaten, welche den geometrischen Zustand des schwingenden Systems eindeutig bestimmen. Sind die Körper absolut starr, so sind $\varphi\ \psi$ Verschiebungen und Drehungen. Erleiden die Körperoberflächen Deformationen, so sollen sich diese aus Einzeldeformationen zusammensetzen lassen, deren jede geometrisch durch eine Fläche, analytisch durch einen Parameter derselben, $\varphi\ \psi$ vorgestellt ist. So zum Beispiele kann jede Deformation einer an zwei Punkten festen Seite aus Sinus Linien zusammengesetzt werden. Die Amplitude einer jeden derselben ist die Masszahl der Deformation, also $= \varphi, \psi \ldots$ Ähnlich kann man Deformationen einer Kugelfläche durch Kugelflächenfunctionen, jene von kreisförmigen Platten und Membranen durch Bessel'sche Functionen zusammensetzen.

2. Die kinetische Energie des Körpersystems $= T$ ist eine quadratische Function der allgemeinen Geschwindigkeitscomponenten $\dot{\varphi}\ \dot{\psi}$, wobei die Coëfficienten als constant anzusehen sind, wenn $\varphi\ \psi$ sehr klein werden. Also

$$2T = b_{11}\dot{\varphi}^2 + 2b_{12}\dot{\varphi}\dot{\psi} + b_{22}\dot{\psi}^2 \ldots$$

Ist das Gleichgewicht des Systems ein stabiles, „V" die potentielle Energie der Deformation, so ist auch sie eine quadratische Function von $\varphi\ \psi$ mit constanten Coëfficienten, falls $\varphi\ \psi$ unendlich klein sind. Somit

$$2V = a_{11}\varphi^2 + 2a_{12}\varphi\psi + a_{22}\psi^2 \ldots .$$

---

[1] F. Auerbach, Wied. Ann. 17, p. 964. 1882.

Die allgemeinen Kraftcomponenten der „restituirenden" Kräfte $\Phi\,\Psi$ sind durch $-\frac{dV}{d\varphi}$, $-\frac{dV}{d\psi}$ gegeben. Für unendlich kleine $\varphi\,\psi$ können die Glieder $\frac{dT}{d\varphi}$ in den Lagrange'schen Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = \Phi$$

wegfallen.

3. Von aussen sollen auf das System nur die Druckkräfte der Flüssigkeit wirken. Es sollen ihre allgemeinen Kraftcomponenten $\Phi\,\Psi$ durch das Geschwindigkeitspotential „P" ausgedrückt werden. Der Druck p ist gegeben durch $p = p_0 - h\frac{dP}{\partial t}$, wo p_0 und h_0 Werthe des Druckes und der Dichtigkeit sind, die dem Ruhezustande entsprechen. Sind nämlich die Druckänderungen in Einheiten ihres Normalwertes p_0 unendlich klein, und die ebenso gerechneten Dichteänderungen entweder derselben Ordnung, oder wenigstens gegen die ersteren nicht unendlich gross, so gilt bis auf Grössen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dP}{\partial t}\right)h_0, \text{ oder } p = p_0 - h_0\frac{dP}{\partial t}.$$

Ist $h = f(p)$, so gibt die Continuitätsgleichung

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_0 \cdot \frac{dp}{\partial t} + h_0\,\Delta P = 0,$$

und durch Elimination von p die Schallgleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial h}\right)_0 \cdot \Delta P.$$

Bezeichnet δn die Variation einer nach innen positiv gezählten Normalverschiebung an irgend einer Stelle der Körperoberfläche, so gilt

$$\delta n = m_1\delta\varphi + m_2\delta\psi \ldots$$

Die Coëfficienten m sind Functionen des Ortes, hängen aber von der Zeit, und den allgemeinen Coordinaten nicht ab. Sie

sind eindeutig darstellbar, wenn die geometrische Natur der allgemeinen Coordinaten bekannt ist.

Unterliegt $\varphi\psi$ der Variation $\delta\varphi\,\delta\psi$, so ist die von den Drücken geleistete virtuelle Arbeit

$$\iint df[m_1\delta\varphi + m_2\delta\psi\ldots][p_0 - h\frac{dP}{dt}].$$

Die Integration bezieht sich auf die Körperoberflächen, deren Differential df. Die allgemeinen Kraftcomponenten, insoweit sie vom Drucke herrühren, sind also

$$\Phi = -h\iint df.\frac{dP}{dt}m_1 + p_0\iint df.m_1$$

$$\Psi = -h\iint df.\frac{dP}{dt}m_2 + p_0\iint df.m_2 \text{ etc.}$$

4. Wir denken uns das Körpersystem in einer absolut incompressiblen Flüssigkeit; die Bewegung sei stationär und durch die Grössen $\dot\varphi\ \dot\psi$[1] vorgeschrieben. Das Geschwindigkeitspotential ist dann eindeutig bestimmt durch

$$M = \dot\varphi M_1 + \dot\psi M_2\ldots$$

Die Einzelnpotentiale $M_1 M_2$ genügen der Laplace'schen Gleichung und muss an den Körperoberflächen die Grösse $\frac{dM}{\partial n}$ in die Werthe der Normalgeschwindigkeit $\frac{\partial n}{\partial t} = m_1\dot\varphi + m_2\dot\psi\ldots$ übergehen. Wir können desshalb für $m_1 m_2$ ihre Werthe $\frac{dM_1}{\partial n}\ \frac{\partial M_2}{\partial n}$ schreiben.

Die doppelte kinetische Energie $2T_1$ ist, wenn die Flüssigkeitsdichte $= 1$ ist gleich

$$2T_1 = \iint df.\frac{dM}{\partial n}M = \iint df(M_1\dot\varphi + M_2\dot\psi\ldots)(\frac{dM_1}{\partial n}\dot\varphi + \frac{\partial M_2}{\partial n}\dot\psi\ldots)$$

oder wegen

$$\iint(M_1\frac{\partial M_2}{\partial n} - M_2\frac{\partial M_1}{\partial n})\,df = 0$$

---

[1] Die Derivationsfunctionen von $\varphi\ \psi$ sollen mit $\dot\varphi\ \dot\psi\ldots\bar\varphi\ldots\varphi^{IV}$ $\varphi^{(n)}$ bezeichnet werden.

$$2T_1 = c_{11}\dot{\varphi}^2 + 2c_{12}\dot{\varphi}\dot{\psi} + c_{22}\dot{\psi}^2 \ldots =$$

$$\iint df\left[M_1 \frac{dM_1}{\partial n}\dot{\varphi}^2 + 2M_1 \frac{dM_2}{\partial n}\dot{\varphi}\dot{\psi} + \ldots\right].$$

Daraus deducirèn wir die in Folgendem verwendete Formel

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \iint M_1 \left(\frac{dM_1}{\partial n}\dot{\varphi} + \frac{dM_2}{dn}\dot{\psi} \ldots\right) df.$$

5. Die in 3) für $\Phi\Psi$ gegebenen Formeln werden mit Hilfe des Green'schen Satzes umgeformt. Der flüssigkeitserfüllte Raum und zwar bis zu einer Kugelfläche, deren Radius R selbst gegen die Länge einer Welle unendlich gross ist, sei der Integrationsraum. Verstehen wir ferner noch unter J den auf letztere Kugelfläche bezogenen Ausdruck, setzen also

$$J_1 = \iint df\left(\frac{dM_1}{dn}\frac{dP}{dt} - M_1 \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial P}{\partial t}\right),$$

so folgt wegen $\Delta M_1 = 0$

$$\iint df \frac{dM_1}{dn}\frac{dP}{dt} = \iint df . M_1 \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{dP}{dt}\right) - \iiint dx\,dy\,dz\, M_1 \Delta \frac{\partial P}{\partial t} - J_1.$$

Setzt man noch in Erwägung, dass an den Körperoberflächen die Normalgeschwindigkeiten gleich sein müssen

$$\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial n}{\partial t} = m_1\dot{\varphi} + m_2\dot{\psi} \ldots = \frac{dM_1}{\partial n}\dot{\varphi} + \frac{\partial M_2}{\partial n}\dot{\psi},$$

berücksichtigt ferner den in 4) zum Schluss angegebenen Ausdruck, so folgt

$$\iint df . \frac{\partial M_1}{\partial n} . \frac{\partial P}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dT_1}{d\dot{\varphi}}\right) - \iiint dx\,dy\,dz\, M_1 \Delta \frac{\partial P}{\partial t} - J_1.$$

Damit erhält man

$$\Phi = p_0 \iint df m_1 - h \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dT_1}{d\dot{\varphi}}\right) + \iiint dx\,dy\,dz\,\Delta \frac{dP}{dt} . M_1 . + J_1$$

$$\Psi = p_0 \iint df . m_2 - h \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dT_1}{d\dot{\psi}}\right) + \iiint dx\,dy\,dz\,\Delta \frac{dP}{dt} . M_2 + J_2 \text{ etc. etc.}$$

J_2 J_3 entstehen aus T_1, wenn man M_1 durch M_2, M_3 ersetzt.

Wir wollen nun unter φ ψ etc. die Überschüsse verstehen über jene Werthe φ_1 ψ_1, welche dem Drucke p_0 als Gleichgewichtswerthe entsprechen. Dann lauten die Gleichungen des Gleichgewichts

$$a_{11}\varphi_1 + a_{12}\psi_1 \cdots = p_0 \iint df . m_1$$
$$a_{12}\varphi_1 + a_{22}\psi_1 \quad\; = p_0 \iint df . m_2.$$

Combinirt man diese Gleichungen mit jenen der Bewegung, in die man die entwickelten Grössen Φ Ψ einsetzt, so erübrigen folgende Hauptgleichungen für die Bewegung des tönenden Systems:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{d\phi}[T + hT_1] + \frac{dV}{d\varphi} = h\left[J_1 + \iiint dx\,dy\,dz\,M_1\,\Delta\frac{dP}{dt}\right]$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{d\psi}[T + hT_1] + \frac{dV}{d\psi} = h\left[J_2 + \iiint dx\,dy\,dz\,M_2\,\Delta\frac{dP}{dt}\right] \text{ etc.}$$

Man wird leicht nachweisen, dass für unendlich grosse „a" die Glieder rechter Hand wegfallen. Denn in diesem Falle übergeht die Schallgleichung $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \Delta P$ in die einfache Laplacesche, P und M wird in der Unendlichkeit von der Ordnung $\frac{1}{R}$, $\frac{\partial P}{\partial n}$ und $\frac{\partial M}{\partial n}$ von der Ordnung $\frac{1}{R^2}$, somit J_1 von der Ordnung $\frac{1}{R}$.

Wir werden später nachweisen, dass die Glieder der rechten Hand gegen jene linker Hand von der Grössenordnung $\left(\frac{2\pi r_0}{\lambda}\right)^2 : 1$ sind, wo r_0 eine Grösse von der Dimension der tönenden Körper, λ aber die Wellenlänge bedeutet.

6. Man kann demnach selbst für mässig hohe Töne, (und dies namentlich in tropfbaren Flüssigkeiten) behaupten, dass die Bewegungen des tönenden Systems sich angenähert so vollziehen, als wie in einer incompressiblen Flüssigkeit. Dadurch werden derartige Probleme sehr vereinfacht. Die letzt aufgestellten Gleichungen können übrigens nach bekanntem Verfahren weiter behandelt werden.[1] Als Beispiel, das ganz ausgerechnet werden kann, könnten die Schwingungsbewegungen eines Ellipsoides angeführt werden,

[1] Thomson Tait, theor. Physik. I. p. 304.

das pendelnde Bewegungen nach irgend einer Richtung, und Drehschwingungen um irgend eine Axe vollzieht.

Mit Hilfe dieser Gleichungen liessen sich gewisse Resonanzprobleme, sowie andere, die in die Kategorie der akustischen Fernwirkung[1] fallen, ziemlich allgemein behandeln.

Wir wollen uns auf das einfache Problem von bloss einem Freiheitsgrade einschränken. Die übrigens leichter direct ableitbare Gleichung lautet

$$(b_{11} + c_{11} h)\ddot{\varphi} + \varphi a_{11} = 0.$$

Sollte der tönende Körper mit mehr als einer Flüssigkeit in Berührung stehen, so ist seine kinetische Energie durch einen Ausdruck gegeben

$$2T = [b_{11} + \Sigma c_{11} h]\dot{\varphi}^2.$$

Sie führt zur Gleichung $[b_{11} + \Sigma c_{11} h]\ddot{\varphi} + a_{11}\varphi = 0$, die mit derselben Genauigkeit gelten wird, wenngleich der Körper nicht mehr von einer Flüssigkeit umgeben ist.

Das Schwingungszahlenverhältniss $\frac{n_0}{n}$ ergibt sich in der Form

$$\frac{n_0^2}{n^2} = 1 + \Sigma \frac{c_{11} h}{b_{11}}.$$

Ist der Körper von einer Flüssigkeit sonst von Luft umgeben, so folgt, bei Vernachlässigung der Luftdichte:

$$\frac{n_0^2}{n^2} = 1 + \frac{c_{11}}{b_{11}} . h$$

Die Formel gilt also auch dann, wenn die tönenden Körper blos an einzelnen Stellen (allerdings bei verschiedenen Flüssigkeiten in gleicher Weise) mit Flüssigkeiten in Berührung stehen.

Handelt es sich um Schwingungen gekrümmter Platten, Glocken, cylinderförmiger Gläser, so ist bekanntermassen die kinetische Energie derselben der Dicke „d“, die potentielle

[1] Die Verschiebungen φ ψ dürfen dann nicht mehr als unendlich klein angenommen werden.

Energie bei gleicher Deformation der ungedehnten Mittelfläche, der dritten Potenz von d proportionirt. Somit $a_{11} = \alpha_{11} d^3$ $b_{11} = \beta_{11} d$. Daraus folgt:

„Die Schwingungszahlen (n_0) sonst gleicher Platten verhalten sich wie die Dicken".

„Das Product $(\frac{n_0^2}{n^2} - 1) n_0$ ist für sonst gleiche Platten, die in gleicher Weise mit derselben Flüssigkeit in Berührung stehen, von der Dicke unabhängig".

Beide Sätze hat schon Herr Auerbach gefunden.

Wir denken uns ferner einen Körper, der die Schwingungen der Elasticität seiner Theile verdankt, und einen linear „s"mal vergrösserten, dessen Excursionen ξ, η, ζ „ε"mal, und dessen Schwingungsdauer auf das „ϑ"fache gewachsen ist. Beide Körper sollen entweder frei sein, oder in ähnliche Weise mit derselben Flüssigkeit in Berührung stehen. Offenbar wird die kinetische Energie auf das $s^3 . \left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^2$fache gewachsen sein. Die potentielle Energie als ein Ausdruck der Form

$$\iiint dx\, dy\, dz \left[\left(\frac{d\xi}{\partial x}\right)^2, \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{\partial \eta}{dx}\right)^2 \ldots\right]$$

ist auf das $s^3 . \frac{\varepsilon^2}{s^2}$ gestiegen.

Bei Schwingungen von einem Freiheitsgrade müssen ihre Maximalbeträge, allerdings durch das Zeitintervall einer halben Schwingungsdauer getrennt, einander gleich sein. Es ist also $s = \vartheta$.

„Vergrössert man demnach Platten, Glocken, Stäbe, sie mögen transversal oder longitudinal schwingen, mit Flüssigkeiten (in ähnlicher Weise) in Berührung stehen, oder auch nicht „s"mal, so wird die Schwingungszahl $s$mal verkleinert".

Vergleicht man das eben über den Einfluss der Dicke Ausgesagte, so folgt:

„Vergrössert man krumme Platten, ohne ihre Dicke zu ändern, so wird im leeren Raume die Schwingungszahl s^2mal kleiner".

„Die Grösse $(\frac{n_0^2}{n^2}-1)n_0$ ist bei $s$maliger Vergrösserung der Platten, möge die Dicke dieselbe geblieben sein oder auch nicht, $s$mal kleiner". Oder

$$(\frac{n_0^2}{n^2}-1)n_0 . s = \text{const.}$$

Wäre diese Grösse $(\frac{n_0^2}{n^2}-1)n_0$, wie man aus Versuchsdaten an cylinderförmigen, wassergefüllten Gläsern[1] derselben Weite, aber verschiedener Höhe angenähert schliessen könnte, von der Höhe unabhängig, so müsste gelten:

$$(\frac{n_0^2}{n^2}-1)n_0 . \text{ Weite} = \text{const.}$$

Man erhält statt einer Constante die Zahlen

44625, 47250, 38860, 43354, 60114, 36400.

7. Der absolute Werth von $\frac{n_0^2}{n^2}$ lässt sich in einigen Fällen vorausberechnen.

α) Eine Kugelschale von der Masse m schwinge radial. Man hat $m = b_{11}$, $P = +\frac{r_0^2}{r}$, wodurch die Geschwindigkeit an der Oberfläche $= 1$ gesetzt ist. (Sie ist nach innen positiv)

$$c_{11} = \iint P . \frac{dP}{\partial n} df. = 4r_0^3\pi. \qquad \text{also} \qquad \frac{n_0^2}{n^2} = 1 + h\frac{4r_0^3}{m}\pi.$$

β) Ein Ellipsoid schwinge parallel seiner Hauptachse „c". Bewegt sich dasselbe mit der Geschwindigkeit „w", so ist im äusseren Raume $P = M\frac{d\mathfrak{Q}}{\partial z}$. 7)

$\mathfrak{Q}$ ist das Massenpotential des mit der Dichte 1 versehenen Ellipsoids. M bestimmt sich durch die Oberflächenbedingung

$$\frac{dP}{\partial n} = w\cos nz \quad \text{zu} \quad M = \frac{w}{2\pi(2-abc\,C)}$$

[1] Auerbach 17. Wied. Ann. p. 972. Tabelle 5.

[2] Kirchhoff Vorlesungen p. 218.

wobei

$$C = \int_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)\sqrt{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)}} .$$

Die Grösse

$$w^2 c_{11} = \iint P \frac{dP}{\partial n} df = \iint df . w \cos nz M \frac{d\Omega}{\partial z} =$$

$$= \frac{C}{(2-abcC)} \cdot \frac{4}{3} \pi a^2 b^2 c^2 . w^2 .$$

weil

$$\frac{d\Omega}{\partial z} = -2\pi abc z . C.$$

Es ist somit

$$c_{11} = \frac{C}{(2-abcC)} \cdot \frac{4}{3} \pi a^2 b^2 c^2 ;$$

b_{11} = Masse des Ellipsoids.

Ähnlich lassen sich schwingende Bewegungen um irgend eine Hauptachse als Drehachse behandeln.

γ) Einen einfachen Fall behandelt Rayleigh.[1] In einer kreisförmigen Öffnung einer unendlichen starren Ebene, die von der Flüssigkeit auf einer Seite umgeben ist, schwingt gewissermassen als durchschlagende Zunge eine Kreisscheibe. Ist u ihre Geschwindigkeit, so erhält man das Geschwindigkeitspotential in Form eines Massenpotentials, wobei die Masse mit der Dichte „$-\frac{u}{2\pi}$" auf der Scheibe gleichförmig vertheilt ist. Also

$$P = \frac{u}{2\pi} \iint \frac{dx\,dy}{r} .$$

Damit wird

$$c_{11} = \iint P . u\,dx\,dy = \frac{8R^3}{3}$$ [2]

(R = Radius). Die Geschwindigkeit u ist „aus" der Flüssigkeit positiv gezählt.

8. Die Entwickelungen in diesem und den folgenden Abschnitten betreffen einerseits Fälle, wo strenge Lösungen der

---

[1] Rayleigh Schall II 193.

[2] Maxwell Electricity and Magnetism. I 359.

Hauptgleichungen in (5) möglich sind, anderseits haben sie zum Ziele, zu untersuchen, mit welcher Genauigkeit sie durch die einfacheren, aus der Annahme der Incompressibilität folgenden Gleichungen ersetzt werden können.

Zu diesem Zwecke untersuchen wir den folgenden, dem Thomson'schen[1] Ausdruck einer räumlichen Kugelfunction nachgebildeten Ausdruck

$$\left[A_0 \frac{d^n}{dx^n} + A_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial}{\partial y} + \ldots A_n \frac{\partial^n}{\partial y^n}\right] \frac{F(t - \frac{r-r_0}{a})}{r} +$$

$$\left[B_0 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + B_1 \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial}{\partial y} + \ldots B_{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial y^{n-1}}\right] \frac{d}{dz} \frac{F(t - \frac{r-r_0}{a})}{r}$$

Indem wir $x + yi = \xi$ $x - yi = \eta$ einführen, wird derselbe, wenn für die arbiträren Constanten dieselben Buchstaben beibehalten werden

$$\left[A_0 \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} + A_1 \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}} \frac{\partial}{\partial \eta} + \ldots\right] \frac{F(t - \frac{r-r_0}{a})}{r} +$$

$$+ \left[B_0 \frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}} + \ldots B_{n-1} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \eta^{n-1}}\right] \frac{d}{dz} \frac{F(t - \frac{r-r_0}{a})}{r}$$

Setzt man

$$\rho = r^2 = \xi\eta + z^2 \qquad \frac{1}{r} \cdot F(t - \tfrac{r-r_0}{a}) = H(\rho),$$

so folgt

$$[A_0\eta^n + A_1\eta^{n-1}\xi + \ldots A_n\xi^n] \frac{d^n H(\rho)}{d\rho_n} +$$

$$+ [B_0\eta^{n-1} + B_1\eta^{n-2}\xi \ldots] 2z \frac{\partial^n H}{\partial \rho^n}.$$

Durch Einführung von Winkelcoordinaten

$$\xi = r \sin\vartheta e^{i\varphi}, \quad \eta = r \sin\vartheta e^{-i\varphi}, \quad z = r\cos\vartheta$$

folgt

$$\rho^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{d\rho^n} \left[\frac{F(t - \frac{r-r_0}{a})}{r}\right] \mathfrak{S}_n.$$

Die Grösse $\mathfrak{S}_n$ ist eine Kugelflächenfunction mit $2n+1$ arbiträren Constanten, wie man sich leicht überzeugt, wenn man die Functionen „F^u für alle Argumente einer Constanten gleich setzt.

[1] Thomson Tait theor. Phys. I. p. 164.

Versteht man unter φ ψ dieselben Functionsformen wie früher, so erhalten wir einen, der Schallgleichung $\frac{d^2P}{dt^2} = a^2\Delta P$ genügenden Ausdruck, wenn wir setzen

$$P = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{d\rho^n} \frac{\dot{\varphi}(t - \frac{r-r_0}{a})}{r} \cdot \Omega'_n + \sum_{n=0}^{\infty} \rho^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{d\rho^n} \frac{\dot{\psi}(t - \frac{r-r_0}{a})}{r} \Omega''_n \ldots$$

Die Werthe Ω'_n Ω''_n sind Kugelflächenfunctionen derselben Ordnung mit anderen, arbiträren Constanten. Für $r = R = \infty$ reducirt sich der Werth des

$$\rho^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^n}{\partial \rho^n} \frac{\dot{\varphi}(t - \frac{r-r_0}{a})}{r} \quad \text{auf} \quad \rho^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial^n}{\partial \rho^n} \dot{\varphi}(t - \frac{r-r_0}{a})$$

Nun ist aber strenge, wenn α_1 $\alpha_2 \ldots$ Zahlencoëfficienten bedeuten

$$\frac{\partial^n}{\partial \rho^n} \cdot \frac{F(t - \frac{r-r_0}{a})}{r} = \left(-\frac{1}{2a}\right)^n \cdot \frac{1}{r^n} \left[F^{(n)} - \frac{\alpha_1}{r} F^{(n-1)} \ldots \pm \frac{\alpha_{n-1}}{r^{n-1}} F'\right]$$

Die eingeklammerten Indexe bedeuten die Ordnungszahl der Derivation. Es ist somit

$$r = R = \infty; \quad P.r = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2a}\right)^n \cdot \varphi^{(n)}(t - \tfrac{r-r_0}{a}) \Omega' +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2a}\right)^n \psi^{(n)}(t - \tfrac{r-r_0}{a}) \Omega''_n \ldots$$

Für endliche r werden P, oder lieber solche Aggregate wie

$$\rho^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{d\rho^n} \frac{\dot{\varphi}(t - \frac{r-r_0}{a})}{r}$$

in additiver Verknüpfung alle Derivationen der Grösse φ, von der 0ten bis zur n^{ten} enthalten.

Ähnliches gilt vom Ausdrucke $\frac{dP}{dr}$, der speciell für $r = r_0$ die 0te bis $n+1_{\text{te}}$ Derivation von φ enthalten wird, wo aber als Argument „t“ allein steht. — $\frac{dP}{\partial r}$ wird sich also so bestimmen

lassen, dass es für $r = r_0$ in die Normalgeschwindigkeit $m_1 \dot{\varphi} + m_2 \dot{\psi} \ldots$ einer beliebig schwingenden festen Kugel übergehen kann. Die Grössen $m_1 m_2 \ldots$ können nämlich als gegebene Functionen des Ortes auf der Kugel, durch Kugelfunctionen mit bestimmt gegebenen Constanten dargestellt werden. Erwägt man noch, dass sicherlich Integrale wie $\varphi(t) = A_1 e^{\nu t}$ $\psi = A_2 e^{\nu t} \ldots$ dem Sinne der Aufgabe entsprechen, so lassen sich die unbestimmten arbiträren Constanten in jedem Ω_n, unabhängig von $A_1 A_2 \ldots$ durch Vergleich beider Normalgeschwindigkeiten unzweideutig bestimmen, wie wohl sie noch (gegebene) Functionen der erst zu eruirenden Grösse ν sind.

„Der für P gegebene Werth ist somit ein allgemeiner Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential in einem unendlichen flüssigkeitserfüllten Raume, in welchem durch beliebige Schwingungen, einer Kugeloberfläche Wellen erzeugt werden. Der gegebene Werth ist jedoch nicht vollständig. Er wird es erst dann, wenn alle Werthe von ν eruirt sind, und wenn jedem derselben durch Aufstellung eines dem „P^{μ}" ähnlichen Gliedes Rechnung getragen ist".[1]

9. Die Aufstellung der Bewegungsgleichung der Kugel erfordert die Berechnung zweier Integrale J_1 und $\iiint M_1 . \Delta \frac{dP}{dt} \, dx\, dy\, dz$ sowie ihrer Analoga.

Entwickeln wir zu diesem Zwecke zuerst die Grössen $M_1 M_2 \ldots$ nach Kugelfunctionen.

---

[1] Die erste Anwendung von Kugelfunctionen verdankt man wahrscheinlich Stokes (On the Communication of Vibration from a Vibrating Body to a sourronding Gas. Phil. Trans. 1868.

Soweit sich nach dem Auszuge in Rayleigh Schall II p. 267ff. urtheilen lässt, setzt Stokes die Bewegungen an der Kugel voraus, ohne die Reaction der Flüssigkeit auf den tönenden Körper selbst zu verfolgen. Die Kugelfunctionen werden unter der Annahme, dass $P = e^{\nu t} . P_0$, in ihrer durch eine Differentialgleichung definirten Form eingeführt. Dies führt nothwendigerweise zu Reihen mit Coëfficienten, deren Gesetzmässigkeit sich nicht erkennen lässt. Dieselben Reihen zeigen sich in Folge der in diesem Aufsatze befolgten Methoden in geschlossener Form als gewisse Differentialquotienten, die eine äusserst leichte Handhabung und Discussion gestatten. Weitere Anwendungen der Kugelfunctionen auf Schallprobleme findet man im erwähnten Buche von Rayleigh.

Es sei[1]

$$M_1 = \frac{H_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{d\rho^n}\left(\frac{1}{r}\right) \cdot H_n; \quad M_2 = \frac{H_0''}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^n}{\partial \rho^n}\left(\frac{1}{r}\right) H_n''.$$

Das Integral J_1 reducirt sich, da sowohl P als M in unendlicher Entfernung von der Ordnung $\frac{1}{r}$ sind auf

$$J_1 = -\iiint M_1 \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) df =$$

$$= \frac{1}{a}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint r^2 d\omega \frac{H_0'}{r^2}\left[\sum_0^{\infty}\left(-\frac{1}{2a}\right)^n \varphi^{(n+1)}\left(t - \tfrac{r-r_0}{a}\right)\Omega_n' + \ldots\right], r = R.$$

Dabei ist $d\omega$ das Differential des Körperwinkels. Erwägt man einen, Kugelflächenfunctionen betreffenden Satz, so folgt

$$J_1 = \frac{1}{a}\bar{\varphi}\left(t - \tfrac{r-r_0}{a}\right) \iint d\omega\, H_0' \Omega_0' + \frac{1}{a}\bar{\psi}\left(t - \tfrac{r-r_0}{r}\right) \iint d\omega\, H_0'' \Omega_0' \ldots$$

In dem Raumintegrale ersetzen wir ΔP durch $\frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}$ und bekommen, wenn wir es S nennen:

$$S = \iiint dx\, dy\, dz\, M_1 \cdot \Delta \frac{dP}{\partial t} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4} \iiint r^2 d\omega\, dr \frac{H_0' \Omega_0'}{r^2} \varphi\left(t - \tfrac{r-r_0}{a}\right) +$$

$$+ \frac{1}{a^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4} \iiint r^2 dr\, d\omega \left[\sum_1^{\infty} \rho^{\frac{n}{2}} \frac{d^n}{d\rho^n}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) H_n'\right]\left[\sum_1^{\infty} \rho^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^n}{\partial \rho^n}\left(\frac{\varphi\left(t - \frac{r-r_0}{a}\right)}{r}\right)\Omega_n'\right] + \ldots$$

Setzen wir

$$\iint d\omega\, H_n' \Omega_n' = E_n^{11}, \quad \iint d\omega\, H_n' \Omega_n'' = E_n^{12}, \quad \iint d\omega\, H_n'' \Omega_n = E_n^{21} \text{ etc.}$$

so bekommen wir

$$S = E_0^{11} \frac{1}{a^2}\frac{\partial^3}{\partial t^3} \int_{r=r_0}^{r=R} dr\, \dot{\varphi}\left(t - \tfrac{r-r_0}{a}\right) + E_0^{12} \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^3}{\partial t^3} \int_{r=r_0}^{r=R} dr\, \dot{\psi}\left(t - \tfrac{r-r_0}{a}\right) + \ldots$$

---

[1] Bei der hier benützten Entwickelung ist die betreffende Potenz des Radius der Beziehungskugel, die man sonst explicit aufzuschreiben pflegt, im Werthe H_n schon enthalten.

$$+\frac{1}{2a^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left[\sum_1^\infty E_n^{11}\int_{r=r_0}^{R} d\rho\,.\,\rho^n+\tfrac{1}{2}\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right).\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\left(\frac{\varphi(t-\frac{r-r_0}{a})}{r}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_1^\infty E_n^{12}\int_{r=r_0}^{R} d\rho\,.\,\rho^n+\tfrac{1}{2}\frac{d^n}{d\rho^n}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)\frac{\partial^n}{d\rho^n}\left(\frac{\psi(t-\frac{r-r_0}{a})}{r}\right)\cdots\right]$$

Die Integrationen lassen sich leicht ausführen, wenn für $\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)$ sein Werth

$$(-1)^n\frac{1.3..2n-1}{2^n}\rho^{-\frac{1}{2}-n},$$

und für $\dot{\varphi}(t-\frac{r-r_0}{a})$ der Werth

$$-a\frac{\partial}{\partial r}\varphi(t-\tfrac{r-r_0}{a})$$

eingesetzt wird. Der von der oberen Grenze herrührende Antheil ist:

$$\left.\begin{aligned}&-\frac{E_0^{11}}{a}\bar{\varphi}(t-\tfrac{r-r_0}{a})-\frac{1}{a}E^{12}\bar{\psi}(t-\tfrac{r-r_0}{a})\\&+\frac{1}{2a^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left[\sum_1^\infty E_n^{11}(-1)^n\frac{1.3..2n-1}{2^n}\frac{d^{n-1}}{\partial\rho^{n-1}}\frac{\varphi(t-\frac{r-r_0}{a})}{r}+\ldots\right]\end{aligned}\right\}r=R$$

Nun ist aber selbst für $n=1$ der Werth $\frac{\partial^{n-1}}{\partial\rho^{n-1}}\frac{\varphi}{r}$ von der Ordnung $\frac{1}{R}$, demnach entfallen die eingeklammerten Glieder; die verbleibenden tilgen sich aber in Folge der algebraischen Verbindungsweise von J_1 und S. Die Summe J_1+S reducirt sich also auf

$$\frac{1}{a}\bar{\varphi}(t)E_0^{11}+\frac{1}{a}\bar{\psi}(t)E_0^{12}$$

$$-\frac{1}{2a^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\left\{\sum_1^\infty E_n^{11}(-1)^n\frac{1.3..2n-1}{2^n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\rho^{n-1}}\frac{\varphi(t-\frac{r-r_0}{a})}{r}+\right.$$

$$\left.+\sum_1^\infty E_n^{12}(-1)^n\frac{1.3..2n-1}{2^n}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\rho^{n-1}}\frac{\psi(t-\frac{r-r_0}{a})}{r}\cdots\right\}_{r=r}$$

10. Der bei der Lösung des Problems zu befolgende Weg ist, um es kurz zu recapituliren, der folgende:

Man entwickle, falls der geometrische Character der allgemeinen Coordinaten schon bekannt ist, somit

$$m_1 = \frac{dM_1}{\partial n} \quad m_2 = \frac{\partial M_2}{\partial n}$$

als Functionen des Ortes auf der Kugel gegeben sind, die Grössen M_1 M_2... nach Kugelfunctionen. Sie haben nämlich der Laplace'schen Gleichung zu genügen, und müssen an der Oberfläche ihre Werthe $\frac{\partial M}{\partial n}$ in jene m übergehen. Deshalb sind alle Kugelflächenfunctionen H als gegeben zu betrachten.

Sollen die Werthe von $\frac{dP}{\partial r}$ an der Kugelfläche in die vorgeschriebenen Werthe $\frac{dM}{\partial r}$ übergehen, so hat, falls noch die Lösung $\varphi = e^{\nu t}$ präsumirt wird, die Bedingungsgleichung die Form

$$\frac{d}{d\rho}\left[\rho^{\frac{n}{2}}\frac{d^n}{d\rho^n}\cdot\frac{e^{-\frac{\nu(r-r_0)}{a}}}{r}\right]_{r=r_0}\Omega'_n = \frac{d}{d\rho}\left[\rho^{\frac{n}{2}}\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\frac{1}{r}\right]_{r=r_0}H_n.$$

Damit erhält man nach Vollzug der angedeuteten Operationen und Einsetzung von $r = r_0$

$$\Omega'_n = f(n, \nu, r_0)H'_n \text{ etc.}$$

Hiemit sind auch die mit E bezeichneten Werthe als gegeben zu betrachten.

Für die Coordinate φ lautet dann die Bewegungsgleichung der Kugel:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\dot{\varphi}}[T+T_1h]+\frac{dV}{d\varphi} = h\left[\frac{1}{a}\ddot{\varphi}(t)E_0^{11}+\frac{1}{a}\ddot{\psi}(t)E_0^{12}\ldots\right]$$

$$-\frac{h}{2a^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\sum_1^\infty E_n^{11}(-1)^n\frac{1.3..2\overline{n-1}}{2^n}\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\frac{\varphi(t-\frac{r-r_0}{a})}{r}$$

$$-\frac{h}{2a^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4}\sum_1^\infty E_n^{12}(-1)^n\frac{1.3..2\overline{n-1}}{2^n}\frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\frac{\psi(t-\frac{r-r_0}{a})}{r}\Bigg|_{r=r_0}$$

Solcher Gleichungen gibt es so viele, als unabhängige Coordinaten. Man erhält particuläre Integrale der Form

$$\varphi = A_1 e^{\nu t} \quad \psi = A_2 e^{\nu t}.$$

Führt man diese Werthe ein, kürzt den Zeitfactor, ordnet nach A_1 A_2, eliminirt diese Integrationsconstanten aus allen Gleichungen, so gibt die resultirende Determinante gleich Null gesetzt eine Gleichung zur Bestimmung der Werthe ν. Alle weiteren Betrachtungen sind ähnlich auszuführen, wie die specielle Aufgabe, wo sich die Gleichungen auf die Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} + \frac{dV}{d\varphi} = 0 \ldots$$

reduciren [1], also keine Flüssigkeit vorhanden ist.

11. Das practische Interesse knüpft sich weit mehr daran, zu erfahren, wie sich die Gleichungen gestalten, wenn, wie dies in der Praxis sehr oft der Fall ist, die Dimension der tönenden Kugel gegen die Länge einer Welle klein sind. Es wird deshalb, um allgemeinere Resultate zu gewinnen, angezeigt sein, zu untersuchen, in wie weit sich practische Fälle, wo nicht Kugeln, sondern beliebige Körper tönen, unter den eben gerechneten subsumiren lassen.

Wir legen zu diesem Zwecke um die tönenden Körper eine dieselben möglichst umschliessende Kugel vom Radius r_0, und theilen dadurch die Flüssigkeit in zwei Gebiete. Den wirklichen Vorgang ersetzen wir durch einen fingirten, wie man dies häufig in anderen Problemen mathematisch-physikalischer Natur zu thun genöthigt ist. Die Fiction wird der Wahrheit sehr nahe liegen, wenn wir im Innern der Kugel die Flüssigkeit als incompressibel ansehen, also setzen

$$P = M_1 \dot{\varphi}(t) + M_2 \dot{\psi}(t) \ldots .$$

Im äusseren Raume sei

$$P = \sum_0^\infty \rho^n \frac{\partial^n}{\partial \rho^n}\left[\frac{\dot{\varphi}\left(t - \frac{r - r_0}{a}\right)}{r}\right] \mathfrak{S}_n' + \ldots$$

---

[1] Rayleigh, Schall Vol. I pag. 109 und ff., Thomson Tait theor. Phys. I p. 304.

Letztere Lösung soll so beschaffen sein, dass die Normalgeschwindigkeiten an der Grenze beider Gebiete in einander übergehen. Man gelangt dazu, wenn die Grösse $M_1 \dot{\varphi}(t) + M_2 \dot{\psi}(t)$ durch Kugelfunctionen dargestellt wird. Es sei bemerkt, dass man die Kenntniss der Bewegung in einer absolut incompressiblen Flüssigkeit voraussetzt.

Den Genauigkeitsgrad der fingirten Lösung erfahren wir, wenn wir untersuchen, mit welcher Genauigkeit die zweite mechanische Bedingung an der Grenzfläche beider Gebiete, die Druckcontinuität erfüllt ist. Letztere reducirt sich auf die Continuität der Potentialwerthe für $r = r_0$. Aus der schon aufgestellten Gleichung für die Continuität der Normalgeschwindigkeiten

$$r = r_0 \left| \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{d^n}{d\rho^n} \cdot \frac{e^{-\nu \frac{(r-r_0)}{a}}}{r}\right]\Omega'_n = \frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{d^n}{d\rho^n}\left(\frac{1}{r}\right) H'_n\right]\right.^{1}$$

ist uns Ω'_n durch H'_n bekannt.

Die Druckcontinuitätsgleichung fordert, dass die Differenz zweier Glieder

$$\rho^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\partial^n}{\partial \rho^n} \cdot \left[\frac{e^{-\nu \frac{(r-r_0)}{a}}}{r}\right]\Omega'_n \quad \text{und} \quad \rho^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^n}{\partial \rho^n}\left[\frac{1}{r}\right] H'_n$$

verschwindet.

Wir wollen eruiren, wie viel die Differenz derselben in Theilen eines Gliedes beträgt, d. h. wir bestimmen die Grössenordnung von

$$\left.\frac{\Omega'_n \frac{\partial^n}{\partial \rho^n}\left[\frac{e^{-\nu \frac{(r-r_0)}{a}}}{r}\right] - H'_n \frac{\partial^n}{\partial \rho^n}\left(\frac{1}{r}\right)}{\frac{\partial^n}{\partial \rho^n}\left(\frac{1}{r}\right) H'_n}\right| r = r_0$$

Letztere Grösse kann, wenn man die Rücksicht auf das Zeichen fallen lässt, geschrieben werden:

---

[1] Nach Kürzung des Zeitfactors $e^{\nu t}$.

$$\frac{\frac{1}{\rho}\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\frac{e^{-\frac{\nu r}{a}}}{r}\cdot\frac{2n+1}{2}+\frac{d^{n+1}}{d\rho^{n+1}}\frac{e^{-\frac{\nu r}{a}}}{r}}{\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{\rho}\frac{d^n}{d\rho^n}\frac{e^{-\frac{\nu r}{a}}}{r}+\frac{d^{n+1}}{d\rho^{n+1}}\frac{e^{-\frac{\nu r}{a}}}{r}}\quad\Big|\ r=r_0$$

Sehr zweckmässig transformirt man den Ausdruck durch die Substitution

$$-\frac{\nu r}{a}=r'\qquad\frac{\nu^2}{a^2}\cdot\rho=\rho',$$

wo r' dann eine Zahl ist.

Es ist

$$\frac{\frac{1}{\rho'}\frac{\partial^n}{\partial\rho'^n}\left(\frac{e^{r'}}{r'}\right)\cdot\frac{2n+1}{2}+\frac{\partial^{n+1}}{\partial\rho'^{(n+1)}}\cdot\frac{e^{r'}}{r'}}{\frac{1}{\rho'}\frac{\partial^n}{\partial\rho'^n}\left(\frac{e^{r'}}{r'}\right)\cdot\frac{n}{2}\frac{\partial^{n+1}}{\partial\rho'^{(n+1)}}\frac{e^{r'}}{r'}}\quad\Big|\ r'=-\frac{\nu r_0}{a}$$

Nun ist

$$\frac{\partial^n}{\partial\rho'^n}\left(\frac{e^{r'}}{r'}\right)=\frac{e^{r'}}{r'^{2n+1}}[A_0+A_1r'+A_n\cdot r'^n],$$

wobei

$$A_n=\frac{(-1)^n}{2^n}\cdot1\cdot3\ldots\overline{2n-1},\quad A_1=-A_0\quad A_2=A_0\frac{n-1}{2n-1},$$

$$A_3=-\frac{A_0(n-2)}{3(2n-1)}\ \text{etc.}$$

Damit übergeht obiges Verhältniss in

$$\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\left(\frac{r_0\nu}{a}\right)^2\cdot\frac{1+\alpha_1\frac{r_0\nu}{a}+\alpha_2\left(\frac{r_0\nu}{a}\right)^2+\ldots}{1+\beta_1\left(\frac{r_0\nu}{a}\right)+\beta_2\left(\frac{r_0\nu}{a}\right)^2}.$$

Da nun $\frac{r_0\nu}{a}$ eine Grösse wie $\left(\frac{2\pi\cdot r_0}{\lambda}\right)$ ist — $\lambda=$ Wellenlänge, so hat man in erster Annäherung den Werth der Verhältnisszahl

$$\frac{1}{(n+1)(2n+1)}\left(\frac{r_0\nu}{a}\right)^2$$

„Die fingirte Lösung ist also mit der Genauigkeit richtig, mit welcher $\left(\frac{2\pi r_0}{\lambda}\right)^2$ gegen Eins vernachlässigt werden kann."

Die Genauigkeit ist selbst im ungünstigsten Falle, wo dem äusseren Raume blos radiale Bewegungen mitgetheilt werden, also $n = 0$, eine beträchtliche. Sie beträgt 1 Percent, wenn die grösste Dimension des tönenden Systems zur Wellenlänge im Verhältnisse 1 : 31,4 steht.

In Luft dürften also für die grösste Dimension der Wellen abgebenden Theile 0·2 Met. gesetzt, die Formeln bis zu circa 100 Schwingungen per Secunde gelten. In Wasser wäre die Genauigkeit schon $^{10}/_{44}$ Percent.

Derartige Fälle reiner radialer Bewegung sind aber in der Praxis sehr selten. Glocken, Gabeln, Stäbe erfordern $n \geq 1$. Damit steigt die Genauigkeit sehr erheblich mit dem Range der Kugelfunction. Das Geschwindigkeitspotential zweier kleiner Kugeln, die etwa wie die Stimmgabelzinken schwingen, ist für weitere Entfernungen $= c \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)$. Stellt man also die Bewegung um die Stimmgabelzinken auf der Kugel $r = r_0 = 1^{dm}$ durch eine Kugelflächenfunction $n = 2$ dar, so folgt schon eine Genauigkeit von $^1/_9$ Percent bei 100 Schwingungen per Secunde. Es ist auch von vornherein klar, dass bei gleicher Tonhöhe das Gebiet der Incompression weiter reicht, wenn die Schwingungen nach Theilen erfolgen. Verdichtungen treten nämlich dort ein, wo die Flüssigkeit mit Schwierigkeiten oder gar nicht in jene Räume gelangen kann, die vom bewegten Körper eben verlassen wurden. Dass dieser locale Ausgleich bei Schwingungen nach Theilen weit leichter, bei rein radialen Schwingungen gar nicht vor sich geht, ist klar.

12. Nach dem Vorausgehenden sind wir berechtigt, den für $\iiint dx\,dy\,dz\,M_1 \Delta \frac{dP}{dt}$ gefundenen Werth direct zu benützen; denn vermöge der über P im Innern von r_0 gemachten Annahme verschwindet der daher rührende Antheil. Die Schwingungsgleichungen des Systems gelten also bis zu einem gewissen Genauigkeitsgrade allgemein.

Drückt man im Ausdrucke

$$f = E_n^{11} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \rho^{n-1}} \frac{e^{-\frac{\nu(r-r_0)}{a}}}{r} \quad \ldots (r-r_0)$$

die Grösse E_n^{11} durch H_n aus, so bekommt man

$$f = \iint d\omega \, . \, H_n^{12} \frac{\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^{\frac{n}{2}} \frac{\partial_n}{\partial \rho^n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]}{\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^n}{\partial \rho^n} \frac{e^{-\frac{\nu r}{a}}}{r}\right]} \frac{d^{n-1}}{d\rho^{n-1}} \cdot \frac{e^{-\frac{\nu r}{a}}}{r} \quad \ldots (r = r_0)$$

Da die Exponentielle eine (wenig von 1 verschiedene) Zahl ist, so gilt dies auch vom Bruche in f. Damit ist f ein Product aus dem Doppelintegral und der „$-(2n-1)^{\text{ten}}$ Potenz von r_0. Bildet man

$$\int M_1 \frac{dM_1}{\partial n} df = \frac{r_0^2}{r_0^{2n+3}} \Sigma \iint H_n^2 d\omega \, . \text{ Zahl},$$

so folgt, dass das erwähnte Product eine Grösse der Ordnung

$$\iint M_1 \frac{\partial M_1}{\partial n} df \, . \, \text{mal} \, . \, r_0^2 \text{ ist.}$$

Nun ist aber

$$\iint M_1 \frac{dM_1}{\partial n} df \quad \text{der Ordnung wie } T_1 \ldots$$

Setzt man dies f in die Schwingungsgleichung der Kugel im Abschnitte 10) ein, nachdem $\varphi(t)$ durch $e^{\nu t}$ ersetzt wurde, zieht von dem daher resultirenden Factor ν^4 ein Glied ν^2 zu dem r_0^2, so folgt leicht, dass die Glieder, welche von der Compression herrühren, gegen jene, welche aus der Annahme der Incompressibilität folgen, von derselben Ordnung sind, wie das Quadrat eines Bruches gegen Eins, wenn der Bruch im Zähler die grösste Dimension des tönenden Systems, im Nenner die Wellenlänge besitzt. Damit ist die Proposition am Schlusse von Abschnitt 5) gerechtfertigt. Es soll hinzugefügt werden, dass der Fall $n = 0$ eine Ausnahme bildet. An die Stelle des Quadrates tritt die erste Potenz.

Wir wollen nun die Allgemeinheit der Rechnung dadurch einschränken, dass wir nur einen einzigen Freiheitsgrad voraussetzen.

13. Zu der eben angeführten Beschränkung wollen wir noch die hinzufügen, dass bloss solche Deformationen möglich sind, welche einer Kugelflächenfunction[1] entsprechen. Die Bewegungsgleichung lautet dann

$$0 = a_{11}\varphi + (b_{11} + c_{11}h)\ddot{\varphi} + \\ + \frac{h}{2a^2}(-1)^n \frac{1.3..2n-1}{2^n} E_n^{11} \frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \rho^{n-1}} \frac{\varphi\left(t - \frac{r-r_0}{a}\right)}{r} \Bigg| r = r_0$$

Wir setzen $\varphi(t) = e^{\nu t}$. Den Ausdruck

$$f = E_n^{11} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \rho^{n-1}} \cdot \frac{e^{-\frac{\nu(r-r_0}{a}}}{r}$$

transformiren wir: da $2T_1 = c_{11}\dot{\varphi}^2$ ist, so gilt

$$c_{11} = -\iint r_0^2 d\omega M_1 \frac{\partial M_1}{\partial r} = \\ = \frac{n+1}{r_0^{2n+1}} \left[(-1)^n \frac{1.3.\ (2n-1)}{2^n}\right]^2 \iint d\omega H_n'^2 d\omega$$

Ähnlich ist $E_n^{11} = \iint d\omega . \Omega_n' H_n'$ durch Einführung von H_n' an Stelle von Ω_n durch c_{11} ausdrückbar. Man findet so

$$f = \frac{c_{11} \cdot r_0^{2n+1} \cdot 2^{2n}}{(n+1)[(-1)^n 1.3..2n-1]^2} \cdot \\ \frac{\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^n}{\partial \rho^n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]}{\frac{\partial}{\partial \rho}\left[\rho^{\frac{n}{2}} \frac{\partial^n}{\partial \rho^n}\left(\frac{e^{-\frac{\nu r}{a}}}{r}\right)\right]} \frac{\partial^{n-1}}{\partial \rho^{n-1}} \frac{e^{-\frac{\nu r}{a}}}{r} \cdot \ . \ r = r_0$$

Führen wir statt r die Grösse

$$r' = -\frac{r\nu}{a} \qquad \rho' = \frac{\nu^2}{a^2}\rho$$

ein, wo r' eine Zahl ist, so folgt schliesslich

---

[1] Der leicht aus der Gleichung in 10) folgende Fall $n = 0$ entspricht reinen Radialschwingungen einer Kugel, und muss getrennt behandelt werden.

$$0 = a_{11} + \nu^2 (b_{11} + c_{11} h) -$$

$$\frac{h . c_{11} a^2}{4 r_0^2} \frac{\frac{\partial^{n-1}}{\partial \rho'^{n-1}} \left(\frac{e^{r'}}{r'}\right)}{\frac{\partial^{n+1}}{\partial \rho'^{(n+1)}} \frac{e^{r'}}{r'} + \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{\rho'} \frac{\partial^n}{\partial \rho'^n} \cdot \frac{e^{r'}}{r'}} \quad \Big| \quad r' = -\frac{\nu r_0}{a}$$

Wir können durch Einführung von

$$\frac{\partial^n}{\partial \rho'^n} \left(\frac{e^{r'}}{r'}\right) = \frac{A_0 + A_1 r' + \ldots A_n r'^n}{r'^{2n+1}} e^{r'}$$

nachweisen, dass die Gleichung zur Bestimmung von ν nicht transcendent, sondern eine algebraische Gleichung $n+3^{\text{ten}}$ Grades ist.

Es ist von Interesse, diese streng giltige Gleichung in zwei speciellen Fällen zu lösen.

A. Die Wellenlänge sei auch gegen die Kugeldimension sehr klein. Die Untersuchung dürfte auf die höchsten Töne einer grossen Glocke, auf die Geräusche beim Anschlag des Hammers anwendbar sein.

r' ist dann gegen 1 sehr gross; also

$$\frac{\partial^n}{\partial \rho'^n} \left(\frac{e^{r'}}{r'}\right) = \frac{1}{r'} \frac{\partial^n}{\partial \rho'^n} e^{r'}.$$

Mit Hilfe der Relation

$$\frac{\partial^n}{\partial \rho'^n} F(r) = \frac{1}{r'^n} \left[F^{(n)}(r') - \frac{\alpha_1}{r'} F^{(n-1)}(r') \ldots\right]$$

haben wir

$$\frac{\partial^n}{\partial \rho'^n} (e^{r'}) = \frac{1}{r'^n} e^{r'}.$$

Damit folgt

$$a_{11} + \nu^2 (b_{11} + c_{11} h) = \frac{h c_{11}}{4} \cdot \frac{\nu^2}{\frac{n}{2} - \frac{r_0 \nu}{a}}$$

wofür man sehr genähert schreiben kann, wenn $\frac{n}{2}$ gegen r' vernachlässigt wird, (was bei endlichen n erlaubt ist)

$$0 = a_{11} + \nu^2 (b_{11} + c_{11} h) + \frac{h c_{11}}{4} \frac{a}{r_0} \nu.$$

Die Schwingungen vollziehen sich nach dem Typus

$$e^{-pt}\cos Nt,$$

wo

$$p=\frac{hc_{11}}{8(b_{11}+c_{11}h)}\cdot\frac{a}{r_0},\qquad N=\sqrt{\frac{a_{11}}{b_{11}}-p^2}.$$

B. Die Grösse r' sei klein gegen 1, die Dimensionen der Kugel gegen eine Wellenlänge sehr unbedeutend.

Wir sehen vorderhand von dieser Beschränkung noch ab und transformiren die strenge Gleichung durch Wiedereinführung der Grösse r statt r' und erhalten so

$$a_{11}\varphi+\nu^2(b_{11}+c_{11}h)=$$

$$\frac{hc_{11}}{4}\cdot\frac{\nu^4}{a^2r_0^2}\cdot\frac{\dfrac{\partial^{n-1}}{\partial\rho^{n-1}}\dfrac{e^{-\frac{\nu r}{a}}}{r}}{\dfrac{\partial^{n+1}}{\partial\rho^{n+1}}\dfrac{e^{-\frac{\nu r}{a}}}{r}+\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^n}{\partial\rho^n}\dfrac{e^{-\frac{\nu r}{a}}}{r}}\Bigg|_{r=r_0}$$

Bei Einführung der erwähnten Beschränkung wird eine erste genäherte Lösung sein $\nu=\nu_0 i$, wobei $a_{11}=\nu_0^2(b_{11}+c_{11}h)$.

Eine richtigere Lösung folgt, wenn $\nu=i(1+\varepsilon)\nu_0$ gesetzt wird, wobei ε von der Ordnung der Grösse rechter Hand ist, die in der strengen Gleichung dem $a_{11}+\nu^2(b_{11}+c_{11}h)$ gleichgesetzt wird. Man hat so

$$-2\nu_0^2(b_{11}+c_{11}h)\varepsilon=$$

$$=\frac{hc_{11}}{4}\frac{\nu_0^4}{a^2r_0^2}\cdot\frac{\dfrac{\partial^{n-1}}{d\rho^{n-1}}\left[\cos\dfrac{r.\nu_0}{a}-i\sin\dfrac{r\nu_0}{a}\right]\dfrac{1}{r}}{\left[\dfrac{\partial^{n+1}}{\partial\rho^{n+1}}+\dfrac{n}{2}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^n}{\partial\rho^n}\right]\left[\cos\dfrac{r\nu_0}{a}-i\sin\dfrac{r\nu_0}{a}\right]\dfrac{1}{r}}\Bigg|_{r=r_0}$$

Heisst man

$$\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\frac{\cos\frac{\nu_0 r}{a}}{r}=f_n;\qquad\frac{\partial^n}{\partial\rho^n}\frac{\sin\frac{\nu_0 r}{a}}{r}=F_n,$$

so ist

$$\varepsilon = -\frac{h}{8}\frac{c_{11}}{b_{11}+c_{11}h}\cdot\frac{\nu_0^2}{r_0^2 a^2}\cdot$$

$$\frac{f_{n-1}\left[f_n\cdot\frac{n}{2\rho}+f_{n+1}\right]+F_{n-1}\left[F_n\cdot\frac{n}{2\rho}+F_{n+1}\right]+i\left[F_n\cdot\frac{n}{2\rho}+F_{n+1}\right]f_{n-1}-iF_{n-1}\left[f_n\frac{n}{2\rho}+f_{n+1}\right]}{\left[f_n\cdot\frac{n}{2\rho}+f_{n+1}\right]^2+\left[F_n\cdot\frac{n}{2\rho}+F_{n+1}\right]^2}\Bigg|_{r=r_0}$$

Die Ausdrücke „f_n“ „F_n“ lassen sich strenge entwickeln. Wir wollen jedoch unter der obigen Voraussetzung blos die massgebenden ersten Glieder behalten, und alle Grössen der Ordnung $\left(\frac{\nu_0 r_0}{a}\right)$ gegen 1 vernachlässigen. Wir haben so, wenn die Sinus und Cosinus durch Reihen dargestellt werden,

$$F_{(n)} = \left(\frac{\nu_0}{a}\right)^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}n!\left[1-\left(\frac{r_0\nu_0}{a}\right)^2\frac{1}{1!}\frac{n+1}{(2_{n+2})(2_{n+3})}\cdot\cdot\right]$$

oder

$$F_n = \left(\frac{\nu_0}{a}\right)^{2n+1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}n!,$$

mit derselben Genauigkeit

$$f_n = \rho_0^{-\frac{1}{2}-n}\frac{(-1)^n}{2^n}\frac{1.3..2n-1}{2n!} \qquad f_n\frac{n}{2\rho_0}+f_{n+1} = \rho_0^{-\frac{3}{2}-n}\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}1.3..(2n-1)(n+1)$$

Der Nenner lautet dann genähert

$$\rho_0^{-3-2n}\frac{1}{2^{2n+2}}[1.3..2_{n-1}]^2(n+1)^2$$

Der Factor von i wird

$$-\left(\frac{\nu_0}{a}\right)^{2n-1}\frac{(n-1)!\,1.3..(2n-1)(n+1)}{(2n-1)!\,2^{n+1}}\rho_0-\frac{s}{2}-n$$

Die Bewegungen des Körpers vollziehen sich nach einem Gesetze

$$\varphi = e^{-pt}\cos Nt,$$

wo

$$p=\nu_0\frac{hc_{11}}{8(b_{11}+c_{11}h)}\left(\frac{\nu_0 r_0}{a}\right)^{2n+1}\frac{(n-1)!\,2^{n+1}}{(2n-1)!\,1.3..(2n-1)(n+1)!}$$

$$N=\nu_0\left(1-\frac{h}{2}\frac{c_{11}}{b_{11}+c_{11}h}\frac{1}{(2n-1)(n+1}\cdot\left(\frac{\nu_0 r_0}{a}\right)^2\right).$$

Ehe wir an die Discussion der gewonnenen Formeln herantreten, soll die akustische Bedeutung des Extinctionsfactors p erörtert werden.

Die Gesammtenergie des tönenden Körpers E ist gegeben durch

$$2E = 2T+2V = (a_{11}\cos^2 Nt + b_{11}N^2\sin^2 Nt)e^{-2pt}.$$

Die in der Schwingungsdauer τ abgegebene Energie ist

$$\Delta E = E(1-e^{-2p\tau})$$

oder gekürzt

$$\Delta E. = 2E.p\tau.$$

Der Extinctionsfactor p ist somit ein Mass für dies per Zeiteinheit nach Aussen in Form von Wellen abgegebene Energie. Da eine Stauung derselben nicht eintreten kann, so ist „p“ auch ein Mass für die Arbeit, welche eine fortschreitende Welle nach aussen in der Zeiteinheit abgibt, also ein Mass der Hörbarkeit, oder besser, der objectiven Schallstärke.

Man könnte dies auch direct zeigen, wenn das Problem gelöst wäre, wo eine von Aussen angebrachte Kraft den tönenden Körper auf constanten Amplituden erhält. Doch ist dies nicht einmal nöthig; wenn wir in einen fernen Punkte $r = R$ das zu einer gewissen Zeit vorhandene Potential mit seinem Ausgangswerthe vergleichen, der auf denselben Radius aber auf der Kugelfläche vor der Zeit $\frac{R-r_0}{a}$ existirt hat, so haben wir damit auch

einen Ausdruck für das gleichzeitige Verhältniss des Potentials an einem fernen Punkte zu den entsprechenden an der Kugel festgestellt, wenn die Schwingungen der letzteren constant sind. Wir brauchen dann bloss den Ausdruck e^{-pt} darin Eins zu setzen. Die Arbeit gegen eine Flächeneinheit, also das objective Mass der Schallstärke ist dann eine Function des Ortes und dem obigen Ausdrucke „p“ proportional. Diese Betrachtungsweise ist allerdings viel complicirter, jedoch nicht überzeugender.

14. Die Entwicklungen des vorigen Abschnittes gestatten den Schluss, dass sich Töne mässiger Höhe und extremer Höhe sehr verschieden verhalten. Nennt man N_0 die Schwingungszahl in Luft (leeren Raum), N in einer tropfbaren Flüssigkeit, so ergibt sich, dass wohl in beiden Fällen das Verhältniss $\frac{N_0}{N}$ durch die Dichte und Schallgeschwindigkeit bedingt ist. Doch ist der Einfluss ein ungleicher. Bei Tönen mässiger Tiefe wirkt in erster Linie die Dichte, die Schallgeschwindigkeit erst an zweiter Stelle, indem durch ihr Anwachsen das Verhältniss $\frac{N_0}{N}$ verkleinert wird. Bei Tönen extremer Höhe wirkt die Schallgeschwindigkeit viel directer, jedoch im umgekehrten Sinne. Es scheint also, dass man nicht allgemein behaupten kann, dass die Vergrösserung der Schallgeschwindigkeit das Verhältniss $\frac{N_0}{N}$ entweder nur erhöhe oder nur erniedrige.

Die für „p“ gegebenen Werthe zeigen gleichfalls ein entgegengesetztes Verhalten. Man kann aus ihnen die zwei Sätze reduciren:

„Die Hörbarkeit ist nur bei schütteren Medien (Gasen) ceteris paribus der Dichte angenähert proportional“.

„Das Anwachsen der Schallgeschwindigkeit drückt ceteris paribus die Hörbarkeit in einem, mit dem Range der Kugelfunction „n“ rasch zunehmenden Masse, bedeutend herunter, wenn die Töne mässige Höhe besitzen, wogegen durch eben denselben Umstand die Hörbarkeit extrem hoher Töne, Geräusche begünstigt wird.“

Die Bewegung, welche tiefen Tönen entspricht, scheint sich mehr oder weniger, sie mag noch so heftig sein, auf den Erzeu-

gungsbereich einzuschränken. Der tönende Körper und das Fluidum bilden ein angenähert dynamisch conservatives System, das äusserst wenig von seiner Energie nach aussen abgibt. Daher erklärt sich die langdauernde Bewegung tiefer Stimmgabeln als auch die geringe Hörbarkeit derselben, wenn sie noch so heftig schwingen. Um einen Anhaltspunkt an Zahlen zu gewinnen, will ich die Hörbarkeit eines Tones in Luft 1 setzen, aber „W" nennen, wenn dieselbe Tonquelle ceteris paribus im Wasser sich befindet. Es ist dann

$$W = \frac{h}{h'}\left(\frac{\nu_0}{\nu_0'}\right)^3\left(\frac{\nu_0}{\nu_0'}\frac{a'}{a}\right)^{2n+1}$$

Die gestrichelten Buchstaben entsprechen der Luft. Setzen wir

$$h = 1,\ h' = \frac{1}{770},\ a' = 330^m,\ a = 1430^m,\ \frac{\nu_0'}{\nu_0} = 1\cdot 41\ ^1$$

so haben wir für $n = 1, 2, 3$ die Werthe:

$$W = 1\cdot 1706,\quad 0\cdot 0316\quad 0\cdot 000822.$$

Für extreme hohe Töne lautet

$$W = \frac{h}{h'}\cdot\frac{a}{a'}\cdot\frac{b_{11}}{b_{11}+c_{11}h} = 3359.\frac{b_{11}}{b_{11}+c_{11}h}.$$

Man kann zwar die Grösse $\frac{b_{11}}{b_{11}+c_{11}}$ nicht berechnen, ausser in Fällen, die vielleicht wenig practischer Art sind; kann aber nichts desto weniger begreifen, dass der echte Bruch $\frac{b_{11}}{b_{11}+c_{11}}$ nicht so klein sein kann, dass er mit 3359 multiplicirt, einen sehr kleinen Werth für W gäbe.

Wenden wir uns deshalb an den Extinctionsfactor solcher Töne in Wasser.

[1] Montigny, Beibl. V, pag. 249. Es ist der Werth benützt, welcher der tiefsten Glocke entspricht. Dadurch wird, weil höheren Tönen kleinere $\frac{\nu_0'}{\nu_0}$ entsprechen, der Werth des W etwas unterschätzt. Der Grund für diese Wahl des $\frac{\nu_0'}{\nu_0}$ liegt im Folgenden.

Derselbe ist

$$p = \frac{c_{11}}{b_{11}+c_{11}} \cdot \frac{a}{8r_0}.$$

Setzen wir aus Rücksicht auf die demnächst anzuführenden Colladon'schen Versuche $r_0 = 0{\cdot}35^m$, so ist

$$p = \frac{b_{11}+c_{11}}{c_{11}} \cdot 510\frac{1}{\text{sec.}}$$

Durch Elimination von $\frac{c_{11}}{b_{11}}$ folgt

$$W = 3359\left(1-\frac{p}{510}\right)\frac{1}{\text{sec.}}$$

Sind solch' hohe Töne im Wasser überhaupt hörbar, so müssen sie unbedingt eine gewisse Dauer besitzen. Schwerlich wird man jedoch behaupten wollen, dass Töne mit mässiger Anfangsamplitude noch vernommen werden, wenn dieselbe nach dem Gesetz e^{-100t} abnimmt. Immerhin wird also $1-\frac{p}{510}$ ein der Einheit ziemlicher naher Werth sein; die Hörbarkeit extrem hoher Töne ist also in Wasser sicher mehrere Hunderte, ja vielleicht 2000mal grösser als ceteris paribus in Luft.

Die eben entwickelten Schlüsse finden eine Bestätigung in den berühmten Colladon'schen Versuchen am Genfersee. Die verwendete Glocke war 0·7 Met. hoch, gab also einen tiefen Ton. Die Distanz, wo das Wasser auskultirt wurde, betrug $9^1/_8 \times 1435$ Meter. Der Ton der Glocke wurde in der Luft nur auf wenige hundert Meter vernommen, wenn sie im Wasser war. Colladon[1] nennt den Ton, der im Wasser trotz der grossen Distanz mit sehr bedeutender Stärke vernommen wurde, „kurz", „scharf", „trocken", „dem Geräusche beim Aneinanderschlagen zweier Messerklingen vergleichbar", aber durchaus unähnlich einem Glockentone in der Luft". Es wurden eben nur die Geräusche beim Anschlagen des Hammers vernommen. In ähnlicher Weise erklärt sich ein anderer Versuch.

Leslie fand, dass eine Glocke in ziemlich verdünnter Luft, unter einem Luftpumpenrecipienten energischer tönt als in Wasser-

[1] Colladon u. Sturm, Pogg. Ann. Bd. XII, p. 186.

stoff unter Atmosphärendruck. Die vermehrte Masse ist eben nicht im Stande, den schallschwächenden Einfluss einer fast 4mal so grossen Schallgeschwindigkeit aufzuheben. Diese Erklärung hat schon Stokes gegeben.

15. Es scheint, dass Temperatur und hauptsächlich Feuchtigkeitsänderungen in Folge ihres Einflusses auf die Schallgeschwingkeit, die Schalldurchlässigkeit der Atmosphäre sehr bedeutend in diesem oder jenem Sinne verändern können. —

Denken wir uns den Atmosphärendampf ungesättigt, so wird die Schallgeschwindigkeit vermöge des Sinkens der durchschnittlichen Dichte grösser sein als in trockener Luft. Ist aber der Dampf seiner Sättigung nahe, so ist es möglich, dass die Schallgeschwindigkeit unter den Normalwerth sinkt. Denn es wird wohl, wie in trockener Luft die Compressionswärme eine grössere Elasticität erzeugen; dagegen kann die Kälte, welche die Dilation begleitet, bewirken, dass sich Dampf niederschlägt und dadureh den steilen Fall des Druckes mildert. Der Umstand, dass bei der Dilatation des Gemenges auch der Dampf dilatirt wird, wirkt wohl in entgegengesetztem Sinne, ist aber sehr unbedeutend, wenn wir erwägen, dass der Hauptantheil der Dilationskälte vornehmlich von der Luft herrührt. Weit mehr können diese Umstände, welche überhaupt wegen der geringen Wärmeentwicklung an sich, einen labilen Zustand der Dampfsättigung voraussetzen, in einer nebelerfüllten Atmosphäre zur Geltung kommen. Man erhält eine grobe Vorstellung von dem Einflusse des Nebels, wenn man annimmt, dass die nebelerfüllte Luft mit Dampf gesättigt ist, und die Schwingungen unendlich langsam sind. In diesem Falle wird die einem Einheitsvolum zugeführte Wärme das Gemisch von Luft, Dampf und Nebel um dt Grade erwärmen, äussere Arbeit leisten, und schliesslich so viel Nebel zum Verdampfen bringen, dass die Luft auch bei dieser um dt höheren Temperatur gesättigt ist. Ist m das grösste Gewicht von Dampf bei einer Temperatur, ρ das Gewicht der Volumseinheit, M die Verdampfungswärme, so lässt sich aus der Formel

$$\partial Q = \rho c dt + \frac{dm}{dt} dt M + A p dv$$

schliessen, dass sich die Sache so verhält, als wäre die specifische

Wärme c (const. Vol.) um $\frac{1}{\rho}\frac{\partial m}{\partial t}M$ vergrössert. Damit folgen für die Temperaturen [1] 0°, 10°, 20° die Grenzwerthe der Schallgeschwindigkeit in Nebel: $261{\cdot}5^m$, $233{\cdot}4^m$, $221{\cdot}8^m$. Denken wir uns nun, dass die Schwingungen nicht mehr langsam sind und setzen voraus, es beginne in einem bestimmten Augenblicke die Dilatation. Nach der gewöhnlichen Vorstellung, dass der bei einer Temperatur gesättigte Dampf bei einer niedrigen Temperatur nicht bestehen kann, müsste die Dilation eine allortige, in jedem Volumdifferential eintretende Dampfcondensation nach sich ziehen.

Da diese Condensationen augenblicklich und unausweichlich eintreten müssen, so würde auch hier die letzt gerechnete Formel Anwendung finden. Verdünnungswellen müssten sich also verhältnissmässig langsam fortpflanzen.

Beim Rückgange der Verdünnung tritt der natürliche Zustand wieder ein und wenn jetzt die Verdichtung beginnt, wird Luft und Dampf erhitzt, ein Theil der Wärme dringt in die Nebelbläschen, bringt sie zum Verdampfen und erzeugt wohl einen Wärmestrom. Doch ist es klar, dass in Anbetracht der geringen Wärmeleitungsfähigkeit der Luft dieser Einfluss des Nebels namentlich bei schütter vertheilten Nebelbläschen mit jenem bei der Verdünnung kaum verglichen werden kann. Wir sehen uns also vor die Alternative gestellt, entweder eine so bedeutende Verschiedenheit in der Fortleitung der Verdünnungs- und Verdichtungswellen zuzugeben, oder die Hypothese, dass überkalteter gesättigter Dampf nicht bestehen könne, fallen zu lassen. Für das letztere sprechen Versuche von Aitken[2]: er wies nach, dass Dampf in filtrirte Luft gestossen, keinen Nebel erzeugt, dass also überkalteter gesättigter Dampf bestehen könne. Nebelbildung zeigte sich erst in gewöhnlicher staub-

---

[1] Für „c" ist die specifische Luftwärme 0·2379, für $M = 607 - 0{\cdot}708\,t°$. Über $\frac{dm}{dt}$ und ρ vide Kohlrausch pr. Phys. II, pag. 207, 203. Eigentlich hätte auch der veränderten Dichte des Gemenges Rechnung getragen werden sollen.

[2] Aitken Beibl. V p. 189, p. 426.

erfüllter Luft, so dass Anwesenheit von Staub die Nebelbildung zu bedingen scheint, was übrigens auch anderweitig nachgewiesen wurde.

Daraus ist ersichtlich, dass die Schallphänomene in feuchter nebeliger Luft zwar zufälliger Natur sein können, dass aber immerhin der Schall sich langsamer, nie schneller als in ungesättigter Luft fortpflanzen dürfte. Besonders günstige Umstände können die Schallgeschwindigkeit auf jenen Werth herabsetzen, den die manchmal so auffällige Schalldurchlässigkeit des Nebels erfordert.

Über Configurationen auf der Raumcurve vierter Ordnung, erster Species.

Von **Adolf Ameseder.**

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. April 1883.)

Unter den Raumcurven erweckt nächst der Curve dritter Ordnung jene vierter Ordnung, erster Art, das meiste Interesse, und zwar als Normlinie der Raumcurven vom Geschlechte 1, als Basis des Flächenbüschels zweiter Ordnung und endlich als die einfachste Form einer tetraedral-symmetrischen Curve.

Die letzten zwei Eigenschaften sind die Entstehungsursache für eine Reihe von regelmässigen Gruppen von Punkten, Linien und Ebenen auf der Curve, welche durch hyperboloidische Projection in einander überführt werden können. Die einfachsten unter diesen Configurationen bilden den Gegenstand der folgenden Untersuchung. Ausgezeichnet vor allen anderen erscheint insbesondere eine Configuration von 32 Punkten und 912 Ebenen, und zwar sowohl durch ihre Eigenschaften selbst, als auch dadurch, dass sie die Gruppen der singulären Punkte als specielle Fälle umfasst; so die Gruppe der 16 Wendeberührungspunkte als Configuration $(4,29)_{16}$, ferner als drei Configurationen von der Art $(4,30)_{16}$ jene Paare von Punkten, welche in der Beziehung stehen, dass der eine in der Schmiegungsebene des andern liegt. Die Anzahl der letzteren ist 24; sie formiren eine Configuration von 48 Punkten und 3048 Ebenen, welche von den Wendeberührungspunkten zu einer Configuration mit dem Symbol $(4,622)_{64}$ ergänzt wird. Je zwei der 24 Sekanten, welche diese Punktepaare festlegen, sind insoferne coordinirt, als den Punkten der einen jene der ihr gepaarten bezüglich der Raumcurve harmonisch conjugirt sind.

I.

1. Aus der besonderen Lage, welche das Poltetraeder $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4 \equiv (\mathfrak{P})$ einer R^4 gegen dieselbe und irgend eine durch

sie gelegte Regelfläche zweiten Grades, F^2, einnimmt, ersieht man, dass zu jeder Erzeugenden a_1 der einen Schaar (e), welche R^4 an einer Stelle $\mathfrak{A}_1$ tangirt, für $\mathfrak{P}_1$ als Centrum und $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ als Collineationsebene eine R^4 berührende Erzeugende a_1 der zweiten Schaar (e) collinear harmonisch liegt. Dies gilt auch dann, wenn man $\mathfrak{P}_1$ und $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ mit einer andern Ecke und Gegenebene von $(\mathfrak{P})$ vertauscht. Eine R^4 tangirende Erzeugende der einen Schaar gibt demnach zu vier solchen Erzeugenden a_1, a_2, a_3, a_4 der zweiten Schaar Veranlassung. Aus naheliegenden Ursachen befinden sich die Punkte a_1a_1, a_1a_2, a_1a_3, a_1a_4 beziehungsweise in den Ebenen $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$, $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_1)$, $(\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)$, $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3)$, laufen die Ebenen (a_1a_1), (a_1a_2), (a_1a_3), (a_1a_4) respective durch die Punkte $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$, und zielen nach diesen Punkten die Strahlen $\overline{\mathfrak{A}_1A_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_1A_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_1A_3}$ und $\overline{\mathfrak{A}_1A_4}$.

Da in (e) stets vier und nicht mehr Tangenten von R^4 vorkommen, so wird das erklärte Projectionsverfahren zu denselben vier Erzeugenden a_1, a_2, a_3, a_4 führen, gleichviel von welchen der Linien a_1, a_2, a_3, a_4 man ausgeht. Die Projectionen der Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 coincidiren für jedes der vier Centren $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ mit $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$: Die zwei Tetraeder $A_1A_2A_3A_4 \equiv (A)$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 \equiv (\mathfrak{A})$ sind vierfach perspectivisch.[1]

Die Anzahl dieser Tetraederpaare, von denen jedes mit dem Poltetraeder $(\mathfrak{P})$ ein desmisches System formirt, ist gleich der Anzahl der Flächen des Büschels, d. h. gleich ∞^1.

2. Es lässt sich leicht nachweisen, dass einer Ecke eines der drei Tetraeder immer die gegenüberliegende Seitenfläche als Harmonikalebene bezüglich der beiden andern Tetraeder entspricht. Ferner ist ersichtlich, dass zwei Gegenkanten von (A) allemal zwei Gegenkanten von $(\mathfrak{P})$ schneiden, und zwar in denselben zwei Punkten wie die homologen Kanten von $(\mathfrak{A})$. So begegnen dem Paare $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$, $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ sowohl $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4}$ als auch

[1] Die achtpunktige Gruppe $(\mathfrak{A}, A)$ bespricht bereits Herr Fiedler in seiner darst. Geometrie (pag. 315). Ihre Trennung in zwei Tetraeder, die mit $(\mathfrak{P})$ ein desmisches System bilden, findet sich jedoch erst bei Harnack vor in der Abhandlung: Über Darstellung der Raumcurve 4. O., 1. S. und ihres Sekantensystems durch doppelt periodische Functionen." (Math. Annalen, Bd. 12, pag. 72.) Für das „desmische System" sehe man noch insbesondere die im 93. Bd. des Crelle'schen Journals abgedruckte Abhandlung Schroeter's: „Über eine specielle Raumcurve 4. O., 1. Sp."

$\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_3A_4}$ in ρ_1, ρ_1', respective ρ_2, ρ_2', und es ist stets $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\rho_1\rho_1') = (\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4\rho_2\rho_2') = -1$. Der Ort von $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4}$ ist als Erzeugniss der projectivischen Involutionen $(\rho_1\rho_1')$ und $(\rho_2\rho_2')$ eine tetraedralsymmetrische Fläche vierten Grades Φ_1^4, eine Quadricuspidale, mit den Doppellinien $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$, $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$.

Eine bemerkenswerthe Eigenschaft der Φ_1^4 drückt sich in der Relation $(\rho_1\rho_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2) = (\rho_1'\rho_2'\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4) = -1$ aus, nach welcher sowohl $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3}$ und $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4}$ als auch $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4}$ und $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3}$ hyperboloidisch harmonisch mit $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ und $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ liegen.

Solcher Linienflächen gibt es für R^4 drei: Φ_1^4, Φ_2^4, Φ_3^4, entsprechend den drei Gegenkantenpaaren von $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{P})$.

Projicirt man R^4 aus einem ihrer Punkte auf eine Ebene, so stellen sich die Ecken der Tetraeder $(\mathfrak{A})$ — Systemtetraeder mögen sie heissen — als Quadrupel des Bildes C_6^3 von R^4 dar. Betrachtet man diese Bildcurve als Hessiana, so sind die Contouren der drei Quadricuspidalen Φ^4 die zugehörigen Cayley'schen Curven.

3. Man denke sich durch A_1 jene Sekante e_1 von R^4 gelegt, welche mit irgend einer andern Sekante e der einen Regelschaar einer Fläche H_1^2 des Büschels angehört, ferner ihren zweiten Schnitt A_1' zu dem Tetraeder $A_1'A_2'A_3'A_4'$ ergänzt, und auch das zu diesem „desmisch liegende" $\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'$ gezeichnet. Dann befindet sich

die Gerade	mit	und	in einer Ebene
$\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'}$	e_1	$\mathfrak{P}_1$	E_1,
$\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'}$	e_1	$\mathfrak{P}_2$	E_2,
$\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'}$	e_1	$\mathfrak{P}_3$	E_3,
$\overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'}$	e_1	$\mathfrak{P}_4$	E_4;

es sind folglich $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'}$, $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3'}$, $\overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4'}$ Erzeugende der zweiten Schaar (e) von H_1^2. Dies gibt den Satz:

„Legt man durch die Ecken eines Systemtetraeders und eine beliebige Sekante von R^4 die Ebenen, so treffen diese die Curve stets in den vier Ecken eines zweiten Systemtetraeders."

Macht man statt e eine Erzeugende $\mathfrak{e}$ der Schaar (e) zur Axe des projicirenden Ebenenbüschels, so gelangt man von (A) zum Tetraeder (A').

4. Lässt man an Stelle von $e_1 \equiv \overline{A_1 A_1'}$ der Reihe nach die Linien $e_1' \equiv \overline{A_1 A_2'}$, $e_1'' \equiv \overline{A_1 A_3'}$, $e_1''' \equiv \overline{A_1 A_4'}$ treten, so findet man wie oben, dass die

Fläche	mit der Leitschaar	die Linien
H_2^2	$\overline{A_1 A_2'}, \overline{A_2 A_1'}, \overline{A_3 A_4'}, \overline{A_4 A_3'}$	$\overline{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2'}, \overline{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_1'}, \overline{\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4'}, \overline{\mathfrak{A}_4 \mathfrak{A}_3'}$
H_3^2	$\overline{A_1 A_3'}, \overline{A_2 A_4'}, \overline{A_3 A_1'}, \overline{A_4 A_2'}$	$\overline{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_3'}, \overline{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_4'}, \overline{\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_1'}, \overline{\mathfrak{A}_4 \mathfrak{A}_2'}$
H_4^2	$\overline{A_1 A_4'}, \overline{A_2 A_3'}, \overline{A_3 A_2'}, \overline{A_4 A_1'}$	$\overline{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_4'}, \overline{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{A}_3'}, \overline{\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_2'}, \overline{\mathfrak{A}_4 \mathfrak{A}_1'}$

zur Regelschaar hat.

Weil sowohl $\mathfrak{A}_1$ als auch A_1' oder, was dasselbe ist, $\mathfrak{A}_1'$ beliebig auf R^4 gewählt wurde, so kann man die soeben gefundene Beziehung zwischen $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{A}')$ folgendermassen aussprechen:

„Irgend zwei Systemtetraeder haben gleichzeitig auf vierfache Weise hyperboloidische Lage."

Wegen des Weiteren muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass bei der erörterten hyperboloidischen Projection eine Kante des einen Tetraeders stets nur in eine solche des zweiten überführt wird, welche mit ihr dasselbe Gegenkantenpaar von $(\mathfrak{B})$ schneidet; so entspricht der Kante $\overline{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2}$ von $(\mathfrak{A})$ in $(\mathfrak{A}')$ für H_1^2 und H_2^2 die Kante $\overline{\mathfrak{A}_1' \mathfrak{A}_2'}$, für H_3^2 und H_4^2 die Kante $\overline{\mathfrak{A}_3' \mathfrak{A}_4'}$. Beide sind mit $\overline{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2}$ und $\overline{\mathfrak{A}_3 \mathfrak{A}_4}$ (nach 1) Transversalen von $\overline{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2}$ und $\overline{\mathfrak{B}_3 \mathfrak{B}_4}$.

5. Durch eine Regelschaar einer H_1^2 wird jedem Systemtetraeder $(\mathfrak{A})$ ein zweites $(\mathfrak{A}')$ involutorisch zugeordnet. Es lässt sich zeigen, dass dieselbe Anordnung auch inducirt wird durch Regelschaaren jener Flächen H_2^2, H_3^2, H_4^2, welche zugleich mit H_1^2 die zwei Tetraeder $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A}')$ in einander hyperboloidisch überführen.

Man lege, um dies zu beweisen, durch $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ vier Erzeugende e_1, e_2, e_3, e_4 der einen Schaar irgend einer Fläche[1] h_2, und durch $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$, $\mathfrak{A}_3'$, $\mathfrak{A}_4'$ die vier Erzeugenden e_1, e_2, e_3, e_4 der zweiten Schaar. Die e bestimmen auf R^4 die Ecken $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ eines Systemtetraeders $(\mathfrak{B})$, das in jenes $\mathfrak{B}_1'$, $\mathfrak{B}_2'$, $\mathfrak{B}_3'$, $\mathfrak{B}_4'$, welches die e festlegen, durch Erzeugende der zweiten Schaaren von H_1^2, H_2^2, H_3^2, H_4^2 in vierfach hyperboloidischer Lage gesetzt wird;

[1] So lange nicht ausdrücklich das Gegentheil bemerkt wird, ist von Flächen mit der Basiscurve R^4 die Rede.

denn alle e werden von allen e geschnitten, demnach auch jede Linie $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}'_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}'_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}'_3}$, $\overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}'_4}$ von allen folgenden: $\overline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}'_1}$, $\overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}'_2}$, $\overline{\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}'_3}$, $\overline{\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}'_4}$, ebenso die Erzeugenden $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}'_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}'_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}'_4}$, $\overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}'_3}$ von den Geraden $\overline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}'_2}$, $\overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}'_1}$, $\overline{\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}'_4}$, $\overline{\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}'_3}$, u. s. f.

Nimmt man nun $(\mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{B}')$ zum Ausgangspunkt, projicirt das erste durch eine beliebige Leitschaar E_1, E_2, E_3, E_4 nach $(\mathfrak{C})$, das zweite durch die zugehörige Regelschaar $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4$ nach $(\mathfrak{C}')$, so erkennt man, dass die 16 Verbindungslinien der Ecken von $(\mathfrak{C})$ mit jenen von $(\mathfrak{C}')$ in Gruppen von je vier Erzeugende der ersten Schaaren der Flächen $H_1^2, H_2^2, H_3^2, H_4^2$ sind.

6. Nimmt man (in 4) $A_1\overline{A_2}$ als e_1 an, so erkennt man $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}$ und $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4}$ als Erzeugende derselben Schaar einer H_1^2: Eine Sehne von R^4, welche einer Kante eines Systemtetraeders begegnet, schneidet stets auch die Gegenkante.

Mit $(\mathfrak{A})$ sind so wie H_1^2 noch zwei Flächen H_2^2 und H_3^2 verbunden, entsprechend den Kantenpaaren $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3}, \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4}$ und $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4}, \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3}$. Bezeichnet man mit $\mathfrak{A}_1^0, \mathfrak{A}_2^0, \mathfrak{A}_3^0, \mathfrak{A}_4^0$ die weiteren Schnitte von R^4 mit den Ebenen $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4), (\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1), (\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)$ und $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3)$, so sind offenbar Erzeugende der zweiten Schaar für die

Fläche	die Linien
H_1^2	$\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2^0}, \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1^0}, \overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4^0}, \overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3^0}$,
H_2^2	$\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3^0}, \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4^0}, \overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_1^0}, \overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_2^0}$,
H_3^2	$\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4^0}, \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3^0}, \overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2^0}, \overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1^0}$;

woraus (nach 3) folgt, dass die vier Punkte, in welchen die Seitenflächen eines Systemtetraeders die Curve R^4 ferner schneiden, ebenfalls Ecken eines solchen Tetraeders sind, und dass deshalb

$$\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1^0}, \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2^0}, \overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_3^0}, \overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_4^0}$$

auch einer Regelschaar angehören.

7. Die Ecken zweier Systemtetraeder $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{B})$ bilden im allgemeinen nicht eine Gruppe associrter Punkte.

Würden sie eine solche Gruppe formiren, so hätte jene cubische Curve R^3, welche durch $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ gegeben ist, nach Hesse $\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ zur Sekante. $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4}$, $\overline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$, $\overline{\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4}$ würden Leitstrahlen einer h^2 vorstellen, weil sie Transversalen

von $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ und $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ sind, und weil dieses Kantenpaar $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_4$ von $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_3$ respective harmonisch trennt. Die durch $\mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ laufenden Erzeugenden e_3, e_4 von h^2 träfen dann R^4 noch in 2 Punkten $\mathfrak{B}'''$, $\mathfrak{B}^{IV}$; diese Curve hätte somit mit h^2 10 Punkte: $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4, \mathfrak{B}''', \mathfrak{B}^{IV}$ gemein, würde folglich auf dieser Fläche ihrer ganzen Ausdehnung nach liegen. Dies ist nun in keinem Falle möglich, weil h^2 das Kantenpaar $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$, $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ des Poltetraeders von R^4 enthält.

Nur dann, wenn $\mathfrak{B}'''$, $\mathfrak{B}^{IV}$ von $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$ nicht verschieden sind, fällt dieser Widerspruch weg; allein in diesem Falle erscheint $(\mathfrak{B})$ durch $(\mathfrak{A})$ gegeben; denn nun ist $(\mathfrak{B})$ eines von jenen ganz bestimmten Tetraedern, die je ein Kantenpaar $\overline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3}, \overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4}$ besitzen, welches das Kantenpaar $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4}$ von $(\mathfrak{A})$ schneidet.

Systemtetraeder von dieser Eigenschaft gibt es drei. Die Fläche H_1^2, welche $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4}$ zu Leitstrahlen hat (und jede andere), wird nämlich von einem Gegenkantenpaare des Poltetraeders in vier Punkten $\rho_m, \rho'_m, \rho_n, \rho'_n$ getroffen, welche sich auf zwei Erzeugenden der Regelschaar von H_1^2 befinden, die (nach 2.) R^4 in den vier Ecken eines Systemtetraeders schneiden. Hieraus folgt nebenbei, dass in jeder aus Sekanten der R^4 bestehenden Regelschaar drei Paare von Erzeugenden vorkommen, die Kantenpaare von (drei) Systemtetraedern sind.

8. Die Transversalen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ aus einem Punkte $\mathfrak{X}_1$ von R^4 nach den drei Gegenkantenpaaren von $(\mathfrak{A})$ treffen (Art. 6) R^4 in drei Punkten, welche zu einem dritten Systemtetraeder als Ecken $\mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Y}_3, \mathfrak{Y}_4$ gehören. Es leuchtet dies ein, sobald man sich R^4 aus $\mathfrak{X}_1$ auf eine Ebene projicirt denkt. Den Ecken von $(\mathfrak{A})$ entsprechen (Art. 2) auf C_6^3 die Punkte eines Quadrupels (q), und $\mathfrak{Y}_2, \mathfrak{Y}_3, \mathfrak{Y}_4$ die Diagonalecken von (q), also — nach einem bekannten Satz — wieder einem Quadrupel angehörende Punkte, woraus die Richtigkeit unserer Behauptung resultirt.

Die Gerade $\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_2}$ ist ein Element der Regelschaar (β) einer H_2^2 mit den Leitstrahlen $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4}$. Die drei durch $\mathfrak{X}_2, \mathfrak{X}_3, \mathfrak{X}_4$ laufenden Erzeugenden $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ treffen R^4 zum zweitenmal in $\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_4, \mathfrak{Y}_3$ (Art. 6).

Wiederholt man diese Betrachtung bei $\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_3}$, $\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_4}$, so wird man zu dem Ergebnisse geführt, dass die

Fläche	mit den Leitstrahlen	die Linien	
H_2^2	$\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}, \overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4}$	$\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_2}, \overline{\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_1}, \overline{\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_4}, \overline{\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_3}$,	
H_3^2	$\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3}, \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4}$	$\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_3}, \overline{\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_4}, \overline{\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_1}, \overline{\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_2}$	und
H_4^2	$\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4}, \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3}$	$\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_4}, \overline{\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_3}, \overline{\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_2}, \overline{\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_1}$	

zu Erzeugenden hat.

„Die 12 Transversalen aus den Ecken eines Systemtetraeders nach den Gegenkantenpaaren eines zweiten treffen zu 3 in den Ecken eines dritten derartigen Tetraeders auf R^4 zusammen."

9. Vertauscht man $(\mathfrak{A})$ der Reihe nach mit jenen drei Tetraedern $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D})$, welche Kantenpaare besitzen, die $\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1}$ schneiden, so erkennt man wie im Art. 8, dass jedes ihrer $2\cdot3$ weiteren Kantenpaare von einem der drei Strahlen $\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_2}$, $\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_3}$, $\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_4}$ getroffen wird und dass in Folge dessen die

Fläche mit der Leitschaar:				die Regelschaar besitzt:							
H_1^2	$\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1}$,	$\overline{\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_2}$,	$\overline{\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_3}$,	$\overline{\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_4}$	$\overline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$,	$\overline{\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4}$	$\overline{\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3}$,	$\overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4}$,	$\overline{\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4}$,	$\overline{\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3}$.
H_2^2	$\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_2}$,	$\overline{\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_1}$,	$\overline{\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_4}$,	$\overline{\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_3}$	$\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}$,	$\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4}$,	$\overline{\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3}$;	$\overline{\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_4}$,	$\overline{\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4}$,	$\overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3}$.
H_3^2	$\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_3}$,	$\overline{\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_4}$,	$\overline{\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_1}$,	$\overline{\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_2}$	$\overline{\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2}$,	$\overline{\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4}$,	$\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3}$,	$\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4}$,	$\overline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4}$,	$\overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3}$.
H_4^2	$\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_4}$,	$\overline{\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_3}$,	$\overline{\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_2}$,	$\overline{\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_1}$	$\overline{\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2}$,	$\overline{\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4}$,	$\overline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3}$,	$\overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4}$,	$\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4}$,	$\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3}$.

Die Systemtetraeder $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D})$ bilden eine geschlossene Gruppe, ein Quadrupel, das durch Annahme eines dieser 4 Tetraeder vollkommen und eindeutig bestimmt ist. Alle 4 veranlassen auf R^4 eine und dieselbe involutorische Anordnung (Art. 5) zwischen den andern Systemtetraedern $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$.

Besonders charakteristisch für das Quadrupel ist noch die folgende, dem Vorstehenden zu entnehmende Eigenschaft:

„Aus jedem Punkte $\mathfrak{X}_1$ der Curve R^4 lassen sich an die $3\cdot4$ Gegenkantenpaare eines Quadrupels nur 4 verschiedene Transversalen legen. Sie begegnen der Curve in den Ecken eines Systemtetraeders, das sich nicht ändert, wenn man $\mathfrak{X}_1$ mit $\mathfrak{X}_2$, $\mathfrak{X}_3$ oder $\mathfrak{X}_4$ vertauscht."

10. Die Ecken von $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$ und $(\mathfrak{A})$ — oder $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D})$ — bilden eine Configuration von 12 Punkten und 24 Ebenen, von denen jede 4 Punkte enthält. Die Ebenen sind:

$\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{y}_2$	$\mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{y}_1$	$\mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{y}_4$	$\mathfrak{x}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{y}_3$
$\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_2$	$\mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_1$	$\mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_4$	$\mathfrak{x}_4\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_3$
$\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}_3$	$\mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}_4$	$\mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}_1$	$\mathfrak{x}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}_2$
$\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_3$	$\mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_4$	$\mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_1$	$\mathfrak{x}_4\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_2$
$\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_4$	$\mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_3$	$\mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_2$	$\mathfrak{x}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_1$
$\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}_4$	$\mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}_3$	$\mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}_2$	$\mathfrak{x}_4\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}_1$

Durch einen Punkt $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{y}$ laufen 6, durch eine Kante von $(\mathfrak{A})$ je 4. Bemerkenswerth ist, dass die 12 Configurationspunkte sich in 12 Gruppen von je 8 associrten Punkten anordnen lassen, die in zwei wesentlich verschiedene, gleich grosse Schaaren zerfallen.

Der Typus einer Gruppe erster Schaar ist $\mathfrak{x}_m\mathfrak{x}_n\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_m\mathfrak{y}_n$, einer der zweiten Schaar $\mathfrak{x}_m\mathfrak{x}_n\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_p\mathfrak{y}_q$, wenn man mit m, n, p, q eine Permutationsform von 1, 2, 3, 4 bezeichnet. Die Punkte einer Gruppe (1), so $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_1\mathfrak{y}_2$, liegen zu 4 nur in 4 Ebenen, nämlich den 2 Paaren:

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_1$$

und

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{x}_2\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{y}_1;$$

während sich die Punkte einer Gruppe (2) zu 4 auf 8 Ebenen vertheilen lassen, welche 4 Paare bilden, von denen jedes alle 8 Punkte trägt. Für $\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_2\mathfrak{y}_4$ sind es die Paare:

$$\begin{array}{l}\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_4\\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_4,\ \mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}_2\\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}_4,\ \mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_2\\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{y}_4.\end{array}$$

Vertauscht man in den 2 Ebene eines Paares die letzten Punkte, so erhält man 2 Tetraeder, die einander um- und eingeschrieben sind. Für die angeschriebene Gruppe hat man die folgenden 4 Tetraederpaare:

$$\begin{array}{l}\mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{y}_4,\ \mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_2\\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}_4\\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{y}_2,\ \mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_4\\ \mathfrak{x}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{y}_4,\ \mathfrak{x}_3\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{y}_2;\end{array}$$

für alle 6 Gruppen 24 Paare:

„Von den 12 Gruppen associrter Punkte, welche sich aus den Ecken dreier Systemtetraeder $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{Y})$ bilden lassen, sind 6 insoferne ausgezeichnet, als die 8 Punkte einer solchen auf 4 verschiedene Arten die Ecken zweier Tetraeder repräsentiren, die einander um- und eingeschrieben sind."

Verbindet man jede Ecke von $\mathfrak{X}_1\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{Y}_4$ mit der entsprechenden, d. h. in der Gegenfläche befindlichen Ecke von $\mathfrak{X}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{Y}_2$, so gelangt man zu den Linien: $\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{X}_3}$, $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4}$, $\overline{\mathfrak{Y}_4\mathfrak{Y}_2}$, — durchaus Transversalen von $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3}$, $\overline{\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4}$ (Art. 2). Dieses Kantenpaar wird auch geschnitten von den Schnittlinien homologer Seitenflächen des ersten Tetraederpaares, ferner von den in gleicher Weise mit den 3 weiteren Tetraederpaaren dieser Gruppe zusammenhängenden Linien, endlich auch von jenen der aus $\mathfrak{X}_2\mathfrak{X}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{Y}_1\mathfrak{Y}_3$ abgeleiteten Tetraederpaare. Ebenso ordnen sich zu $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$, $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ und $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_4}$, $\overline{\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3}$ die Linien der $2\cdot 8$ Tetraederpaare, welche ihre Ecken den $2\cdot 2$ andern Gruppen (2) entnehmen.

11. Leitet man aus $(\mathfrak{X})$ vermittelst des ihm eingeschriebenen Systemtetraeders $(\mathfrak{X}_1^0)$ — vergl. Art. 6 — ein Tetraeder $(\mathfrak{Y})$ ab, d. h. setzt man an Stelle des beliebigen Systemtetraeders $(\mathfrak{A})$ speciell $(\mathfrak{X}^0)$, so treten zu den 24 Configurationsebenen noch die 4 Seitenflächen von $(\mathfrak{X})$ hinzu, und man gewinnt die von Herrn Schroeter eingehend besprochene Configuration von 12 Punkten und 28 Ebenen (a. a. O. pag. 140 u. f. f.) Solcher Configurationen gibt es auf jeder Curve R^4 unendlich viele.

12. Aus der Tafel der 24 Configurationsebenen ersieht man, dass $\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{A}_1}$, $\overline{\mathfrak{X}_2\mathfrak{A}_2}$, $\overline{\mathfrak{X}_3\mathfrak{A}_3}$, $\overline{\mathfrak{X}_4\mathfrak{A}_4}$ und $\overline{\mathfrak{Y}_1\mathfrak{A}_1}$, $\overline{\mathfrak{Y}_2\mathfrak{A}_2}$, $\overline{\mathfrak{Y}_3\mathfrak{A}_3}$, $\overline{\mathfrak{Y}_4\mathfrak{A}_4}$ die 2 Regelschaaren einer Fläche h_1^2 sind, dass demnach die Tangenten a_1, a_2, a_3, a_4 von R^4 in $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$ zu der Regelschaar $\overline{\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_1}$, $\overline{\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_2}$, $\overline{\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_3}$, $\overline{\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_4}$ von H_1^2 als Leitschaar gehören. Aus demselben Grunde sind die Tangenten $b_1, b_2\ldots$, $c_1, c_2\ldots$, $d_1, d_2\ldots$ von R^4 in $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2\ldots$, $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2\ldots$, $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2\ldots$ Erzeugende der zweiten Schaaren von beziehungsweise H_2^2, H_3^2, H_4^2, und werden $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$ und $(\mathfrak{D})$ in $(\mathfrak{Y})$ durch die Leitschaaren jener $3\cdot 4$ Flächen h^2 überführt, deren Regelschaaren dieselbe Beziehung zwischen $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{X})$ herstellen. Für das Quadrupel resultirt hieraus die Eigenschaft:

„Die Tangenten der Curve R^4 in den 16 Punkten eines Quadrupels gehören 4 Regelschaaren an, welche auf R^4 dieselbe involutorische Anordnung im Tetraedersystem hervorrufen."

Das Quadrupel besteht aus jenen Tetraedern, welche sich in der involutorischen Zuordnung $(\mathfrak{X})$, $(\mathfrak{Y})$ selbst entsprechen, oder also die Doppelelemente bilden.

II.

13. Um zu weiteren Eigenschaften des Quadrupels zu gelangen, beweisen wir zunächst den folgenden sich auch später brauchbar erweisenden Hilfssatz:

„Beschreiben 3 Seiten $\overline{\alpha a}$, $\overline{a a'}$, $\overline{a'\alpha'}$ eines R^4 eingeschriebenen Vierecks $\alpha a a'\alpha'$ 3 Regelschaaren zweiten Grades (r), (s), (t), so ist auch der Ort der vierten Seite $\overline{\alpha\alpha'}$ eine solche (u)."

Man lege durch a und α' 2 Erzeugende e und e' der einen Schaar einer h^2, und durch a' und α 2 Erzeugende $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{e}'$ ihrer zweiten Schaar. Die Sekanten bestimmen auf R^4 die Ecken a_1, a_1', a_1', α_1 eines zweiten Vierecks, dessen Seiten in der Ordnung: $\overline{\alpha_1 a_1}$, $\overline{a_1 a_1'}$, $\overline{a_1'\alpha_1'}$, $\overline{\alpha_1'\alpha_1}$ Erzeugende der zu (r), (s), (t), (u) gehörigen Leitschaaren (r_1), (s_1), (t_1), (u_1) sind.

Geht man von $\alpha_1 a_1 a_1' \alpha_1'$ aus und leitet aus ihm ebenso $\alpha_2 a_2 a_2' \alpha_2'$ ab, so werden des letzteren Seiten Leitstrahlen von (r_1), (s_1), (t_1), (u_1) respective sein, also als Erzeugende zu den Regelschaaren (r), (s), (t), (u) beziehungsweise gehören; w. z. b. w.

14. Zieht man durch die 16 Ecken eines Quadrupels $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D})$ Sekanten einer Regelschaar einer h^2, so wird man auf R^4 die Ecken von Systemtetraedern $(\mathfrak{A}')$, $(\mathfrak{B}')$, $(\mathfrak{C}')$ und $(\mathfrak{D}')$ erhalten, von welchen sich, gestützt auf (13), zeigen lässt, dass sie auch ein Quadrupel formiren.

Nach Art. 9 sind $\overline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2}$, $\overline{\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4}$, $\overline{\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3}$, $\overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4}$, $\overline{\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4}$, $\overline{\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3}$ Erzeugende einer Regelschaar einer Fläche H_1^2, in Folge der Construction $\overline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1'}$, $\overline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_2'}$, $\overline{\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_3'}$, $\overline{\mathfrak{B}_4\mathfrak{B}_4'}$, $\overline{\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_1'}$, $\overline{\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_3'}$, $\overline{\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_2'}$, $\overline{\mathfrak{C}_4\mathfrak{C}_4'}$, $\overline{\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_1'}$, $\overline{\mathfrak{D}_4\mathfrak{D}_4'}$, $\overline{\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_2'}$, $\overline{\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_3'}$ solche der Schaar h^2, daher sind nach 13 die Kanten $\overline{\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_2'}$, $\overline{\mathfrak{B}_3'\mathfrak{B}_4'}$, $\overline{\mathfrak{C}_1'\mathfrak{C}_3'}$, $\overline{\mathfrak{C}_2'\mathfrak{C}_4'}$, $\overline{\mathfrak{D}_1'\mathfrak{D}_4'}$, $\overline{\mathfrak{D}_2'\mathfrak{D}_3'}$ Elemente einer dritten Schaar K_1^2. Aus derselben Ursache hat eine

Fläche zu Erzeugenden einer Regelschaar die Linien:

K_2^2 $\overline{\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_2'}, \overline{\mathfrak{A}_3'\mathfrak{A}_4'}, \overline{\mathfrak{D}_1'\mathfrak{D}_3'}, \overline{\mathfrak{D}_2'\mathfrak{D}_4'}, \overline{\mathfrak{C}_1'\mathfrak{C}_4'}, \overline{\mathfrak{C}_2'\mathfrak{C}_3'}$,

K_3^2 $\overline{\mathfrak{D}_1'\mathfrak{D}_2'}, \overline{\mathfrak{D}_3'\mathfrak{D}_4'}, \overline{\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_3'}, \overline{\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_4'}, \overline{\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_4'}, \overline{\mathfrak{B}_2'\mathfrak{B}_3'}$,

K_4^2 $\overline{\mathfrak{C}_1'\mathfrak{C}_2'}, \overline{\mathfrak{C}_3'\mathfrak{C}_4'}, \overline{\mathfrak{B}_1'\mathfrak{B}_3'}, \overline{\mathfrak{B}_2'\mathfrak{B}_4'}, \overline{\mathfrak{A}_1'\mathfrak{A}_4'}, \overline{\mathfrak{A}_2'\mathfrak{A}_3'}$;

woraus (nach 9) evident ist, dass $(\mathfrak{A}')$, $(\mathfrak{B}')$, $(\mathfrak{C}')$, $(\mathfrak{D}')$ ein Quadrupel constituiren.

„Legt man durch die Ecken eines Quadrupels und durch eine Sekante der Curve R^4 die Ebenen, so schneiden diese R^4 in den 16 Punkten eines zweiten Quadrupels."

Man kann $(\mathfrak{A})$ auf viererlei Art in $(\mathfrak{A}')$ überführen,[1] und erhält jedesmal aus $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D})$ die Tetraeder $(\mathfrak{B}')$, $(\mathfrak{C}')$, $(\mathfrak{D}')$ des zweiten Quadrupels; ebenso werden, wenn man dem $(\mathfrak{A})$ eines der Tetraeder $(\mathfrak{B}')$, $(\mathfrak{C}')$, $(\mathfrak{D}')$ zuordnet, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$ und $(\mathfrak{D})$ jedesmal in die drei andern projicirt erscheinen.

Da das erste Quadrupel beliebig angenommen wurde und man aus ihm durch Projection alle andern ableiten kann, so sehen wir, dass irgend 2 Quadrupel auf 16 verschiedene Arten hyperboloidische Lage haben.

15. Projicirt man speciell das Quadrupel $(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})(\mathfrak{C})(\mathfrak{D})$ derart, dass $(\mathfrak{A}')$ mit $(\mathfrak{B})$ coincidirt, was auf 4 Arten möglich ist, so werden beide Quadrupel identisch und es fällt $(\mathfrak{B}')$ mit $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{C}')$ mit $(\mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{D}')$ mit $(\mathfrak{C})$ zusammen. Hieraus geht hervor, dass zu den 4 Regelschaaren $\mathfrak{h}_1^2$, $\mathfrak{h}_2^2$, $\mathfrak{h}_3^2$, $\mathfrak{h}_4^2$, welche aus den 16 Verbindungslinien der Ecken von $(\mathfrak{A})$ mit jenen von $(\mathfrak{B})$ bestehen, auch die 16 Linien gehören, welche die Ecken von $(\mathfrak{C})$ mit jenen von $(\mathfrak{D})$ verbinden, oder also, dass in der involutorischen Anordnung, welche $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{B})$ bestimmen, dem $(\mathfrak{C})$ das vierte Tetraeder $(\mathfrak{D})$ entspricht. Gleiches gilt sowohl für die Paare $(\mathfrak{A})(\mathfrak{C})$ und $(\mathfrak{B})(\mathfrak{D})$ als auch für $(\mathfrak{A})(\mathfrak{D})$ und $(\mathfrak{B})(\mathfrak{C})$: Die 96 Linien, welche 2 Ecken aus je 2 verschiedenen Tetraedern eines Quadrupels verbinden, liegen zu 8 auf 12 Regelschaaren $\mathfrak{h}^2$.

16. Durch Specialisirung des Hauptsatzes (Art. 14) kommt man zu dem Resultate, dass die zu $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D})$ desmisch

[1] Vergl. Art. 4.

liegenden Tetraeder $(\mathfrak{A}), (\mathfrak{B}), (\mathfrak{C}), (\mathfrak{D})$ ebenfalls ein Quadrupel formiren. Ihre Ableitung aus den ersteren, die offenbar in einer Projection aus einem der Centren $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4$ besteht, zeigt, dass der Leitschaar der

Fläche	die Geraden angehören:
H_1^2	$\overline{B_1B_2}, \overline{B_3B_4}, \overline{C_1C_3}, \overline{C_2C_4}, \overline{D_1D_4}, \overline{D_2D_3},$
H_2^2	$\overline{A_1A_2}, \overline{A_3A_4}, \overline{D_1D_3}, \overline{D_2D_4}, \overline{C_1C_4}, \overline{C_2C_3},$
H_3^2	$\overline{D_1D_2}, \overline{D_3D_4}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_2A_4}, \overline{B_1B_4}, \overline{B_2B_3},$
H_4^2	$\overline{C_1C_2}, \overline{C_3C_4}, \overline{B_1B_3}, \overline{B_2B_4}, \overline{A_1A_4}, \overline{A_2A_3},$

und dass in Folge dessen das Quadrupel $(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})(\mathfrak{C})(\mathfrak{D})$ die involutorische Anordnung zwischen den zu $(\mathfrak{X})$ und $(\mathfrak{Y})$ desmisch liegenden Tetraedern (X) und (Y) bewerkstelligt. Beide Quadrupel stellen vereint die in der Einleitung erwähnte Configuration von 32 Punkten vor.

17. Aus der letzten Tabelle, welche die den Leitschaaren der Flächen H^2 angehörenden 24 Configurationslinien enthält, und jener im Art. 9, der Tabelle der Regelschaaren dieser Flächen, entnimmt man, dass es $4.6.6 = 144$ Ebenen gibt, von denen jede 4 Configurationspunkte trägt.

Von diesen Ebenen vertheilen sich 48 zu 8 in 6 Ebenenbüschel, für welche die Kanten des Poltetraeders die Axen vorstellen. Die Elemente jedes Büschels ordnen sich wieder in Paare einer quadratischen Involution, deren Doppelelemente die anstossenden Seitenflächen von $(\mathfrak{P})$ sind. Zwei Ebenen eines Paares treffen R^4 in den 8 Ecken 2 desmischer Tetraeder der Configuration. Je zwei solche Ebenen sind in der folgenden „Gruppe" nebeneinandergestellt.

I. Gruppe.

$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 A_1A_2$	$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 A_3A_4$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 A_1A_3$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4 A_2A_4$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 A_1A_4$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 A_2A_3$
$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 A_3A_4$	$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 A_1A_2$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 A_2A_4$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4 A_1A_3$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 A_2A_3$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 A_1A_4$
$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 B_1B_2$	$\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 B_3B_4$	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 B_1B_3$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4 B_2B_4$	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4 B_1B_4$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 B_2B_3$
$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 B_3B_4$	$\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 B_1B_2$	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 B_2B_4$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4 B_1B_3$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4 B_2B_3$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 B_1B_4$
$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 C_1C_2$	$\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4 C_3C_4$	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3 C_1C_3$	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4 C_2C_4$	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4 C_1C_4$	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3 C_2C_3$
$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 C_3C_4$	$\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4 C_1C_2$	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3 C_2C_4$	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4 C_1C_3$	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4 C_2C_3$	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3 C_1C_4$
$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 D_1D_2$	$\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4 D_3D_4$	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3 D_1D_3$	$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_4 D_2D_4$	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4 D_1D_4$	$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3 D_2D_3$
$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 D_3D_4$	$\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4 D_1D_2$	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3 D_2D_4$	$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_4 D_1D_3$	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4 D_2D_3$	$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3 D_1D_4$

Eine der 96 weiteren Ebenen schneidet R^4 in 2 Configurations-Punktepaaren, die 2 Systemtetraedern angehören, welche mit $[\mathfrak{P}]$ kein desmisches System vorstellen. Sie wird von einer zweiten Ebene, welche die vier anderen Ecken der 2 Tetraeder trägt, zu einem Paar ergänzt. Diese Ebenen sind übersichtlich zusammengestellt in der folgenden

II. Gruppe.

1	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 B_1B_4$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4 B_2B_3$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 B_2B_3$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4 B_1B_4$
2	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 C_1C_4$	$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 C_2C_3$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 C_2C_3$	$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 C_1C_4$
3	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 D_1D_3$	$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 D_2D_4$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2 D_2D_4$	$\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4 D_1D_3$
4	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 C_1C_3$	$\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 C_2C_4$	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 C_2C_4$	$\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 C_1C_3$
5	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 D_1D_4$	$\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 D_2D_3$	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2 D_2D_3$	$\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4 D_1D_4$
6	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 A_1A_4$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4 A_2A_3$	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 A_2A_3$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4 A_1A_4$
7	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3 D_1D_4$	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4 D_2D_3$	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 D_2D_3$	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4 D_1D_4$
8	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 A_1A_4$	$\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4 A_2A_3$	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 A_2A_3$	$\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4 A_1A_4$
9	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 B_1B_3$	$\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4 B_2B_4$	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2 B_2B_4$	$\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4 B_1B_3$
10	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 A_1A_3$	$\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4 A_2A_4$	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 A_2A_4$	$\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4 A_1A_3$
11	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 B_1B_4$	$\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4 B_2B_3$	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2 B_2B_3$	$\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4 B_1B_4$
12	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3 C_1C_4$	$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_4 C_2C_3$	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3 C_2C_3$	$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_4 C_1C_4$

1	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 B_1B_3$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 B_2B_4$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 B_2B_4$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 B_1B_3$
2	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 C_1C_2$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 C_3C_4$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 C_3C_4$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3 C_1C_2$
3	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 D_1D_2$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4 D_3D_4$	$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 D_3D_4$	$\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4 D_1D_2$
4	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 C_1C_2$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4 C_3C_4$	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_3 C_3C_4$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_4 C_1C_2$
5	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4 D_1D_2$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 D_3D_4$	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4 D_3D_4$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 D_1D_2$
6	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4 A_1A_3$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 A_2A_4$	$\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_4 A_2A_4$	$\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3 A_1A_3$
7	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4 D_1D_3$	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3 D_2D_4$	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4 D_2D_4$	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3 D_1D_3$
8	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4 A_1A_2$	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3 A_3A_4$	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_4 A_3A_4$	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_3 A_1A_2$
9	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3 B_1B_2$	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4 B_3B_4$	$\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_3 B_3B_4$	$\mathfrak{C}_2\mathfrak{C}_4 B_1B_2$
10	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3 A_1A_2$	$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_4 A_3A_4$	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3 A_3A_4$	$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_4 A_1A_2$
11	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4 B_1B_2$	$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3 B_3B_4$	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4 B_3B_4$	$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3 B_1B_2$
12	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4 C_1C_3$	$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3 C_2C_4$	$\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4 C_2C_4$	$\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3 C_1C_3$

18. Zwei desmische Tetraeder wie $(\mathfrak{A})$ und (A) veranlassen 6 Ebenenpaare (I, I), d. h. solche aus der Gruppe I; ihre Ecken lassen sich folglich auf 6 Arten zu Ecken 2 anderer Tetraeder anordnen, die einander ein- und umgeschrieben sind. Gleichliegende Seitenflächen zwei so verbundener Tetraeder treffen in einer Kante des Poltetraeders zusammen. Für das Paar $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2A_1A_2\ldots\ldots\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4A_3A_4$ sind es die Kanten $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$, $\overline{\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4}$, $\overline{\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_3}$, $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_1}$. Die Anzahl dieser Paare ist 24. — Ähnlich kann man aus 2 Tetraedern $(\mathfrak{A}), (B)$ der Configuration, die nicht in demselben Quadrupel liegen und nicht desmisch sind, 4 Ebenenpaare (II, II) und 4 Paare einander gleichzeitig umschriebener Tetraeder herstellen. Ein solches Paar ist $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3B_1B_3 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4B_2B_4$. Die Seitenflächen von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3B_1B_3$ schneiden das Kantenpaar $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$, $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ in denselben Punkten, wie die homologen von $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4B_2B_4$; weil $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$, $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ gemeinsame Transversalen der Verbindungslinien entsprechender Ecken beider Vierflächner sind. — Die Gesammtzahl dieser Tetraederpaare ist 48.

Aus den Ebenen I kann man 36 Tetraeder bilden, von denen jedes auf seinen Seitenflächen die Ecken von 4 Systemtetraedern der Configuration enthält. Je 12 haben mit dem Poltetraeder $[\mathfrak{P}]$ 2 Gegenkanten gemein und bilden ein System von Polartetraedern für das durch die anderen 4 Kanten von $(\mathfrak{P})$ bestimmte Flächenbüschel.

Tetraeder von der ersteren Eigenschaft gibt es noch 384 aus je einer Ebene I und 3 Ebenen II, 192 aus je 2 Ebenen I und II, und 624 aus 4 Ebenen II. Die Ebenen II treffen ferner auf 48 Arten zu 4 in einem Punkte einer Poltetraederkante zusammen, Pyramiden formirend, die gleichfalls 16 Configurationspunkte aus 4 Systemtetraedern auf R^4 fixiren etc.

19. Aus der ersten Zeile der II. Gruppe erhellt, dass $\overline{\mathfrak{A}_1B_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_2B_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_3B_3}$, $\overline{\mathfrak{A}_4B_4}$ als Leitlinien und $\overline{\mathfrak{A}_1B_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_2B_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_3B_4}$, $\overline{\mathfrak{A}_4B_3}$ als Erzeugende zu einer Fläche $\mathfrak{H}_1^2$ gehören. Projicirt man mittelst einer dieser 2 Schaaren das ganze Quadrupel $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$, $(\mathfrak{D})$, so wird man, wie der 14. Art. lehrt, nothwendig aus $(\mathfrak{B}), (\mathfrak{C}), (\mathfrak{D})$ die Tetraeder (A), (D), (C) erhalten, da $(\mathfrak{A})$ in (B) übergeht. Elemente der Leitschaar sind somit auch die Configurationslinien: $\overline{\mathfrak{C}_1D_1}$, $\overline{\mathfrak{C}_2D_2}\ldots$, der Kegelschaar die Linien: $\overline{\mathfrak{C}_1D_2}$, $\overline{\mathfrak{C}_2D_1}\ldots$ Dass auf $\mathfrak{H}_1^2$ auch die zu diesen und den ersteren collinear-harmo-

nischen Linien $\overline{A_1\mathfrak{B}_1}, \overline{A_2\mathfrak{B}_2}\ldots, \overline{C_1\mathfrak{D}_1}, \overline{C_2\mathfrak{D}_2}\ldots$ und $\overline{A_1\mathfrak{B}_2}, \overline{A_2\mathfrak{B}_1}\ldots, \overline{C_1\mathfrak{D}_2}, \overline{C_2\mathfrak{D}_1}\ldots$ verlaufen, ist von selbst klar.

Die Anordnung aller 192 Configurationslinien dieser Art zu Regelschaaren veranschaulicht die folgende Tabelle:

Die Fläche	hat zur Leitschaar die 16 Linien:	
$\mathfrak{H}_1^2$	$\overline{\mathfrak{A}_1B_1}, \overline{\mathfrak{A}_2B_2}, \overline{\mathfrak{A}_3B_3}, \overline{\mathfrak{A}_4B_4}$	$\overline{A_1\mathfrak{B}_2}, \overline{A_2\mathfrak{B}_1}, \overline{A_3\mathfrak{B}_4}, \overline{A_4\mathfrak{B}_3}$
	$\overline{\mathfrak{C}_1D_1}, \overline{\mathfrak{C}_2D_2}, \overline{\mathfrak{C}_3D_3}, \overline{\mathfrak{C}_4D_4}$	$\overline{C_1\mathfrak{D}_2}, \overline{C_2\mathfrak{D}_1}, \overline{C_3\mathfrak{D}_4}, \overline{C_4\mathfrak{D}_3}$
$\mathfrak{H}_1^2$	$\overline{\mathfrak{A}_1B_3}, \overline{\mathfrak{A}_2B_4}, \overline{\mathfrak{A}_3B_1}, \overline{\mathfrak{A}_4B_2}$	$\overline{A_1\mathfrak{B}_4}, \overline{A_2\mathfrak{B}_3}, \overline{A_3\mathfrak{B}_2}, \overline{A_4\mathfrak{B}_1}$
	$\overline{\mathfrak{C}_1D_3}, \overline{\mathfrak{C}_2D_4}, \overline{\mathfrak{C}_3D_1}, \overline{\mathfrak{C}_4D_2}$	$\overline{C_1\mathfrak{D}_4}, \overline{C_2\mathfrak{D}_3}, \overline{C_3\mathfrak{D}_2}, \overline{C_4\mathfrak{D}_1}$
$\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}^2$	$\overline{\mathfrak{A}_1C_1}, \overline{\mathfrak{A}_2C_2}, \overline{\mathfrak{A}_3C_3}, \overline{\mathfrak{A}_4C_4}$	$\overline{A_1\mathfrak{C}_3}, \overline{A_2\mathfrak{C}_4}, \overline{A_3\mathfrak{C}_1}, \overline{A_4\mathfrak{C}_2}$
	$\overline{\mathfrak{B}_1D_1}, \overline{\mathfrak{B}_2D_2}, \overline{\mathfrak{B}_3D_3}, \overline{\mathfrak{B}_4D_4}$	$\overline{B_1\mathfrak{D}_3}, \overline{B_2\mathfrak{D}_4}, \overline{B_3\mathfrak{D}_1}, \overline{B_4\mathfrak{D}_2}$
$\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}^2$	$\overline{\mathfrak{A}_1C_2}, \overline{\mathfrak{A}_2C_1}, \overline{\mathfrak{A}_3C_4}, \overline{\mathfrak{A}_4C_3}$	$\overline{A_1\mathfrak{C}_4}, \overline{A_2\mathfrak{C}_3}, \overline{A_3\mathfrak{C}_2}, \overline{A_4\mathfrak{C}_1}$
	$\overline{\mathfrak{B}_1D_2}, \overline{\mathfrak{B}_2D_1}, \overline{\mathfrak{B}_3D_4}, \overline{\mathfrak{B}_4D_3}$	$\overline{B_1\mathfrak{D}_4}, \overline{B_2\mathfrak{D}_3}, \overline{B_3\mathfrak{D}_2}, \overline{B_4\mathfrak{D}_1}$
$\mathfrak{H}_3^2$	$\overline{\mathfrak{A}_1D_1}, \overline{\mathfrak{A}_2D_2}, \overline{\mathfrak{A}_3D_3}, \overline{\mathfrak{A}_4D_4}$	$\overline{A_1\mathfrak{D}_4}, \overline{A_2\mathfrak{D}_3}, \overline{A_3\mathfrak{D}_2}, \overline{A_4\mathfrak{D}_1}$
	$\overline{\mathfrak{B}_1C_2}, \overline{\mathfrak{B}_2C_1}, \overline{\mathfrak{B}_3C_4}, \overline{\mathfrak{B}_4C_3}$	$\overline{B_1\mathfrak{C}_3}, \overline{B_2\mathfrak{C}_4}, \overline{B_3\mathfrak{C}_1}, \overline{B_4\mathfrak{C}_2}$
$\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}^2$	$\overline{\mathfrak{A}_1D_2}, \overline{\mathfrak{A}_2D_1}, \overline{\mathfrak{A}_3D_4}, \overline{\mathfrak{A}_4D_3}$	$\overline{A_1\mathfrak{D}_3}, \overline{A_2\mathfrak{D}_4}, \overline{A_3\mathfrak{D}_1}, \overline{A_4\mathfrak{D}_2}$
	$\overline{\mathfrak{B}_1C_1}, \overline{\mathfrak{B}_2C_2}, \overline{\mathfrak{B}_3C_3}, \overline{\mathfrak{B}_4C_4}$	$\overline{B_1\mathfrak{C}_4}, \overline{B_2\mathfrak{C}_3}, \overline{B_3\mathfrak{C}_2}, \overline{B_4\mathfrak{C}_1}$

Die Fläche	hat zur Regelschaar die 16 Geraden:	
$\mathfrak{H}_1^2$	$\overline{\mathfrak{A}_1B_2}, \overline{\mathfrak{A}_2B_1}, \overline{\mathfrak{A}_3B_4}, \overline{\mathfrak{A}_4B_3}$	$\overline{A_1\mathfrak{B}_1}, \overline{A_2\mathfrak{B}_2}, \overline{A_3\mathfrak{B}_3}, \overline{A_4B_4}$
	$\overline{\mathfrak{C}_1D_2}, \overline{\mathfrak{C}_2D_1}, \overline{\mathfrak{C}_3D_4}, \overline{\mathfrak{C}_4D_3}$	$\overline{C_1\mathfrak{D}_1}, \overline{C_2\mathfrak{D}_2}, \overline{C_3\mathfrak{D}_3}, \overline{C_4\mathfrak{D}_4}$
$\mathfrak{H}_1^2$	$\overline{\mathfrak{A}_1B_4}, \overline{\mathfrak{A}_2B_3}, \overline{\mathfrak{A}_3B_2}, \overline{\mathfrak{A}_4B_1}$	$\overline{A_1\mathfrak{B}_3}, \overline{A_2\mathfrak{B}_4}, \overline{A_3\mathfrak{B}_1}, \overline{A_4\mathfrak{B}_2}$
	$\overline{\mathfrak{C}_1D_4}, \overline{\mathfrak{C}_2D_3}, \overline{\mathfrak{C}_3D_2}, \overline{\mathfrak{C}_4D_1}$	$\overline{C_1\mathfrak{D}_3}, \overline{C_2\mathfrak{D}_4}, \overline{C_3\mathfrak{D}_1}, \overline{C_4\mathfrak{D}_2}$
$\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}^2$	$\overline{\mathfrak{A}_1C_3}, \overline{\mathfrak{A}_2C_4}, \overline{\mathfrak{A}_3C_1}, \overline{\mathfrak{A}_1C_2}$	$\overline{A_1\mathfrak{C}_1}, \overline{A_2\mathfrak{C}_2}, \overline{A_3\mathfrak{C}_3}, \overline{A_4\mathfrak{C}_4}$
	$\overline{\mathfrak{B}_1D_3}, \overline{\mathfrak{B}_2D_4}, \overline{\mathfrak{B}_3D_1}, \overline{\mathfrak{B}_4D_2}$	$\overline{B_1\mathfrak{D}_1}, \overline{B_2\mathfrak{D}_2}, \overline{B_3\mathfrak{D}_3}, \overline{B_4\mathfrak{D}_4}$
$\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}^2$	$\overline{\mathfrak{A}_1C_4}, \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_3}, \overline{\mathfrak{A}_3C_2}, \overline{\mathfrak{A}_4C_1}$	$\overline{A_1\mathfrak{C}_2}, \overline{A_2\mathfrak{C}_1}, \overline{A_3\mathfrak{C}_4}, \overline{A_4\mathfrak{C}_3}$
	$\overline{\mathfrak{B}_1D_4}, \overline{\mathfrak{B}_2D_3}, \overline{\mathfrak{B}_3D_2}, \overline{\mathfrak{B}_4D_1}$	$\overline{B_1\mathfrak{D}_2}, \overline{B_2\mathfrak{D}_1}, \overline{B_3\mathfrak{D}_4}, \overline{B_4\mathfrak{D}_3}$
$\mathfrak{H}_3^2$	$\overline{\mathfrak{A}_1D_4}, \overline{\mathfrak{A}_2D_3}, \overline{\mathfrak{A}_3D_2}, \overline{\mathfrak{A}_4D_1}$	$\overline{A_1\mathfrak{D}_1}, \overline{A_2\mathfrak{D}_2}, \overline{A_3\mathfrak{D}_3}, \overline{A_4\mathfrak{D}_4}$
	$\overline{\mathfrak{B}_1C_3}, \overline{\mathfrak{B}_2C_4}, \overline{\mathfrak{B}_3C_1}, \overline{\mathfrak{B}_4C_2}$	$\overline{B_1\mathfrak{C}_2}, \overline{B_2\mathfrak{C}_1}, \overline{B_3\mathfrak{C}_4}, \overline{B_4\mathfrak{C}_3}$
$\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}^2$	$\overline{\mathfrak{A}_1D_3}, \overline{\mathfrak{A}_2D_4}, \overline{\mathfrak{A}_3D_1}, \overline{\mathfrak{A}_4D_2}$	$\overline{A_1\mathfrak{D}_2}, \overline{A_2\mathfrak{D}_1}, \overline{A_3\mathfrak{D}_4}, \overline{A_4\mathfrak{D}_3}$
	$\overline{\mathfrak{B}_1C_4}, \overline{\mathfrak{B}_2C_3}, \overline{\mathfrak{B}_3C_2}, \overline{\mathfrak{B}_4C_1}$	$\overline{B_1\mathfrak{C}_1}, \overline{B_2\mathfrak{C}_2}, \overline{B_3\mathfrak{C}_3}, \overline{B_4\mathfrak{C}_4}$

20. Hat man aus$(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})(\mathfrak{C})(\mathfrak{D})$ durch Projection vermittelst einer Leitschaar $(\mathfrak{E})$ einer h^2 ein anderes Quadrupel $(\mathfrak{A}')(\mathfrak{B}')(\mathfrak{C}')(\mathfrak{D}')$ abgeleitet, so wird man zu letzterem gleichzeitig das desmische $(A')(B')(C)(D')$ erhalten, wenn man $(A)(B)(C)(D)$ mittelst der Regelschaar (E) von h^2 projicirt. Hieraus ist klar, dass wenn $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'}$ ein Element von $(\mathfrak{E})$ vorstellt, $\overline{A_1A_1'}, \overline{B_1B_1'}\ldots$ Elemente von (E) sind, dass folglich $\overline{\mathfrak{A}_1'B_1'}$ und $\overline{\mathfrak{A}_1B_1}$ auf derselben Fläche $\mathfrak{H}_1^2$ liegen. — Ebenso lässt sich nachweisen, dass jede Linie, welche eine Ecke von $(\mathfrak{A}')(\mathfrak{B}')(\mathfrak{C}')(\mathfrak{D}')$ mit einer von $(A')(B')(C)(D')$ verbindet, mit der homologen, d. h. gleichbezeichneten der 2 Quadrupel $(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})(\mathfrak{C})(\mathfrak{D})$, $(A)(B)(C)(D)$ als Erzeugende zu derselben Fläche $\mathfrak{H}^2$ gehört; dass also dem ersten und überhaupt jedem Quadrupelpaar dieselben 6 Flächen $\mathfrak{H}^2$ als Träger von Configurationslinien eigen sind, welche $(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})(\mathfrak{C})(\mathfrak{D})$ nach $(A)(B)(C)(D)$ projiciren.

Während die Erzeugendenschaaren $\mathfrak{h}^2$, welche die hyperbolische Lage zwischen Tetraedern innerhalb eines Quadrupels herstellen, mit dem Quadrupel sich ändern, sind jene 6 Flächen $\mathfrak{H}_1^2, \mathfrak{H}_2^2\ldots$, welche die Systemtetraeder eines Quadrupels in jene des desmischen überführen, invariant für alle Quadrupel der Curve R^4.

Jede $\mathfrak{H}^2$ erscheint auch dadurch im Büschel ausgezeichnet, dass die Erzeugenden ihrer 2 Schaaren sich zu Gegenseiten eines R^4 eingeschriebenen Vierecks zusammenfügen. Auf $\mathfrak{H}_1^2$ sind solche Vierecke: $\mathfrak{A}_1B_1\mathfrak{A}_2B_2$, $\mathfrak{A}_3B_3\mathfrak{A}_4B_4$, $A_1\mathfrak{B}_1A_2\mathfrak{B}_2\ldots$. Ihre Anzahl ist auf jeder Fläche $\mathfrak{H}^2$ eine ∞ grosse.[1]

21. Aus der ersten Zeile der letzten Tabelle ist zu ersehen, dass $\overline{\mathfrak{A}_1B_1}$ von den 4 Geraden $\overline{A_1\mathfrak{B}_1}, \overline{A_2\mathfrak{B}_2}\ldots$ geschnitten wird, aus den ersten 2 Zeilen, dass $\overline{\mathfrak{A}_1B_1}$ jeder von den 8 Linien $\overline{\mathfrak{C}_1D_2}$, $\overline{\mathfrak{C}_2D_1}\ldots, \overline{C_1\mathfrak{D}_1}, \overline{C_2\mathfrak{D}_2}\ldots$ begegnet. Punkte je einer Ebene sind sonach sowohl $\mathfrak{A}_1A_1\mathfrak{B}_1B_1$, die einzeln 4 Systemtetraedern der Configuration angehören, die zu zwei desmische Lage haben, als

[1] Die Existenz solcher Flächen in jedem Büschel $2\cdot0$ hat zuerst Herr A. Voss in der Abhandlung: „Die Liniengeometrie in ihrer Anwendung auf Flächen zweiten Grades“ (Math. Annalen, Bd. II) analytisch nachgewiesen. — Zu Flächen $2\cdot0$, auf welchen ∞ viele der R^4 eingeschriebene Achtecke liegen, werden wir, und zwar ebenfalls durch Untersuchung des Quadrupelsystems, im Art. 33 gelangen.

auch $\mathfrak{A}_1 B_1 \mathfrak{C}_1 D_1$, welche sich auf 4 Systemtetraeder vertheilen, von denen keine zwei desmisch sind. Die Gesammtzahl der ersteren Ebenen ist $4.4.4.6 = 384$, der letzteren $\frac{8.8.2.6}{2} = 384$.

Von den Ebenen 1. Art sind in der folgenden III. Gruppe nur ein Dritttheil, der als Schaar A bezeichnet werden soll, aufgeschrieben.

III. Gruppe.

	a	b	c	d
1	$\mathfrak{A}_1 A_1 \mathfrak{B}_1 B_1$	$\mathfrak{A}_1 A_2 \mathfrak{B}_2 B_1$	$\mathfrak{A}_1 A_3 \mathfrak{B}_3 B_1$	$\mathfrak{A}_1 A_4 \mathfrak{B}_4 B_1$
2	$\mathfrak{A}_1 A_1 \mathfrak{B}_2 B_2$	$\mathfrak{A}_1 A_2 \mathfrak{B}_1 B_2$	$\mathfrak{A}_1 A_3 \mathfrak{B}_4 B_2$	$\mathfrak{A}_1 A_4 \mathfrak{B}_3 B_2$
3	$\mathfrak{A}_1 A_1 \mathfrak{B}_3 B_3$	$\mathfrak{A}_1 A_2 \mathfrak{B}_4 B_3$	$\mathfrak{A}_1 A_3 \mathfrak{B}_1 B_3$	$\mathfrak{A}_1 A_4 \mathfrak{B}_2 B_3$
4	$\mathfrak{A}_1 A_1 \mathfrak{B}_4 B_4$	$\mathfrak{A}_1 A_2 \mathfrak{B}_3 B_4$	$\mathfrak{A}_1 A_3 \mathfrak{B}_2 B_4$	$\mathfrak{A}_1 A_4 \mathfrak{B}_2 B_4$
5	$\mathfrak{A}_2 A_2 \mathfrak{B}_1 B_1$	$\mathfrak{A}_2 A_1 \mathfrak{B}_2 B_1$	$\mathfrak{A}_2 A_4 \mathfrak{B}_3 B_1$	$\mathfrak{A}_2 A_3 \mathfrak{B}_4 B_1$
6	$\mathfrak{A}_2 A_2 \mathfrak{B}_2 B_2$	$\mathfrak{A}_2 A_1 \mathfrak{B}_1 A_2$	$\mathfrak{A}_2 A_4 \mathfrak{B}_4 B_2$	$\mathfrak{A}_2 A_3 \mathfrak{B}_3 B_2$
7	$\mathfrak{A}_2 A_2 \mathfrak{B}_3 B_3$	$\mathfrak{A}_2 A_1 \mathfrak{B}_4 B_3$	$\mathfrak{A}_2 A_4 \mathfrak{B}_1 B_3$	$\mathfrak{A}_2 A_3 \mathfrak{B}_2 B_3$
8	$\mathfrak{A}_2 A_2 \mathfrak{B}_4 B_4$	$\mathfrak{A}_2 A_1 \mathfrak{B}_3 B_4$	$\mathfrak{A}_2 A_4 \mathfrak{B}_2 B_4$	$\mathfrak{A}_2 A_3 \mathfrak{B}_1 B_4$
9	$\mathfrak{A}_3 A_3 \mathfrak{B}_1 B_1$	$\mathfrak{A}_3 B_4 \mathfrak{B}_2 B_1$	$\mathfrak{A}_3 A_1 \mathfrak{B}_3 B_1$	$\mathfrak{A}_3 A_2 \mathfrak{B}_4 B_1$
10	$\mathfrak{A}_3 A_3 \mathfrak{B}_2 B_2$	$\mathfrak{A}_3 B_4 \mathfrak{B}_1 B_2$	$\mathfrak{A}_3 A_1 \mathfrak{B}_4 B_2$	$\mathfrak{A}_3 A_2 \mathfrak{B}_3 B_2$
11	$\mathfrak{A}_3 A_3 \mathfrak{B}_3 B_3$	$\mathfrak{A}_3 B_4 \mathfrak{B}_4 B_3$	$\mathfrak{A}_3 A_1 \mathfrak{B}_1 B_3$	$\mathfrak{A}_3 A_2 \mathfrak{B}_2 B_3$
12	$\mathfrak{A}_3 A_3 \mathfrak{B}_4 B_4$	$\mathfrak{A}_3 B_4 \mathfrak{B}_3 B_4$	$\mathfrak{A}_3 A_1 \mathfrak{B}_2 B_4$	$\mathfrak{A}_3 A_2 \mathfrak{B}_1 B_4$
13	$\mathfrak{A}_4 A_4 \mathfrak{B}_1 B_1$	$\mathfrak{A}_4 A_3 \mathfrak{B}_2 B_1$	$\mathfrak{A}_4 A_2 \mathfrak{B}_3 B_1$	$\mathfrak{A}_4 A_1 \mathfrak{B}_4 B_1$
14	$\mathfrak{A}_4 A_4 \mathfrak{B}_2 B_2$	$\mathfrak{A}_4 A_3 \mathfrak{B}_1 B_2$	$\mathfrak{A}_4 A_2 \mathfrak{B}_4 B_2$	$\mathfrak{A}_4 A_1 \mathfrak{B}_3 B_2$
15	$\mathfrak{A}_4 A_4 \mathfrak{B}_3 B_3$	$\mathfrak{A}_4 A_3 \mathfrak{B}_4 B_3$	$\mathfrak{A}_4 A_2 \mathfrak{B}_1 B_3$	$\mathfrak{A}_4 A_1 \mathfrak{B}_2 B_3$
16	$\mathfrak{A}_4 A_4 \mathfrak{B}_4 B_4$	$\mathfrak{A}_4 A_3 \mathfrak{B}_3 B_4$	$\mathfrak{A}_4 A_2 \mathfrak{B}_2 B_4$	$\mathfrak{A}_4 A_1 \mathfrak{B}_1 B_4$

	α	β	γ	δ
1	$\mathfrak{C}_1 C_1 \mathfrak{D}_1 D_1$	$\mathfrak{C}_1 C_2 \mathfrak{D}_2 D_1$	$\mathfrak{C}_1 C_3 \mathfrak{D}_3 D_1$	$\mathfrak{C}_1 C_4 \mathfrak{D}_4 D_1$
2	$\mathfrak{C}_1 C_1 \mathfrak{D}_2 D_2$	$\mathfrak{C}_1 C_2 \mathfrak{D}_1 D_2$	$\mathfrak{C}_1 C_3 \mathfrak{D}_4 D_2$	$\mathfrak{C}_1 C_4 \mathfrak{D}_3 D_2$
3	$\mathfrak{C}_1 C_1 \mathfrak{D}_3 D_3$	$\mathfrak{C}_1 C_2 \mathfrak{D}_4 D_3$	$\mathfrak{C}_1 C_3 \mathfrak{D}_1 D_3$	$\mathfrak{C}_1 C_4 \mathfrak{D}_2 D_3$
4	$\mathfrak{C}_1 C_1 \mathfrak{D}_4 D_4$	$\mathfrak{C}_1 C_2 \mathfrak{D}_3 D_4$	$\mathfrak{C}_1 C_3 \mathfrak{D}_2 D_4$	$\mathfrak{C}_1 C_4 \mathfrak{D}_1 D_4$
5	$\mathfrak{C}_2 C_2 \mathfrak{D}_1 D_1$	$\mathfrak{C}_2 C_1 \mathfrak{D}_2 D_1$	$\mathfrak{C}_2 C_4 \mathfrak{D}_3 D_1$	$\mathfrak{C}_2 C_3 \mathfrak{D}_4 D_1$
6	$\mathfrak{C}_2 C_2 \mathfrak{D}_2 D_2$	$\mathfrak{C}_2 C_1 \mathfrak{D}_1 D_2$	$\mathfrak{C}_2 C_4 \mathfrak{D}_4 D_2$	$\mathfrak{C}_2 C_3 \mathfrak{D}_3 D_2$
7	$\mathfrak{C}_2 C_2 \mathfrak{D}_3 D_3$	$\mathfrak{C}_2 C_1 \mathfrak{D}_4 D_3$	$\mathfrak{C}_2 C_4 \mathfrak{D}_1 D_3$	$\mathfrak{C}_2 C_3 \mathfrak{D}_2 D_3$
8	$\mathfrak{C}_2 C_2 \mathfrak{D}_4 D_4$	$\mathfrak{C}_2 C_1 \mathfrak{D}_3 D_4$	$\mathfrak{C}_2 C_4 \mathfrak{D}_2 D_4$	$\mathfrak{C}_2 C_3 \mathfrak{D}_1 D_4$
9	$\mathfrak{C}_3 C_3 \mathfrak{D}_1 D_1$	$\mathfrak{C}_3 C_4 \mathfrak{D}_2 D_1$	$\mathfrak{C}_3 C_1 \mathfrak{D}_3 D_1$	$\mathfrak{C}_3 C_2 \mathfrak{D}_4 D_1$
10	$\mathfrak{C}_3 C_3 \mathfrak{D}_2 D_2$	$\mathfrak{C}_3 C_4 \mathfrak{D}_1 D_2$	$\mathfrak{C}_3 C_1 \mathfrak{D}_4 D_2$	$\mathfrak{C}_3 C_2 \mathfrak{D}_3 D_2$
11	$\mathfrak{C}_3 C_3 \mathfrak{D}_3 D_3$	$\mathfrak{C}_3 C_4 \mathfrak{D}_4 D_3$	$\mathfrak{C}_3 C_1 \mathfrak{D}_1 D_3$	$\mathfrak{C}_3 C_2 \mathfrak{D}_2 D_3$
12	$\mathfrak{C}_3 C_3 \mathfrak{D}_4 D_4$	$\mathfrak{C}_3 C_4 \mathfrak{D}_3 D_4$	$\mathfrak{C}_3 C_1 \mathfrak{D}_2 D_4$	$\mathfrak{C}_3 C_2 \mathfrak{D}_1 D_4$
13	$\mathfrak{C}_4 C_4 \mathfrak{D}_1 D_1$	$\mathfrak{C}_4 C_3 \mathfrak{D}_2 D_1$	$\mathfrak{C}_4 C_2 \mathfrak{D}_3 D_1$	$\mathfrak{C}_4 C_1 \mathfrak{D}_4 D_1$
14	$\mathfrak{C}_4 C_4 \mathfrak{D}_2 D_2$	$\mathfrak{C}_4 C_3 \mathfrak{D}_1 D_2$	$\mathfrak{C}_4 C_2 \mathfrak{D}_4 D_2$	$\mathfrak{C}_4 C_1 \mathfrak{D}_3 D_2$
15	$\mathfrak{C}_4 C_4 \mathfrak{D}_3 D_3$	$\mathfrak{C}_4 C_3 \mathfrak{D}_4 D_3$	$\mathfrak{C}_4 C_2 \mathfrak{D}_1 D_3$	$\mathfrak{C}_4 C_1 \mathfrak{D}_2 D_3$
16	$\mathfrak{C}_4 C_4 \mathfrak{D}_4 D_4$	$\mathfrak{C}_4 C_3 \mathfrak{D}_2 D_4$	$\mathfrak{C}_4 C_2 \mathfrak{D}_2 D_4$	$\mathfrak{C}_4 C_1 \mathfrak{D}_1 D_4$

Behält man die Indices in ihrer Reihenfolge unverändert bei und setzt überall $\mathfrak{A}A\mathfrak{C}C$ an Stelle $\mathfrak{A}A\mathfrak{B}B$, $\mathfrak{B}B\mathfrak{D}D$ an jene von $\mathfrak{C}C\mathfrak{D}D$, so erhält man eine zweite ebenso grosse Schaar B. Zur dritten Schaar C gelangt man, indem man $\mathfrak{A}A\mathfrak{D}D$ anstatt $\mathfrak{A}A\mathfrak{B}B$ und $\mathfrak{B}B\mathfrak{C}C$ statt $\mathfrak{C}C\mathfrak{D}D$ schreibt.

Eine Hälfte der Ebenen zweiter Art ist in nachstehender Tabelle zusammengestellt, und zwar so, dass die Anordnung der Ebenen in Gruppen möglichst deutlich hervortritt.

IV.

	a	b	c	d	e	f
1	$\mathfrak{A}_1B_1\,\mathfrak{C}_1D_2$	$\mathfrak{A}_1B_2\,\mathfrak{C}_1D_1$	$\mathfrak{A}_1B_3\,\mathfrak{C}_1D_4$	$\mathfrak{A}_1B_4\,\mathfrak{C}_1D_3$	$\mathfrak{A}_1B_1\,C_1\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{A}_1B_2\,C_2\mathfrak{D}_1$
2	$\mathfrak{A}_1B_1\,\mathfrak{C}_2D_1$	$\mathfrak{A}_1B_2\,\mathfrak{C}_2D_2$	$\mathfrak{A}_1B_3\,\mathfrak{C}_2D_3$	$\mathfrak{A}_1B_4\,\mathfrak{C}_2D_4$	$\mathfrak{A}_1B_1\,C_2\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{A}_1B_2\,C_1\mathfrak{D}_2$
3	$\mathfrak{A}_1B_1\,\mathfrak{C}_3D_4$	$\mathfrak{A}_1B_2\,\mathfrak{C}_3D_3$	$\mathfrak{A}_1B_3\,\mathfrak{C}_3D_2$	$\mathfrak{A}_1B_4\,\mathfrak{C}_3D_1$	$\mathfrak{A}_1B_1\,C_4\mathfrak{D}_4$	$\mathfrak{A}_1B_2\,C_3\mathfrak{D}_4$
4	$\mathfrak{A}_1B_1\,\mathfrak{C}_4D_3$	$\mathfrak{A}_1B_2\,\mathfrak{C}_4D_4$	$\mathfrak{A}_1B_3\,\mathfrak{C}_4D_1$	$\mathfrak{A}_1B_4\,\mathfrak{C}_4D_2$	$\mathfrak{A}_1B_1\,C_3\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{A}_1B_2\,C_4\mathfrak{D}_3$
5	$\mathfrak{A}_2B_1\,\mathfrak{C}_1D_1$	$\mathfrak{A}_2B_2\,\mathfrak{C}_1D_2$	$\mathfrak{A}_2B_3\,\mathfrak{C}_1D_3$	$\mathfrak{A}_2B_4\,\mathfrak{C}_1D_4$	$\mathfrak{A}_2B_1\,C_2\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{A}_2B_2\,C_1\mathfrak{D}_1$
6	$\mathfrak{A}_2B_1\,\mathfrak{C}_2D_2$	$\mathfrak{A}_2B_2\,\mathfrak{C}_2D_1$	$\mathfrak{A}_2B_3\,\mathfrak{C}_2D_4$	$\mathfrak{A}_2B_4\,\mathfrak{C}_2D_3$	$\mathfrak{A}_2B_1\,C_1\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{A}_2B_2\,C_2\mathfrak{D}_2$
7	$\mathfrak{A}_2B_1\,\mathfrak{C}_3D_3$	$\mathfrak{A}_2B_2\,\mathfrak{C}_3D_4$	$\mathfrak{A}_2B_3\,\mathfrak{C}_3D_1$	$\mathfrak{A}_2B_4\,\mathfrak{C}_3D_2$	$\mathfrak{A}_2B_1\,C_3\mathfrak{D}_4$	$\mathfrak{A}_2B_2\,C_4\mathfrak{D}_4$
8	$\mathfrak{A}_2B_1\,\mathfrak{C}_4D_4$	$\mathfrak{A}_2B_2\,\mathfrak{C}_4D_3$	$\mathfrak{A}_2B_3\,\mathfrak{C}_4D_2$	$\mathfrak{A}_2B_4\,\mathfrak{C}_4D_1$	$\mathfrak{A}_2B_1\,C_4\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{A}_2B_2\,C_3\mathfrak{D}_3$
9	$\mathfrak{A}_3B_1\,\mathfrak{C}_1D_4$	$\mathfrak{A}_3B_2\,\mathfrak{C}_1D_3$	$\mathfrak{A}_3B_3\,\mathfrak{C}_1D_2$	$\mathfrak{A}_3B_4\,\mathfrak{C}_1D_1$	$\mathfrak{A}_3B_1\,C_2\mathfrak{D}_4$	$\mathfrak{A}_3B_2\,C_1\mathfrak{D}_4$
10	$\mathfrak{A}_3B_1\,\mathfrak{C}_2D_3$	$\mathfrak{A}_3B_2\,\mathfrak{C}_2D_4$	$\mathfrak{A}_3B_3\,\mathfrak{C}_2D_1$	$\mathfrak{A}_3B_4\,\mathfrak{C}_2D_2$	$\mathfrak{A}_3B_1\,C_1\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{A}_3B_2\,C_2\mathfrak{D}_3$
11	$\mathfrak{A}_3B_1\,\mathfrak{C}_3D_2$	$\mathfrak{A}_3B_2\,\mathfrak{C}_3D_1$	$\mathfrak{A}_3B_3\,\mathfrak{C}_3D_4$	$\mathfrak{A}_3B_4\,\mathfrak{C}_3D_3$	$\mathfrak{A}_3B_1\,C_3\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{A}_3B_2\,C_4\mathfrak{D}_1$
12	$\mathfrak{A}_3B_1\,\mathfrak{C}_4D_1$	$\mathfrak{A}_3B_2\,\mathfrak{C}_4D_2$	$\mathfrak{A}_3B_3\,\mathfrak{C}_4D_3$	$\mathfrak{A}_3B_4\,\mathfrak{C}_4D_4$	$\mathfrak{A}_3B_1\,C_4\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{A}_3B_2\,C_3\mathfrak{D}_2$
13	$\mathfrak{A}_4B_1\,\mathfrak{C}_1D_3$	$\mathfrak{A}_4B_2\,\mathfrak{C}_1D_4$	$\mathfrak{A}_4B_3\,\mathfrak{C}_1D_1$	$\mathfrak{A}_4B_4\,\mathfrak{C}_1D_2$	$\mathfrak{A}_4B_1\,C_1\mathfrak{D}_4$	$\mathfrak{A}_4B_2\,C_2\mathfrak{D}_4$
14	$\mathfrak{A}_4B_1\,\mathfrak{C}_2D_4$	$\mathfrak{A}_4B_2\,\mathfrak{C}_2D_3$	$\mathfrak{A}_4B_3\,\mathfrak{C}_2D_2$	$\mathfrak{A}_4B_4\,\mathfrak{C}_2D_1$	$\mathfrak{A}_4B_1\,C_2\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{A}_4B_2\,C_1\mathfrak{D}_3$
15	$\mathfrak{A}_4B_1\,\mathfrak{C}_3D_1$	$\mathfrak{A}_4B_2\,\mathfrak{C}_3D_2$	$\mathfrak{A}_4B_3\,\mathfrak{C}_3D_3$	$\mathfrak{A}_4B_4\,\mathfrak{C}_3D_4$	$\mathfrak{A}_4B_1\,C_4\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{A}_4B_2\,C_3\mathfrak{D}_1$
16	$\mathfrak{A}_4B_1\,\mathfrak{C}_4D_2$	$\mathfrak{A}_4B_2\,\mathfrak{C}_4D_1$	$\mathfrak{A}_4B_3\,\mathfrak{C}_4D_4$	$\mathfrak{A}_4B_4\,\mathfrak{C}_4D_3$	$\mathfrak{A}_4B_1\,C_3\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{A}_4B_2\,C_4\mathfrak{D}_2$

22. Von den Linien, welche die Ecken eines Quadrupels untereinander verbinden, gehören keine zwei einzeln den 2 Regelschaaren einer Fläche des Büschels an. Es gibt demnach im allgemeinen keine Ebene, welche R^4 in 4 Punkten desselben Quadrupels schneidet. Ebenso wenig liegen 3 Punkte $A_mB_nC_p$ eines solchen mit einem Punkte des desmischen Quadrupels in

Vertauscht man im Nachstehenden (Tab. IV), ohne die Reihenfolge der Indices zu stören, $\mathfrak{A}$ mit A, $\mathfrak{B}$ mit B, $\mathfrak{C}$ mit C und $\mathfrak{D}$ mit D, und umgekehrt, so dass $A\mathfrak{B}C\mathfrak{D}$ an die Stelle von $\mathfrak{A}B\mathfrak{C}D$, $A\mathfrak{B}CD$ an jene von $\mathfrak{A}BC\mathfrak{D}$ und $A\mathfrak{C}B\mathfrak{D}$ an jene von $\mathfrak{A}C\mathfrak{B}D$ tritt, so gewinnt man weitere 16 Zeilen einer zweiten Schaar von Ebenen, welche auch mit den fortlaufenden Nummern von 1—16 bezeichnet werden sollen.

Gruppe.

g	h	i	k	l	m
$\mathfrak{A}_1B_3C_1\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{A}_1B_4C_2\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{A}_1C_1\mathfrak{B}_1D_3$	$\mathfrak{A}_1C_2\mathfrak{B}_1D_4$	$\mathfrak{A}_1C_3\mathfrak{B}_1D_1$	$\mathfrak{A}_1C_4\mathfrak{B}_1D_2$
$\mathfrak{A}_1B_3C_2\mathfrak{D}_4$	$\mathfrak{A}_1B_4C_1\mathfrak{D}_4$	$\mathfrak{A}_2C_1\mathfrak{B}_2D_3$	$\mathfrak{A}_2C_2\mathfrak{B}_2D_4$	$\mathfrak{A}_2C_3\mathfrak{B}_2D_1$	$\mathfrak{A}_2C_4\mathfrak{B}_2D_2$
$\mathfrak{A}_1B_3C_4\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{A}_1B_4C_3\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{A}_2C_1\mathfrak{B}_3D_2$	$\mathfrak{A}_2C_2\mathfrak{B}_3D_1$	$\mathfrak{A}_2C_3\mathfrak{B}_3D_4$	$\mathfrak{A}_2C_4\mathfrak{B}_3D_3$
$\mathfrak{A}_1B_3C_3\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{A}_1B_4C_4\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{A}_1C_1\mathfrak{B}_4D_2$	$\mathfrak{A}_1C_2\mathfrak{B}_4D_1$	$\mathfrak{A}_1C_3\mathfrak{B}_4D_4$	$\mathfrak{A}_1C_4\mathfrak{B}_4D_3$
$\mathfrak{A}_2B_3C_2\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{A}_2B_4C_1\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{A}_3C_1\mathfrak{B}_1D_1$	$\mathfrak{A}_3C_2\mathfrak{B}_1D_2$	$\mathfrak{A}_3C_3\mathfrak{B}_1D_3$	$\mathfrak{A}_3C_4\mathfrak{B}_1D_4$
$\mathfrak{A}_2B_3C_1\mathfrak{D}_4$	$\mathfrak{A}_2B_4C_2\mathfrak{D}_4$	$\mathfrak{A}_4C_1\mathfrak{B}_2D_1$	$\mathfrak{A}_4C_2\mathfrak{B}_2D_2$	$\mathfrak{A}_4C_3\mathfrak{B}_2D_3$	$\mathfrak{A}_4C_4\mathfrak{B}_2D_4$
$\mathfrak{A}_2B_3C_3\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{A}_2B_4C_4\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{A}_4C_1\mathfrak{B}_3D_4$	$\mathfrak{A}_4C_2\mathfrak{B}_3D_3$	$\mathfrak{A}_4C_3\mathfrak{B}_3D_2$	$\mathfrak{A}_4C_4\mathfrak{B}_3D_1$
$\mathfrak{A}_2B_3C_4\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{A}_2B_4C_3\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{A}_3C_1\mathfrak{B}_4D_1$	$\mathfrak{A}_3C_2\mathfrak{B}_4D_3$	$\mathfrak{A}_3C_3\mathfrak{B}_4D_2$	$\mathfrak{A}_3C_4\mathfrak{B}_4D_1$
$\mathfrak{A}_3B_3C_2\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{A}_3B_4C_1\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{A}_2C_1\mathfrak{B}_1D_4$	$\mathfrak{A}_2C_3\mathfrak{B}_1D_3$	$\mathfrak{A}_2C_3\mathfrak{B}_1D_2$	$\mathfrak{A}_2C_4\mathfrak{B}_1D_1$
$\mathfrak{A}_3B_3C_1\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{A}_3B_4C_2\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{A}_1C_1\mathfrak{B}_2D_4$	$\mathfrak{A}_1C_2\mathfrak{B}_2D_3$	$\mathfrak{A}_1C_3\mathfrak{B}_2D_2$	$\mathfrak{A}_1C_4\mathfrak{B}_2D_1$
$\mathfrak{A}_3B_3C_3\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{A}_3B_4C_4\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{A}_1C_1\mathfrak{B}_3D_1$	$\mathfrak{A}_1C_2\mathfrak{B}_3D_2$	$\mathfrak{A}_1C_3\mathfrak{B}_3D_3$	$\mathfrak{A}_1C_4\mathfrak{B}_3D_4$
$\mathfrak{A}_3B_3C_4\mathfrak{D}_4$	$\mathfrak{A}_3B_4C_3\mathfrak{D}_4$	$\mathfrak{A}_2C_1\mathfrak{B}_4D_1$	$\mathfrak{A}_2C_2\mathfrak{B}_4D_2$	$\mathfrak{A}_2C_3\mathfrak{B}_4D_3$	$\mathfrak{A}_2C_4\mathfrak{B}_4D_4$
$\mathfrak{A}_4B_3C_1\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{A}_4B_4C_2\mathfrak{D}_2$	$\mathfrak{A}_4C_1\mathfrak{B}_1D_2$	$\mathfrak{A}_4C_2\mathfrak{B}_1D_1$	$\mathfrak{A}_4C_3\mathfrak{B}_1D_4$	$\mathfrak{A}_4C_4\mathfrak{B}_1D_3$
$\mathfrak{A}_4B_3C_2\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{A}_4B_4C_1\mathfrak{D}_1$	$\mathfrak{A}_3C_1\mathfrak{B}_2D_2$	$\mathfrak{A}_3C_2\mathfrak{B}_2D_1$	$\mathfrak{A}_3C_3\mathfrak{B}_2D_4$	$\mathfrak{A}_3C_4\mathfrak{B}_2D_3$
$\mathfrak{A}_4B_3C_4\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{A}_4B_4C_3\mathfrak{D}_3$	$\mathfrak{A}_3C_1\mathfrak{B}_3D_3$	$\mathfrak{A}_3C_2\mathfrak{B}_3D_4$	$\mathfrak{A}_3C_3\mathfrak{B}_3D_1$	$\mathfrak{A}_3C_4\mathfrak{B}_3D_2$
$\mathfrak{A}_4B_3C_3\mathfrak{D}_4$	$\mathfrak{A}_4B_4C_4\mathfrak{D}_4$	$\mathfrak{A}_4C_1\mathfrak{B}_4D_3$	$\mathfrak{A}_4C_2\mathfrak{B}_4D_4$	$\mathfrak{A}_4C_3\mathfrak{B}_4D_1$	$\mathfrak{A}_4C_4\mathfrak{B}_4D_2$

einer Ebene; denn die Verbindungslinien des letzteren mit A_m, B_n, C_p sind entweder Strahlen aus den Ecken von $[\mathfrak{P}]$ oder Erzeugende der Flächen $\mathfrak{H}^2$, während die Seite dieses Dreieckes einzeln zu den variablen Regelschaaren $\mathfrak{h}^2$ gehören.

Auch unter den Ebenen, welche 2 Punkte von $(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})(\mathfrak{C})(\mathfrak{D})$ mit einem von $(A)(B)(C)(D)$ verbinden, gibt es, und zwar 192

solche, die R^4 in keinem von diesen 3 verschiedenen Configurationspunkte treffen, indem sie Tangentialebenen der Curve und der Flächen $\mathfrak{H}^2$ sind. Je 6 berühren R^4 in einem Configurationspunkte; so in $\mathfrak{A}_1$ die Ebenen: $(\mathfrak{A}_1 B_1 B_2)$, $(\mathfrak{A}_1 B_3 B_4)$, $(\mathfrak{A}_1 C_1 C_3)$, $(\mathfrak{A}_1 C_2 C_4)$, $(\mathfrak{A}_1 D_1 D_4)$, $(\mathfrak{A}_1 D_2 D_3)$. Ein allgemeines räumliches 32-Eck besitzt $\frac{32.31.30}{1.2.3}$ Ebenen. Ausser den 192 Tangentialebenen und den $2.\frac{16.15.14}{1.2.3}$ Ebenen, welche den 16-Ecken $(\mathfrak{A})(\mathfrak{B})(\mathfrak{C})(\mathfrak{D})$ und $(A)(B)(C)(D)$ als Seitenflächen zukommen, enthält jede jener Ebenen noch einen vierten Configurationspunkt und zählt somit viermal. Die Anzahl dieser eigentlichen Configurationsebenen ergibt sich hieraus gleich $\frac{1}{4}\left\{\frac{32.31.30}{1.2.3} - 2.\frac{16.15.14}{1.2.3} - 192\right\} =$ $= 912$. In den 4 Tabellen sind demnach alle eingereiht.

„Die 32 Ecken zweier desmisch liegenden Quadrupel befinden sich auf 912 Arten zu vier in einer Ebene."

Wenn man die 192 Tangentenebenen einbezieht, so kann man auch sagen:

„Jede Ebene, welche durch 3 Punkte der Configuration geht, die nicht einem Quadrupel angehören, schneidet die Curve stets noch in einem vierten Configurationspunkte."

Sind 2 von den 3 Punkten Ecken eines Systemtetraeders, so befinden sich auch der dritte und vierte auf einem solchen. Vertheilen sich hingegen die 3 Punkte auf 3 Tetraeder, so ist der vierte Punkt Ecke eines vierten Tetraeders. Sind im ersten Falle die 2 Tetraeder, im zweiten zwei der 3 Tetraeder desmisch, so ist die Ebene ein Element der Gruppe I, beziehungsweise der Gruppe III. Wenn die Voraussetzung nicht eintritt, so gehört die Ebene für (1) der Gruppe II, für (2) der Gruppe IV.

23. Die Configuration der 32 Punkte und 912 Ebenen enthält 496 Linien. Letztere sind: die 48 Kanten k der 8 Systemtetraeder, die 192 Erzeugenden g der 6 Voss'schen Flächen $\mathfrak{H}^2$, ferner die 64 zu 16 durch die Ecken des Poltetraeders laufenden Strahlen g', welche Punkte aus 2 desmischen Tetraedern verbinden und endlich die 192 Erzeugenden der Regelschaaren $\mathfrak{h}^2$.

a) Durch einen Configurationspunkt gehen 114 Ebenen: 6 Ebenen I, 12 Ebenen II und je 48 Ebenen III und IV. In ihm treffen 31 Configurationslinien zusammen: $3k$, $12g$, $4g'$ und $12g''$.

b) Eine Configurationsebene enthält 4 Configurationspunkte und 6 Configurationslinien. Und zwar eine Ebene I: $2k$ und $4g'$; eine Ebene II: $2k$ und $4g$; eine Ebene III: $2g$, $2g'$ und $2g''$;

c) endlich eine Ebene IV: $4g$ und $2g''$.

In einer Configurationsgeraden k schneiden sich 2 Ebenen I und 4 Ebenen II; in einer g 2 Ebenen II, 4 Ebenen III und 8 Ebenen IV; in g' 3 Ebenen I und 12 Ebenen III; schliesslich in g'' je 4 Ebenen III und IV.

Ein Strahl aus einem Configurationspunkt nach einer Ecke $\mathfrak{P}_1$ von $(\mathfrak{P})$ trägt stets noch einen zweiten Configurationspunkt, der von dem ersten durch $\mathfrak{P}_1$ und $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ harmonisch getrennt wird. Analog gehört die Schnittlinie σ von $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ und einer Configurationsebene immer auch einer zweiten solchen Ebene derselben Gruppe an, die mit der ersten und den Ebenen $[\sigma\mathfrak{P}_1]$, $[\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4]$ ein harmonisches Büschel bildet. Gleiches gilt für Configurationslinien: Die Configuration ist tetraedral-symmetrisch; ihr Symbol ist $(4, 114)_{32}$.[1]

24. Gegenstand der nächsten Artikel sind die Enveloppen der Configurationsebenen.

Für die Ebene I sehe man Art. 17. — Die Ebenen der Gruppe II vertheilen sich als Tangentialebenen auf 3 abwickelbare Flächen vierter Classe, und zwar wie folgt:

Die gemeinsam umschriebene Developpable der Voss'schen Flächen:

wird eingehüllt von den 32 Ebenen in den Zeilen:

$\mathfrak{H}_1^2$ und $\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}^2$ 1, 6, 7, 12;
$\mathfrak{H}_2^2$ „ $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}^2$ 2, 5, 8, 11;
$\mathfrak{H}_3^2$ „ $\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}^2$ . . . . . 3, 4, 9, 10.

[1] Mit Herrn Kantor bezeichnen wir mit $[\alpha, \beta]_p$ eine Configuration aus p Elementen einer Art und q Elementen einer zweiten Art, wenn von den ersten α in einem Elemente der zweiten Art, und von den letzteren β in einem der ersten Art liegen. Die Zahlen α, β, p, q sind hiebei immer an die Proportion $\alpha : \beta = p : q$ gebunden.

Die Developpable $[\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{H}_1^2]$ ist auch den „Harnack'schen Flächen" Φ_{II}^4 und Φ_{III}^4 umschrieben, da jede Ebene aus einer der Zeilen: 1, 6, 7, 12 allemal eine Erzeugende von Φ_{II}^4 und eine von Φ_{III}^4 enthält:

„Die gemeinsam umschriebene Developpable von zwei der 3 Harnack'schen Flächen ist stets auch 2 Voss'schen Flächen umschrieben, daher von der vierten Classe. Diese 3 Developpablen repräsentiren im Verein die Enveloppe der 96 Configurationsebenen II, und zwar für jede Lage der Configuration $(4, 114)_{32}$."

Die Berührungspunkte: a_1, b_1, $a_2, b_2 - a_3$, b_3, b_4, a_4 der Ebenen: $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3B_1B_4|$, $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4B_1B_3|$, $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4B_2B_3|$, $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3B_2B_4|$, $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3B_2B_3|$, $|\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4B_2B_4|$, $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3B_1B_3|$, $|\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4B_1B_4|$ mit $\mathfrak{H}_1^2$ befinden sich auf der Berührungscurve R_1^4 von $[\mathfrak{H}_1^2\mathfrak{H}_1^2]$ mit $\mathfrak{H}_1^2$. Sie formiren auf dieser Fläche 2 geschlossene Vierecke $a_1b_1a_2b_2$ und $a_3b_3b_4a_3$ von derselben Art wie es $\mathfrak{A}_1B_1\mathfrak{A}_2B_2$, $\mathfrak{A}_3B_3\mathfrak{A}_4B_4$ für R^4 sind. R^4 und R_1^4 sind in Wechselbeziehung: Beide haben $\mathfrak{H}_1^2$ als Voss'sche Fläche gemein, auch ist die eine der Ort der Tangentialpunkte der Ebene II der auf der anderen befindlichen $(4, 114)_{32}$. Solche R_1^4 sind zu R^4 6 conjugirt, auf jeder $\mathfrak{H}^2$ eine. Sie bilden den Ort der Diagonalpunkte des von den Configurationslinien g dargestellten räumlichen 192-Seites.

25. Die Ebenen III vertheilen sich zu 96 auf die 4 Bündel, welche ihre Mittelpunkte in den Ecken des Tetraeders haben, und zwar hüllen in jedem Bündel je 16 dieselbe Voss'sche Fläche ein. Das Nähere ist aus der folgenden Zusammenstellung ersichtlich:

Die Eb. der Schaar	in den Zeilen:	der Colonne	und jene in den Zeilen:	der Colonne	umhüllen den Kegel
A	1, 2, 5, 6, 11, 12, 15, 16	a b c d	1, 2, 5, 6, 11, 12, 15, 16	α β γ δ	$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{H}_1^2)$ $(\mathfrak{B}_2\mathfrak{H}_1^2)$ $(\mathfrak{B}_3\mathfrak{H}_1^2)$ $(\mathfrak{B}_4\mathfrak{H}_1^2)$
A	3, 4, 7, 8, 9, 10, 13, 14	a b c d	3, 4, 7, 8, 9, 10, 13, 14	α β γ δ	$(\mathfrak{B}_1\mathfrak{H}_1^2)$ $(\mathfrak{B}_2\mathfrak{H}_1^2)$ $(\mathfrak{B}_3\mathfrak{H}_1^2)$ $(\mathfrak{B}_4\mathfrak{H}_1^2)$

Die Eb. der Schaar	in den Zeilen:	der Colonne	und jene in den Zeilen:	der Colonne	umhüllen den Kegel
B	1, 3, 6, 8, 9, 11, 14, 16	*a* *b* *c* *d*	1, 3, 6, 8, 9, 11, 14, 16	α β γ δ	$(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}^2)$ $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}^2)$ $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}^2)$ $(\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_{\mathrm{I}}^2)$
B	2, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 15	*a* *b* *c* *d*	2, 4, 5, 7, 10, 12, 13, 15	α β γ δ	$(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}^2)$ $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}^2)$ $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}^2)$ $(\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}^2)$
C	1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16	*a* *b* *c* *d*	2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15	α β γ δ	$(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}^2)$ $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}^2)$ $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}^2)$ $(\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}^2)$
C	2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15	*a* *b* *c* *d*	1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16	α β γ δ	$(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}^2)$ $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}^2)$ $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}^2)$ $(\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}^2)$

Mit $(\mathfrak{P}_i\mathfrak{H}_m^2)$ ist hiebei der Kegel bezeichnet, der sich aus der Ecke $\mathfrak{P}_i$ von $(\mathfrak{P})$ der Fläche $\mathfrak{H}_m^2$ umschreiben lässt.

„Die 384 Configurationsebenen der Gruppe III umhüllen zu 16 jene 24 Kegel (zweiter Ordnung), welche man aus den 4 Ecken des Poltetraeders den 6 Voss'schen Flächen umschreiben kann.

26. Die 4 Ebenen $\mathfrak{A}_1A_1\mathfrak{B}_1B_1$, $\mathfrak{A}_1A_1\mathfrak{B}_2B_2$, $\mathfrak{A}_2A_2\mathfrak{B}_1B_1$, $\mathfrak{A}_2A_2\mathfrak{B}_2B_2$ tangiren $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_1^2$ und sind Seitenflächen eines einfachen Vierkants $\overline{\mathfrak{A}_1A_1}$, $\overline{\mathfrak{B}_1B_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_2A_2}$, $\overline{\mathfrak{B}_2B_2}$, das dem Doppelkegel D_1^2, der R^4 aus $\mathfrak{P}_1$ projicirt, eingeschrieben ist. Vierkante dieser Art sind auch jene, für welche die Strahlen aus $\mathfrak{P}_1$ nach $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$, respective $\mathfrak{C}_1\mathfrak{C}_2\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2$ und $\mathfrak{C}_3\mathfrak{C}_4\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4$ Kanten vorstellen. In jeder Configuration $(4, 114)_{32}$ kommen 4 solche $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_1^2)$ um- und D_1^2 einbeschriebene Vierkante vor; im Ganzen ∞ viele.

Die 16 Ebenen III, welche $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_1^2)$ tangiren, bilden 4 Quadrupel einer biquadratischen Involution (mit einer nur Doppelelemente enthaltenden Gruppe), welche den

Doppelkegel D_1^2 und die Ebene $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ zur Involutionsfläche hat. Auf letzterer treffen sich je 2 gegenüberliegende Ebenen, wie $(\mathfrak{A}_1 A_1 \mathfrak{B}_1 B_1)$ und $(\mathfrak{A}_2 A_2 \mathfrak{B}_2 B_2)$ oder $(\mathfrak{A}_1 A_1 \mathfrak{B}_2 B_2)$ und $(\mathfrak{A}_2 A_2 \mathfrak{B}_1 B_1)$.

In gleicher Relation stehen: $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_1^2)$ und D_2^2, $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_1^2)$ und D_3^2, $(\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_1^2)$ und D_4^2, ferner jeder Doppelkegel mit jedem concentrischen Kegel $(\mathfrak{P}\mathfrak{H}^2)$.

Hieraus erhellt, dass die windschiefen einfachen Vierecke: $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$, $A_1B_1A_2B_2\ldots$, die R^4 eingeschrieben sind, nicht nur $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_1^2)$, sondern auch $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_1^2)$, $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_1^2)$ und $(\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_1^2)$ umschrieben erscheinen. Die Ordnung, in welcher sich die Seiten der 48 Vierecke, die sich aus den Configurationslinien g'' bilden lassen, zu $4\cdot 8$ auf je 4 der 12 Kegel $(\mathfrak{P}\mathfrak{H}^2)$ — die wir Involutionskegel nennen — vertheilen, ist die folgende:

Die 32 Linien:	tangieren die 4 Kegel:
$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1), (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2), (\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1), (\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_2), (A_1B_1), (A_1B_2), (C_1D_1), (C_1D_2)$	$(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_1^2), (\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_1^2), (\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_1^2), (\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_1^2)$
$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3), (\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4), (\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_3), (\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_4), (A_1B_3), (A_1B_4), (C_1D_3), (C_1D_4)$	$(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_2^2), (\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_2^2), (\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_2^2), (\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_2^2)$
$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1), (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_3), (\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_1), (\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_3), (A_1C_1), (A_1C_3), (B_1D_1), (B_1D_3)$	$(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_3^2), (\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_3^2), (\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_3^2), (\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_3^2)$
$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_2), (\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_4), (\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_2), (\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_4), (A_1C_2), (A_1C_4), (B_1D_2), (B_1D_4)$	$(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_4^2), (\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_4^2), (\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_4^2), (\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_4^2)$
$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_1), (\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_4), (\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2), (\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_3), (A_1D_1), (A_1D_4), (B_1C_2), (B_1C_3)$	$(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_5^2), (\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_5^2), (\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_{11}^2), (\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_{11}^2)$
$(\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_2), (\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}_3), (\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1), (\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_4), (A_1D_2), (A_1D_3), (B_1C_1), (B_1C_4)$	$(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_{11}^2), (\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_{11}^2), (\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_5^2), (\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_5^2)$

Kürze wegen wurde $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1)$ für: $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3}$, $\overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4}$, — $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2)$ für: $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_4}$, $\overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_3}$, — $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3)$ für: $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3}$, $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_4}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_2}$, — endlich $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4)$ für: $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4}$, $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_3}$, $\overline{\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_1}$ geschrieben. Ebenso sind die Symbole $(\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1)\ldots$, $(A_1B_1)\ldots$, $(C_1D_1)\ldots$, $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1)\ldots$, etc. zu deuten.

Die Linien der ersten Zeile beschreiben bei Veränderung der Configuration eine Regelfläche, welche offenbar R^4 zur Doppelcurve und $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_1^2)$, $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_1^2)$, $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_1^2)$, $(\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_1^2)$ zu Doppelkegeln hat. Sie ist wegen der speciellen gegenseitigen Lage dieser Leitgebilde tetraedral-symmetrisch und blos von der achten Ordnung. Ihre in den Seitenflächen des Poltetraeders gelegenen Doppelcurven Δ^4 lassen sich direct untersuchen. Die Seiten 2 Vierecke, welche wie $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ und $A_1B_1A_2B_2$ durch $\mathfrak{P}_1$ und $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ von einander harmonisch getrennt werden, schneiden die letztere Ebene in denselben 4 Punkten Ω, Ω', Ω'', Ω''' von Δ^4; auch decken sich ihre in dieser Ebene gelegenen Projectionen aus $\mathfrak{P}_1$, ein Viereck $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2$ bildend, das dem Schnitte J_1^2 von $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ mit $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_1^2)$ umschrieben und jenem d_1^2 mit D_1^2 eingeschrieben ist. Die Seiten treffen paarweise auf $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ zusammen: $\overline{\alpha_1\beta_1}$ mit $\overline{\alpha_2\beta_2}$ in φ und $\overline{\alpha_1\beta_2}$ mit $\overline{\alpha_2\beta_1}$ in φ'; dagegen zielen die Diagonalen $\overline{\alpha_1\alpha_2}$, $\overline{\beta_1\beta_2}$ als Projectionen von $\overline{\mathfrak{A}_1A_2}$ und $\overline{\mathfrak{B}_1B_2}$ nach $\mathfrak{P}_2$. In Ω wird $\overline{\alpha_1\beta_1}$ von $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}$ und $\overline{A_1B_1}$ geschnitten, in ihrem Berührungspunkte θ mit J_1^2 von den Erzeugenden $\overline{\mathfrak{A}_1B_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_2B_2}$ der H_1^2: demnach ist $(\alpha_1\beta_1\theta\Omega) = -1$. Auf den Strahlen ξ und η aus $\mathfrak{P}_2$ nach θ und Ω liegen beziehungsweise der Tangentialpunkt θ' von $\overline{\alpha_2\beta_2}$ mit J_1^2 und die Ecke Ω'. Das Entsprechen zwischen ξ und η ist projectivisch, da die Schnitte ξ', η' dieser Strahlen mit $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ conjugirte Pole für d_1^2 sind. Es sind folglich auch die Reihe $\overline{\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4}$ (φ) und das Büschel $\mathfrak{P}_2$ (η) projectiv, also das Erzeugniss des letzteren mit der Tangenteninvolution, welche $\overline{\alpha_1\beta_1}$, $\overline{\alpha_2\beta_2}$ auf J_1^2 constituiren, eine Unicursalcurve vierter Ordnung mit Doppelinflexionspunkten in $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$. Ihre Inflexionstangenten sind Erzeugende von $\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_1^2)$, $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{H}_1^2)$, $(\mathfrak{P}_4\mathfrak{H}_1^2)$ und sie berührt J_1^2 vierfach. Dieser Kegelschnitt entspricht ihr in der speciellen quadratischen Verwandtschaft, in welcher einem Punkte Ω der bezüglich J_1^2 und d_1^2 conjugirte Pol θ coordinirt erscheint; sie ist ferner seine Nullcurve in jenem Nullsystem zweiten Grades, das $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ zum Hauptdreieck und $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4\varphi\eta') = k$ zum charakteristischen Doppelverhältnisswerth

hat.[1] Dieser Werth ändert sich nicht, wenn $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ in eines der drei andern Vierecke, welche noch $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{H}_1^2)\ldots(\mathfrak{P}_2\mathfrak{H}_1^2)$ tangiren, übergeht, ferner auch dann nicht, wenn $(4, 114)_{32}$ auf R^4 gleitend sich ändert. Bezeichnet man die Schnitte von $\overline{\alpha_1\beta_1}$ mit den Seiten von $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ der Reihe nach mit φ'', φ', φ und jene von $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}$ mit den Seitenflächen von $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ mit Ω_3, Ω_2, Ω_1, Ω, so ist $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4\varphi\eta') = (\varphi''\varphi'\varphi\Omega) = (\Omega_3\Omega_2\Omega_1\Omega) = k$ — eine Constante;

Jede der 32 auf der Linienfläche achter Ordnung, L_1^8, befindlichen Configurationslinien g'' der ersten Zeile schneidet das Poltetraeder für jede Stellung von $(4, 114)_{32}$ in 4 Punkten desselben unveränderlichen Doppelverhältnisswerthes.

Die 192 Configurationslinien g'' erzeugen beim Fortgleiten der Configuration $(4, 114)_{32}$ auf R^4 in Gruppen von 32 sechs Flächen achten Grades. Jede hat 4 der 24 Involutionskegel $(\mathfrak{P}\mathfrak{H})$ zu doppelt umschriebenen Developpablen und besitzt ausser R^4 selbst in jeder Seitenfläche des Poltetraeders eine unicursale Doppelcurve vierter Ordnung (sechster Classe) mit Doppelinflexionspunkten in den Ecken von $(\mathfrak{P})$. Ihre Erzeugenden gruppiren sich zu R^4 eingeschriebenen Vierecken und schneiden die Seitenflächen des Poltetraeders $(\mathfrak{P})$ in vier Punkten von constantem Doppelverhältnisswerth.“

27. Die Configurationsebenen IV sind in Schaaren von je 32 Tangentialebenen jener 12 Developpablen vierter Classe, welche je 2 Voss'schen Flächen umschrieben sind, die nicht dieselben Systemtetraeder hyperboloidisch auf einander beziehen.

---

[1] Siehe: „Über ein Nullsystem zweiten Grades.“ Sitzb. d. k. Akad. d. Wissensch. in Wien. 83. Bd. II. Abth. pag. 385; ferner: „Über die eine rationale Plancurve vierter Ordnung vierfach berührenden Kegelschnitte, etc.“ Ebend. p. 829.

Die Ebenen beider Schaaren der Gruppe IV

in den Zeilen:	der Colonne:											
1, 4, 5, 8	*a*	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*	*i*	*k*	*l*	*m*
2, 3, 6, 7	*b*	*a*	*d*	*c*	*f*	*e*	*h*	*g*	*k*	*i*	*m*	*l*
10, 11, 14, 15	*c*	*d*	*a*	*b*	*g*	*h*	*e*	*f*	*l*	*m*	*i*	*k*
9, 12, 13. 16	*d*	*c*	*b*	*a*	*h*	*g*	*f*	*e*	*m*	*l*	*k*	*i*
berühren die Developpable	$\mathfrak{O}_1^1\mathfrak{O}_{11}^1$	$\mathfrak{O}_1^1\mathfrak{O}_3^1$	$\mathfrak{O}_1^1\mathfrak{O}_3^1$	$\mathfrak{O}_1^1\mathfrak{O}_{11}^1$	$\mathfrak{O}_1^1\mathfrak{O}_2^1$	$\mathfrak{O}_1^1\mathfrak{O}_{11}^1$	$\mathfrak{O}_1^1\mathfrak{O}_2^1$	$\mathfrak{O}_1^1\mathfrak{O}_{11}^1$	$\mathfrak{O}_2^1\mathfrak{O}_{11}^1$	$\mathfrak{O}_{11}^1\mathfrak{O}_3^1$	$\mathfrak{O}_2^1\mathfrak{O}_3^1$	$\mathfrak{O}_{11}^1\mathfrak{O}_{11}^1$

Die 32 Tangentialebenen einer Developpablen lassen sich auf 4 Arten zu den 8 Seitenflächen eines Octaeders zusammenfassen, das die Curve in allen 32 Configurationspunkten schneidet. In jeder $(4, 114)_{32}$ gibt es $4.12 = 48$ Octaeder dieser Art.

Nimmt man $\mathfrak{A}_1 B_1 \mathfrak{C}_1 D_2$ als erste Seitenfläche, so ergeben sich 4 weitere aus ihr durch Projection aus $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ Es sind dies: $A_1\mathfrak{B}_1 C_1 \mathfrak{D}_2$, $A_2\mathfrak{B}_2 C_2 \mathfrak{D}_1$, $A_3\mathfrak{B}_3 C_3 \mathfrak{D}_4$, $A_4\mathfrak{B}_4 C_4 \mathfrak{D}_3$; aus denen durch dasselbe Verfahren die 3 letzten: $\mathfrak{A}_2 B_2 \mathfrak{C}_2 D_1$, $\mathfrak{A}_3 B_3 \mathfrak{C}_2 D_4$, $\mathfrak{A}_4 B_4 \mathfrak{C}_4 D_3$ gewonnen werden können. Für dieses und alle anderen Octaeder ist $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ das Diagonaltetraeder. Diese Eigenschaft des Octaeders lehrt in Verbindung mit dem Art. 15, dass alle in seinen.

Seitenflächen befindlichen 16 Configurationslinien g'', wie: $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{C}_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{C}_2}\ldots$, $\overline{A_1C_1}$, $\overline{A_2C_2}\ldots$, $\overline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}_2}\ldots\ldots$, derselben Fläche $\mathfrak{h}^2$ angehören, dass somit diese ihm eingeschrieben ist. Ändert sich $(4, 114)_{32}$, so durcheilt $\mathfrak{h}^2$ nach einander das ganze Büschel.

„Eine beliebige durch R^4 gelegte Fläche zweiter Ordnung hat mit irgend einer von den 12 festen Developpablen $\Gamma(\mathfrak{H}_m^2\mathfrak{H}_n^2)$ 8 Tangentialebenen gemein, welche R^4 in den 32 Punkten einer Configuration $(4, 114)_{32}$ schneiden und sich zu Seitenflächen eines Octaeders zusammenfügen, das $(\mathfrak{P})$ zum Diagonaltetraeder hat."

28. Eine Fläche zweiter Ordnung, λ_1^2, welche durch 2 Kantenpaare: $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_3}$, $\overline{\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4}$, $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_4}$, $\overline{\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3}$ von $(\mathfrak{P})$ und durch einen Punkt $\mathfrak{A}_1$ von R^4 gelegt ist, enthält jedenfalls auch $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{A}_4$; denn $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}$ und $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4}$ sind Transversalen des ersten Kantenpaares, $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4}$, $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3}$ des zweiten. Aus gleicher Ursache ordnen sich auch die 4 andern Schnitte zu Ecken eines Systemtetraeders (B). Die Leitschaar von λ^2 besteht aus $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3}$, $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4}$, $\overline{B_1B_3}$, $\overline{B_2B_4}$; die Regelschaar aus $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4}$, $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3}$, $\overline{B_1B_4}$, $\overline{B_2B_3}$. Punkte je einer Ebene sind demnach: $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2B_1B_4$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3B_2B_3$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4B_1B_4$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4B_2B_3$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4B_1B_3$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4B_2B_4$, $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3B_1B_3$ und $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3B_2B_4$. Hieraus ist weiter klar, dass zu der Leitschaar $\overline{\mathfrak{A}_1B_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_2B_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_3B_3}$, $\overline{\mathfrak{A}_4B_4}$ die Linien: $\overline{\mathfrak{A}_1B_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_2B_1}$, $\overline{\mathfrak{A}_3B_4}$, $\overline{\mathfrak{A}_4B_3}$ die Regelschaar bilden. Beide Schaaren beziehen dieselben 2 Systemtetraeder hyperboloidisch aufeinander. Sie gehören einer Vossschen Fläche $\mathfrak{H}_1^2$ an, und also $(\mathfrak{A})$ und (B) einer Configuration $(4, 114)_{32}$.

In gleicher Weise würde man finden, dass die 8 Ecken von irgend 2 andern Systemtetraedern der Configuration, die nicht in demselben Quadrupel enthalten sind, sich mit 2 Gegenkantenpaaren des Poltetraeders auf einer Fläche zweiter Ordnung befinden und folglich eine Gruppe associrter Punkte vorstellen.

Flächenbüschel (λ^2) gibt es drei: (λ_1^2), (λ_2^2), (λ_3^2). In jedem sind einer Configuration 4 Elemente adjungirt, correspondirend den 4 Paaren: $(\mathfrak{A})(B)$, $(A)(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})(D)$, $(C)(\mathfrak{D})$. Ein Tetraeder $(\mathfrak{A})$ fixirt in jedem Büschel eine Fläche, im Ganzen 3, entsprechend den Gruppen: $(\mathfrak{A})(B)$, $(\mathfrak{A})(C)$, $(\mathfrak{A})(D)$.

III.

Nach dem Vorstehenden fixirt (λ_1^2) auf R^4 jene involutorische Anordnung zwischen den Systemtetraedern, welche die Regelschaaren $(\mathfrak{A}_1 B_1), (\mathfrak{A}_1 B_2)$ von $\mathfrak{H}_1^2$ und $(\mathfrak{A}_1 B_3), (\mathfrak{A}_1 B_4)$ von $\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}^2$ induciren. Die Punkte $\mathfrak{S}_1', \mathfrak{S}_2', \mathfrak{S}_3', \mathfrak{S}_4'$, in welchen die 4 Tangenten $\overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_1'}, \overline{\mathfrak{S}_2'\mathfrak{S}_2'}, \overline{\mathfrak{S}_3'\mathfrak{S}_3'}, \overline{\mathfrak{S}_4'\mathfrak{S}_4'}$, die in $(\mathfrak{A}_1 B_1)$ vorkommen, R^4 tangiren, sind desshalb auch Berührungspunkte der Curve mit einer Fläche des Büschels (λ_1^2) und Ecken eines Systemtetraeders, das man sich aus der Vereinigung der Ecken zweier Systemtetraeder einer Configuration entstanden denken kann. Für dasselbe ist $\mathfrak{S}_1' \equiv \mathfrak{A}_1 \equiv B_1$ $\mathfrak{S}_2' \equiv \mathfrak{A}_2 \equiv B_2, \mathfrak{S}_3' \equiv \mathfrak{A}_3 \equiv B_3$, und $\mathfrak{S}_4' \equiv \mathfrak{A}_4 \equiv B_4$. Das Kantenpaar $\overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_2'}, \overline{\mathfrak{S}_3'\mathfrak{S}_4'}$ entsteht aus der Coincidenz von $\overline{\mathfrak{A}_1 B_2}$ mit $\overline{\mathfrak{A}_2 B_1}$, beziehungsweise von $\overline{\mathfrak{A}_3 B_4}$ mit $\overline{\mathfrak{A}_4 B_3}$, gehört sonach zur Leitschaar $(\mathfrak{A}_1 B_2)$ von $\mathfrak{H}_1^2$. Es erhellt hieraus, dass $(\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_2')$, $(\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_2'\mathfrak{S}_2')$, $(\mathfrak{S}_3'\mathfrak{S}_3'\mathfrak{S}_4')$ und $(\mathfrak{S}_3'\mathfrak{S}_4'\mathfrak{S}_4')$ die Schmiegungsebenen von R^4 in $\mathfrak{S}_1', \mathfrak{S}_2', \mathfrak{S}_3', \mathfrak{S}_4'$ sind, dass folglich sowohl $\mathfrak{S}_1'$ und $\mathfrak{S}_2'$ als auch $\mathfrak{S}_3'$ und $\mathfrak{S}_4'$ in der Wechselbeziehung stehen, dass der eine Punkt in der Schmiegungsebene des andern liegt.

Ein gleichartiges Tetraeder constituiren die Berührungspunkte S_1', S_2', S_3', S_4' der Tangenten aus der Schaar $(\mathfrak{A}_1 \overline{B}_2)$, und zwar ein zu $(\mathfrak{S}')$ desmisch gelegenes, ferner 2 andere ebenso zusammenhängende $\mathfrak{T}_1'\mathfrak{T}_2'\mathfrak{T}_3'\mathfrak{T}_4'$, $T_1'T_2'T_3'T_4'$ die Schaaren $(\overline{\mathfrak{A}_1 B_3})$ und $(\overline{\mathfrak{A}_1 B_4})$. Alle 4 Tetraeder formiren nach Art. 12 ein Quadrupel Q', das wir als singulär bezeichnen, weil es zu sich selbst desmisch liegt und also eine specielle Form der Configuration $(4, 114)_{33}$, eine Configuratien $(4, 30)_{16}$, repräsentirt. Zwei ebenso gestaltete Configurationen Q'' und Q''' werden von Flächenpaaren $\mathfrak{H}_2^2\mathfrak{H}_{\mathrm{II}}^2$ und $\mathfrak{H}_3^2\mathfrak{H}_{\mathrm{III}}^2$ veranlasst.

Auf einer Raumcurve vierter Ordnung, erster Species, kommen stets 24 Paare von Punkten vor, welche in der Beziehung stehen, dass der eine in der Schmiegungsebene des andern liegt.[1]

Jedes Paar wird von einem zweiten zu einem Systemtetraeder ergänzt. Die 12 Tetraeder zerfallen

---

[1] Herr Harnack findet die Parameter dieser Punkte und jene der 16 Wendeberührungspunkte als die 64 Lösungen einer Gleichung. a. a. O. pag. 65.

in 3 singuläre Quadrupel Q', Q'', Q''' — Configurationen mit dem Symbol $(4, 30)_{16}$.

Die Curve wird in den 4 Ecken eines Tetraeders von einer Fläche zweiter Ordnung berührt, welche 2 Kantenpaare des Poltetraeders zu Erzeugenden hat und besitzt in ihnen 4 Erzeugende einer Voss'schen Regelschaar zu Tangenten. Für ein Quadrupel bilden die erwähnten Flächen ein Büschel (mit den 4 Kanten als Basis) und liegen die 4.4 Tangenten auf einem Voss'schen Flächenpaar.

Die folgenden Linien gehören zur Regelschaar:			
$(\overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_1'}), (\overline{\mathfrak{T}_1'\mathfrak{T}_2'})$ $(\overline{S_1'S_2'}), (\overline{T_1'T_4'})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1''T_1''})$ $(\overline{S_1''\mathfrak{T}_2''})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1'''T_1'''})$ $(\overline{S_1'''\mathfrak{T}_2'''})$	$(\overline{W_1W_2'})$ $(\overline{W_1''W_4'''})$
$(\overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_3'}), (\overline{\mathfrak{T}_1'\mathfrak{T}_1'})$ $(\overline{T_1'T_4'}), (\overline{S_1'S_4'})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1''T_3''})$ $(\overline{S_1''\mathfrak{T}_4''})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1'''T_3'''})$ $(\overline{S_1'''\mathfrak{T}_4'''})$	$(\overline{W_1W_4'})$ $(\overline{W_1''W_2'''})$
$(\overline{\mathfrak{S}_1'T_1'})$ $(\overline{S_1'\mathfrak{T}_3'})$	$(\overline{\mathfrak{T}_1''\mathfrak{T}_2''}), (\overline{\mathfrak{S}_1''\mathfrak{S}_1''})$ $(\overline{T_1''T_4''}), (\overline{S_1''S_3''})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1'''\mathfrak{T}_1'''})$ $(\overline{S_1'''T_3'''})$	$(\overline{W_1W_3''})$ $(\overline{W_1'W_4'''})$
$(\overline{\mathfrak{S}_1'T_2'})$ $(\overline{S_1'\mathfrak{T}_4'})$	$(\overline{\mathfrak{T}_1''\mathfrak{T}_1''}), (\overline{\mathfrak{S}_1''\mathfrak{S}_2''})$ $(\overline{T_1''T_3''}), (\overline{S_1''S_4''})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1'''\mathfrak{T}_2'''})$ $(\overline{S_1'''T_4'''})$	$(\overline{W_1W_4''})$ $(\overline{W_1'W_3'''})$
$(\overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{T}_3'})$ $(\overline{S_1'T_2'})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1''\mathfrak{T}_2''})$ $(\overline{S_1''T_3''})$	$(\overline{\mathfrak{T}_1'''\mathfrak{T}_2'''}), (\overline{\mathfrak{S}_1'''\mathfrak{S}_1'''})$ $(\overline{T_1'''T_3'''}), (\overline{S_1'''S_4'''})$	$(\overline{W_1W_4'''})$ $(\overline{W_1'W_4''})$
$(\overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{T}_4'})$ $(\overline{S_1'T_1'})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1''\mathfrak{T}_1''})$ $(\overline{S_1''T_4''})$	$(\overline{\mathfrak{T}_1'''\mathfrak{T}_1'''}), (\overline{\mathfrak{S}_1'''\mathfrak{S}_2'''})$ $(\overline{T_1'''T_4'''}), (\overline{S_1'''S_2'''})$	$(\overline{W_1W_3'''})$ $(\overline{W_1'W_3''})$
Q'	Q''	Q'''	W

30. Ein anderes singuläres Quadrupel stellen die 16 in den Seitenflächen: $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$, $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_1)$, $(\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)$, $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3)$ des Poltetraeders befindlichen Wendeberührungspunkte: $W_1W_2W_3W_4$, $W_1'W_2'W_3'W_4'$, $W_1''W_2''W_3''W_4''$, $W_1'''W_2'''W_3'''W_4'''$ vor. Ihr Zusammenhang mit den Configurationen Q', Q'', Q''' wird — wie man aus den Art. 19 und 20 entnehmen kann — durch die Voss'schen Flächen hergestellt. Ihn zeigt die nachstehende Tabelle, in der wie in Art. 26 zur Abkürzung allgemein

$(\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_n)$ für $\mathfrak{X}_1\mathfrak{Y}_n = 1, 2, 3, 4$, $\mathfrak{X}_2\mathfrak{Y}_n = 2, 1, 4, 3$, $\mathfrak{X}_3\mathfrak{Y}_n = 3, 4, 1, 2$, $\mathfrak{X}_4\mathfrak{Y}_n = 4, 3, 2, 1$ geschrieben ist.

und die nachstehenden zur Leitschaar				der Fläche
$(\overline{S_1'S_1'}), (\overline{T_1'T_3'})$ $(\overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_2'}), (\overline{\mathfrak{T}_1'\mathfrak{T}_4'})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1'T_2''})$ $(\overline{S_1''\mathfrak{T}_1''})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1'''T_2'''})$ $(\overline{S_1'''\mathfrak{T}_1'''})$	$(\overline{W_1W_1'})$ $(\overline{W_1'W_3'''})$	$\mathfrak{H}_1^1$
$(\overline{S_1'S_3'}), (\overline{T_1'T_1'})$ $(\overline{\mathfrak{T}_1'\mathfrak{T}_2'}), (\overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_4'})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1''T_4''})$ $(\overline{S_1''\mathfrak{T}_3''})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1'''T_4'''})$ $(\overline{S_1'''\mathfrak{T}_3'''})$	$(\overline{W_1W_3'})$ $(\overline{W_1''W_1'''})$	$\mathfrak{H}_1^2$
$(\overline{\mathfrak{S}_1'T_3'})$ $(\overline{S_1'\mathfrak{T}_1'})$	$(\overline{S_1'S_1''}), (\overline{T_1''T_2''})$ $(\overline{\mathfrak{S}_1''\mathfrak{S}_3''}), (\overline{\mathfrak{T}_1''\mathfrak{T}_4''})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1'''\mathfrak{T}_3'''})$ $(\overline{S_1'''T_1'''})$	$(\overline{W_1W_1''})$ $(\overline{W_1'W_2'''})$	$\mathfrak{H}_1^3$
$(\overline{\mathfrak{S}_1'T_4'})$ $(\overline{S_1'\mathfrak{T}_2'})$	$(\overline{S_1'S_2''}), (\overline{T_1''T_1''})$ $(\overline{\mathfrak{S}_1''\mathfrak{S}_4''}), (\overline{\mathfrak{T}_1''\mathfrak{T}_3''})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1'''\mathfrak{T}_4'''})$ $(\overline{S_1'''T_2'''})$	$(\overline{W_1W_2''})$ $(\overline{W_1'W_1'''})$	$\mathfrak{H}_1^4$
$(\overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{T}_2'})$ $(\overline{S_1'T_3'})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1''\mathfrak{T}_3''})$ $(\overline{S_1''T_2''})$	$(\overline{S_1'''S_1''}), (\overline{T_1''T_2'''})$ $(\overline{\mathfrak{S}_1'''\mathfrak{S}_4''}), (\overline{\mathfrak{T}_1''\mathfrak{T}_3'''})$	$(\overline{W_1W_1''})$ $(\overline{W_1W_1''})$	$\mathfrak{H}_2^1$
$(\overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{T}_1'})$ $(\overline{S_1'T_4'})$	$(\overline{\mathfrak{S}_1''\mathfrak{T}_4''})$ $(\overline{S_1''T_1''})$	$(\overline{S_1'''S_2''}), (\overline{T_1''T_1''})$ $(\overline{\mathfrak{S}_1'''\mathfrak{S}_3''}), (\overline{\mathfrak{T}_1'''\mathfrak{T}_4'''})$	$(\overline{W_1W_2''})$ $(\overline{W_1'W_2''})$	$\mathfrak{H}_2^2$
Q'	Q''	Q'''	W	

31. Der Tabelle lässt sich das Folgende ohne Schwierigkeit entnehmen:

a) Es gibt 80 Ebenen, welche wie $\mathfrak{T}_1'\mathfrak{T}_2'\mathfrak{T}_4'$ oder $\mathfrak{S}_1'\mathfrak{T}_2'\mathfrak{T}_3'$ die Curve R^4 in einem der 16 Punkte von Q' tangiren und in 2 weiteren schneiden. Für Q', Q'' und Q''' existiren 240 solche Ebenen a.

b) Es treten in Q' 24 Ebenen b auf, welche durch eine Kante von $(\mathfrak{P})$ gehen und je 2 Configurationspunkte aus 2 desmisch liegenden Tetraedern tragen; so $\mathfrak{T}_1'\mathfrak{T}_3'T_1'T_3'$, $\mathfrak{T}_2'\mathfrak{T}_4'T_1'T_3'$ etc; — für Q', Q'' und Q''' ist ihre Gesammtzahl $3.42 = 72$.

c) 64 Ebenen c haben die Eigenschaft, Q' in 4 Punkten von 4, zu 2 desmisch gelegenen Tetraedern zu treffen und durch eine Ecke von $(\mathfrak{P})$ zu laufen; so: $\mathfrak{S}_1'T_1'S_1'\mathfrak{T}_1'$, $\mathfrak{S}_1'T_1'S_2'\mathfrak{T}_2'$ u. s. f. Ihre Anzahl ist $3.64 = 192$. Sie gruppiren sich zu 4 in $3.16 = 48$ Tetraden, d. h. Ebenen, welche durch eine Ecke des Poltetraeders laufen und 2 Voss'sche Flächen, die kein Paar bilden, tangiren. Für $\mathfrak{P}_1$ und $(\mathfrak{H}_2^2\mathfrak{H}_3^2)$ ist $\mathfrak{S}_1'T_3'S_1'\mathfrak{T}_3'$, $\mathfrak{S}_2'T_4'S_2'\mathfrak{T}_4'$, $\mathfrak{S}_3'T_1'S_3'\mathfrak{T}_1'$, $\mathfrak{S}_4'T_2'S_4'\mathfrak{T}_2'$ eine solche Gruppe. Sie enthält alle Punkte der Configuration Q'. So sind zu Q' die 4 Developpablen $(\mathfrak{H}_m^2\mathfrak{H}_n^2)$, welche den Indices $m = 2$, II, — $n = 3$, III entsprechen, adjungirt; zu Q'' jene für $m = 3$, III, — $n = 1$, I; und zu Q''' jene mit $m = 1$, I, — $n = 2$, II. Allgemein:

„Die 4 Tangentialebenen aus einer Ecke des Poltetraeders an eine der 12 Developpablen $(\mathfrak{H}_m^2\mathfrak{H}_n^2)$ schneiden die Curve in den 16 Punkten eines der 3 singulären Quadrupel Q."

d) Anders ordnen sich die 32 Ebenen d, welche je 2 Ecken aus 2 nicht in desmischer Lage befindlichen Tetraedern von Q' enthalten. Sie bilden 4 Octaeder, von denen jedes 3 Voss'sche Flächen tangirt. So berühren: $\mathfrak{T}_1'\mathfrak{T}_3'\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_2'$, $\mathfrak{T}_1'\mathfrak{T}_2'\mathfrak{S}_3'\mathfrak{S}_4'$, $\mathfrak{T}_2'\mathfrak{T}_4'\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_2'$, $\mathfrak{T}_2'\mathfrak{T}_4'\mathfrak{S}_3'\mathfrak{S}_4'$, $T_1'T_3'S_1'S_2'$, $T_1'T_3'S_3'S_4'$, $T_2'T_4'S_1'S_2'$, $T_2'T_4'S_3'S_4'$ $\mathfrak{H}_1^2$, $\mathfrak{H}_3^2$ und $\mathfrak{H}_{III}^2$, und je 2 haben für eine Ecke von $(\mathfrak{P})$ und die Gegenfläche collinear-harmonische Lage zu einander. Für Q', Q'' und Q''' gibt es $3.4 = 12$ solche octaedrische Configurationen und $3.32 = 96$ Ebenen d:

„Die gemeinschaftlichen Tangentialebenen von 3 Voss'schen Flächen, von denen 2 ein Paar bilden, sind Seitenflächen eines Octaeders, für

welches ($\mathfrak{P}$) das Diagonaltetraeder ist und das von der Curve R^4 zweimal in 16 Punkten eines der 3 singulären Quadrupel Q geschnitten wird."

e) In dem Quadrupel W kommen ausser den 4 Seitenflächen $\mathfrak{p}$ von ($\mathfrak{P}$) 112 Ebenen vor, welche je 4 Punkte tragen, und zwar 48 Ebenen e', welche wie $W_1 W_3 W_2' W_3'$ je 2 Configurationspunkte aus 2 Poltetraederebenen enthalten, und 64 Ebenen e'', für welche die Punkte wie in $W_1 W_2' W_1'' W_3'''$ einzeln den 4 $\mathfrak{p}$ angehören. Die letzteren Ebenen gruppiren sich ebenfalls zu Octaedern, von denen jedes die Curve in den 16 Wendeberührungspunkten zweimal trifft, ($\mathfrak{P}$) zum Diagonaltetraeder hat und 3 Voss'schen Flächen, von denen keine 2 ein Paar vorstellen, umschrieben ist. Ihre Anzahl ist 8; eines wird formirt von den Ebenen: $W_1 W_2' W_2'' W_4'''$, $W_1 W_1' W_4'' W_1'''$, $W_2 W_2' W_3'' W_2'''$, $W_3 W_4' W_2'' W_3'''$, $W_4 W_3' W_1'' W_3'''$, $W_2 W_1' W_1'' W_3'''$, $W_3 W_2' W_4'' W_2'''$ und $W_4 W_4' W_3 W_1'''$, die sämmtlich $\mathfrak{H}_1^2$, $\mathfrak{H}_{11}^2$ und $\mathfrak{H}_3^2$ tangiren.

f) Zu diesen eigentlichen Configurationsebenen von W treten noch $4.6.4 = 96$ Ebenen, welche R^4 in einem W berühren und in zweien schneiden

32. Ferner existiren:

g) $8.12.2 = 192$ Ebenen g, welche wie $\mathfrak{T}_1' \mathfrak{T}_3' \mathfrak{S}_1''$ T_2'' 2 Punkte eines Tetraeders aus Q' und 2 Punkte von 2 Tetraedern aus Q'' enthalten; ebenso umgekehrt. Ihre Gesammtzahl ist $2.3.192 = 1152$.

h) $2.8.16 = 256$ Ebenen h, die R^4 wie $\mathfrak{S}_1' \mathfrak{T}_3' \mathfrak{S}_1'' \mathfrak{T}_3''$ in 2 Punkten zweier Tetraeder aus Q' und 2 solcher aus Q'' treffen.

i) $4.8.8 = 256$ Ebenen i, welche sich von den (h) nur dadurch unterscheiden, dass jede eine Poltetraederecke enthält. Ebenen dieser Art sind: $\mathfrak{S}_1' S_1' \mathfrak{S}_1'' S_1''$, $\mathfrak{S}_1' S_1' \mathfrak{S}_2'' S_2'' \ldots$. Sowohl die Anzahl der (h) als auch der (i) ist Q', Q'' und Q''' gleich $3.256 = 768$.

k) $2.8.8 = 128$ Ebenen, die wie $\mathfrak{S}_1' \mathfrak{S}_1' \mathfrak{S}_1'' T_2''$ die Curve in einem Punkt der Configuration Q' tangiren und in 2 Ecken zweier Tetraeder von Q'' schneiden. Ihre Anzahl ist $6.128 = 768$.

l) $2.2.6.8 + 2.8.8.4 = 704$ Ebenen, welche wie $\mathfrak{T}_1' \mathfrak{T}_3' W_1 W_1'$ oder auch wie $\mathfrak{S}_1' T_1' W_1 W_1''$ zwei Punkte aus W und zwei aus

Q' enthalten. Für Q', Q'', Q''' und W gibt es $3.704 = 2112$ Ebenen l.

m) Für W und Q' $4.6.8 = 192$ Ebenen m, welche von den (l) nur dadurch verschieden sind, dass jede durch eine Ecke von ($\mathfrak{P}$) läuft. Für Q', Q'' und Q''' und W ist ihre Anzahl 576.

n) $4.4.8 = 128$ Ebenen n', welche R^4 in einem Punkte von Q' tangiren und in 2 von W schneiden, ferner ebenso viele Ebenen n'', die umgekehrt R^4 in einem W-Punkte berühren und in 2 Q'-Punkten treffen. Im Ganzen treten für Q', Q'', Q''' und W $3.128 = 384$ Ebenen n' und 384 Ebenen n'' auf.

33. In den $1152 + 2.768 = 2688$ Ebenen g, h, i und den 768 Ebenen k haben wir alle Ebenen gewonnen,[1] welche durch 2 Punkte irgend eines der 3 singulären Quadrupel Q und durch einen Punkt eines zweiten solchen festgelegt werden. Für jede liegt der vierte Schnitt mit R^4 nicht in dem dritten, sondern im zweiten Quadrupel. Eine jede jener $16.16.16 = 4096$ Ebenen (O), welche je 3 Punkte enthalten, die einzeln in den 3 Configurationen Q', Q'', Q''' liegen, begegnet somit der Curve zum vierten Male an einer von diesen $3.16 = 48$ Punkten verschiedenen Stelle; ihr vierter Schnitt ist — wie im Folgenden nachgewiesen wird — allemal ein Wendeberührungspunkt.

Aus der letzten Tabelle ergeben sich u. A. als Punkte je einer Ebene auch die folgenden: $\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_1''\mathfrak{S}_1''T_2''$, $\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_2'\mathfrak{S}_1''T_1''$, $\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_3'\mathfrak{S}_1''T_4''$, $\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_4'\mathfrak{S}_1''T_3''$, $\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_1''\mathfrak{S}_1''T_3'$, $\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_1''\mathfrak{S}_2''T_4'$ etc., mithin als Sekanten, welche $\overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_1''}$ treffen, die Geraden: $\overline{\mathfrak{S}_1'T_2''}$, $\overline{\mathfrak{S}_2'T_1''}$, $\overline{\mathfrak{S}_3'T_4''}$, $\overline{\mathfrak{S}_4'T_3''}$, $\overline{\mathfrak{S}_1''T_2'}$, $\overline{\mathfrak{S}_2''T_1'}$ u. s. w. Derart findet man, dass die 16 Linien:

$$\overline{\mathfrak{S}_1'T_2''}, \overline{\mathfrak{S}_2'T_1''}, \overline{\mathfrak{S}_3'T_4''}, \overline{\mathfrak{S}_4'T_3''} \mid \overline{\mathfrak{S}_1''T_2'}, \overline{\mathfrak{S}_2''T_4'}, \overline{\mathfrak{S}_3''T_1'}, \overline{\mathfrak{S}_4''T_2'}$$
$$\overline{\mathfrak{T}_1'\mathfrak{T}_1''}, \overline{\mathfrak{T}_2'\mathfrak{T}_2''}, \overline{\mathfrak{T}_3'\mathfrak{T}_3''}, \overline{\mathfrak{T}_4'\mathfrak{T}_4''} \mid \overline{S_1'S_1''}, \overline{S_2'S_2''}, \overline{S_3'S_3''}, \overline{S_4'S_4''}$$

---

[1] Die Punkte von Q' lassen sich durch $\frac{16.15}{2} = 120$ Linien verbinden und jede Linie legt mit einem Punkte von Q'' eine Ebene fort. Die Zahl dieser Ebenen ist $120.16 = 1920$. Von denselben schneiden 128 (Ebenen k) die R^4 nicht weiter; jede von den andern Ebenen trifft hingegen R^4 noch einmal in einem Punkte von Q'' und ist desshalb doppelt zu zählen. Ihre Anzahl ist demnach für Q', Q'' gleich $\frac{1920-128}{2} = 896$, für Q', Q'', Q''' gleich $3.896 = 2688$.

als Leitlinien (E), und die 16 Geraden:

$$\overline{S_1'\mathfrak{T}_2''},\ \overline{S_2'\mathfrak{T}_1''},\ \overline{S_3'\mathfrak{T}_4''},\ \overline{S_4'\mathfrak{T}_3''}\ \mid\ \overline{S_1''\mathfrak{T}_3'},\ \overline{S_2''\mathfrak{T}_4'},\ \overline{S_3''\mathfrak{T}_1'},\ \overline{S_4''\mathfrak{T}_2'}$$
$$\overline{T_1'T_1''},\ \overline{T_2'T_2''},\ \overline{T_3'T_3''},\ \overline{T_4'T_4''}\ \mid\ \overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_1''},\ \overline{\mathfrak{S}_2'\mathfrak{S}_2''},\ \overline{\mathfrak{S}_3'\mathfrak{S}_3''},\ \overline{\mathfrak{S}_4'\mathfrak{S}_4''}$$

als Erzeugende ($\mathfrak{E}$) auf einer und derselben Fläche A^2 verlaufen, und allgemein, dass jede der 16 Regelschaaren, welche 2 der 3 singulären Quadrupel hyperboloidisch auf einander beziehen, mit einer bestimmten zweiten von diesen einer Fläche angehört. Der Unterschied zwischen einer der 3.8 Flächen A^2 und einer Voss'schen Fläche besteht darin, dass die 2 Schaaren der letzteren die hyperboloidische Lage zwischen denselben 2 Systemtetraedern einer Configuration herstellten, die Schaaren einer A^2 hingegen nur dieselben 2 Quadrupel (Configurationen) und in diesen verschiedene Tetraeder auf einander beziehen. Analog den Vierseiten auf einer Voss'schen Fläche gibt es auf jeder Fläche A^2 eine unendliche Reihe von der Curve R^4 eingeschriebenen einfachen Achtseiten, d. h. Achtecken, deren Seiten Erzeugende der 2 Schaaren von A^2 sind. Solche Polygone sind:

$$\mathfrak{S}_1'T_2''T_2'\mathfrak{S}_4''\mathfrak{S}_4'T_3''T_3'\mathfrak{S}_1''\mathfrak{S}_1',\ \mathfrak{S}_2'T_1''T_1'\mathfrak{S}_3''\mathfrak{S}_3'T_4''T_4'\mathfrak{S}_2''\mathfrak{S}_2',$$
$$S_1'\mathfrak{T}_2''\mathfrak{T}_2'S_4''S_4'\mathfrak{T}_3''\mathfrak{T}_3'S_1''S_1',\ S_2'\mathfrak{T}_1''\mathfrak{T}_1'S_3''S_3'\mathfrak{T}_4''\mathfrak{T}_4'S_2''S_2';$$

alle andern auf A^2 gelegenen lassen sich aus diesen durch dasselbe Verfahren, welches wir zum Beweise des Hilfssatzes in Art. 13 verwendet haben, ableiten.

Wählen wir hiebei die projicirenden Regelschaaren (e) und ($\mathfrak{e}$) und also h^2 ganz beliebig, so erhalten wir (nach Art. 14) aus Q' und Q'' die $32+32=64$ Ecken zweier allgemeiner Configurationen C_1 und C_2 von der Art $(4, 114)_{32}$, welche durch A^2 verbunden erscheinen. Projicirt man hingegen Q' vermittels der 2 Schaaren $(\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_1''')$, $(\mathfrak{S}_1'T_2''')$ einer A_1^2, so coincidirt ihr Bild C_1 mit Q''', da zur ersten Schaar (E_1) von A_1^2 die 16 Linien: $(\overline{\mathfrak{S}_1'\mathfrak{S}_1'''})$, $(\overline{\mathfrak{T}_1'T_3'''})$, $(\overline{S_1'\mathfrak{T}_2'''})$, $(\overline{T_1'S_2'''})$, zur zweiten ($\mathfrak{E}_1$) die 16 Linien: $(\overline{S_1'S_1'''})$, $(\overline{T_1'\mathfrak{T}_3'''})$, $(\overline{\mathfrak{S}_1'T_2'''})$, $(\overline{\mathfrak{T}_1'\mathfrak{S}_2'''})$ gehören; es wird C_1 zu einer Configuration $(4, 30)_{16}$, und somit — wie sich direct zeigen lässt — auch C_2 zu einer 16punktigen Configuration. Wir fassen zu dem Zwecke in den aus

$\mathfrak{S}_2' T_1'' T_1' \mathfrak{S}_3'' \mathfrak{S}_3' T_4'' T_4' \mathfrak{S}_2'' \mathfrak{S}_2'$ und $S_1' \mathfrak{T}_2'' \mathfrak{T}_2' S_4'' S_4' \mathfrak{T}_3'' \mathfrak{T}_3' S_1'' S_1'$ abgeleiteten Achtecken

$T_1''' \mathfrak{X}_1 \mathfrak{T}_3''' \mathfrak{Y}_3 T_4''' \mathfrak{X}_4 \mathfrak{T}_2''' \mathfrak{Y}_2 T_1'''$ und $\mathfrak{T}_2''' X_2 T_4''' Y_4 T_3''' X_3 T_1''' Y_4 \mathfrak{T}_2'''$ entsprechende Eckenpaare wie $\mathfrak{T}_2''' \mathfrak{X}_4$ und $\mathfrak{T}_2''' X_2$ ins Auge. Die Seiten $\overline{T_4' T_4''}$ und $\overline{S_1' \mathfrak{T}_2''}$, aus welchen $\overline{\mathfrak{T}_2''' \mathfrak{X}_4}$ und $\overline{\mathfrak{T}_2''' X_2}$ durch Projection vermittelst A_1^2 gewonnen wurden, sind Erzeugende der Schaar $(\mathfrak{E})$ von A^2, daher $\overline{\mathfrak{T}_2''' \mathfrak{X}_4}$, $\overline{\mathfrak{T}_2''' X_2}$ Elemente der zugehörigen Leitschaar (E). Beide haben $\mathfrak{T}_2'''$ gemein und sind desshalb identisch; es ist folglich auch $\mathfrak{X}_4 \equiv X_2$. In diesem Punkte trifft die Leitlinie $\overline{\mathfrak{T}_2'' X_2}$ von A_1^2 die Erzeugende $\overline{T_4''' \mathfrak{X}_4} \equiv \overline{T_4''' X_2}$; beide Linien befinden sich — da $\overline{\mathfrak{T}_2'' T_4''}$ durch $\mathfrak{P}_3$ läuft — ferner mit $\mathfrak{P}_3$ in einer Ebene, und werden durch $\mathfrak{P}_3$ und $(\mathfrak{P}_4 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2)$ harmonisch getrennt, weil $(\mathfrak{P})$ auch ein Poltetraeder von A_1^2 ist. Ihr Schnitt, der Curvenpunkt X_2, gehört somit $(\mathfrak{P}_4 \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2)$ an, d. h. er ist ein Wendeberührungspunkt W''.

Ganz ebenso lässt sich darthun, dass die 30 weiteren Punkte $\mathfrak{X}, X, Y, \mathfrak{Y}$ paarweise mit den anderen 15 Wendeberührungspunkten coincidiren. Eine jede der 16.16 Linien, welche die Punkte von Q' mit jenen von Q'' verbindet, legt als Leitlinie eine Regelschaar fest, die Q'' auf W bezieht, wird demnach von 16 jener Geraden geschnitten, die Configurationspunkte Q'' mit Wendeberührungspunkten verbinden. Es ist somit in der That die Anzahl der Ebenen (O) gleich $16.16.16 = 4096$.

In den vorstehenden 3 Artikeln sind alle Ebenen, zu welchen die 64 Punkte Q', Q'', Q''' und W führen, aufgezählt; wenn die Zahl der eigentlichen Configurationsebenen: $b, c, d, \mathfrak{p}, e', e'', g, h, i, l, m, o$, d. h. jener Ebenen, die je 4 der erwähnten Punkte tragen, mit 4 multiplicirt und um die Zahl der R^4 tangirenden Ebenen: $a, f, k, n' n''$ vermehrt, die Zahl der Seitenflächen eines räumlichen 64-Ecks liefert. Dies ist auch der Fall: Die Anzahl der Configurationsebenen ist 9948, der berührenden Ebenen 1872, der Seitenflächen des 64-Ecks gleich $\frac{64.63.62}{31} = 41664$, und es findet die Gleichung: $4.9948 + 1872 = 41664$ statt. Demnach gilt der Satz:

Jede Ebene, welche durch 3 der 64 singulären Curvenpunkte gelegt ist, schneidet die Curve stets noch in einem vierten derartigen Punkte. Dieser

letztere ist in 9948 Fällen, d. h. für so viele Lagen der Ebene, von den ersten verschieden, in 1872 Fällen mit einem von ihnen identisch.

Vertheilen sich die 3 Punkte einzeln auf 3 der 4 singulären Quadrupel, so gehört der vierte dem vierten Quadrupel an; sind 2 von den Punkten in demselben Quadrupel enthalten, so liegt der vierte mit dem dritten ebenfalls in einem (zweiten) Quadrupel; sind endlich die 3 angenommenen Punkte Elemente eines Quadrupels, so umfasst dieses auch den letzten."

34. Durch einen Wendeberührungspunkt laufen 1 Ebene p, 12 Ebenen e', 16 e'', 264 l, 72 m und 256 Ebenen o, im ganzen 621 Ebenen; durch einen beliebigen der 48 andern singulären Punkte 6 Ebenen b, 16 Ebenen c, 8 d, 96 Ebenen g, 64 h, 64 i, 88 l, 24 m und 256 Ebenen o, in Gesammtheit 622 Ebenen der Configuration.

Die 16 Wendeberührungspunkte repräsentiren eine Configuration $(4, 29)_{16}$, jedes weitere singuläre Quadrupel eine Configuration $(4, 30)_{16}$, und alle drei Quadrupel Q, d. h. alle 24 singulären Punktepaare eine Configuration $(4, 254)_{48}$ von 48 Punkten und 3048 Ebenen: b, c, d, g, h, i. Zählt man jede Seitenfläche des Poltetraeders doppelt, so lässt sich die Gesammtheit der 64 singulären Punkte und 9948 Ebenen als Configuration mit dem Symbol $(4, 622)_{64}$ bezeichnen. In jeder Configurationsebene liegen vier Punkte und durch jeden Punkt laufen 622 der $9948 + 4 = 9952$ Ebenen.

IV.

35. Die Seitenflächen der Systemtetraeder entsprechen den gegenüberliegenden Ecken in einer speciellen räumlichen Correlation dritten Grades, welche durch das Poltetrader als Hauptetraeder vollkommen bestimmt ist. Denn bewegt sich eine Ecke $\mathfrak{A}_1$ von $(\mathfrak{A})$ auf einer beliebigen Geraden g_1 fort, so wird — wie Art. 1 lehrt — A_1 auf der zu g_1 bezüglich $\mathfrak{P}_1$ und $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ harmonisch liegenden Geraden $\mathfrak{g}_1$ eine zu g_1 $(\mathfrak{A}_1)$ perspectivische

Reihe beschreiben. Ebenso sind die Örter von $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$ zu g_1 (A_1) perspectivische Reihen g_2 $(\mathfrak{A}_2)$, g_3 $(\mathfrak{A}_3)$ und g_4 $(\mathfrak{A}_4)$ für die Centren $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4$ und die Collineationsebenen $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_1)$, $(\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2)$ und $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3)$ respective; folglich ist die Enveloppe von $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4)$, als Erzeugniss der π Reihen g_2, g_3, g_4, eine Developpable dritter Classe, D_3. Dreht sich $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4)$ um eine ihrer Geraden g_1', so beschreibt $(A_2A_3A_4)$ ein Büschel, dessen Axe g_1' zu g_1' für $\mathfrak{P}_1$ und $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ harmonisch collinear ist und das mit dem ersten Büschel $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ zum perspectivischen Durchschnitt hat. Gleiche Lage zu g_1' $(A_2A_3A_4)$ haben die Büschel g_2' $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_3)$, g_3' $(\mathfrak{A}_4\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2)$, g_4' $(\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_1)$: sie sind zu ihm perspectiv, schreiben somit für ihren Schnitt $\mathfrak{A}_1$ als Ort eine Raumcurve dritter Ordnung, (R_3) vor. Alle D_3 sind $\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ eingeschrieben, und alle R_3 ihm umschrieben. Dreht sich $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4)$ um einen Punkt, so erzeugt $\mathfrak{A}_1$ eine Fläche dritter Ordnung, auf welcher die Kanten des Poltetraeders $(\mathfrak{P})$ ihrer ganzen Ausdehnung nach liegen. etc.

Gleitet $\mathfrak{A}_1$ an dem Strahl $L = \overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_1}$ fort, so dreht sich $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4)$ um ihren Schnitt T_1 mit $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$. Kommt $\mathfrak{A}_1$ nach A_1, so coincidirt $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4)$ mit $(A_2A_3A_4)$: Zwei Punkten auf einem Strahl aus $\mathfrak{P}_1$, die harmonisch getrennt werden durch $\mathfrak{P}_1$ und $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$, entsprechen 2 Ebenen durch T_1, welche mit $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ und $(T_1\mathfrak{P}_1)$ ein harmonisches Büschel bilden.

36. Der Raumcurve R^4 entspricht eine Developpable 12. Classe, T_{12}, die sprachliche Enveloppe, und den Flächen H^2 des Büschels mit der Basiscurve R^4 eine Schaar von besonderen Flächen sechster Classe, H_6, für welche T_{12} die gemeinsam umschriebene Developpable ist.

Weil $(\mathfrak{P})$ für alle H^2 das Poltetraeder ist, so ist jede H_6 tetraedral-symmetrisch. Sie besitzt 2 Schaaren von umschriebenen D_3, welche $(\mathfrak{P})$ eingeschrieben sind, hat jede Seitenfläche dieses Tetraeders zur vierfachen Ebene und wird von ihr in einer Doppelcurve D_4, vierter Classe und sechster Ordnung geschnitten. Diese Curve entspricht jenem Kegel k_1^2, den man aus $\mathfrak{P}_1$ der Fläche H^2, die H_6 bestimmt, umschreiben kann, in jener Verwandtschaft, in welcher einem Strahl $\mathfrak{P}_1\overline{\mathfrak{A}_1} = L_1$ der Schnitt T_1 von $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4)$ und $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ zugeordnet erscheint. Dieselbe ist, wie gleich gezeigt wird, quadratisch und erzeugt mit jeder der 3 anderen, die zwischen den Strahlen aus einer anderen Ecke $\mathfrak{P}$

und jenen der jeweiligen Gegenfläche bestehen, die räumliche Correlation dritten Grades: Einem Punkte $\mathfrak{A}_1$ ist nämlich in dieser Correlation jene Ebene coordinirt, welche diejenigen Strahlen von $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ und $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_1)$ festlegen, die in den zwei Verwandtschaften zweiten Grades den Strahlen $\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{P}_2\mathfrak{A}_1$ entsprechen.

Die Strahlen $\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_3$, $\mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_4$ schneiden $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ in den Ecken eines vollständigen Vierecks, a_1, a_2, a_3 und a_4, für welches $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$, $\mathfrak{P}_4$ Diagonalpunkte sind. a_1a_3, a_2a_4 treffen in $\mathfrak{P}_2$ zusammen und schneiden $\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ in Punkten ρ_2, ρ_2' von $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3$, respective $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4$; a_1a_2, a_3a_4 schneiden sich in $\mathfrak{P}_3$ und begegnen der Kante $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4$ in ihren Schnitten ρ_3, ρ_3' mit $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$; endlich liegen die Treffpunkte ρ_4, ρ_4' von a_1a_4, a_2a_3 mit $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ auch auf $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4$, beziehungsweise $\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3$. Da die Relationen: $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\rho_4\rho_4') =$ $= (\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4\rho_2\rho_2') = (\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_2\rho_3\rho_3') = -1$ bestehen, so umhüllt $T_1 \equiv \rho_2'\rho_3'\rho_4'$ stets eine Curve von derselben Classe wie $\rho_2\rho_3$, wenn $l_1 \equiv \mathfrak{P}_1\mathfrak{A}_1$ oder a_1 nach irgend einem Gesetz sich bewegt. Beschreibt l_1 ein ein Strahlbüschel um $\mathfrak{P}_1$, also a_1 eine Gerade g in $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$, so beschreiben ρ_2 und ρ_3 als Projectionen von a_1 aus $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ auf $\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ und $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4$ zwei mit g (a_1) perspectivischen Reihen, in welchen $\mathfrak{P}_2$ und $\mathfrak{P}_3$ dem Schnitte von g mit $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3$ entsprechen. Die Enveloppe von $\rho_2\rho_3$ ist ein $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ eingeschriebener Kegelschnitt; ebenso jene von T_1. —Reciproc erzeugt l_1 einen dem Trieder $\mathfrak{P}_1(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ umschriebenen Kegel zweiter Ordnung, wenn T_1 um einen Punkt rotiert.

Erzeugt l_1 den Kegel k_1^2, so beschreiben a_1, a_2, a_3, a_4 seinen Schnitt e_1^2 mit $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$; weil dieser Kegelschnitt $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ zum Poldreieck hat. Die 4 Seiten $\rho_2\rho_3$, $\rho_3\rho_2'$, $\rho_2'\rho_3'$, $\rho_3'\rho_2$ umhüllen in Folge dessen dieselbe Curve, und zwar eine Curve vierter Classe, D_4, welche die Seiten von $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ zu Doppelrückkehrtangenten hat und bezüglich desselben trisymmetrisch ist. Sie kann angesehen werden als Erzeugniss von je 2 der 3 projectivischen quadratischen Involutionen, welche die Punktepaare $\rho_i\rho_i'$ auf den Seiten von $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ während der Bewegung von a_1 auf c_1^2 bilden. Gelangt a_1 in einen Schnitt r_2 von $\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ mit c_1^2, so coincidirt mit ihm auch ρ_2 und ρ_3 fällt nach $\mathfrak{P}_4$. Die 6 auf den Seiten von $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$ befindlichen Spitzen r von D_4 liegen somit auch auf c_1^2.

Alle c_1^2 gehören dem Büschel mit den Basispunkten W_1, W_2, W_3, W_4 an, daher alle D_4 einer Schaar. Die 4 Linien G_1, G_2, G_3, G_4

welche den Strahlen aus $\mathfrak{P}_1$, nach den genannten Wendeberührungspunkten in der quadratischen Verwandtschaft zugeordnet sind und zu diesen in derselben Lagenrelation stehen wie T_1, T_2, T_3, T_4 zu a_1, a_2 a_3, a_4, sind die einfachen festen Tangenten der Schaar und als solche Erzeugende von T_{12}, und zwar Cuspidalerzeugende, weil T_{12} tetraedral-symmetrisch ist, insbesondere also $\mathfrak{P}_1$ und $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ zum Pol und zur Polarebene hat.

Ausgezeichnet in der Schaar (D_4) erscheint jene Curve Δ_4^{I}, welche dem R^4 aus $\mathfrak{P}_1$ projicirenden Doppelkegel d_2^{I} coordinirt ist — als Doppelcurve von T_{12}. Ihre Spitzen, respective Berührungspunkte mit den Seiten von $\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4$, nämlich $\varepsilon_2, \varepsilon_2', \varepsilon_3, \varepsilon_3', \varepsilon_4, \varepsilon_4'$ liegen auf dem Schnitt D_2^{I} von $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ mit d_2^{I}. Sie gehören ferner nothwendig auch den 12 Cuspidalerzeugenden von T_{12} an, welche zu 4 in den anderen Seitenflächen von $(\mathfrak{P})$ verlaufen. Ebenso sind die Treffpunkte von G_1, G_2, G_3, G_4 mit $\mathfrak{P}_2\overline{\mathfrak{P}_3}$, $\overline{\mathfrak{P}_3}\mathfrak{P}_4$, $\mathfrak{P}_4\overline{\mathfrak{P}_2}$ Rückkehrpunkte für die 3 weiteren Doppelcurven Δ_4^{II}, Δ_4^{III}, Δ_4^{IV} von T_{12}. Es liegen demnach die 24 Schnittpunkte ε der Poltetraederflächen und der 4 Doppelkegel von R^4 zu 3 auf den 16 Cuspidalerzeugenden von T_{12}, von denen je zwei in einem ε-Punkt zusammentreffen.

37. Die Ebenen von T_{12}, τ, schneiden die Kanten des Poltetraeders in projectivisch auf einander bezogenen quadratischen Punktinvolutionen, so $\mathfrak{P}_4\overline{\mathfrak{P}_1}, \mathfrak{P}_4\overline{\mathfrak{P}_3}, \mathfrak{P}_4\overline{\mathfrak{P}_2}$ . . in $(\rho_1\rho_1'), (\rho_2\rho_2'), (\rho_3\rho_3')$. ; in welchen das gemeinsame Doppelelement $\mathfrak{P}_4$ sich nicht selbst entspricht und die 3 anderen $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ coordinirte Elementenpaare repräsentiren. Die 4 τ, welche aus einem ρ ausgehen, gehören als Seitenflächen zu 2 desmischen Systemtetraedern; für ρ_4 sind es $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_4)$, $(\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4)$, $(A_1A_2A_4)$ und $(A_1A_2A_4)$. Die Schnittlinien T_3, T_4 der ersten und dritten, beziehungsweise der zweiten und vierten Ebene befinden sich in $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ und sind Tangenten von Δ_4^{I}, jene $T_3'''T_4'''$ der ersten nnd vierten, respective zweiten und dritten, liegen in $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3)$ und berühren Δ_4^{IV}. In jedem der Berührungspunkte B_3, B_4 von T_3, T_4 — die auf einem Strahl aus $\mathfrak{P}_4$ liegen — schneiden sich zwei von jenen Erzeugenden E_3 und $\mathfrak{E}_3$, E_4 und $\mathfrak{E}_4$, längs welchen die 4 erwähnten τ die T_{12} berühren. Dieselben Linien begegnen sich auch in den Tangentialpunkten B_3''', B_4''' von T_3''', T_4''', in dem ersten E_3 und $\mathfrak{E}_4$, in dem zweiten

E_4 und $\mathfrak{E}_3$. Sie formiren ein windschiefes 4-Seit, und B_3, B_4 auf Δ_4^{I} sowie B_3''', B_4''' auf Δ_4^{IV} zu einander projectivische Involutionen zweiten Grades. Die Träger Δ_4^{I} und Δ_4^{IV} sind rational und von der Ordnung 6, auch entspricht kein Punkt sich selbst, das Erzeugniss T_{12} ist also von $2.6+2.6 = 24$. Ordnung. — In den Berührungspunkten B_1, B_2 von T_1 und T_2 mit Δ_4^{I}, die B_3, B_4 zu einem Viereck mit den Diagonalpunkten $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3, \mathfrak{P}_4$ ergänzen, treffen paarweise die Berührungserzeugenden E_1, E_2, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ der anderen 4 Seitenflächen von $(A), (\mathfrak{A})$ zusammen. Sie stellen im Verein mit E_3, E_4, $\mathfrak{E}_3$, $\mathfrak{E}_4$ eine 8elementige Gruppe, eine Acht, von besonderer Art vor. Man erkennt sofort, dass jede E von allen $\mathfrak{E}$ geschnitten wird, folglich E_1, E_2, E_3, E_4 die Leit- und $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \mathfrak{E}_3, \mathfrak{E}_4$ die Regelschaar einer Fläche zweiter Ordnung, ε^2, sind. Die 16 Schnittpunkte $(E_m \mathfrak{E}_n)$ liegen zu 4 in den 4 Flächen von $(\mathfrak{P})$, in diesen Vierecke, mit den conlocalen Ecken von $(\mathfrak{P})$ als Diagonalpunkten, formirend. Alle ε^2 haben somit $(\mathfrak{P})$ zum Poltetraeder.

Das Wichtigste über die T_{12} sagt der folgende Satz aus:

„Die von den Seitenflächen der Systemtetraeder eingehüllte Developpable ist von der 12. Classe und 24. Ordnung. Sie ist tedraedral-symmetrisch, hat die Seitenflächen des Poltetraeders der R^4 zu 4fachen Ebenen und besitzt in jeder sowohl 4 Cuspidalerzeugende als auch eine Doppelcurve vierter Classe, sechster Ordnung, welche diese Erzeugenden einfach berührt und 3 Kanten des Poltetraeders zu Doppelrückkehrtangenten hat.“

Ein ebener Schnitt C_{12} von T_{12} ist von der Classe 12 und der Ordnung 24. Inflexionstangenten weist er keine auf, wei solche an keiner der 4 Doppelcurven Δ_4 auftreten und folglich T_{12} keine stationären Ebenen besitzt. Die Erniedrigung der Ordnung von 12.11 auf 24 wird also allein durch ihre Doppeltangenten bewirkt. Die Anzahl derselben ergibt sich hieraus gleich 54. Darunter befinden sich 4 vierfache Rückkehrtangenten, die Schnitte mit den Seitenflächen von $(\mathfrak{P})$; jede zählt 6mal; es bleiben somit 30 eigentliche Doppeltangenten. Die Zahl der Rückkehrpunkte von C_{12} wird durch die erwähnten Singularitäten auf $360—6\cdot 54 = 36$ herabgedrückt. Von diesen liegen 16 auf

den Cuspidalerzeugenden und 20 auf der Rückkehrcurve R_{20} der Developpablen T_{12}. Hieraus erhellt, dass C_{12} ferner ausser den 24 Doppelpunkten auf den vier Δ_4 noch 192 andere besitzt. Das Axensystem von T_{12} ist von der 30. Classe und 66. Ordnung etc.

V.

38. Wir nennen jenen Punkt $\mathfrak{A}_1^0$ von R^4, welcher sich in der Schmiegungsebene σ_1 von $\mathfrak{A}_1$ befindet, den Tangentialpunkt des letzteren. Aus ihm wird R^4 auf eine Ebene als eine Curve C_6^3 projicirt, die das Bild $\mathfrak{A}_1'$ von $\mathfrak{A}_1$ zum Wendepunkt und die Spur σ_1' von σ_1 zur Wendetangente hat. Die harmonische Polare π_1' von $\mathfrak{A}_1'$ trifft C_6^3 in den Berührungspunkten $\mathfrak{A}_2', \mathfrak{A}_3', \mathfrak{A}_4'$ der Tangenten $\mathfrak{a}_2', \mathfrak{a}_3', \mathfrak{a}_4'$ aus $\mathfrak{A}_1'$. Den letzteren correspondiren auf R^4 die Tangenten $\mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3, \mathfrak{a}_4$ in den 3 weiteren in der Ebene $(\mathfrak{A}_1^0\pi_1')$ gelegenen Punkten $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$. Da diese sowie die Tangente $\mathfrak{a}_1$ in $\mathfrak{A}_1$ die Sekante $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1^0}$ schneiden, so gehören sie einer Regelschaar an; und folglich stellen $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ die Ecken eines Systemtetraeders vor. Daraus folgt:

„Der vierte Schnittpunkt einer Seitenfläche eines Systemtetraeders ist stets der Tangentialpunkt der gegenüberliegenden Ecke."

„Die 4 Tangentialpunkte der Ecken eines Systemtetraeders bilden das ihm eingeschriebene Systemtetraeder.

Aus $\mathfrak{A}_1^0$ kann man 9 Schmiegungsebenen σ an R^4 legen. Jede veranlasst eine Ebene α aus $\mathfrak{A}_1^0$, welche R^4 in 3 Ecken $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$ eines $(\mathfrak{A})$ schneidet. (Ausser diesen laufen durch $\mathfrak{A}_1^0$ noch 3 Seitenflächen von $(\mathfrak{A}^0)$: Dies ist ein neuer Beweis dafür, dass T_{12} von der 12. Classe ist.) Der Berührungspunkt jeder σ ist Ecke eines Systemtetraeders $(\mathfrak{A})$, das $(\mathfrak{A}^0)$ vollständig umschrieben ist. Jedem Systemtetraeder lassen sich sonach 9 andere umschreiben. Ihre 36 Ecken liegen auf $4(12+9) = 84$ Arten zu 3 mit je einem Punkte $\mathfrak{A}^0$ in einer Ebene, wie die Abbildung auf eine C_6^3 lehrt.

39. Die Eigenschaften, welche $\mathfrak{A}_1'$ und σ_1' für C_6^3 besitzen, kommen auch $\overline{\mathfrak{A}_1^0\mathfrak{A}_1}$ und $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4)$ bezüglich R^4 zu: Sind P_1, P_2, P_3 3 mit $\mathfrak{A}_1^0$ in einer Ebene E liegende Punkte und P_1', P_2', P_3' die

weiteren Schnitte von R^4 mit $(\mathfrak{A}_1^0\mathfrak{A}_1 P_1)$, $(\mathfrak{A}_1^0\mathfrak{A}_1 P_2)$, $(\mathfrak{A}_1^0\mathfrak{A}_1 P_3)$; so befinden sich selbe mit $\mathfrak{A}_1^0$ in einer Ebene E, die von E durch $\overline{\mathfrak{A}_1^0\mathfrak{A}_1}$ und $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4)$ harmonisch getrennt wird; auch fixiren sie mit P_1, P_2, P_3 Linien $\overline{P_1P_1'}$, $\overline{P_2P_2'}$, $\overline{P_3P_3'}$ der Regelschaar a_1, a_2, a_3, a_4. Sie treffen $\overline{\mathfrak{A}_1^0\mathfrak{A}_1}$ in den Punkten N_1, N_2, N_3 und $(\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4)$ in N_1', N_2', N_3' derart, dass $(P_nP_n'N_nN_n') = -1$ ist. N_1', N_2' und N_3' sind Punkte eines Kegelschnittes C_1^2, der in $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$ die Schmiegungsebenen $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ von R^4 berührt und mit a_1, a_2, a_3, a_4 und den $\overline{P_nP_n'}$ auf einer Fläche H^2 des Büschels liegt.[1] Auf letzterer befinden sich noch drei Curven C_2^2, C_3^2, C_4^2 von der Art C_1^2; sie sind den Sekanten $\overline{\mathfrak{A}_2^0\mathfrak{A}_2}$, $\overline{\mathfrak{A}_3^0\mathfrak{A}_3}$, $\overline{\mathfrak{A}_4^0\mathfrak{A}_4}$ conjugirt:

„Den Punkten einer Geraden $\overline{\mathfrak{A}_1^0\mathfrak{A}_1}$, die einen beliebigen Punkt $\mathfrak{A}_1$ von R_4 mit seinem Tangentialpunkte verbindet, sind bezüglich R^4 die Punkte eines Kegelschnittes harmonisch conjugirt, der durch die 3 weiteren Ecken des durch $\mathfrak{A}_1$ bestimmten Systemtetraeders läuft."

Coincidirt $\mathfrak{A}_1$ mit einem der 48 singulären Punkte Q, etwa mit $\mathfrak{S}_1$, so wird $\mathfrak{A}_1^0$ zu dem zweiten, $\mathfrak{S}_1$ zu einem Paare ergänzenden Punkte $\mathfrak{S}_2$ und $\overline{P_1P_1'}$, $\overline{P_2P_2'}$, $\overline{P_3P_3'}$ zu der durch die Leitlinien $\overline{\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2}$, $\overline{\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4}$ bestimmten Regelschaar. $\overline{\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4}$ und die Tangente $\overline{\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_2'}$ repräsentiren in diesem Fall den Kegelschnitt C_1^2 und zwar ist $\overline{\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_4}$ der Ort der Punkte $N_1', N_2', N_3' \ldots$.

„Die 24 Paare von Punkten der R^4, welche in der Beziehung stehen, dass der eine der Tangentialpunkt des andern ist, legen ebenso viele Sekanten fest, welche sich in 12 Paare derart anordnen, dass den Punkten einer Sekante jene der ihr gepaarten bezüglich R^4 harmonisch conjugirt sind."

40. Dass ausser diesen 48 Punkten Q keine von derselben Eigenschaft existiren, lässt sich wie folgt nachweisen.

Wir wählen auf R^4 einen beliebigen Punkt $\mathfrak{A}_1$ und legen durch ihn und $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ die Ebene I_1. Sie schneidet R^4 ferner in $\mathfrak{A}_2$ A_1, A_2, den Ecken eines Vierecks $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2A_1A_2$, für welches $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2$

[1] Im allgemeinen sind den Punkten einer Sehne von R^4 bezüglich dieser Curve die Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung conjugirt, wie Reye beweist. (Annali di matem. S. II, t. II. pag. 132.)

und der Schnitt ρ_2 von I_1 mit $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ Diagonalpunkte bedeuten. Die Tangenten $\alpha_1, \alpha_2, a_1, a_2$ in ihnen treffen paarweise zusammen, und zwar α_1 mit a_1 in S_1 und α_2 mit a_2 in S_2, so dass $\overline{S_1 S_2}$ in $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ durch $\mathfrak{P}_2$ läuft. S_1 und S_2 sind Punkte der in $(\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4)$ befindlichen Doppelcurve $\mathfrak{D}_6^4$ der Tangentenfläche von R^4; die zugehörigen Tangenten τ_1, τ_2 schneiden $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ an derselben Stelle Ω_2 derart, dass $(\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}, \overline{\Omega_2\mathfrak{P}_2}, \tau_1, \tau_2) = -1$ ist. Ferner ist τ_1 der Durchschnitt der Schmiegungsebenen σ_1 und ε_1 von R^4 in $\mathfrak{A}_1$ und A_1, und τ_2 jener der Schmiegungsebene σ_2 und ε_2 in $\mathfrak{A}_2$ und A_2.

Erwägt man noch, dass a_1 zu α_2 und a_2 zu α_1 harmonisch bezüglich $\mathfrak{P}_2$ und $(\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4\mathfrak{P}_1)$ liegen, so erhellt, dass die Schnitte $M_1, \mathfrak{M}_2, M_2, \mathfrak{M}_1$ dieser Tangenten mit $(\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\Omega_2) \equiv I$ ein Viereck mit den Diagonalpunkten $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \Omega_2$ bestimmen. Die Gerade $\overline{M_1\Omega_2 M_2}$ hat demnach sowohl mit ε_1 als auch mit ε_2 zwei Punkte M_1, Ω_2, respective M_2, Ω_2, gemein, sie ist der Schnitt dieser Schmiegungsebenen. Ebenso gehört $\overline{\mathfrak{M}_1\Omega_2\mathfrak{M}_2}$ σ_1 und σ_2 an. Für die Treffpunkte Ω', Ω'' dieser Linien mit $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ gilt die Relation $(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \Omega', \Omega'') = -1$.

Aus Ω_2 kann man ausser τ_1, τ_2 noch 2 Tangentenpaare $\tau_1', \tau_2', \tau_1'', \tau_2''$ an $\mathfrak{D}_4^6$ und ausser $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \sigma_1, \sigma_2$ 8 Schmiegungsebenen an R^4 legen. Dass auch die Berührungspunkte der letzteren zu 4 in zwei Ebenen I_2, I_3 des Büschels mit der Axe $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ liegen, bedarf keines Beweises. Das Entsprechen zwischen I und I_1, I_2, I_3 ist folglich 1—3deutig. Die Ebenen I_1, I_2, I_3 ordnen sich in Tripel einer cubischen Involution, welche $(\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_3})$ und $(\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2\mathfrak{P}_4})$ zu 3fachen Elementen hat und projectiv zu dem coaxialen Büschel $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}(I)$ ist. Es geschieht sonach $1+3 = 4$mal, dass eine I mit einer I_1 coincidirt. Da gleichzeitig $\overline{M_1 M_2}$ mit $\overline{A_1 A_2}$ und $\overline{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}$ mit $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2}$ zusammenfällt, so gibt es 8 Transversalen des Kantenpaares $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$, $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$, von denen jede die R^4 in 2 Punkten trifft, deren Schmiegungsebenen sich in ihr durchschneiden. Von ebenso vielen singulären Sekanten wird jedes der 2 weiteren Kantenpaare von $(\mathfrak{P})$ getroffen: ihre Gesammtzahl ist also in der That $3.8 = 24$. etc.

41. Da durch Ω_2 3 Linienpaare $(\overline{M_1 M_2}, \overline{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2})$ laufen und $\overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ mit $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ vertauscht werden kann, so ist die Verwandtschaft zwischen den quadratischen Involutionen $(\Omega_2\Omega_2')$ und (Ω', Ω'') eine

3—3 deutige und ihr Erzeugniss eine Involutionsfläche von der $2(3+3) = 12$. Ordnung J_{12}^{1}.

„Das Axensystem der Tangentenfläche von R^4 hat mit der durch 2 Gegenkanten des Poltetraeders bestimmten Liniencongruenz eine Involutionsfläche 12. Ordnung gemein."

Sie besitzt 6fache Linien in $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}, \overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ und 8 dreifache Erzeugende. Jede der letzteren ist der Schnitt zweier aus einer Ecke von $(\mathfrak{P})$ ausgehenden Wendeebenen der R^4. Ferner liegen auf ihr jene 8 singulären Sekanten, welche $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}, \overline{\mathfrak{P}_3\mathfrak{P}_4}$ schneiden; sie kommen ihr und der Harnack'schen Fläche Φ_1^4 gemeinschaftlich zu.

Die Schmiegungsebenen σ_1, σ_2, welche sich in der Erzeugenden $\overline{\mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2}$ von J_{12} durchschneiden, berühren R^4 in 2 Ecken $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ eines System-Tetraeders $(\mathfrak{A})$; „man kann folglich die Gemeinschaft der 3 Involutionsflächen J_{12} definiren als geometrischen Ort der Kanten eines Tetraeders $(\mathfrak{U})$, dessen Seitenflächen die Curve R^4 in den Ecken eines Systemtetraeders osculiren. Die Ecken des Tetraeders beschreiben eine tetraedral-symmetrische Curve E_{36} von der 36. Ordnung mit 4 neunfachen Punkten in jeder Seitenfläche des Poltetraders. Diese liegt auf allen drei J_{12} und schneidet R^4 in den 24 singulären Punktepaaren."

Das über die E_{36} Gesagte erhellt aus ihrem Zusammenhange mit der umschriebenen Developpablen von R^4; sie entspricht ihr in der cubischen Correlation, welche wir im 35. Art. besprachen, da offenbar auch $(\mathfrak{U})$ zu $(\mathfrak{P})$ 4fach perspectivisch liegt.

42. Noch wäre zu erwähnen, dass aus einem jener 8 Punkte von $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$, in welchem sich zwei singuläre Sekanten treffen, die Raumcurve R^4 auf eine jede Ebene als Curve C_8^3 mit 2 Doppelinflexionspunkten Δ_1, Δ_2 und einem System harmonischer Pole, einem Polardreieck, projicirt wird. Letzteres wird von Δ_1, Δ_2 und dem Schnitt mit $\overline{\mathfrak{P}_1\mathfrak{P}_2}$ formirt. Centren von dieser Bedeutung gibt es für jede R^4 im ganzen $6.8 = 48$.

VI.

42. Aus Art. 3 erhellt, dass 2 Tetraeder, welche zu demselben dritten Tetraeder vierfach perspectivische Lage haben, zu einander vierfach hyperboloidisch liegen. Wir wollen zeigen, dass auch die Umkehrung dieses Theorems gilt:

„Es existirt stets ein Tetraeder, dass zu 2 vierfach hyperboloidisch liegenden Tetraedern, deren Ecken nicht associrt sind, gleichzeitig eine vierfach perspectivische Lage einnimmt."

a) Sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2$ die Ecken eines einer Raumcurve R^4 eingeschriebenen Vierecks und $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}, \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2}$ Leitlinien r_1, r_2 einer Fläche h_1^2 des Büschels, $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2}, \overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1}$ solche s_1, s_2 einer zweiten Fläche h_2^2; so sind $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ Ecken eines und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ eines zweiten Systemtetraeders der Curve. Um dies zu beweisen, projicire man $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ mittelst 2 Leitlinien e und e' und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ vermittels 2 Erzeugenden $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$ einer Fläche h_2 (des Büschels) derart,[1] dass von den Ecken $\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2', \mathfrak{B}_1', \mathfrak{B}_2'$ des neuen Vierecks — in dem $\overline{\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_1'}, \overline{\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_2'}$ offenbar Erzeugende $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ von h_1^2, $\overline{\mathfrak{A}_1'\mathfrak{B}_2'}, \overline{\mathfrak{A}_2'\mathfrak{B}_1'}$ solche $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ von h_2^2 sind — $\mathfrak{A}_1'$ mit $\mathfrak{B}_1'$ coincidirt, also $\mathfrak{r}_1$ zur Tangente wird, so fällt nothwendig auch $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ zusammen und $\mathfrak{r}_2$ wird zur Tangente in $\mathfrak{A}_2'$. $\mathfrak{A}_1', \mathfrak{A}_2'$ sind als Berührungspunkte zweier Tangenten $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ einer Schaar Ecken eines Systemtetraeders und daher (Art. 3) auch $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$, weil $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_1'} \equiv e$ und $\overline{\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_2'} \equiv e'$ ist.

b) Sind nun $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \mathfrak{A}_4$ und $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{B}_3, \mathfrak{B}_4$ die Ecken der 2 Tetraeder, welche so liegen, dass $(\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1}\ldots)$ eine Regelschaar (e_1), $(\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2}, \ldots)$ eine zweite (e_2), $(\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_3}, \ldots)$ eine dritte (e_3) und $(\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_4}, \ldots)$ eine vierte (e_4) bilden; so durchschneiden sich erstens, da $(\mathfrak{A})$ $(\mathfrak{B})$ keine Gruppe associrter Punkte ist, die 4 Flächen h^2, auf welche sich die 4 (e) vertheilen, in einer R^4, — zweitens: formiren auf ihr $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2$ ein Viereck der sub *a)* behandelten Art. Es sind folglich $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ Ecken eines System-Tetraeders der R^4. Weitere Ecken desselben sind $\mathfrak{A}_3$ und $\mathfrak{A}_4$; weil $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3$ und

[1] Cf. Art. 13.

$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_4\mathfrak{B}_4$ Vierecke von derselben Art wie das erste sind, für sie also auch das sub *a)* Gesagte Geltung hat.

$\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_2\mathfrak{B}_3\mathfrak{B}_4$ (s. Art. 3) stellen also in der That Systemtetraeder von R^4 vor; zu beiden liegt folglich das Poltetraeder dieser Curve 4fach perspectiv.

Bemerkenswerth sind noch die folgenden Relationen:

„Die 12 Ecken 3 Tetraeder, welche zu einem vierten perspectiv liegen, befinden sich mit den 12 Centra der Perspectivität auf einer Fläche zweiter Ordnung.

„Sind $(\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{C})$ drei Tetraeder, von denen je 2 vierfach hyperboloidisch sind, so haben auch je 2 der 3 Tetraeder (a), (b), (c), von denen (a) zu $(\mathfrak{B})$ und $(\mathfrak{C})$, (b) zu $(\mathfrak{C})$ und $(\mathfrak{A})$, (c) zu $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{B})$ vierfach perspectiv liegen, zu einander vierfach hyperboloidische Lage."

„Unter den ∞^3 Poltetraedern einer Fläche zweiter Ordnung gibt es im allgemeinen nur eines, das zu einem ihr willkürlich eingeschriebenen Tetraeder $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ vierfach perspectivische Lage hat."

Das erste und zweite Theorem bedürfen keines besonderen Beweises; für das dritte genügt die Bemerkung, dass die Flächen (h^2), welche in $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ die durch diese Punkte laufenden Erzeugenden a_1, a_2, a_3, a_4 der ersten Schaar der gegebenen Fläche H_2 berühren, ein Büschel bilden, dem auch H^2 angehört, und folglich H^2 in einer Curve R^4 schneiden, für welche a_1, a_2, a_3, a_4 Tangenten sind und also $\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\mathfrak{A}_4$ ein System-Tetraeder ist. Zu letzterem liegt das Poltetraeder von R^4 vierfach perspectivisch. Zu demselben Tetraeder $(\mathfrak{P})$ führt die zweite Schaar.

Axenbestimmung der Contouren von Flächen zweiter Ordnung.

Von **Heinrich Drasch** in Steyr.

(Mit 1 Tafel.)

(Vorgelegt in der Sitzung am 12. April 1883.)

Die Contourbestimmung der Flächen zweiter Ordnung ist ein Problem, welches mit Rücksicht auf die fundamentale Wichtigkeit dieser Flächengattung den construirenden Geometer schon vielfach beschäftigt hat und desshalb auch Veranlassung war, gerade die projectivischen Eigenschaften dieser Flächen weiter zu untersuchen, um sie für die constructive Behandlung derselben verwerthen zu können; in Würdigung der grossen Dienste, welche die neuere Geometrie der darstellenden Geometrie auf allen Gebieten schon erwiesen hat, erscheint demnach der Versuch vielleicht nicht ungerechtfertigt, auf einige neugeometrische Beziehungen aufmerksam zu machen, durch welche sich dieses Problem in allen Projectionsarten gleich gut durchführen lässt.

Es sei uns gestattet, die sich speciell mit diesem Problem beschäftigenden Abhandlungen in kurzen Worten zu berühren.

Prof. Niemtschik hat ohne Zuhilfenahme projectivischer Beziehungen in einer Abhandlung[1] dieses Problem an Rotationsflächen zweiter Ordnung durchgeführt, wobei jedoch zu bemerken ist, dass hier zuerst der Berührungskegelschnitt selbst gesucht und durch die dabei nothwendig gewordenen häufigen Umlegungen die Construction complicirt wird. Prof. Pelz beschäftigte sich, und zwar gestützt auf projectivische Beziehungen, in mehreren

[1] 52. Bd. d. kais. Akd. d. Wissenschaften.

Abhandlungen[1 2 3] eingehender mit dieser Aufgabe; in der ersten Abhandlung werden die Centralprojectionen der Rotationsflächen zweiter Ordnung behandelt und bezüglich der allgemeinen Flächen zweiter Ordnung Andeutungen gemacht, nach welchen sich dieser Fall durch Construction eines Diametralschnittes mit der Bildebene auf den eben betrachteten zurückführen lässt; in der zweiten Abhandlung werden die Brennpunkte der Contour gesucht mit Hilfe des Satzes, dass der Contourkegelschnitt mit der Projection zweier gewisser Kegelschnitte confocal ist, und wird dieser Satz nur für Parallelprojectionen der Flächen zweiter Ordnung ausgebeutet; um dieses Constructionsverfahren aber für Centralprojectionen einer beliebigen Fläche zweiter Ordnung anzuwenden, müsste man vorerst die Brennpunkte eines mit der Bildebene parallelen Schnittes sowie die Endpunkte des der Bildebene conjugirten Durchmessers auf die Bildebene projiciren und die Brennpunkte des dadurch bestimmten Kegelschnittes ermitteln, welche dann zugleich die Brennpunkte der Contour wären; ein anderes Verfahren, welches jedoch nur dann anzuwenden wäre, wenn die Fläche durch drei conjugirte Durchmesser gegeben ist, bestünde darin, von der Contour zwei Tangenten sammt den Berührungspunkten und noch ein Bestimmungsstück aufzusuchen, aus welchen Daten sich dann die Axen und Brennpunkte der Contour bestimmen liessen. Constructiv wirklich durchgeführt wurde dieses Problem für die Centralprojectionen der allgemeinen Flächen zweiter Ordnung in keiner der erwähnten Abhandlungen.

Die Idee, welche unseren Ausführungen zu Grunde liegt, besteht nun darin, die Fläche als Kernfläche eines räumlichen Polarsystemes aufzufassen; dem Projectionscentrum S gehört dann in dem Polarsysteme ein Polarbündel an, dessen Kernkegel der Fläche umschrieben ist; der Schnitt dieses Kernkegels mit der Bildebene liefert die Contour; wir bestimmen demnach den

---

[1] 66. Bd. d. k. Ak. d. W.

[2] 75. Bd. d. k. Ak. d. W. Über eine allg. Best. d. Brennpkt. v. Contouren d. Fl. II. O.

[3] 77. Bd. d. k. Ak. d. W. Ergänzungen z. allg. Bestm. d. Brennpkt. v. Contouren der Fl. II. O.

Contourkegelschnitt in der Bildebene auch als Kernkegelschnitt eines ebenen Polarsystemes, welches mit dem Polarbündel S perspectivisch liegt, wornach unsere Hauptaufgabe darin besteht, den Polarbündel S durch die Bestimmungsstücke des räumlichen Polarsystemes festzulegen.

Bevor wir jedoch dieses Verfahren an einem Beispiele wirklich zur Anwendung bringen, sei uns nur gestattet, den Zusammenhang dieser Constructionsmethode mit der Natur dieses Problemes einigermassen zu beleuchten, wodurch es uns auch möglich wird, die meisten in den erwähnten Abhandlungen angeführten, hauptsächlich durch Massbeziehungen gewonnenen Resultate, als blosse Specialfälle einer einzigen grundlegenden Betrachtung erscheinen zu lassen.

Es sind nämlich die Eigenschaften des einem Kegelschnitt umschriebenen Vierseites, durch welche nicht allein alle auf Axen und Brennpunkte eines Kegelschnittes Bezug habende Betrachtungen verallgemeinert werden können, sondern welche auch hinreichen, durch ihre Erweiterung auf den Raum alle auf unsere Aufgabe Bezug habenden Relationen gewinnen zu können.

Wir betrachten Fig. 1 den Kegelschnitt K, welchem von den Punkten p und q das Vierseit umschrieben ist, dessen andere vier Gegenecken die Punkte 1, 2, 3, 4 sind. Die Construction dieses Vierseites ist für den Fall reeller Punkte p und q ohne weiters auszuführen durch das Ziehen der Tangentenpaare aus p und q; sind aber p und q imaginär, so lassen sich die Ecken 1, 2, 3, 4 nicht mehr durch Tangentenziehen finden, sondern es muss ein anderer Gesichtspunkt angenommen werden, aus welchem das Tangentenziehen umgangen werden kann und welcher von der Realität der Punkte p und q unabhängig ist.

Es kommt nun den Punkten 1, 2, 3, 4 eine Eigenschaft zu, welche augenscheinlich von der Realität der Punkte p und q unabhängig ist und darin besteht, dass sie diejenigen vier Punkte sind, deren dem Kegelschnitte K zugehörigen Involutionen mit einer Punktinvolution perspectivisch liegen, deren Doppelpunkte p und q sind. Wir brauchen demnach die Doppelpunkte p und q

gar nicht, wenn nur diese Involution (i) durch irgend zwei Punktpaare gegeben ist.

Um nun die Punkte 1, 2, 3, 4 zu finden, suchen wir dasjenige Punktpaar r, s auf, welches der Involution (i) und der dem Kegelschnitte K zugehörigen Involution auf dem Träger g gemeinsam ist, und zeichnen das Diagonaldreieck rst, wenn t der Pol von g ist; setzen wir nun auf dem Strahle rt einen Punkt x in Bewegung, welchen wir mit zwei Punkten der Involution (i), z. B. mit m und m_1 ∞ verbunden denken, so wird es zweimal vorkommen, dass die Verbindungsstrahlen in Bezug auf K conjugiert werden; denn suchen wir zu jedem Strahle xn den Pol a, so bilden die Punktpaare aa_1 (a_1 Schnittpunkt von xm und tt_1), wie leicht einzusehen, eine involutorische Punktreihe, deren Doppelpunkte aus m nach rt projicirt, dort die gesuchten zwei Punkte 1 und 2 geben; dasselbe gilt für den Strahl st; die Punkte 1, 2, 3, 4 sind demnach ohne Tangentenziehen gefunden. Die nämliche Construction wurde in Fig. 2 durchgeführt für den Fall, als die Punkte p und q imaginär sind; sie werden vertreten durch die elliptische Involution $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$ auf dem Träger g; r und s ist wieder das der Involution $\alpha\alpha_1$ $\beta\beta_1$ und der dem Kegelschnitte K gehörigen Involution auf g gemeinsame Punktpaar, somit rst das Polardreieck; die Involution aa_1 auf der Geraden tt_1 bestimmen wir am einfachsten durch das Punktpaar tt_1 und uv, wenn nämlich x auf rt im unendlichen liegt und demnach mv parallel zu rt gezogen wurde; die Doppelpunkte 1′, 2′, dieser Involution, welche tt_1 und uv gleichzeitig harmonisch trennen, werden aus m in die Gerade rt projicirt und liefern dort die gesuchten zwei Punkte 1 und 2 von der Eigenschaft, dass ihre dem Kegelschnitt K gehörigen Involutionen mit der Involution $\alpha\alpha_1\beta\beta_1$ perspectivisch liegen, denn die Strahlenpaare $1m$, $1m_1\infty$ und $1r$, $1s$ sind conjugiert in Bezug auf K und gehen durch zwei Punktpaare der Involution $\alpha\alpha_1\beta\beta_1$. Man sieht hier auch, dass die übrigen zwei Gegenecken 3, 4, auf st imaginär werden müssen, weil die Punkte tt_1 und uv_1 eine elliptische Involution bestimmen; v_1 ist der Schnittpunkt von tt_1 mit der Parallelen aus m zu st.

Es ist klar, dass diese Construction, welche man auch die Construction eines imaginären Vierseites nennen könnte, eine Verallgemeinerung der Brennpunktsconstruction ist, wenn wir die

Brennpunkte definiren als Punkte, deren Involutionen perspectivisch liegen mit einer Involution auf der unendlich fernen Geraden, welche jedem in der Ebene liegenden Kreise angehörig ist; g rückt ins Unendliche, t wird der Mittelpunkt des Kegelschnittes, tr und ts die Axen, 1 und 2 die reellen Brennpunkte.

Denken wir uns nun in Fig. 1 und Fig. 2 den Kegelschnitt K als Querschnitt einer Fläche zweiter Ordnung z. B. eines Ellipsoides, drehen ferner um die Gerade g eine Ebene und führen in jeder dieser Ebenen bezüglich des aus der Fläche herausgeschnittenen Kegelschnittes die angegebene Construction durch, so besteht der Ort der Punkte 1, 2 und 3, 4 aus zwei die Fläche doppelt berührenden Kegelschnitten; für den Fall der Fig. 1 ergibt sich der Beweis des gesagten einfach daraus, weil zwei der Fläche aus den Punkten p und q umschriebene Kegel sich in zwei Kegelschnitten durchdringen; für den Fall imaginärer Punkte p und q, für welchen die Existenz dieser beiden Kegelschnitte nach unserer Ansicht rein synthetisch nicht ohne weiters als erwiesen betrachtet werden kann, diene folgende Betrachtung, welche uns sowohl über das Vorhandensein dieser Kegelschnitte als auch über die Lage ihrer Ebenen genauen Aufschluss gibt. Zuvörderst ergibt sich, dass $1', 2'$ Fig. 2 bei der Drehung der Ebene um g einen Kegelschnitt erfüllen; denn bei dieser Drehung bleibt t_1 fix, t durchläuft die Polgerade von g und v eine mit dieser parallele Gerade, während u als Sehnenmittelpunkt einen Kegelschnitt beschreibt; denken wir uns durch uv eine Ebene senkrecht zur Zeichnungsebene gelegt, so erhalten wir in Fig. 3, wenn wir diese Ebene in die Papierebene umgelegt denken, folgende Ergebnisse: g erscheint als Punkt g, T ist die Polgerade von g und V die Gerade, welche alle Punkte v enthält; k ist der Kegelschnitt als geometrischer Ort aller Sehnenmittelpunkte u; sind nun $1'$ und $2'$ Punkte, welche sowohl tt_1 als auch u und v harmonisch trennen, so hat der durch $1'\,2'\,\alpha\beta$ gehende, die Geraden αg und βg berührende Kegelschnitt K_1 die Eigenschaft, dass er von einer beliebigen durch g gehenden Geraden l in zwei Punkten I′ und II′ so geschnitten wird, dass diese die Punkte $t't_1$ und $u'v'$ harmonisch trennen; t', u', v' liegen beziehungsweise in T, k und V.

Diese Gerade l kann nun als Spur einer durch die Gerade g gehenden Ebene betrachtet werden und der geometrische Ort der Punkte 1′, 2′, I′ II′ u. s. w. ist demnach der Kegelschnitt K_1, welcher die gegebene Fläche zweiter Ordnung in α und β doppelt berührt.

Sobald diese um g bewegliche Ebene in die Lage l_1 kommt, in welcher sie die Fläche nicht mehr reell schneidet, trennen sich die die Involution bestimmenden Punktepaare $t_1 t''$ und $u''v''$, weshalb diese Involution elliptisch und ihre Doppelpunkte imaginär werden.

Genau das entgegengesetzte tritt ein, sobald in Fig. 2 die Punkte 3, 4 auf dem Strahle st in Betracht kommen, welche jetzt imaginär sind; sie sind die Projectionen der imaginären Doppelpunkte 3′, 4′, einer Involution auf der Geraden uv, welche durch die Punktpaare $t_1 t$ und $u v_1$ bestimmt ist, wenn mv_1 parallel mit st ist.

Sobald aber die um g bewegliche Ebene die Fläche zweiter Ordnung nicht mehr reell schneidet, werden die Punkte u und v_1 durch t und t_1 nicht mehr getrennt, die Involution ist hyperbolisch und die Doppelpunkte 3′, 4′ sind reell. Der Kegelschnitt aller Punkte 1, 2, ist nun die Projection des Kegelschnittes aller Punkte 1′, 2′, aus m auf die Ebene rt, der Kegelschnitt aller Punkte 3, 4, ist die Projection des Kegelschnittes aller Punkte 3′, 4′ aus m auf die Ebene st; der eine liegt innerhalb, der andere ausserhalb der gegebenen Fläche zweiter Ordnung, welche sie doppelt berühren.

Wäre die Fläche zweiter Ordnung z. B. ein Hyperboloid, so würde der Sehnenmittelpunkts-Kegelschnitt die Fläche nicht mehr schneiden, die Punkte u und v würden nie durch t und t_1 getrennt, die Punkte u und v_1 immer durch t und t_1 getrennt sein; der Kegelschnitt in der Ebene rt wäre reell, der in der Ebene st imaginär.

Die Discussion für die übrigen Flächengattungen können wir füglich unterlassen und folgendes Resultat aussprechen:

Ist eine Fläche zweiter Ordnung und eine Gerade g gegeben, und dreht man um g eine Ebene, bestimmt in jeder derselben diejenigen Punkte deren Involutionen bezüglich des Schnittkegelschnit-

tes mit einer auf g liegenden Involution (i) perspectivisch liegen, so erfüllen die so gefundenen Punktpaare zwei Kegelschnitte, welche die Fläche doppelt berühren; ihre Ebenen gehen durch die Polgerade von g und durch dasjenige Punktpaar auf g, welches der Involution (i) und der der Fläche gehörigen Involution auf g gemeinsam ist.

Daraus folgt als Specialfall, wenn g im Unendlichen liegt und die auf ihr liegende Involution (i) die imaginären Kreispunkte zu Doppelpunkten hat, sofort der folgende:

Wenn man eine Fläche zweiter Ordnung mit zur Bildebene parallelen Ebenen schneidet, so liegen die Brennpunkte der Schnittcurven auf zwei Kegelschnitten, deren Projectionen auf die Bildebene mit dem Contourkegelschnitt confocal sind.

Der letzte Theil des Satzes wird klar, wenn man bedenkt, dass eine der Fläche angehörige Ebeneninvolution, welche mit der auf g befindlichen Punktinvolution (i) perspectivisch liegt, auch den zwei Brennpunktskegelschnitten angehören muss, und die einer Fläche zweiter Ordnung angehörige Ebeneninvolution auch jedem Polarbündel angehören muss, dessen Centrum S auf dem Träger der Ebeneninvolution liegt. Da es weiters durch den Punkt S mindestens zwei reelle Gerade gibt, deren der Fläche zugehörige Ebeneninvolutionen mit der Punktinvolution (i) auf g perspectivisch liegen, so liefern die Durchstosspunkte dieser Geraden mit der Bildebene, verbunden mit den Bildprojectionen der Punktpaare der Involution (i) auf g, zwei Strahleninvolutionen, welche sowohl den Bildprojectionen der Brennpunktskegelschnitte als auch dem Contourkegelschnitt angehören, wesshalb diese drei Kegelschnitte einer Schaar angehören.

Aus dem soeben Gesagten folgen auch unmittelbar zwei Sätze für die Rotationsflächen zweiter Ordnung, und zwar:

Wenn die Rotationsaxe die reellen Brennpunkte des Meridians enthält, so sind die orthogonalen Projectionen dieser Brennpunkte zugleich Brennpunkte der Contour.

Ferner:

Rotirt der Meridian um diejenige Axe, welche nicht die reellen Brennpunkte enthält, so ist die orthogonale Projection des Brennpunktenkreises der Meridiane mit der Contour confocal.

Gestützt auf diese Ausführungen ergibt sich nun folgender Constructionsvorgang:

Durch das Projectionscentrum S lege man eine Ebene parallel zur Bildebene und mache sie zum Träger einer circularen Strahleninvolution mit dem Centrum S; aus den imaginären Doppelstrahlen umschreibe man der Fläche ein imaginäres Vierflach, dann liefert der reelle Diagonaldreikant im Schnitte mit der Bildebene die Axen der Contour; die Construction vollführt sich am einfachsten gleich in der Bildebene selbst.

Wir erlauben uns nun, unseren angedeuteten Gesichtspunkt an einem practisch häufig vorkommenden Falle zur Anwendung zu bringen; es seien nämlich Fig. 4 ab, cd, ef, welche Strecken sich in O schneiden, die Centralprojectionen dreier conjugirter Diameter; es sei die Contour zu bestimmen. Wir denken uns den Punkt O mit dem übrigens beliebigen Projectionscentrum S verbunden und bestimmen die diesem Strahle bezüglich der Fläche angehörige Ebeneninvolution. Denken wir uns nun durch Sab eine Ebene P_1 gelegt und ihren Pol bestimmt, so muss die Bildprojection desselben in der Fluchtlinie der Ebene Oce liegen, welche die Verbindungslinie der Punkte I und II. ist, wenn I und II von O durch c und d respective e und f harmonisch getrennt sind. Diese Polprojection muss aber auch in dem Strahle p_1 liegen, welcher in der durch Oc und Oe bestimmten Involution dem Strahle P_1 conjugirt ist. Ein Strahlenpaar dieser Involution ist Oc und Oe, ein zweites finden wir, wenn wir IIc ziehen und diese Gerade mit den Geraden Ie und If in den Punkten 1 und 2 schneiden; $O1$ und $O2$ sind ein zweites Strahlenpaar dieser Involution; daraus bestimmt sich im Constructionskreise K das Involutionscentrum m und mit Hilfe dessen der Strahl p_1, welcher die Fluchtlinie I II in der gesuchten Polprojection bezüglich der Ebene P_1, d. i. in p schneidet. Genau auf dieselbe Art erhalten wir die Polprojection bezüglich der Ebene $Sef = Q_1$, welche erstens in der Fluchtlinie I III der Ebene Obc und zweitens im

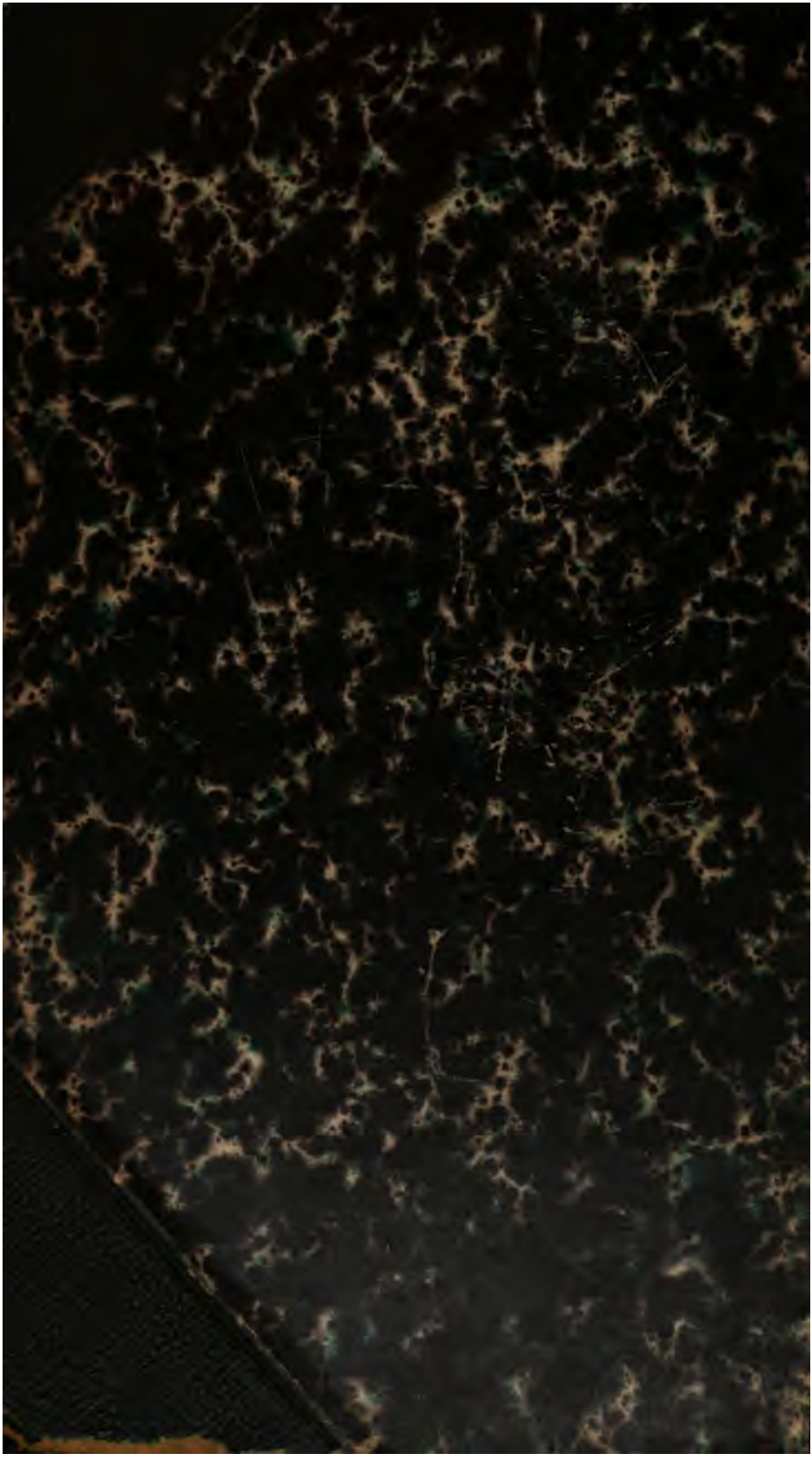
Strahle q_1 liegen muss, welcher dem Strahle Q_1 in der durch Ob und Oc bestimmten Involution conjugirt ist; III ist von O durch a und b harmonisch getrennt, n ist das Involutionscentrum der durch Ob und Oc bestimmten Involution; der Schnittpunkt q von q_1 und I III ist die Polprojection bezüglich der Ebene Q_1, somit pr die Polare von O und pOr ein Polardreieck bezüglich des Contourkegelschnittes.

Den Mittelpunkt M gewinnen wir durch folgende Betrachtung; die Strahleninvolutionen der Punkte a_0 und b_0 auf der Oberfläche im Raume liegen mit der Punktinvolution auf der Polgeraden von $a_0 b_0$, das ist mit der unendlich fernen Geraden der Ebene Oce perspectivisch; die Bildprojectionen dieser Strahleninvolutionen liegen demnach mit der Punktinvolution auf der Fluchtlinie I II der Ebene Oce auch perspectivisch, und da diese zwei Strahleninvolutionen auch dem Contourkegelschnitt angehören, so muss die Gerade I II eine Diagonale des imaginären Vierseites sein, welches von den Punkten a und b der Contour umschrieben ist; eine zweite Diagonale ist aber ab selbst. Die Mittelpunkte aller Kegelschnitte, welche diesem imaginären Vierseit eingeschrieben sind, liegen demnach auf der Verbindungslinie des Halbierungspunktes der Strecke ab und des Mittelpunktes der Involution auf I II, wenn wir nämlich den Satz für das reelle Vierseit in der Weise auch auf das imaginäre erweitern, dass wir statt Mittelpunkte von Strecken Mittelpunkte der betreffenden Involutionen sagen; m_1 und n_1 sind die Mittelpunkte der Involutionen auf I II und pr, welche mit Hilfe des Kreises K gefunden worden; ist h der Mittelpunkt der Strecke ab, so schneiden sich $m_1 h$ und $n_1 O$ im Mittelpunkte M des Contourkegelschnittes. Selbstverständlich muss die Verbindungslinie des Mittelpunktes s_1 der Involution auf I III mit dem Mittelpunkte i der Strecke ef auch durch M gehen. Die Bestimmung der Richtung und Längen der Axen AB und CD wurde mit Hilfe des Polardreieckes und des Mittelpunktes in bekannter Weise ausgeführt.

Es muss noch erwähnt werden, dass man die Strecken Ob, Od, Of auch als Centralprojectionen dreier conjugirter Sehnen anstatt dreier conjugirter Diameter betrachten könnte; die constructive Durchführung wäre genau dieselbe wie früher das

Vierseit O I II III ist in beiden Fällen die Centralprojection eines Poltetraeders, so dass man den allgemeinsten Fall der Contourbestimmung hiemit gelöst hat, nämlich: Aus der Centralprojection eines Poltetraeders und den Punktinvolutionen auf den Gegenkanten die Axen der Contour abzuleiten.

Sollten Ob, Od, Of die Centralprojectionen der Axen sein, so wäre das Projectionscentrum im Raume bestimmt und wohl ohneweiters leicht zu ermitteln. Die Modificationen für den Fall der Parallelprojection brauchen wohl nicht weiter erwähnt zu werden.

Steyr, im März 1883.

APR 16 1887.